Colección Compendios Académicos

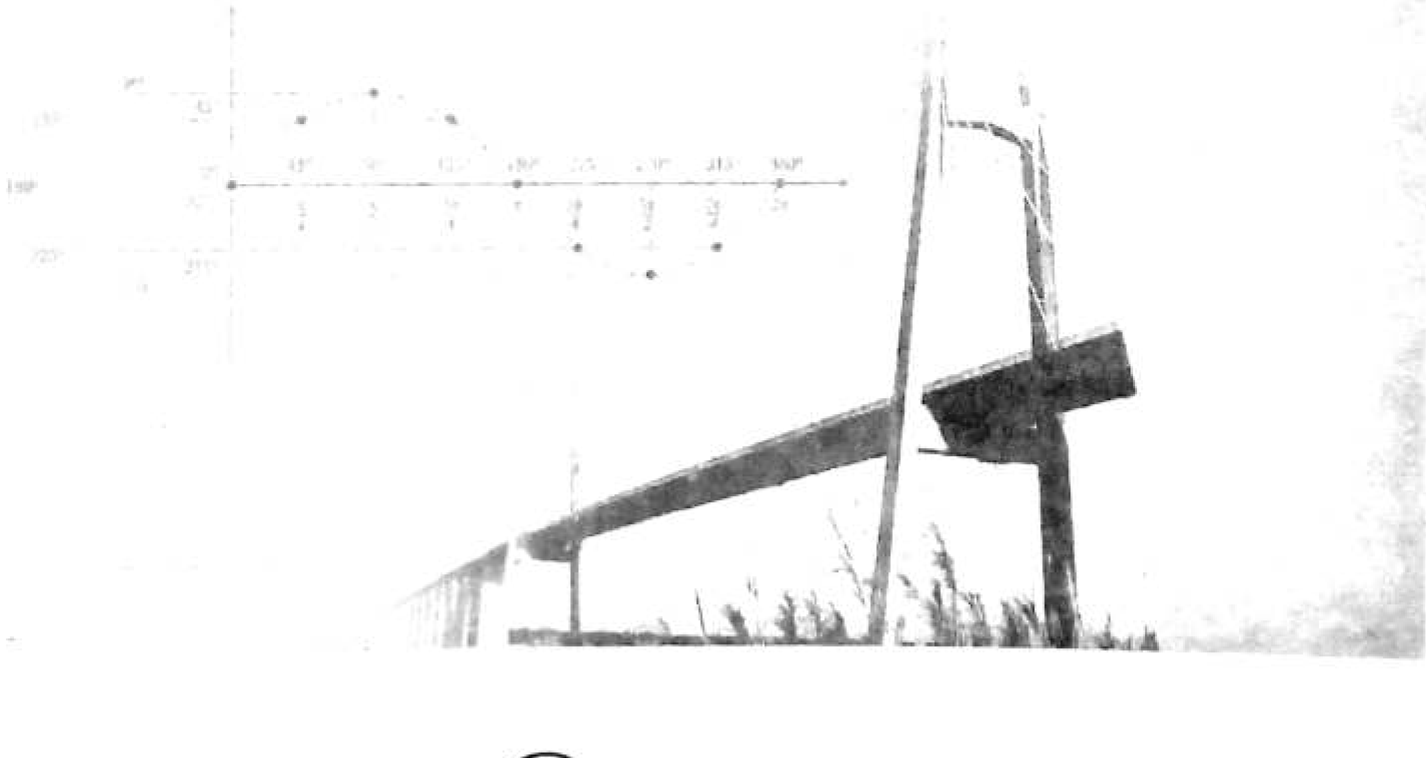
Geometría Trigonometría

Luis Reyes Perez
William Reyes Perez
Javier Revatta Romero
Alder Casio Romero

Lumbreras Editores

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Geometría Trigonometría



Lumbreras Editores

Índice

GEOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA

Presentación

La realidad de la educación en el Perú es hoy algo preocupante. Los distintos esfuerzos provenientes del Gobierno no se ven reflejados en avances significativos en este aspecto. Las políticas educativas nos muestran resultados negativos desde hace ya muchos años, y es poco lo que los estudios y las propuestas han logrado mejorar en las condiciones del sistema educativo; peor aún, permiten las desigualdades a nivel socioeconómico en las zonas rurales más alejadas del país; es decir, los estudiantes reciben una educación de baja calidad y en condiciones precarias.

En este contexto, los esfuerzos por aportar al desarrollo de la cultura y la educación en el país serán siempre valorados. Es así que, conscientes de esta realidad, la Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, tiene como uno de sus objetivos contribuir al desarrollo de la educación; ello se cristaliza a través del aporte de los profesores del Instituto de Ciencias y Humanidades, quienes han sistematizado los materiales de manera didáctica gracias a su amplia experiencia docente que garantizan un contenido de calidad y, sobre todo, siempre accesible a los sectores populares, sumado a la presencia de nuestro sello editorial en distintos puntos del territorio nacional.

En esta ocasión presentamos el libro *Geometría y Trigonometría*, perteneciente a la Colección Compendios Académicos, publicación dirigida al estudiante preuniversitario, que constituye una herramienta útil para reforzar sus conocimientos gracias al trabajo teórico-práctico así como los problemas resueltos y propuestos mostrados por niveles, que permiten una mejor comprensión del tema. Este libro se constituye en material de consulta no solo para alumnos sino también para docentes, tanto de los últimos años del nivel escolar como preuniversitario.

Finalmente, nuestra institución reafirma su compromiso con la educación y la cultura del país, contribuyendo en la elaboración de libros de calidad, además de promover el trabajo de investigación, que nos permite acceder a una educación científica y humanista; todo ello siempre al servicio de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

GEOMETRÍA

Luis Reyes Perez / William Reyes Perez

Segmentos y ángulos

Capítulo I

OBJETIVOS

- Conocer la definición y los elementos de los segmentos y ángulos.
- Utilizar las características de los diferentes tipos de ángulos en el cálculo de las medidas angulares.
- Aplicar las teorías de proporciones de magnitudes en el cálculo de las longitudes de los segmentos, así como también en el cálculo de las medidas angulares.

Geometría

Es una rama de la matemática cuyo objetivo es el estudio de las figuras geométricas. La geometría ha sido utilizada empíricamente en todas las culturas antiguas, pero fueron los griegos los que la sistematizaron. Actualmente se sabe que en nuestro país, en la ciudad sagrada de Caral, se tenían ciertos conocimientos de la geometría.

ETIMOLOGÍA

La palabra geometría, que tiene origen en dos vocablos griegos (*geo*, que significa 'tierra', y *metron*, que significa 'medida'), se entiende como "medida de la tierra".

FIGURA GEOMÉTRICA

Es un conjunto de puntos que adoptan una característica (forma determinada).

Algunas figuras geométricas notables son

PARTES DE LA GEOMETRÍA

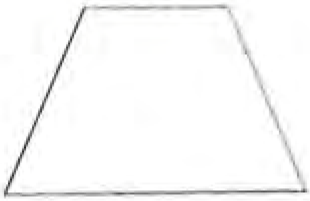
La geometría para un mejor estudio se divide en tres partes: las dos primeras están relacionadas con la geometría clásica y la tercera tiene su origen en la matemática moderna.

Geometría plana (planimetría)

Estudia las figuras geométricas cuyos puntos que las conforman pertenecen a un mismo plano.

Algunos ejemplos de figuras planas son:


Ángulo


Trapecio

Geometría del espacio (estereometría)

Estudia las figuras geométricas cuyos puntos que las conforman pertenecen a planos distintos.

Algunos ejemplos de figuras espaciales son:


Prisma


Cono

Geometría analítica

Se le llama así porque relaciona el álgebra con la geometría de tal manera que las figuras geométricas se representan a través de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Algunas representaciones analíticas de figuras notables son:


La recta

Representación analítica:

$Ax+By+C=0$

La circunferencia

Representación analítica:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA

Para poder construir y estudiar las figuras geométricas debemos conocer las características y propiedades de los elementos que las constituyen.

Estos elementos no tienen definición, solamente tenemos una idea. Dichos elementos son el punto, la recta y el plano.

Punto

$.A$

Notación: $.A$

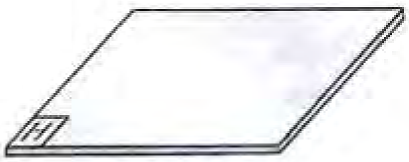
Se lee "punto A".

Recta

Notación: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Se lee "recta $\mathscr{L}$".

Plano

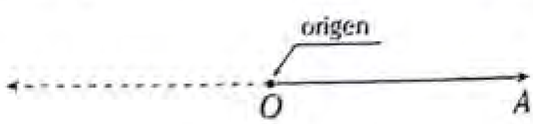


Notación: ▱ H

Se lee "plano H".

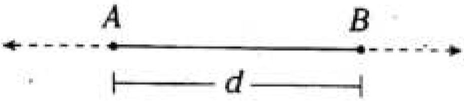
Rayo

Es aquella parte de una recta determinada al ubicar un punto en ella y que es el origen.



Segmento

Es una parte de la recta limitada por dos puntos, denominados extremos.



Donde A y B son los extremos del segmento AB.

Notación: $\overline{AB}$

Se lee "segmento de extremos A y B".

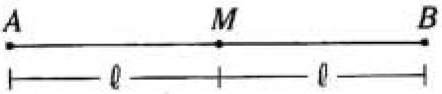
Notación: AB

Se lee "longitud del segmento AB".

En el gráfico, $AB=d$

Punto medio de un segmento

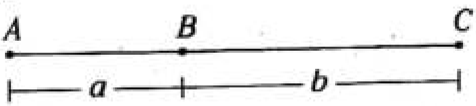
Es aquel punto de un segmento que determina dos segmentos de igual longitud.



En el gráfico anterior, M es punto medio de $\overline{AB}$ porque $AM=MB$.

Operaciones con las longitudes de los segmentos

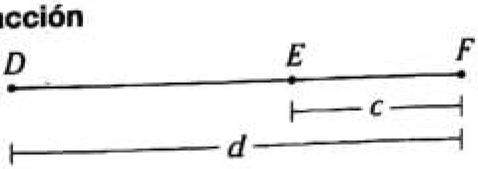
Adición



$AC=AB+BC$

$AC=a+b$

Sustracción



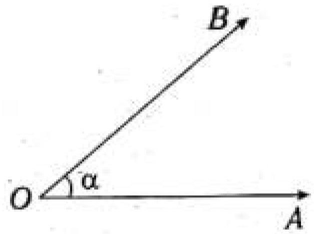
$DF=DE+EF$

$d=DE+c$

$DE=d-c$

Ángulo

Es la figura geométrica formada por dos rayos que tienen el mismo origen y no son colineales.



Donde $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$ son lados del ángulo y O es el vértice.

Notación: $\sphericalangle AOB$ se lee "ángulo AOB".

Notación: $m\sphericalangle AOB$ se lee "medida del ángulo AOB".

En el gráfico, $m\sphericalangle AOB=\alpha$.

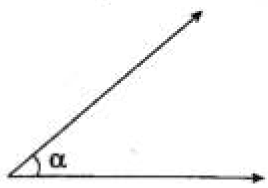
Clasificación

Los ángulos se agruparán según su medida angular, la posición de sus lados y la suma de sus medidas.

Según su medida angular

a. Ángulo agudo

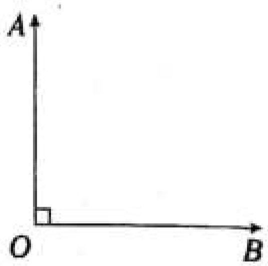
Es aquel ángulo cuya medida se encuentra entre 0° y 90°.



$0° < \alpha < 90$

b. Ángulo recto

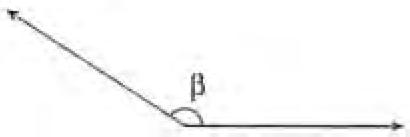
Es aquel ángulo que mide 90°.



$m\sphericalangle AOB=90°$

c. Ángulo obtuso

Es aquel ángulo cuya medida se encuentra entre 90° y 180°.

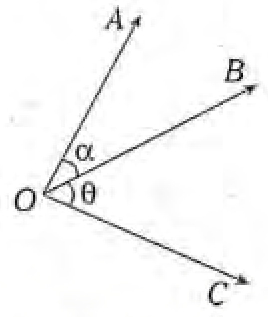


$$\boxed{90° < \beta < 180°}$$

Según la posición de sus lados

a. Ángulos adyacentes

Son dos ángulos coplanares que tienen un mismo vértice y un lado en común, tal que uno está a continuación de otro.

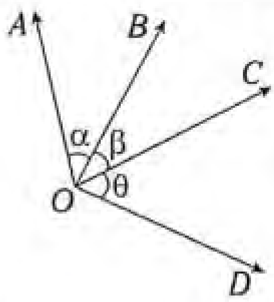


Los ángulos *AOB* y *BOC* son adyacentes.

Se cumple: $\boxed{m\measuredangle AOC=\alpha+\theta}$

b. Ángulos consecutivos

Son tres o más ángulos que tienen un mismo vértice y que al ser tomados de dos en dos son ángulos adyacentes.

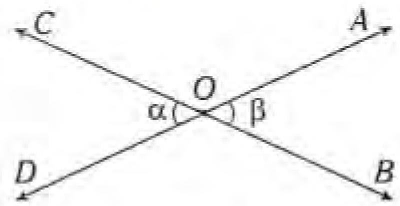


Los ángulos *AOB*, *BOC* y *COD* son consecutivos.

Se cumple: $\boxed{m\measuredangle AOD=\alpha+\beta+\theta}$

c. Ángulos opuestos por el vértice

Tienen el mismo vértice y los lados de uno son las prolongaciones del otro.



Los ángulos *COD* y *AOB* son opuestos por el vértice.

Se cumple: $\boxed{\alpha=\beta}$

Según la suma de sus medidas

a. Ángulos complementarios

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es 90°.

Notación: C_α

Se lee "complemento del ángulo cuya medida es α".

Se cumple: $\boxed{C_\alpha=90°-\alpha}$

b. Ángulos suplementarios

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es 180°.

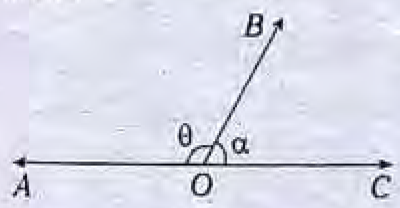
Notación: S_α

Se lee "suplemento del ángulo cuya medida es α".

Se cumple: $\boxed{S_\alpha=180°-\alpha}$

NOTA

Par lineal

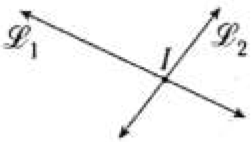


$$\theta+\alpha=180°$$

Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una recta secante

Rectas secantes

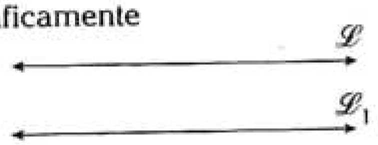
Son aquellas rectas que tienen un punto en común. Gráficamente



Donde I es el punto de intersección entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$.

Rectas paralelas

Son aquellas rectas que se ubican en un mismo plano y que no presentan ningún punto en común. Gráficamente

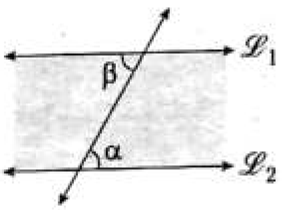


Donde $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

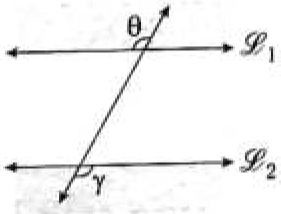
Se lee "la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$".

Ángulos alternos

Internos



Externos

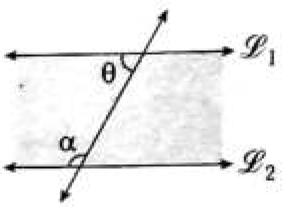


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, se cumple:

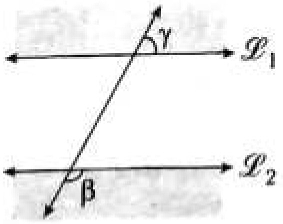
$$\boxed{\alpha=\beta \ \text{ y } \ \theta=\gamma}$$

Ángulos conjugados

Internos



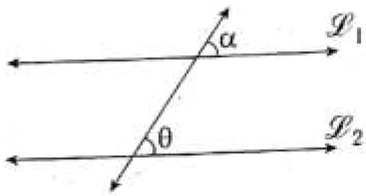
Externos



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, se cumple:

$$\boxed{\theta+\alpha=180^\circ \ \text{ y } \ \gamma+\beta=180^\circ}$$

Ángulos correspondientes

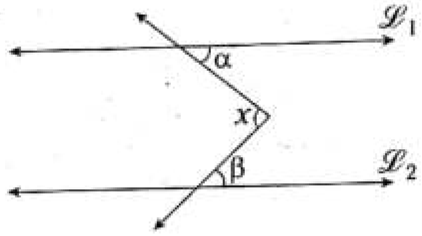


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, se cumple:

$$\boxed{\alpha=\theta}$$

Teorema

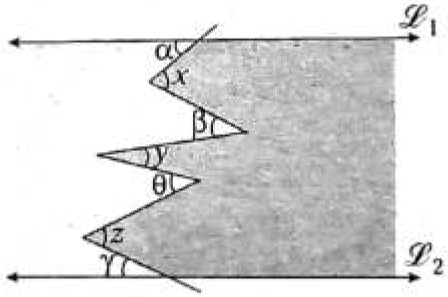
1. Ángulo ubicado entre dos rectas paralelas.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, se cumple:

$$\boxed{x=\alpha+\beta}$$

2. Línea quebrada entre dos rectas paralelas.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, se cumple:

$$\boxed{\alpha+\beta+\theta+\gamma=x+y+z}$$

Se interpreta que la suma de ángulos ubicados a la izquierda es igual a la suma de los ángulos ubicados a la derecha.

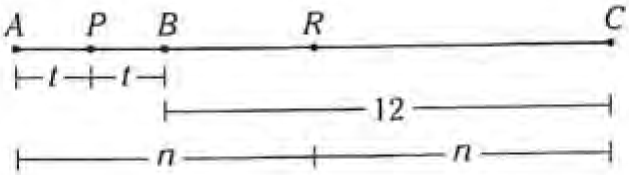
Problemas Resueltos

Problema N.° 1

En una línea se consideran los puntos consecutivos A, B y C. Si P y R son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, calcule PR sabiendo que $BC=12$.

UNMSM 2000

Resolución



Nos piden $PR=x$.

Del gráfico: $AP+PR=AR$

$\ell+x=n$

$\rightarrow\ x=n-\ell$

Además $AB+BC=AC$

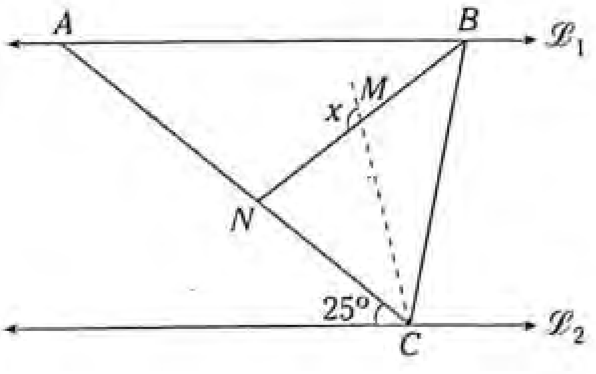
$2\ell+12=2n$

$\rightarrow\ n-\ell=6$

$\therefore\ x=6$

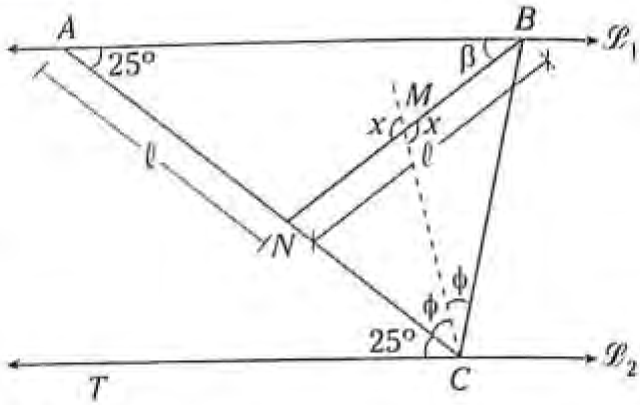
Problema N.° 2

En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son rectas paralelas, $m\measuredangle ABC=3m\measuredangle BAC$, $AN=BN$ y $\overrightarrow{CM}$ es bisectriz del $\measuredangle BCN$. Halle el valor de x.



UNMSM 2002

Resolución



Nos piden x.

Datos:

$m\measuredangle ABC=3m\measuredangle BAC$, $AN=NB$

$\overrightarrow{CM}$ es bisectriz del $\measuredangle BCN$

Por ángulos alternos internos

$m\measuredangle BAC=m\measuredangle ACT$

$\rightarrow\ m\measuredangle BAC=25°$

Por teorema en rectas paralelas

$x=(\phi+25°)+\beta$ (I)

Del segundo dato, $AN=NB$

$\beta=25°$ (II)

Del primer dato

$m\measuredangle ABC=3m\measuredangle BAC$

$m\measuredangle ABC=3(25°)$

$m\measuredangle ABC=75°$

Por teoremas en rectas paralelas ($\measuredangle$ conjugados)

$m\measuredangle ABC+m\measuredangle TCB=180°$

$75°+25°+2\phi=180°$

$\rightarrow\ \phi=40°$ (III)

(II) y (III) en (I)

$x=(40°+25°)+25°$

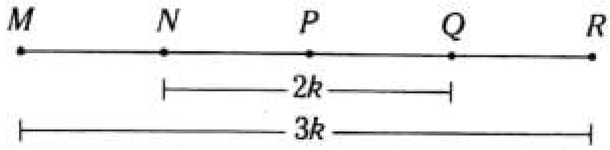
$\therefore\ x=90°$

Problema N.° 3

Si M, N, P, Q y R son puntos consecutivos de una recta, de modo que $NQ+MP+PR=50$ y $\frac{NQ}{MR}=\frac{2}{3}$ entonces NQ es

UNMSM 2005-I

Resolución



Nos piden $NQ=x$.

Dato: $\frac{NQ}{MR}=\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ Si $NQ=2k$, $MR=3k$

$NQ+MP+PR=50$

Como $MP+PR=MR$

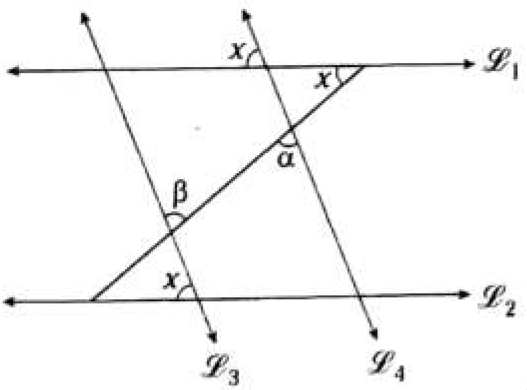
$\rightarrow$ $NQ+MP+PR=50$ $\rightarrow$ $NQ+MR=50$

$2k+3k=50$ $\rightarrow$ $k=10$

$\therefore$ $x=20$

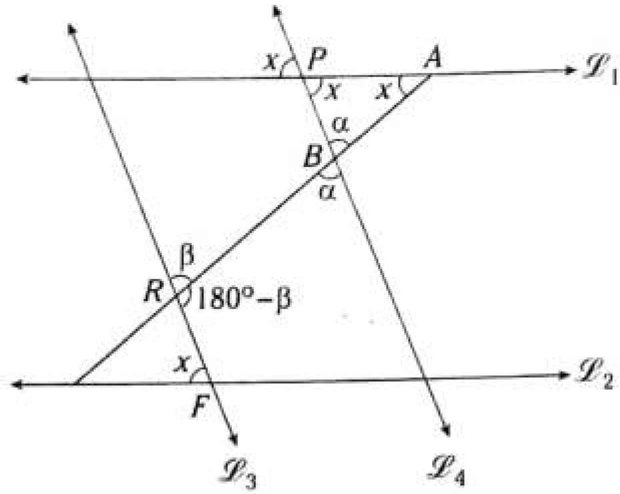
Problema N.° 4

En el gráfico, las rectas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son paralelas. Si $\alpha+\beta=5x$, calcule el valor de x.



UNMSM 2010-II

Resolución



Nos piden x.

Dato: $\alpha+\beta=5x$

En el punto P, por ángulos opuestos por el vértice,

$m\measuredangle BPA=x$ y $m\measuredangle PBA=\alpha$

En el $\triangle APB$

$$x+x+\alpha=180° \qquad \text{(I)}$$

Por propiedad de las paralelas en el punto R.

$m\measuredangle ARF=x+x$

$180°-\beta=2x$

$$2x+\beta=180° \qquad \text{(II)}$$

(I)+(II)

$$4x+\underbrace{\alpha+\beta}_{5x}=360°$$

$9x=360°$

$\therefore$ $x=40°$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $\frac{AB}{2}+BC+\frac{CD}{2}=12$, luego se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Calcule MN.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

2. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $4(AB)=2(BC)=CD$ y $AC < 14$. Calcule el máximo valor entero de BC.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

3. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $3(AC)=2(BD)=24$. Calcule CD si BC toma su máximo valor entero.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

4. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, tal que

$\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{4}=\frac{DE}{5}=x$, $EF=AD$ y

$(BC)(DE) > 5(DC)$, y x toma su mínimo valor entero. Calcule BC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

5. Sean los puntos colineales y consecutivos P, Q, R y T, de modo que $2(RT)=7(PR)$ y $2(QT)-7(PQ)=270$. Calcule QR.

A) 30 B) 45 C) 36
D) 90 E) 27

6. En el $\overline{ML}$ y en su prolongación se ubican los puntos N y T, respectivamente, tal que $ML+NT=40$. Si $7(NL)=3(MT)$, calcule MT.

A) 28 B) 24 C) 20
D) 12 E) 32

7. En la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto C, tal que $\frac{AC+BC}{5}=\frac{AB}{3}$. Calcule $\frac{AB}{BC}$.

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 8
D) $\frac{5}{3}$ E) 3

8. Se tienen los puntos colineales y consecutivos P, Q, R y T. Si M es punto medio de $\overline{PT}$, $PR=RM$, $QR+MT=24$ y $PQ=6$, calcule PM.

A) 30 B) 18 C) 12
D) 20 E) 15

9. En una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q y R, además M es punto medio de $\overline{QR}$. Calcule $\frac{PQ+3(PM+QM)}{PM+PR}$.

A) 2
B) 3
C) 9
D) 4
E) 16

10. En $\overline{AD}$ se ubica el punto C y en $\overline{AC}$ el punto B, tal que $\frac{10}{AB}-\frac{2}{AD}=\frac{x}{AC}$ y $(AB)(CD)=5(AD)(BC)$. Calcule x.

A) 15 B) 10 C) 12
D) 25 E) 5

11. En una recta se ubican los puntos colineales A, B y C, de modo que $\frac{AC}{AB-BC}=5$. Calcule $\frac{AB}{AC-BC}$.

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{5}{7}$
D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

12. En una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, tal que $AB=EF$, $BC=DE$ y $CD=3(EF)$. Si $CE=2(AB+DE)$ y $AF=14$, calcule BD.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

13. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, tal que

$$AB=\frac{BC}{2}=\frac{CD}{3}=\frac{DE}{4}=\frac{EF}{5}$$

$(AB)(BC)=(CF-AD)$. Calcule $AB+DF$.

A) 20 B) 60 C) 30
D) 35 E) 40

14. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E, tal que $6(AC)=3(BD)=2(CE)$, $DE=3(AB)$. Calcule $\frac{AD}{CD}$.

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

15. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F y G, tal que

$$AC=\frac{BD}{2}=\frac{CE}{3}=\frac{DF}{4},\ 5(EF)=9(CD) \text{ y}$$

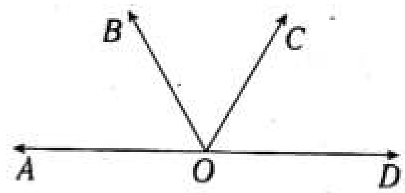
$BF=48$ cm. Calcule DA.

A) 16 cm B) 12 cm C) 18 cm
D) 14 cm E) 15 cm

16. Se tienen los ángulos adyacentes AOB y BOC, tal que $3(m\sphericalangle AOB)=2(m\sphericalangle BOC)$. Luego se traza la bisectriz $\overline{OM}$ del $\sphericalangle AOB$ y $m\sphericalangle MOC > m\sphericalangle AOC-20°$. Calcule el máximo valor entero de la $m\sphericalangle AOB$.

A) 38° B) 39° C) 40°
D) 41° E) 42°

17. Del gráfico,
$m\sphericalangle AOC=m\sphericalangle BOD$, $m\sphericalangle COD > m\sphericalangle BOC$.
Calcule el máximo valor entero de la $m\sphericalangle BOC$.



A) 61° B) 60° C) 59°
D) 58° E) 46°

NIVEL INTERMEDIO

18. Se tienen los ángulos adyacentes AOB y BOC. Luego se traza la bisectriz $\overline{OL}$ del $\measuredangle AOC$, tal que $5(m\measuredangle BOA)=3(m\measuredangle COB)$ y $(m\measuredangle AOB)\cdot(m\measuredangle BOC)=30(m\measuredangle LOB)$. Calcule la $m\measuredangle AOL$.

A) 2° B) 3° C) 4°
D) 6° E) 8°

19. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE, tal que

$$m\measuredangle AOB=\frac{m\measuredangle BOC}{3}=\frac{m\measuredangle COD}{5}=\frac{m\measuredangle DOE}{7}$$

Luego se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OL}$ y $\overrightarrow{OS}$ de los ángulos BOC y COD, respectivamente, tal que $\measuredangle LOS$ es agudo y la $m\measuredangle AOB$ toma su máximo valor entero. Calcule $m\measuredangle DOE$.

A) 147° B) 151° C) 154°
D) 157° E) 160°

20. Se tienen los ángulos adyacentes POQ y QOR, tal que la diferencia entre sus medidas angulares es 48°. Se traza $\overline{OM}$, el cual es bisectriz del $\measuredangle POR$. Calcule $m\measuredangle MOQ$.

A) 24° B) 42° C) 16°
D) 21° E) 12°

21. En un ángulo se cumple que la mitad del suplemento de su medida menos su complemento es igual al complemento del doble de su medida. Calcule dicha medida.

A) 60° B) 30° C) 36°
D) 15° E) 25°

22. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que la suma de sus medidas es equivalente a dos ángulos rectos. Las bisectrices de los ángulos AOB y COD determinan un ángulo cuya medida es 140°. Calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 40° B) 100° C) 50°
D) 70° E) 20°

23. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que AOD es recto. Si la suma del complemento de la medida del $\measuredangle AOB$ y el suplemento de la medida del $\measuredangle COD$ es 240°, calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 15° E) 90°

24. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE, tal que A, O y D son colineales y los ángulos BOD y DOE son suplementarios. Si el $\measuredangle COD$ es recto y $m\measuredangle COE=10m\measuredangle AOB$, calcule $m\measuredangle AOE$.

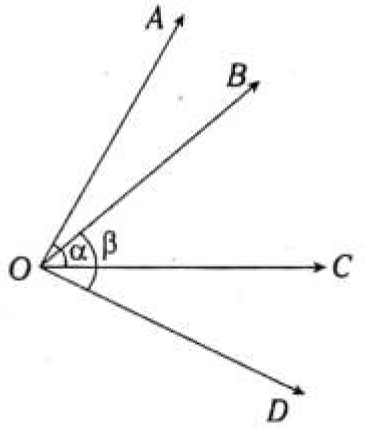
A) 170°
B) 150°
C) 110°
D) 130°
E) 120°

25. En un ángulo se cumple que la diferencia entre el suplemento y el complemento de su medida es igual al quíntuplo de su medida. Calcule dicha medida.

A) 10° B) 12° C) 20°
D) 14° E) 18°

26. Del gráfico, $\alpha+\beta=150^\circ$ y $m\measuredangle AOD=110^\circ$. Calcule $m\measuredangle BOC$.

A) 45°
B) 40°
C) 50°
D) 55°
E) 60°



27. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que A, O y C son colineales y el $\measuredangle BOD$ es recto. Se trazan $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$, las cuales son bisectrices de los ángulos AOB y COD, respectivamente. Calcule $m\measuredangle MON$.

A) 115° B) 120° C) 135°
D) 125° E) 110°

28. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que

$$m\measuredangle AOB=\frac{m\measuredangle BOC}{2}=\frac{m\measuredangle COD}{3}$$

Además $m\measuredangle AOD=m\measuredangle AOB+m\measuredangle COD+50^\circ$.

Calcule $m\measuredangle AOD$.

A) 140° B) 150° C) 130°
D) 135° E) 120°

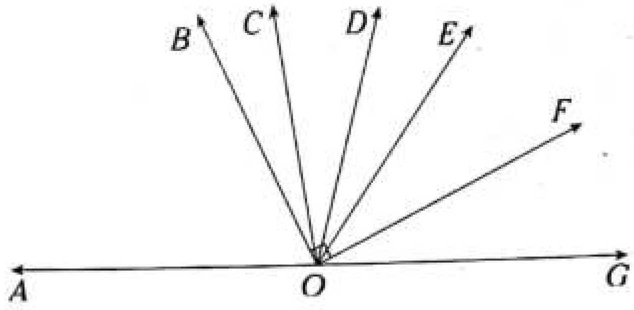
29. En el gráfico mostrado

$\overrightarrow{OF}$ es bisectriz del $\measuredangle EOG$

$\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del $\measuredangle AOF$

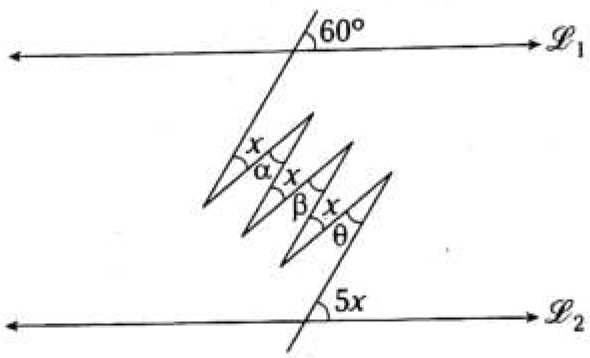
$\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del $\measuredangle BOG$

Calcule $m\measuredangle COD$.



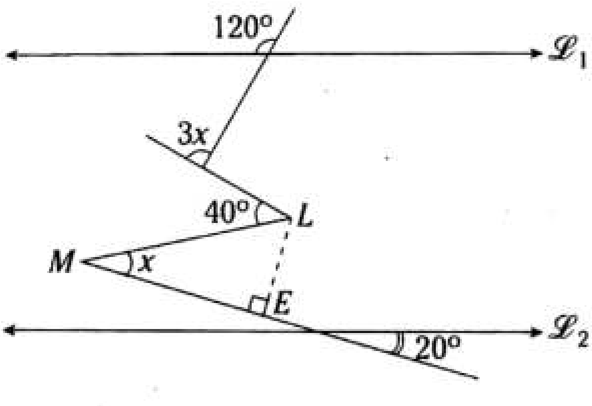
A) 37° B) 60° C) 25°
D) 45° E) 30°

30. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\alpha+\beta+\theta<48^\circ$. Calcule el máximo valor entero de x.



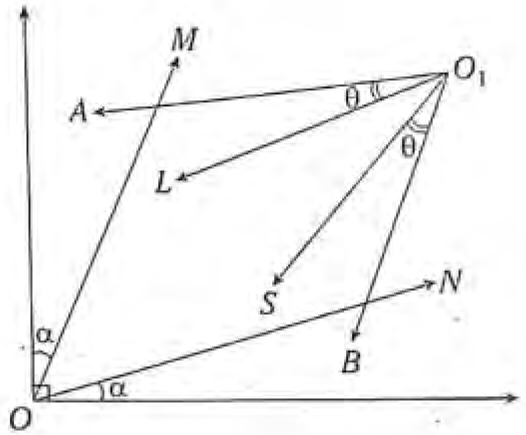
A) 10° B) 11° C) 12°
D) 13° E) 14°

31. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Si $ML=10$, calcule LE.



A) 6 B) 8 C) 5
D) 4 E) 3

32. Del gráfico, $\alpha+\theta=48°$, $m\sphericalangle MON > m\sphericalangle LO_1S$ y $m\sphericalangle AO_1B=60°$. Calcule el mínimo valor entero de θ.

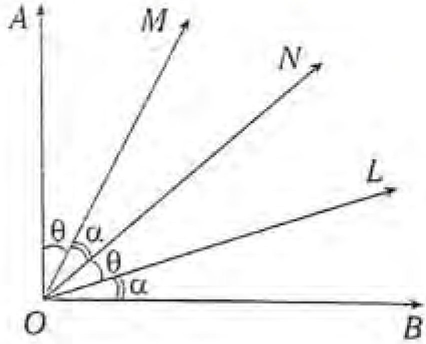


A) 15°
B) 16°
C) 17°
D) 18°
E) 19°

33. Si la suma del doble del suplemento del doble de un ángulo y el complemento del mismo ángulo es igual a la suma del suplemento del doble de ese ángulo y el doble del complemento de la mitad de dicho ángulo, calcule el complemento de dicho ángulo.

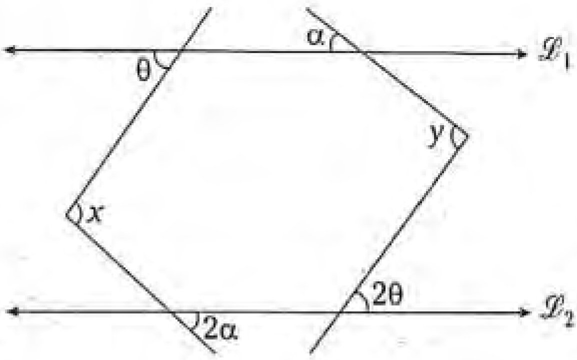
A) 60°
B) 45°
C) 53°
D) 30°
E) 90°

34. Del gráfico, el $\sphericalangle AOB$ es recto, $\theta > \alpha$ y θ toma su mínimo valor entero. Calcule el complemento de θ.



A) 64°
B) 66°
C) 67°
D) 68°
E) 70°

35. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $x > y$. Indique la relación correcta.



A) $\theta=\alpha$
B) $\alpha > \theta$
C) $\theta > \alpha$
D) $\alpha \geq \theta$
E) $\theta \geq \alpha$

Triángulos

Capítulo II

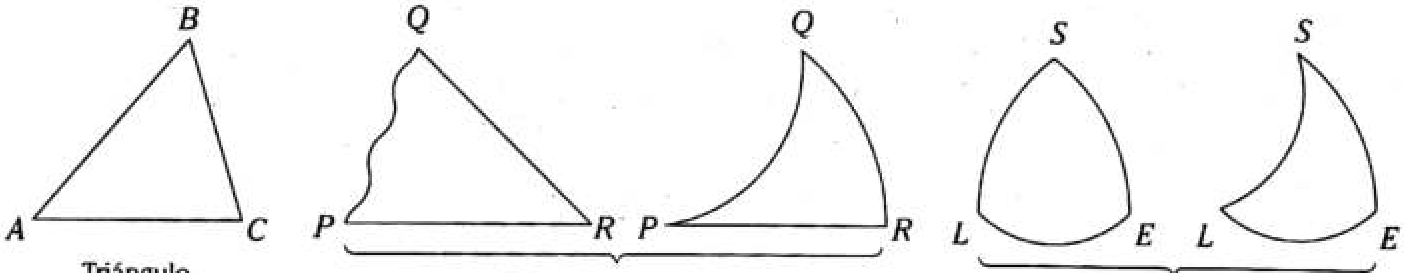
Objetivos

- Definir al triángulo rectilíneo y conocer sus propiedades.
- Definir la congruencia de triángulos.
- Establecer las condiciones para que dos triángulos sean congruentes.

Definición

Es la figura que se forma al unir tres líneas coplanares mediante tres puntos no colineales.

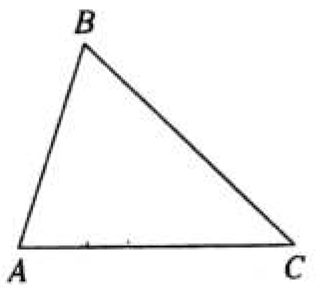
A continuación se muestran algunos ejemplos.



Triángulo rectilíneo — Triángulos mixtilíneos — Triángulos curvilíneos

Triángulo rectilíneo

Es aquel que se forma al unir tres puntos no colineales mediante segmentos de recta.



Notación: $\triangle ABC$

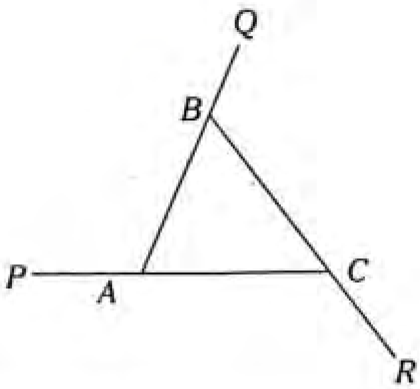
Se lee "triángulo ABC".

Elementos

- Vértices: A, B y C
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

Nota

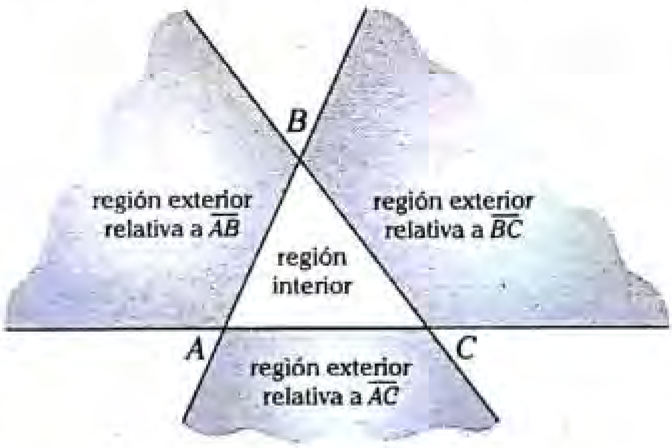
Por cuestiones didácticas, cuando nos referimos a un **triángulo rectilíneo**, simplemente diremos **triángulo**.



Elementos asociados

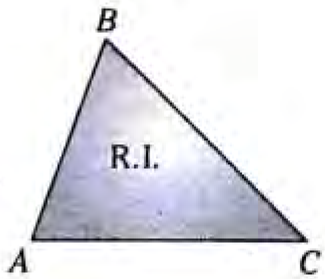
- Ángulos internos: $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAB$
- Ángulos externos: $\measuredangle PAB$, $\measuredangle QBC$ y $\measuredangle RCA$

Regiones determinadas por el triángulo



Como podemos notar, las cuatro regiones mostradas tienen un nombre específico.

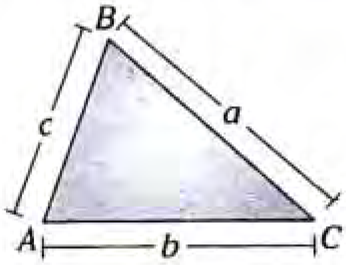
Región triangular (R. T.)



R. T.=$\triangle ABC$+R. I.

Donde R. I.: región interior del $\triangle ABC$.

Perímetro de la región triangular



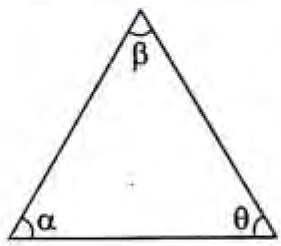
$$2p_{\blacktriangle ABC}=AB+BC+AC$$

$$2p_{\blacktriangle ABC}=c+a+b$$

Donde $2p_{\blacktriangle ABC}$ significa perímetro de la región triangular ABC (convención)

Teoremas fundamentales

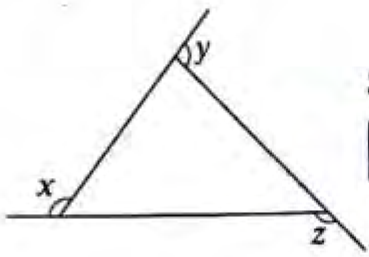
1. Suma de las medidas de los ángulos interiores



Se cumple

$$\boxed{\alpha+\beta+\theta=180^\circ}$$

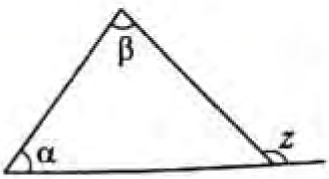
2. Suma de las medidas de los ángulos exteriores



Se cumple

$$\boxed{x+y+z=360^\circ}$$

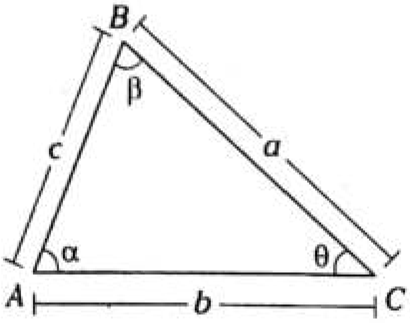
3. Cálculo de la medida de un ángulo exterior



Se cumple

$$\boxed{z=\alpha+\beta}$$

4. Relación de lado-ángulo

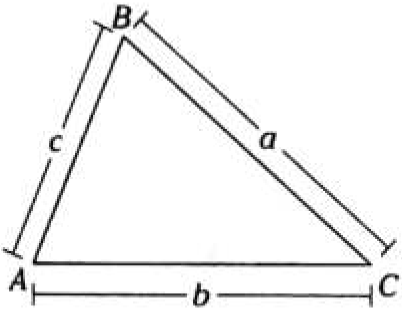


Si $\alpha \geq \beta \geq \theta$,

se cumple

$$\boxed{a \geq b \geq c}$$

5. Relación de la existencia



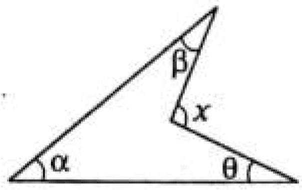
Si $a \geq b \geq c$,

se cumple

$$\boxed{a-c < b < a+c}$$

Teoremas adicionales

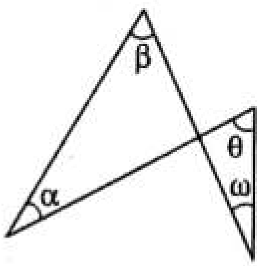
1.



Del gráfico adjunto se cumple

$$\boxed{x=\alpha+\beta+\theta}$$

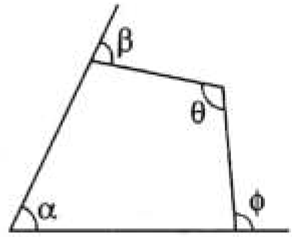
2.



Del gráfico adjunto se cumple

$$\boxed{\alpha+\beta=\theta+\omega}$$

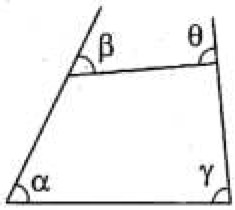
3.



Del gráfico adjunto se cumple

$$\boxed{\alpha+\theta=\beta+\phi}$$

4.



Del gráfico adjunto se cumple

$$\boxed{\alpha+\gamma=\beta+\theta}$$

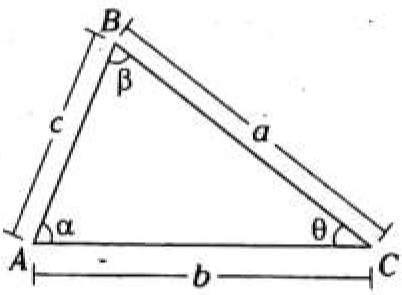
Clasificación

Los triángulos se clasifican teniendo en cuenta sus lados y sus ángulos.

Según sus lados

Triángulo escaleno

Es aquel que tiene los lados de diferentes longitudes.



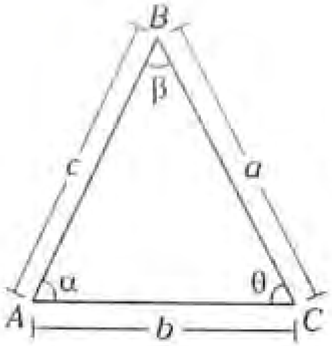
$a \neq b; b \neq c; a \neq c$

De lo anterior se concluye que

$$\boxed{\alpha \neq \beta;\ \beta \neq \theta;\ \alpha \neq \theta}$$

Triángulo isósceles

Es aquel que tiene solamente dos lados de igual longitud.



$a=c$; $a\neq b$

De lo anterior se concluye

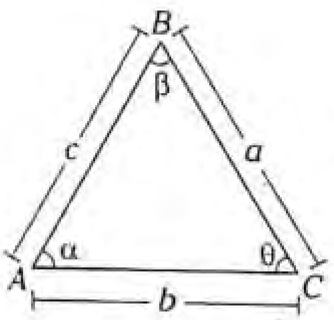
$\boxed{\alpha=\theta,\ \alpha\neq\beta}$

Base: $\overline{AC}$

Lados laterales: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

Triángulo equilátero

Es aquel que tiene los lados de igual longitud.



$a=b=c$

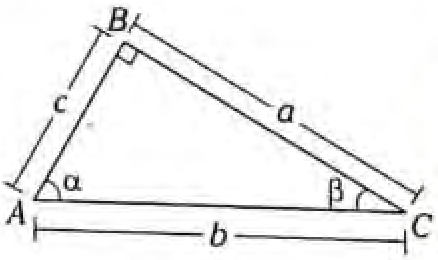
De lo anterior se concluye

$\boxed{\alpha=\beta=\theta=60°}$

Según sus ángulos internos

Triángulo rectángulo

Es aquel que tiene un ángulo interior que mide 90°.



Se cumple

$\boxed{\alpha+\beta=90°}$

$\boxed{a^2+c^2=b^2}$

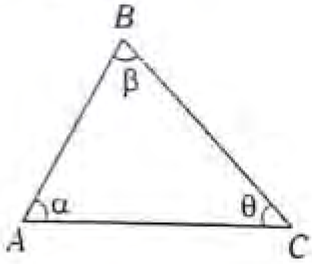
Catetos: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

Hipotenusa: $\overline{AC}$

Triángulo oblicuángulo

Es aquel que no tiene ángulo interior que mide 90°.

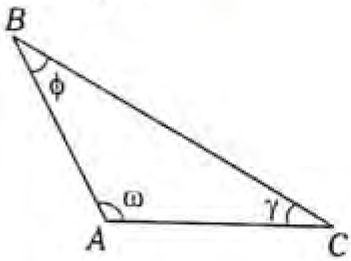
Triángulo acutángulo



Se cumple

$\boxed{\alpha<90°,\ \beta<90°,\ \theta<90°}$

Triángulo obtusángulo

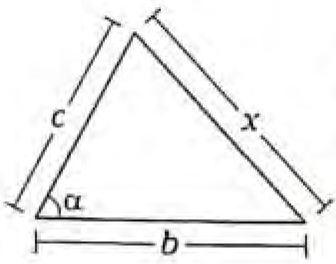


Se cumple

$\boxed{90°<\omega<180°}$

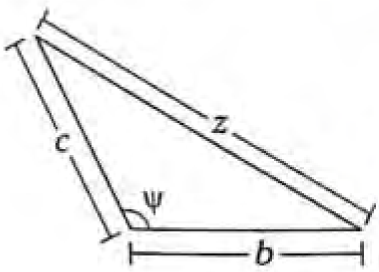
Naturaleza del triángulo

Cuando tenemos las longitudes de dos lados, y la medida del ángulo comprendido es menor o mayor que 90°, entonces debemos tener presente lo siguiente:



Si $\alpha<90°$, se cumple

$\boxed{x^2<b^2+c^2}$



Si $\psi>90°$, se cumple

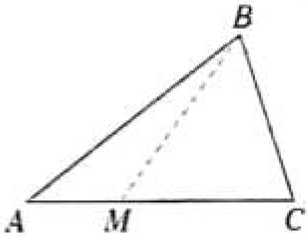
$\boxed{z^2>b^2+c^2}$

Líneas notables asociadas al triángulo

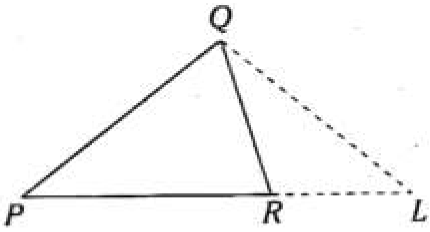
Son cinco líneas conocidas que se asocian al triángulo.

Ceviana

Es un segmento de recta que tiene por extremos un vértice y un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



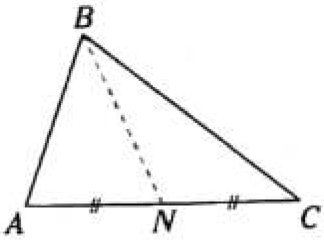
En el $\triangle ABC$, $\overline{BM}$ es ceviana interior relativa a $\overline{AC}$.



En el $\triangle PQR$, $\overline{QL}$ es ceviana exterior relativa a $\overline{PR}$.

Mediana

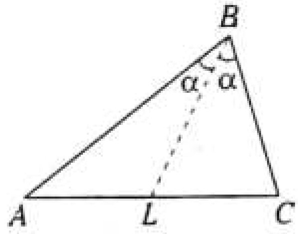
Es la ceviana que biseca el lado al cual es relativa.



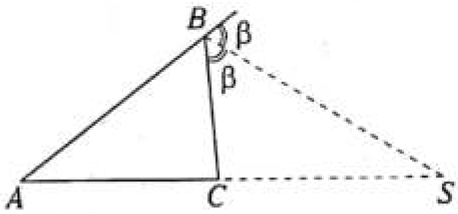
En el $\triangle ABC$, $\overline{BN}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$.

Bisectriz interior o exterior

Es la ceviana que biseca a un ángulo interior o exterior.



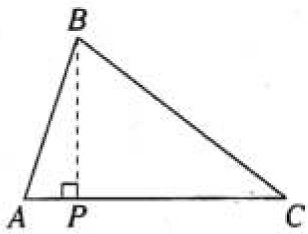
En el $\triangle ABC$, $\overline{BL}$ es bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.



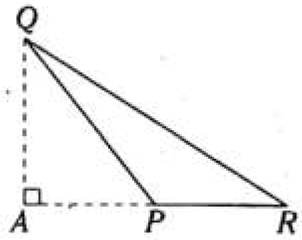
En el $\triangle ABC$, $\overline{BS}$ es bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$.

Altura

Es la ceviana perpendicular al lado al cual es relativa.



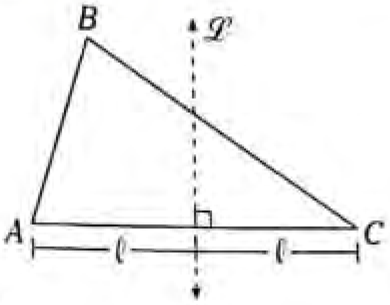
En el $\triangle ABC$, $\overline{BP}$ es altura relativa a $\overline{AC}$.



En el $\triangle PQR$, $\overline{QA}$ es altura relativa a $\overline{PR}$.

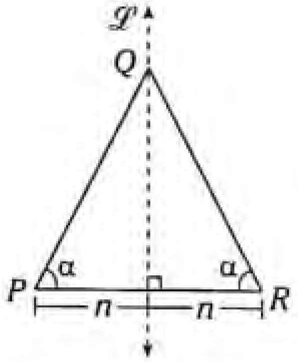
MEDIATRIZ

Es la recta que biseca perpendicularmente a un lado.



En el $\triangle ABC$:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz relativa a $\overline{AC}$.

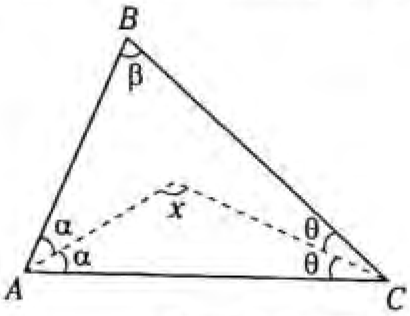


En el $\triangle PQR$:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz relativa a $\overline{PR}$.

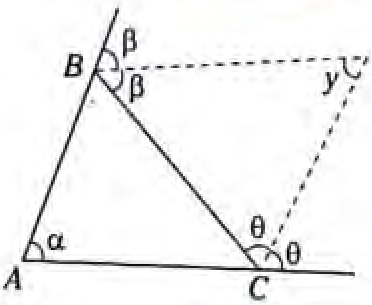
Ángulo entre bisectrices de un triángulo

1.



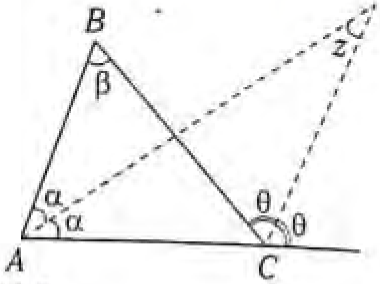
En el $\triangle ABC$ $\boxed{x=90^{o}+\frac{\beta}{2}}$

2.



En el $\triangle ABC$ $\boxed{y=90^{o}-\frac{\alpha}{2}}$

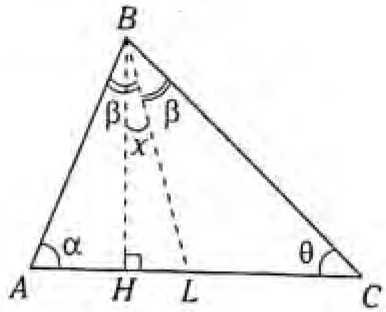
3.



En el $\triangle ABC$

$\boxed{z=\frac{\beta}{2}}$

4.



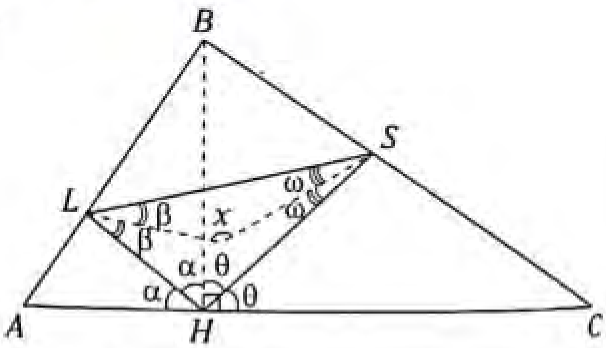
En el $\triangle ABC$

$\overline{BH}$: altura

$\overline{BL}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

$\boxed{x=\frac{\alpha-\theta}{2}}$; $\alpha>\theta$

5.



En el $\triangle ABC$

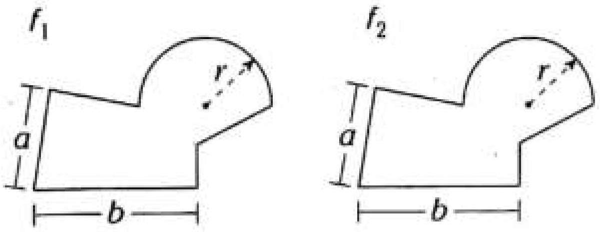
$\overline{BH}$: altura

$\overline{HL}$ y $\overline{HS}$: bisectrices interiores del $\triangle AHB$ y $\triangle BHC$

$\boxed{x=135^{o}}$

Congruencia de figuras geométricas

Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. En otras palabras es como si cambiáramos una figura de una posición a otra.



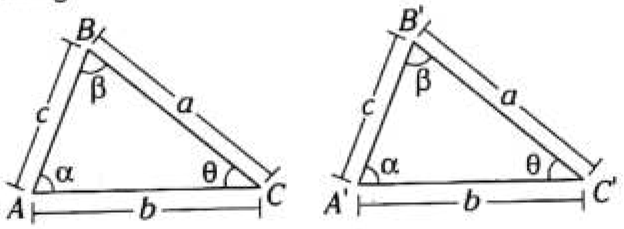
$f_1 \equiv f_2$

$\equiv$ se lee "es congruente".

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes si tienen sus ángulos interiores, respectivamente, de igual medida y sus lados homólogos correspondientes de igual longitud.

Lados homólogos. Son dos lados que se oponen a los ángulos de la misma medida en dos triángulos.

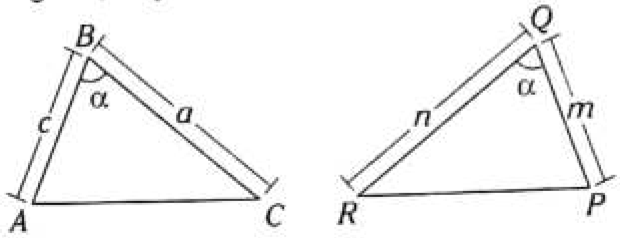


Notación: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
Se lee "$\triangle ABC$ es congruente al $\triangle A'B'C'$".

CRITERIOS PARA IDENTIFICAR DOS TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Para que dos triángulos sean congruentes, se deben cumplir ciertas condiciones, las cuales son:

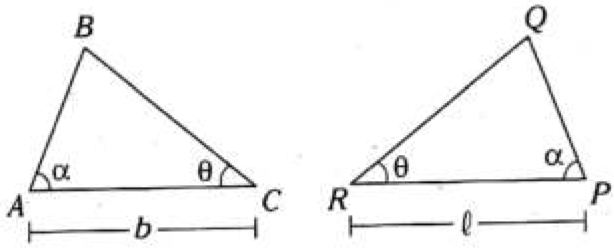
Criterio 1. Lado-ángulo-lado (L-A-L)
Un triángulo es congruente a otro si ambos tienen un ángulo de igual medida y, además, los lados que determinan dicho ángulo son de igual longitud, respectivamente.



Si $a=n$ y $c=m$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle PQR}$

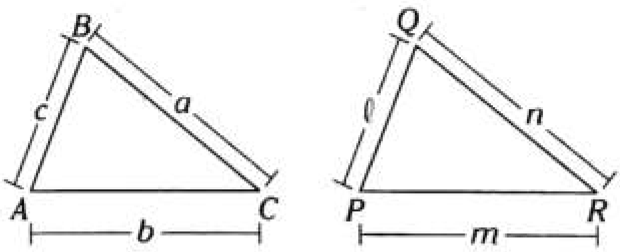
Criterio 2. Ángulo-lado-ángulo (A-L-A)
Un triángulo es congruente a otro si ambos tienen un lado de igual longitud y, además, los ángulos adyacentes a dicho lado son de igual medida, respectivamente.



Si $b=\ell$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle PQR}$

Criterio 3. Lado-lado-lado (L-L-L)
Un triángulo es congruente a otro si ambos tienen sus lados de igual longitud, respectivamente.

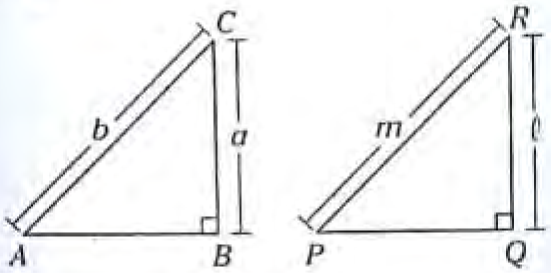


Si $a=n, b=m$ y $c=\ell$

$\rightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle PQR}$

NOTA

Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa de igual longitud, y un cateto de uno de los triángulos con un cateto del otro triángulo tienen igual longitud.

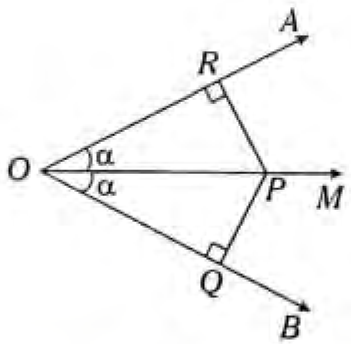


Si $b=m \wedge a=\ell \rightarrow \boxed{\triangle ABC \cong \triangle PQR}$

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Teorema de la bisectriz de un ángulo

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de este.

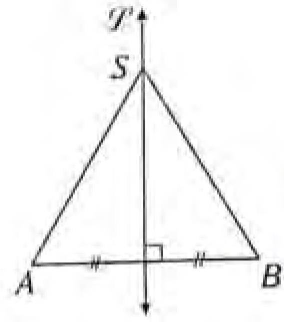


Si $\overline{OM}$ es bisectriz del $\measuredangle AOB$,

se cumple $\boxed{PR=PQ}$ y $\boxed{OR=OQ}$

Teorema de la mediatriz de un segmento

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$,

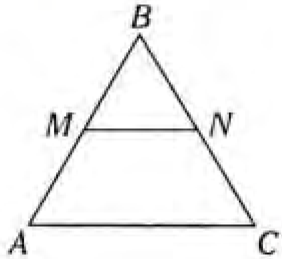
se cumple

$\boxed{SA=SB}$

Teorema de la base media

En todo triángulo, la base media respecto a un lado es paralela a dicho lado, y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.

Base media. Es el segmento de recta cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo.



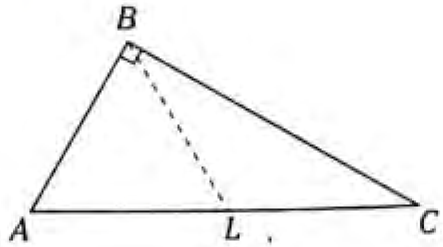
Si $\overline{MN}$ es base media respecto a $\overline{AC}$,

se cumple $\boxed{\overline{MN} // \overline{AC}}$

y $\boxed{MN=\dfrac{AC}{2}}$

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo se cumple que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.

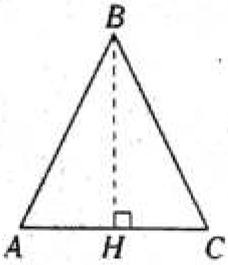


Si $\overline{BL}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$,

se cumple $\boxed{BL=\dfrac{AC}{2}}$

NOTA

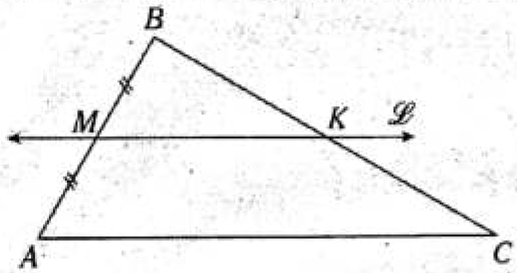
1. En un triángulo isósceles, al trazar la altura relativa a la base, dicha altura es bisectriz interior, mediana y una parte de la mediatriz.



Si $AB=BC$ y $\overline{BH}$ es altura, entonces

es mediana y bisectriz interior.

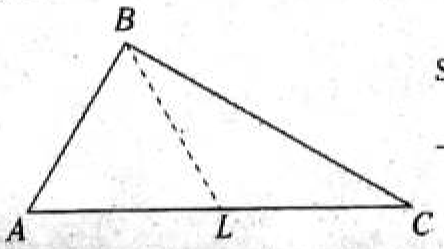
2. En un triángulo, si se traza por el punto medio de un lado una recta paralela a otro lado, entonces interseca al tercer lado en su punto medio.



Si $BM=MA$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$

$\rightarrow$ $\boxed{BK=KC}$

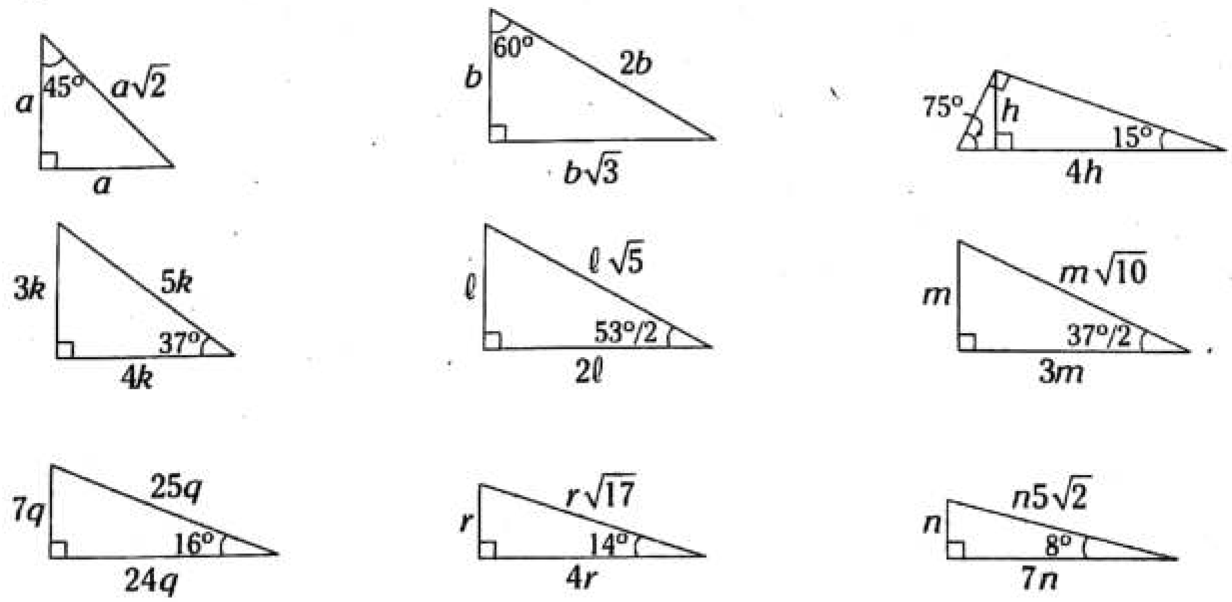
3. En un triángulo, si la mediana relativa a un lado es la mitad de dicho lado, entonces es un triángulo rectángulo.



Si $AL=LC=BL$

$\rightarrow$ $\boxed{m\sphericalangle ABC=90°}$

Triángulos rectángulos notables



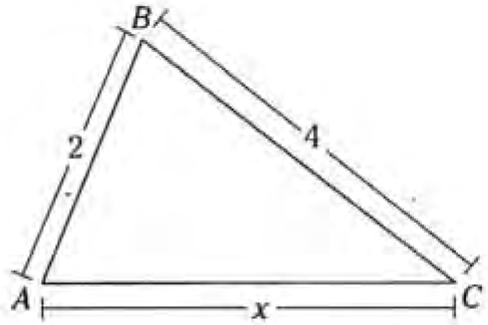
Problemas Resueltos

Problema N.º 1

De todos los triángulos, dos de cuyos lados miden 2 cm y 4 cm. Halle los que poseen la propiedad de que su tercer lado tenga por longitud un número entero y señale usted a qué es igual la suma de los perímetros de los triángulos hallados.

UNMSM 1991

Resolución



Nos piden la suma de los perímetros de △: S.

De la figura, aplicando el teorema de la existencia, en el triángulo ABC,

$$4-2<x<4+2$$

$$2<x<6$$

Como del dato x es entero, entonces x puede ser 3; 4 o 5.

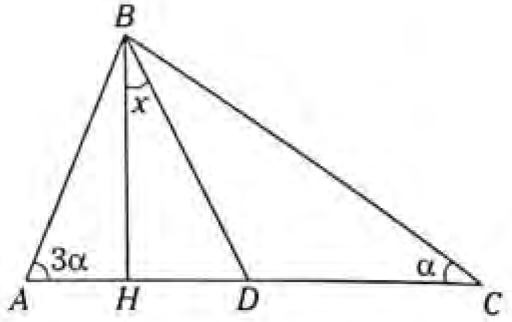
$$\left.\begin{array}{l}\text{Cuando } x=3 \rightarrow 2p_1=2+4+3=9\\ \text{Cuando } x=4 \rightarrow 2p_2=2+4+4=10\\ \text{Cuando } x=5 \rightarrow 2p_3=2+4+5=11\end{array}\right\}\text{Sumando}$$

$$S=2p_1+2p_2+2p_3$$

$$\therefore\quad S=30\text{ cm}$$

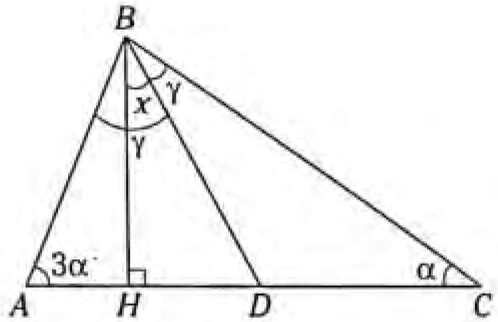
Problema N.º 2

Del gráfico $\overline{BH}$ es la altura del triángulo ABC y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. Calcule el valor de x.



UNMSM 1992

Resolución



Nos piden x.

Dato: $m\measuredangle ABD=m\measuredangle CBD=\gamma$

Del ⊿AHB: $3\alpha+\gamma-x=90°$ (I)

Del ⊿CHB: $\alpha+\gamma+x=90°$ (II)

Como podemos notar (I)=(II)

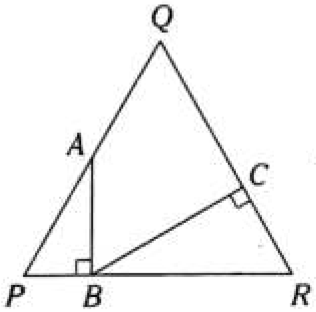
$$3\alpha+\gamma-x=\alpha+\gamma+x$$

$$3\alpha-\alpha=x+x \rightarrow 2\alpha=2x$$

$$\therefore\quad x=\alpha$$

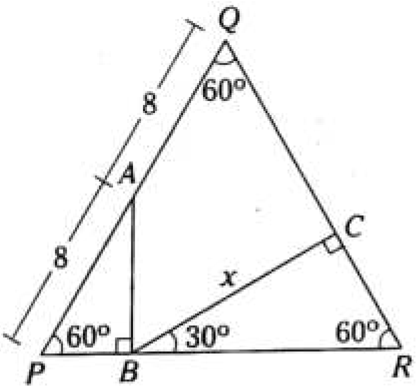
Problema N.° 3

PQR es un triángulo equilátero de lado 16. Por A punto medio de $\overline{PQ}$ se traza $\overline{AB}$ perpendicular a $\overline{PR}$; por B se traza $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{QR}$. ¿Cuánto mide BC?



UNMSM 2000

Resolución



Nos piden $BC=x$.

Dato: $PQ=QR=PR=16$

$\triangle ABP$: notable de 30° y 60°

$\rightarrow\quad PB=4$

$\triangle BCR$: notable de 30° y 60°

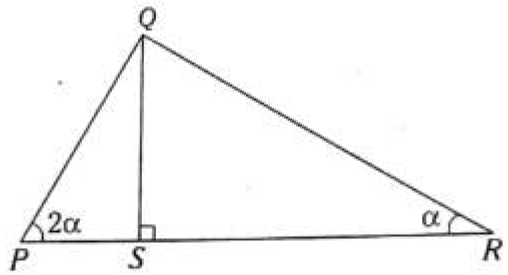
$\rightarrow\quad BR=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$

Como $PR=16=PB+BR=4+\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\quad x=6\sqrt{3}$

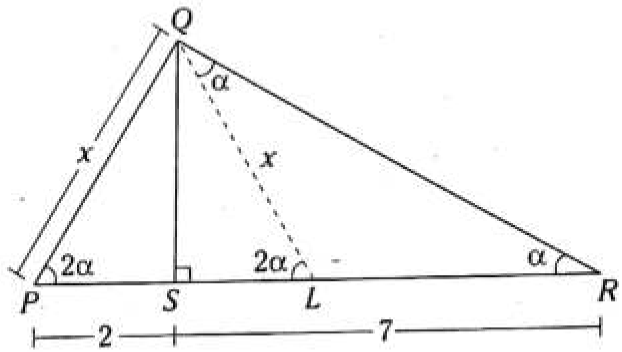
Problema N.° 4

En el gráfico $PS=2$ cm y $SR=7$ cm. Halle PQ.



UNMSM 2011-I

Resolución



Nos piden $PQ=x$.

Por sugerencia se traza $\overline{QL}$, tal que

$m\sphericalangle LQR=m\sphericalangle LRQ=\alpha$

$\rightarrow\quad QL=LR$

Del $\triangle PQL$ se puede notar que $QL=PQ=x$.

Además

$LR=QL=x$ y $PS=SL=2$

Ahora se observa de $\overline{PR}$

$PR=PS+SL+LR$

$9=2+2+x$

$\therefore\quad x=5$ cm

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En un triángulo ABC se ubica el punto S en la región exterior relativa al lado AC, tal que $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle BSC$, $AB=4$ y $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BSC$. Calcule el mínimo valor entero de BS.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

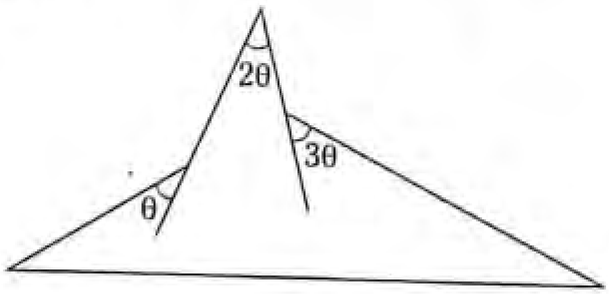
2. En un triángulo ABC se ubican los puntos L y S en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $LC=2(AL)$ y $AB+BC+CS+SL=15$. Calcule el máximo valor entero de LC.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. En un triángulo ABC, el perímetro de la región triangular ABC es 14 cm. Calcule el máximo valor entero de AB.

A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm
D) 8 cm E) 9 cm

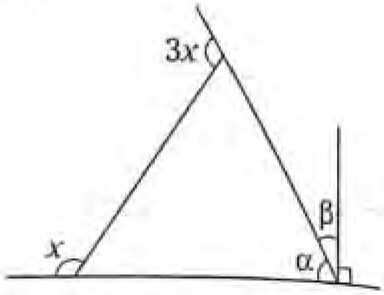
4. Del gráfico, calcule el máximo valor entero de θ.



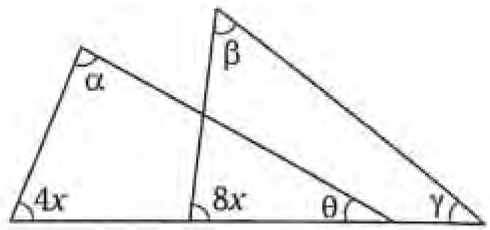
A) 26° B) 27° C) 28°
D) 29° E) 30°

5. Del gráfico, $\alpha > \beta$ y β toma su máximo valor entero. Calcule x.

A) 44°
B) 56°30'
C) 47°
D) 49°30'
E) 51°



6. Del gráfico, $\alpha+\beta+\theta+\gamma < 240°$. Calcule el mínimo valor entero de x.

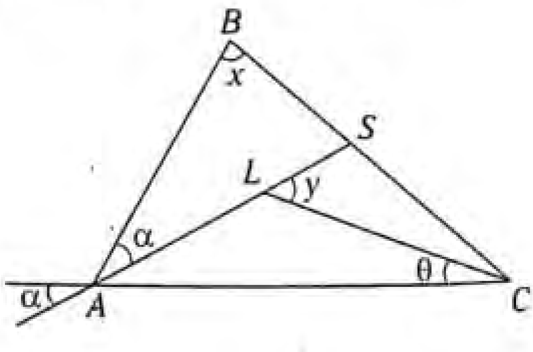


A) 9° B) 10° C) 11°
D) 12° E) 13°

7. En un triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle BCA)$, $AB=4x-6$ y $BC=8$. Calcule AB si x toma un valor entero.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

8. Del gráfico, $m\sphericalangle BSA=2\theta+\alpha$ y $x > y$. Calcule el mínimo valor entero de x.



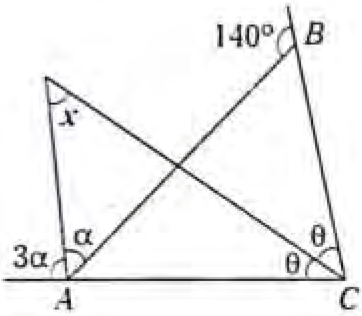
A) 59° B) 60° C) 61°
D) 44° E) 46°

9. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AL}$, luego se traza la ceviana interior $\overline{BS}$ en el triángulo ABL, tal que $BL=AC$, $13(m\angle LAC)=4(m\angle ACB)=312°$ y $m\angle ABS=14°$. Calcule $m\angle BSL$.

A) 51° B) 48° C) 50°
D) 53° E) 55°

10. Del gráfico, calcule el mínimo valor entero de x.

A) 20°
B) 31°
C) 22°
D) 21°
E) 24°



11. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica S en la región interior, tal que $m\angle ACB=37°$, $\overline{AS}$ y $\overline{BC}$ determinan un ángulo cuya medida es 60°, $m\angle ASB=90°$ y $AC=50$ cm. Calcule la distancia de S a $\overline{CB}$.

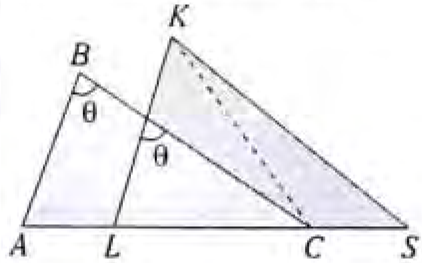
A) 5,5 cm B) 6 cm C) 6,5 cm
D) 7 cm E) 7,5 cm

12. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BK, donde $m\angle ABK=2(m\angle BAK)$, $AK=4$. Si BK toma un valor entero, indique qué triángulo es BKC.

A) equilátero
B) rectángulo
C) acutángulo
D) obtusángulo
E) isósceles acutángulo

13. Del gráfico, las regiones triangulares son congruentes, $\overline{BC}\parallel\overline{KS}$ y $BC+CS=15$ cm. Calcule el máximo valor entero de KC.

A) 16 cm
B) 15 cm
C) 14 cm
D) 13 cm
E) 12 cm



14. En un triángulo ABC se traza la altura BH ($H\in\overline{AC}$), tal que $m\angle ABH > m\angle CBH$ y $HC=15$ cm. Calcule el mínimo valor entero de AH.

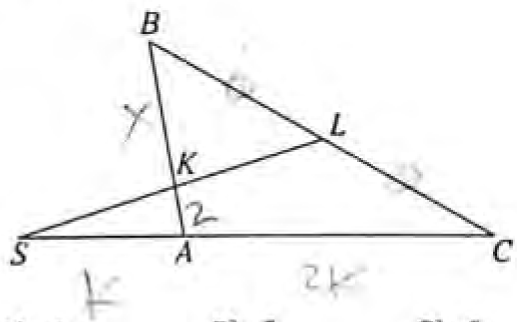
A) 14 cm B) 19 cm C) 18 cm
D) 17 cm E) 16 cm

NIVEL INTERMEDIO

15. En un triángulo ABC se traza la mediatriz de $\overline{BC}$, que interseca en S a $\overline{CA}$. Luego se traza la mediatriz de $\overline{AL}$ (L es punto medio de $\overline{BC}$), que interseca a $\overline{AB}$ en K. Si $AK+SC=15$ cm y $AS=SC$, calcule el máximo valor entero de $KB+SL$.

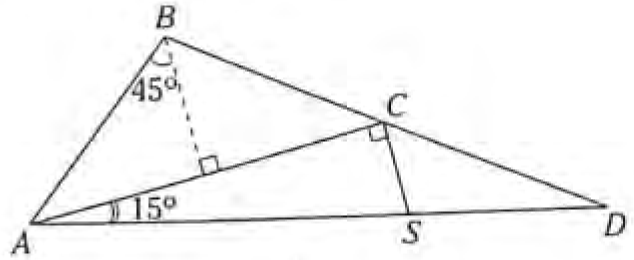
A) 15 cm B) 14 cm C) 13 cm
D) 12 cm E) 11 cm

16. Del gráfico, $AC=2(AS)$, $BL=LC$ y $AK=2$. Calcule BK.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

17. Del gráfico, $AS=2(AB)$ y la distancia de C a $\overline{DA}$ es 3 cm. Calcule BS.

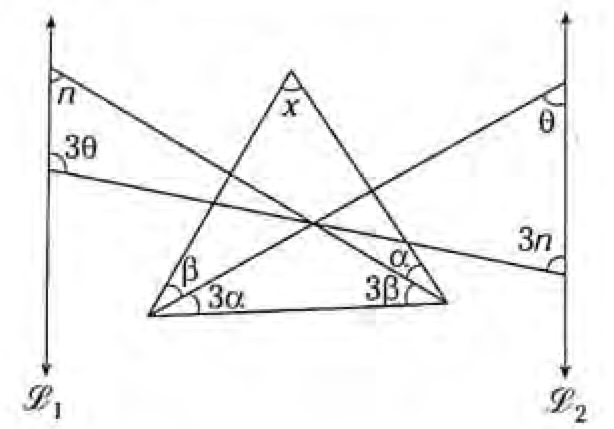


A) 8 cm B) 10 cm C) $6\sqrt{3}$ cm
D) 9 cm E) $6\sqrt{2}$ cm

18. En un triángulo isósceles ABC $(AB=BC)$ se ubica N en $\overline{BC}$ y M, L en $\overline{AC}$, tal que $AM=MC=10$, $NC=LC=6$. Calcule el máximo valor entero de MS si S es punto medio de $\overline{LN}$.

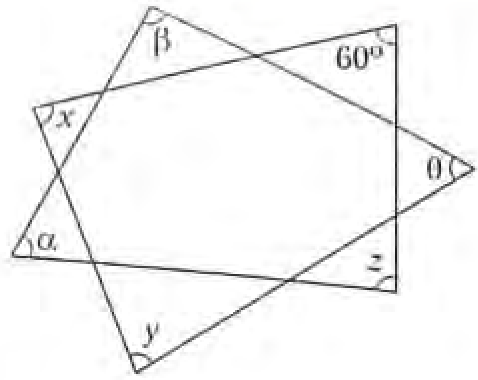
A) 10 B) 9 C) 7
D) 8 E) 6

19. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule x.



A) 30° B) 20° C) 40°
D) 25° E) 35°

20. En el gráfico adjunto, $\alpha+\beta+\theta=280°$. Calcule $x+y+z$.



A) 270° B) 360° C) 180°
D) 200° E) 560°

21. En un triángulo isósceles ABC, de base AC, se traza $\overline{AR}$, el cual es una ceviana exterior relativa a $\overline{CB}$, R está en la prolongación de $\overline{CB}$, luego en la prolongación de $\overline{RA}$ se ubica el punto M, tal que $MR=RC$. Calcule $\dfrac{m\sphericalangle RAB}{m\sphericalangle MCA}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{3}$
D) 3 E) $\frac{2}{3}$

22. En un triángulo ABD, recto en B, se traza la ceviana interior BE, y en el triángulo BED se traza la ceviana interior EC, tal que $AB=BE=EC=CD$. Calcule $m\sphericalangle BCE$.

A) 90° B) 60° C) 75°
D) 45° E) 30°

23. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BR, tal que $m\sphericalangle BRA=60°$, $m\sphericalangle ABR=4(m\sphericalangle ACB)=4x$ y $m\sphericalangle BAR=m\sphericalangle RBC=2z$.
Calcule $x-z$.

A) 10° B) 30° C) 60°
D) 0° E) 45°

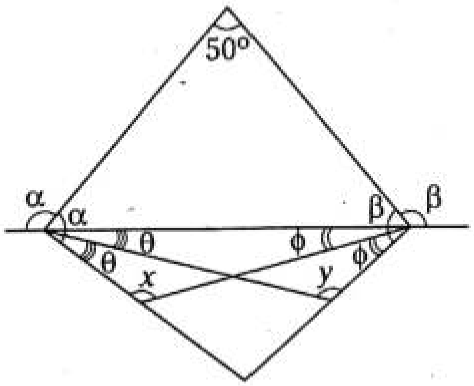
24. En un triángulo, las longitudes de sus lados son números pares consecutivos, tal que el lado intermedio mide x. Calcule el menor valor entero de x.

A) 6 B) 4 C) 8
D) 12 E) 10

25. En un triángulo ABC se trazan $\overline{AN}$ y $\overline{CE}$, altura y bisectriz interior, respectivamente. Si $m\sphericalangle ABC=50°$ y $m\sphericalangle BAC=60°$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{CE}$ y $\overline{AN}$.

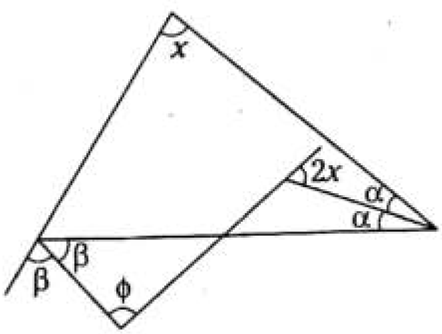
A) 55° B) 45° C) 60°
D) 30° E) 75°

26. Del gráfico, calcule $x+y$.



A) 200° B) 180° C) 210°
D) 220° E) 240°

27. Del gráfico mostrado, calcule el menor valor entero de x si $\phi < 80°$.

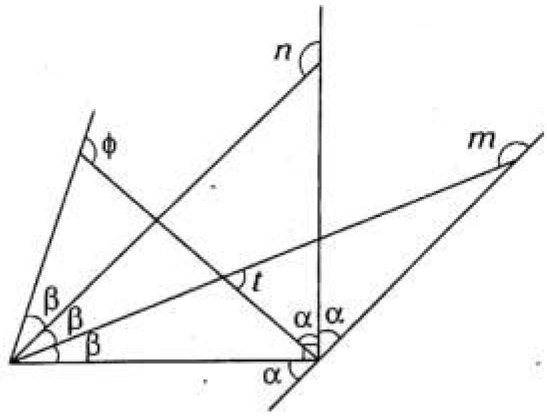


A) 41° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 50°

28. En un triángulo ABC se ubican D y R en $\overline{AC}$, y en la prolongación de $\overline{AB}$, respectivamente, tal que $m\sphericalangle RBC=m\sphericalangle CBD$ y $m\sphericalangle RDC=m\sphericalangle BDA$. Si $\overline{BC}$ interseca a $\overline{RD}$ en el punto F y $m\sphericalangle BFD-m\sphericalangle BAD=75°$, calcule $m\sphericalangle BCD$.

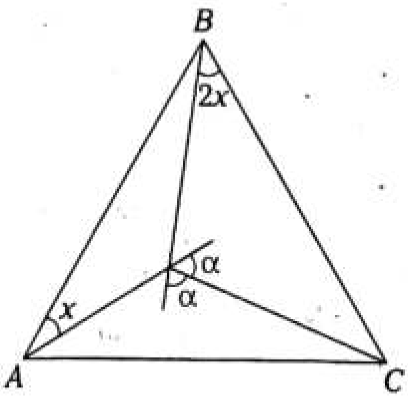
A) 15° B) 25° C) 5°
D) 50° E) 10°

29. Del gráfico adjunto, $t+n+\phi+m=490°$. Calcule β.



A) 45°/2 B) 10° C) 35°
D) 30° E) 25°

30. Del gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Calcule x.



A) 10° B) 5° C) 20°
D) 15° E) 12°

Polígonos

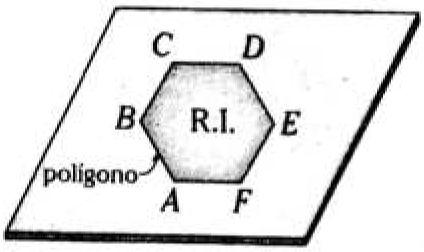
Capítulo III

OBJETIVOS

- Estudiar la definición, los elementos y la clasificación de los polígonos.
- Relacionar los elementos de los polígonos a través de los teoremas que permiten conocer la cantidad de diagonales, la suma de medidas angulares internas y externas, entre otros.

Polígono plano

Es la figura geométrica que se forma al unir tres o más puntos no colineales con segmentos de recta, de tal manera que dos segmentos adyacentes sean no colineales y limiten una sola región del plano, a la cual se le denomina región interior.



Notación: polígono *ABCDEF*

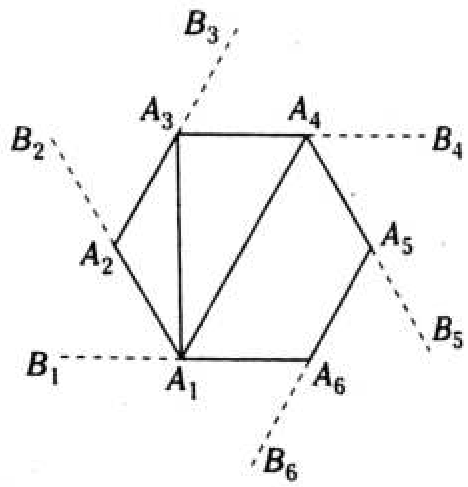
Elementos

- Vértices: $A, B, C, ...$
- Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ...$

NOTA

Generalmente al polígono plano se le conoce simplemente como polígono.

Elementos asociados



Ángulos internos

$\sphericalangle A_4A_5A_6, \sphericalangle A_1A_2A_3, ...$

Ángulos externos

$\sphericalangle B_1A_1A_2, \sphericalangle B_2A_2A_3, ...$

Diagonal

Es el segmento que une dos vértices del polígono.

$\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, ...$

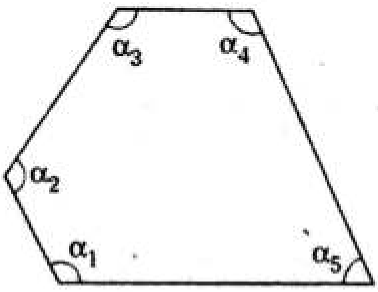
Diagonal media

Es el segmento que une los puntos medios de dos lados del polígono.

NOTA

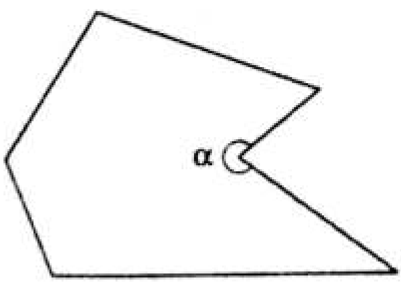
Hay dos tipos de polígonos, los cuales son:

Polígono convexo. Las medidas de los ángulos interiores son menores a 180°.



$$\boxed{\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4;\ \alpha_5 < 180^\circ}$$

Polígono no convexo (polígono cóncavo)
La medida de uno o más ángulos interiores es mayor a 180°.



$$\boxed{\alpha > 180^\circ}$$

Otra manera de reconocer si un polígono es convexo o no convexo es trazando una recta secante al polígono. Si alguna de estas rectas interseca a más de dos lados, se trata de un polígono no convexo, caso contrario será convexo.

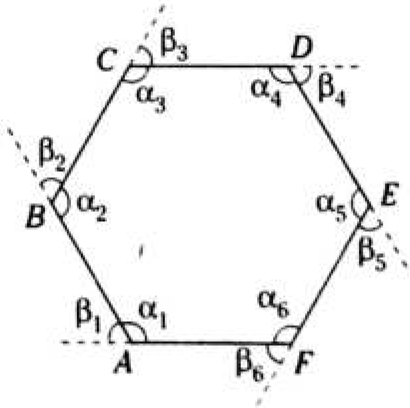
NOMBRE DE ALGUNOS POLÍGONOS

N.° de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

POLÍGONO EQUIÁNGULO

Es aquel polígono cuyos ángulos interiores tienen medidas iguales y sus ángulos exteriores también tienen medidas iguales.

Todo polígono equiángulo siempre es convexo.



Sea *ABCDEF* un polígono equiángulo.

Luego

$$\boxed{\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6}$$

También

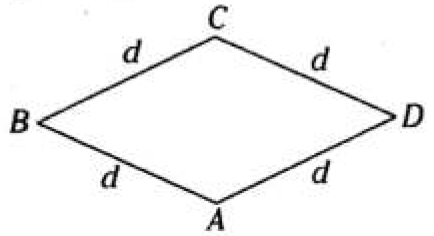
$$\boxed{\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_6}$$

POLÍGONO EQUILÁTERO

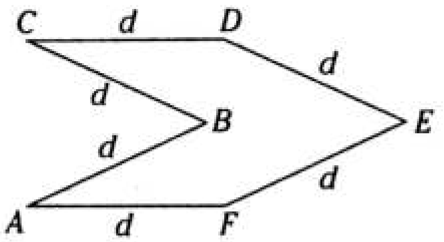
Es aquel polígono cuyos lados tienen longitudes iguales. Un polígono equilátero puede ser convexo o cóncavo.

Ejemplos

1. Polígono equilátero convexo



2. Polígono equilátero cóncavo



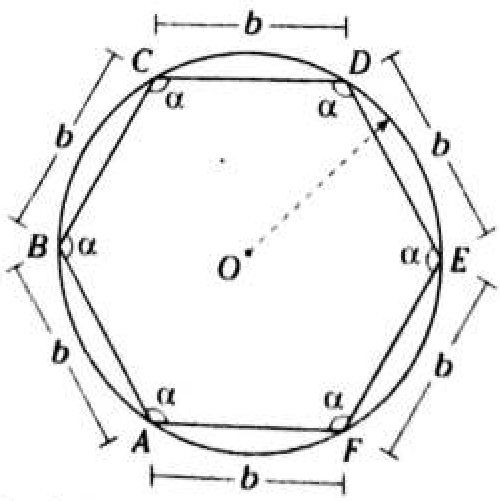
POLÍGONO REGULAR

Es aquel polígono equiángulo y equilátero a la vez.

Por los vértices de un polígono regular siempre es posible trazar una circunferencia cuyo centro es el centro del polígono.

Ejemplo

Hexágono regular



O: centro del polígono regular

Propiedades fundamentales

1. Suma de medidas de los ángulos interiores $Sm\sphericalangle i$

$$\boxed{Sm\sphericalangle i=180^{\circ}(n-2)}$$

Donde n es número de lados

2. Suma de medidas de los ángulos exteriores $Sm\sphericalangle e$ (considerando un ángulo exterior por cada vértice)

$$\boxed{Sm\sphericalangle e=360^{\circ}}$$

3. Número de diagonales

- Trazadas a partir de un vértice: #d

$$\boxed{\#d=n-3}$$

Donde n es número de lados.

- Trazadas a partir de todos los vértices: #D

$$\boxed{\#D=\frac{n}{2}(n-3)}$$

Donde n es número de lados.

4. Número de diagonales medias

- Trazadas a partir del punto medio de un solo lado: d_m

$$\boxed{\#d_m=n-1}$$

Donde n es número de lados.

- Trazadas a partir de los puntos medios de todos los lados: $\#D_m$

$$\boxed{\#D_m=\frac{n}{2}(n-1)}$$

Donde n es número de lados.

NOTA

- Si el polígono es regular o equiángulo, la medida de un ángulo interior y exterior se calculará de la siguiente manera:

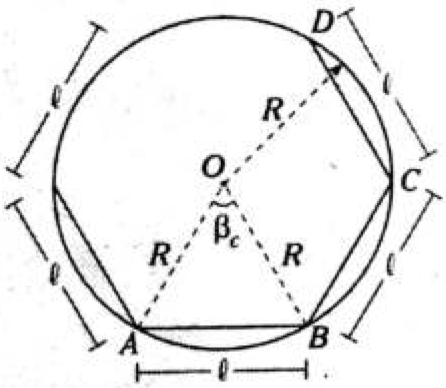
$$m\measuredangle i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$m\measuredangle e = \frac{360^\circ}{n}$$

Donde n es número de lados.

- **Medida del ángulo central**

En el polígono regular $ABCD$...

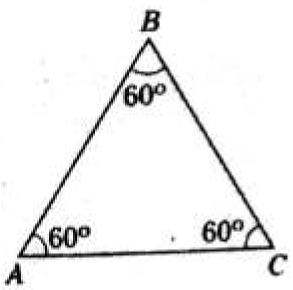


$$\beta_c = \frac{360^\circ}{n}$$

Donde $\measuredangle AOB$ es ángulo central y n es el número de lados.

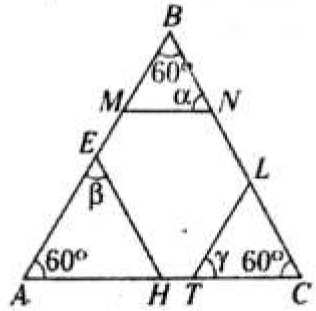
- **Construcción de un hexágono equiángulo**

a. Construya un triángulo equilátero.



$$AB=BC=AC$$

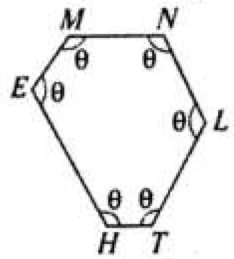
b. Trace paralelas a cada lado.



$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$; $\overline{TL} \parallel \overline{AB}$

$$\rightarrow \boxed{\alpha=\beta=\gamma=60^\circ}$$

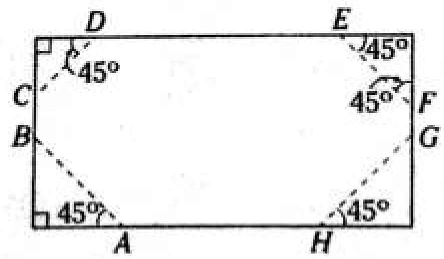
c. El hexágono $EMNLTH$ es equiángulo.



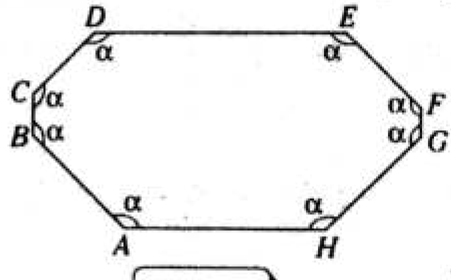
$$\theta=120^\circ$$

- **Construcción de un octágono equiángulo**

a. Se inicia con un rectángulo o cuadrado y se ubican dos puntos en cada lado del rectángulo o cuadrado. En cada vértice, los triángulos rectángulos son notables de 45°.



b. El octágono $ABCDEFGH$ es equiángulo.

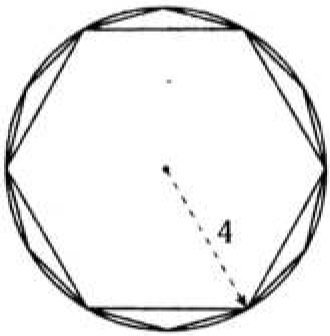


$$\alpha=135^\circ$$

Problemas Resueltos

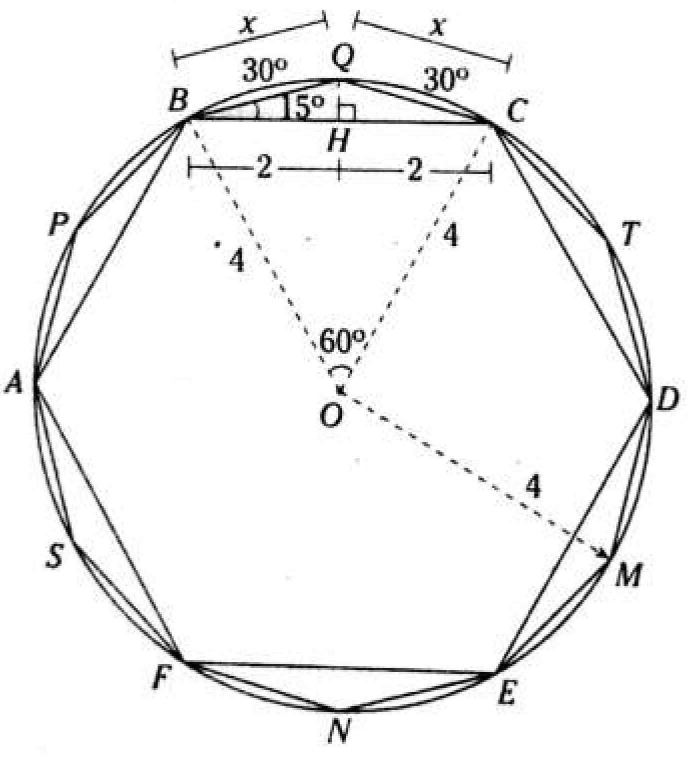
Problema N.° 1

La figura muestra un hexágono regular y un dodecágono regular inscritos ambos en una circunferencia de radio 4. ¿Cuánto mide el lado del dodecágono?

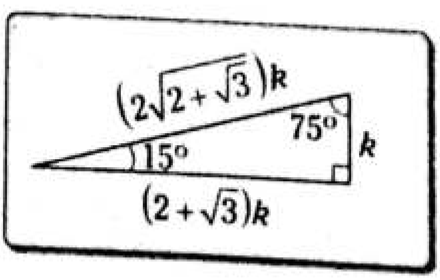


UNMSM 2000

Resolución



$\triangle$ Notable de 15° y 75°



Nos piden x.

En el hexágono regular $ABCDEF$

$$AB=BC=CD=DE=EF=FA$$

$$\rightarrow \quad m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=m\widehat{DE}=m\widehat{EF}=m\widehat{FA}=60^\circ$$

En el dodecágono regular $APBQCTDMENFS$

$$AP=PB=BQ=QC=CT=TD=DM=ME=EN=NF=FS=SA$$

$$\rightarrow \quad m\widehat{AP}=m\widehat{PB}=m\widehat{BQ}=m\widehat{QC}=\ldots=m\widehat{SA}=30^\circ$$

Por ángulo central

$$m\measuredangle BOC=m\widehat{BC}$$

$$\rightarrow \quad m\measuredangle BOC=60^\circ$$

$\rightarrow$ El $\triangle BOC$ es equilátero

En el $\triangle$ isósceles BQC

$$m\measuredangle QBC=\frac{m\widehat{QC}}{2} \rightarrow m\measuredangle QBC=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ$$

Trazamos $\overline{QH}\perp\overline{BC}$

$$\rightarrow \quad BH=HC=2$$

En el $\triangle QHB$: notable de 15° y 75°

$$\frac{x}{2}=\frac{(2\sqrt{2+\sqrt{3}})k}{(2+\sqrt{3})k}$$

$$x=\frac{4\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$$

Multiplicamos por la conjugada

$$x=\frac{4\sqrt{2+\sqrt{3}}}{(2+\sqrt{3})}\;\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}$$

$$x=\frac{4\sqrt{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$\rightarrow \quad x=4\sqrt{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$$

Usamos un artificio algebraico

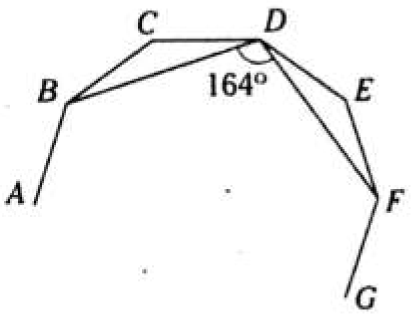
$$x=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$

$$x=4\sqrt{\underbrace{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}_{1}(2-\sqrt{3})}$$

$$\therefore \quad x=4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

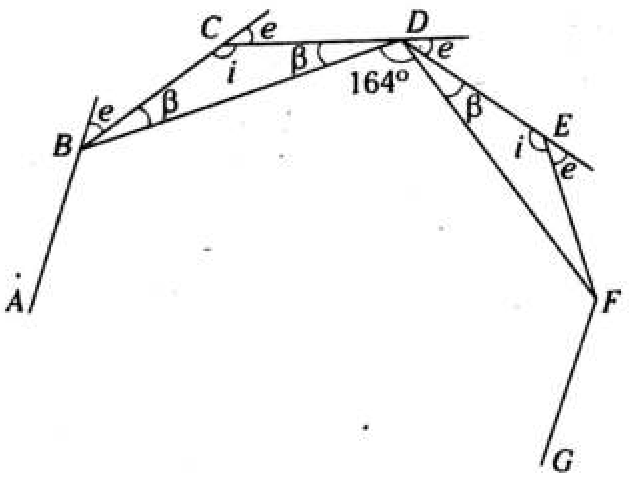
Problema N.° 2

En el gráfico, se representa parte de un polígono regular de n lados. ¿Cuánto vale n?



UNMSM 2003

Resolución



Nos piden n.

Donde n es el número de lados.

Dato: $ABCDEF$... es un polígono regular

Por medida del ángulo exterior

$$e=\frac{360°}{n}$$

$$n=\frac{360°}{e} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BCD$ isósceles

$$e=\beta+\beta$$

$$i+e=180°$$

Pero se sabe que $m\measuredangle BCD=m\measuredangle CDE$

$$i=\beta+\beta+164°$$

$$180°-e=e+164°$$

$$2e=16°$$

$$\rightarrow \quad e=8° \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$n=\frac{360°}{8°}$$

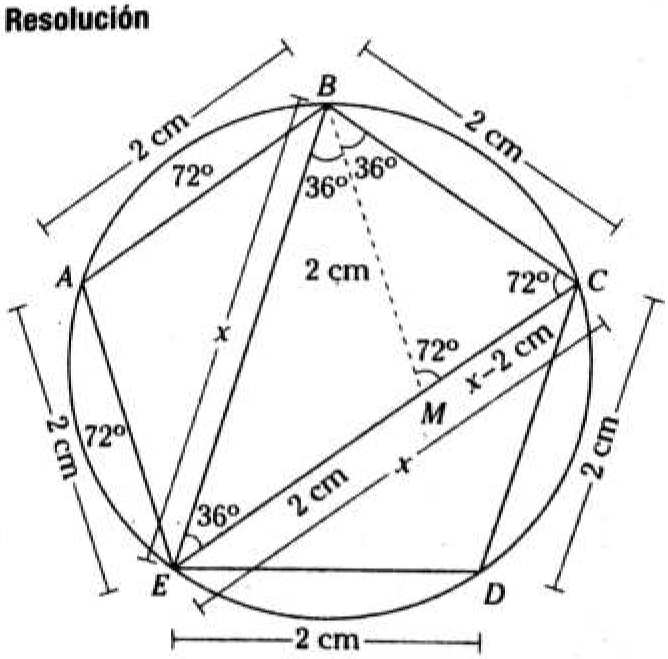
$$\therefore \quad n=45$$

Problema N.° 3

Calcule la medida de una de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado es 2 cm.

UNMSM 2004-I

Resolución



Nos piden $EC=x$.

Ubicamos el pentágono regular en una circunferencia para observar sus propiedades.

$$m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}=m\widehat{DE}=m\widehat{EA}=72^\circ$$

Observamos que

$$m\widehat{EB}=144^\circ$$

$$\rightarrow \quad m\angle ECB=\frac{144^\circ}{2}=72^\circ$$

Sabemos que $EC=EB=x$.

Trazamos $\overline{BM}$, tal que $BM=BC=2$ cm.

Completando medidas angulares

$$m\angle EBM=m\angle CBM=36^\circ$$

En el $\triangle EBC$, por teorema de semejanza

$$(m\angle MBC=m\angle BAC)$$

$$(BC)^2=(EC)(MC)$$

$$(2)^2=x(x-2)$$

$$4=x^2-2x$$

$$\rightarrow \quad x^2-2x-4=0$$

De la fórmula general

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$x=1\pm\sqrt{5}$ (No puede ser negativo)

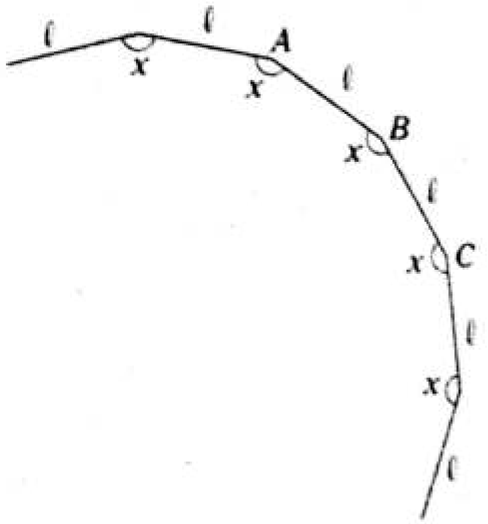
$$\therefore \quad x=(\sqrt{5}+1)\text{ cm}$$

Problema N.° 4

Los puntos A, B y C son tres vértices consecutivos de un polígono regular de 15 lados. Calcule los 2/3 de la $m\angle ABC$.

UNMSM 2009-I

Resolución



Nos piden $\frac{2}{3}x$ (sea $m\angle ABC=x$)

Dato: polígono regular de 15 lados ABC...

Cálculo de la medida de un ángulo interior en un polígono regular (i).

$$i=\frac{180(n-2)}{n}$$

Donde n es el número de lados

En nuestro caso $n=15$.

$$x=\frac{180^\circ(15-2)}{15}=156^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{3}=104^\circ$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En un polígono, el número total de diagonales es igual a la suma de su número de vértices y el número de ángulos internos. ¿Qué polígono es?

A) pentágono
B) hexágono
C) heptágono
D) octágono
E) nonágono

2. En un polígono, el número total de diagonales es igual al doble del número de lados aumentado en 2. Calcule el número total de diagonales.

A) 5 B) 9 C) 14
D) 20 E) 54

3. Se tienen dos polígonos. Si la suma de sus números de lados es 8 y la diferencia de sus números de diagonales es 5, calcule el número total de diagonales de uno de los polígonos.

A) 2 B) 5 C) 9
D) 14 E) 20

4. Se tienen dos polígonos. Si la suma de sus números de lados es 15 y la razón geométrica entre sus números totales de diagonales es 3, indique el polígono de mayor número de lados.

A) pentágono
B) hexágono
C) heptágono
D) octágono
E) nonágono

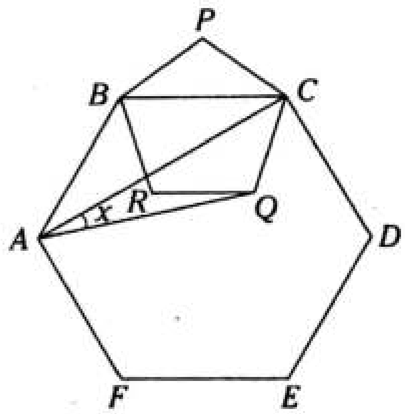
5. En un octágono regular $ABCDEFGH$, $\overline{CF} \cap \overline{DH} = \{T\}$
Calcule $m\measuredangle TEF$.

A) 45° B) 90° C) 60°
D) 135° E) 75°

6. En un polígono regular $ABCDE...$, $ABCD$ y $CDEB$ son trapecios isósceles congruentes y $BD=AE$. Calcule su número de lados.

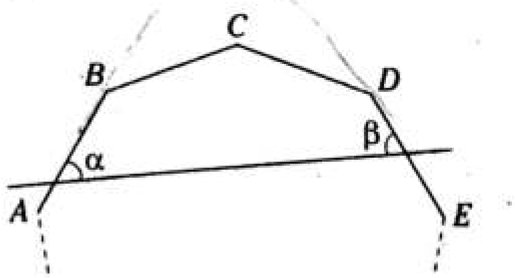
A) 12 B) 10 C) 6
D) 8 E) 9

7. Del gráfico, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $BPCQR$ es un pentágono regular. Calcule x.



A) 14°
B) 17°
C) 18°
D) 19°
E) 15°

8. Del gráfico, $\alpha+\beta=36°$ y $ABCDE...$ es un polígono equiángulo. Calcule su número de diagonales.



A) 170 B) 230 C) 189
D) 252 E) 405

9. En un polígono equiángulo, las bisectrices correspondientes a dos ángulos internos adyacentes determinan una medida angular equivalente a la medida angular interior del polígono. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

A) 5 B) 9 C) 6
D) 4 E) 2

10. En un polígono regular *ABCD*..., la medida del ángulo determinado por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es 135°. Calcule su número de lados.

A) 6 B) 8 C) 4
D) 10 E) 12

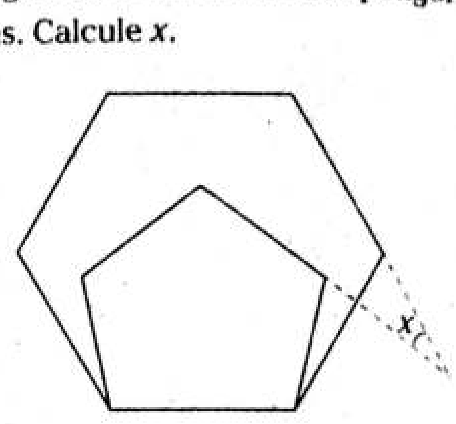
11. ¿En qué polígono se cumple que el número de diagonales excede al número de vértices en 25?

A) dodecágono
B) undecágono
C) decágono
D) octágono
E) icoságono

12. Se tienen los polígonos convexos *ABCDE* y *MNPQRS*, tal que *M* y *S* pertenecen a $\overline{ED}$ y los otros vértices del polígono de mayor número de lados se ubican en la región interior del otro polígono. Calcule el número de diagonales trazados desde 4 vértices consecutivos en el polígono no convexo determinado.

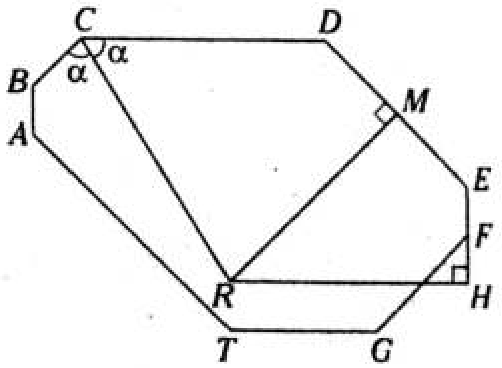
A) 25 B) 29 C) 33
D) 37 E) 40

13. Del gráfico se muestran dos polígonos regulares. Calcule x.



A) 16° B) 18° C) 20°
D) 22° E) 24°

14. En el gráfico adjunto, *ABCDEFGT* es un equiángulo, *DM*=*ME* y $RH=\sqrt{2}+1$. Calcule *CR*.



A) $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$
B) $\sqrt{4+\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{1+2\sqrt{2}}$
E) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

15. En un dodecágono equiángulo *ABCDE*... calcule la medida del ángulo determinado por las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.

A) 45° B) 150° C) 120°
D) 60° E) 90°

16. En un polígono se cumple que el número de diagonales menos el número de ángulos rectos, que equivalen a la suma de las medidas angulares interiores, es 103. Calcule el número de diagonales.

A) 252 B) 200 C) 170
D) 135 E) 104

17. En un polígono equiángulo se cumple que la medida de un ángulo interior es numéricamente igual a veinte veces el número de lados. Calcule el número de vértices del polígono si es un número par.

A) 12 B) 4 C) 10
D) 6 E) 8

NIVEL INTERMEDIO

18. En un polígono se cumple que el cuadrado de su número de lados, menos nueve es igual al número total de diagonales. Calcule la suma de sus medidas angulares internas.

A) 180° B) 360° C) 540°
D) 720° E) 900°

19. En un polígono regular, la medida de un ángulo exterior es 45 veces el número de diagonales de dicho polígono. ¿Qué polígono es?

A) triángulo equilátero
B) cuadrado
C) heptágono regular
D) hexágono regular
E) pentágono regular

20. En un octógono equiángulo *ABCDEFGH*,

$$\frac{AB\sqrt{2}}{2}+BC+\frac{CD\sqrt{2}}{2}=7 \text{ y } EF+GH=2.$$

Calcule *FG*.

A) $6-\sqrt{2}$ B) $5-\sqrt{2}$ C) $4-\sqrt{2}$
D) $7-\sqrt{2}$ E) $8-\sqrt{2}$

21. En una recta $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ se ubica el segmento *AB*. A cada lado de la recta y en el mismo plano se construyen los polígonos regulares *ABCDEF* y *ABPQRSTM*. Si $AB=4$, calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{SR}$.

A) $4(\sqrt{3}+\sqrt{2}+2)$
B) $5(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})$
C) $4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$
D) $4(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$
E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)$

22. En el hexágono equiángulo *ABCDEF*, $EF=DC=2$ y $AB=5$. Si $ED^2-BC^2=12$, calcule $ED+AF$.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 6 E) 4

23. En un cuadrilátero regular *ABCD* se traza $\overline{BD}$ y en él se ubica el punto *F*.
Si $\overrightarrow{CF}\cap\overline{AB}=\{E\}$, $m\sphericalangle AFD=2m\sphericalangle AFE$, calcule $m\sphericalangle EFB$.

A) 45° B) 72° C) 54°
D) 36° E) 60°

24. Se tiene el hexágono regular *ABCDEF*. En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica el punto *T* y se construye el rectángulo *TBDR*, tal que $AT=FE$. Calcule $m\sphericalangle TFR$.

A) 150° B) 100° C) 136°
D) 154° E) 120°

25. En un polígono equiángulo, la razón de las medidas de un ángulo exterior e interior es de 2 a 7. Calcule el número de diagonales trazados desde un vértice para dicho polígono.

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

26. En un cuadrado *ABCD* de centro *O* se traza el polígono regular *OPQRST*, tal que *P*, *Q*, *R*, *S* y *T* están ubicados en la región exterior de *ABCD*. Si $\overline{OT} \perp \overline{AD}$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{CD}$.

A) 45° B) 60° C) 53°
D) 72° E) 80°

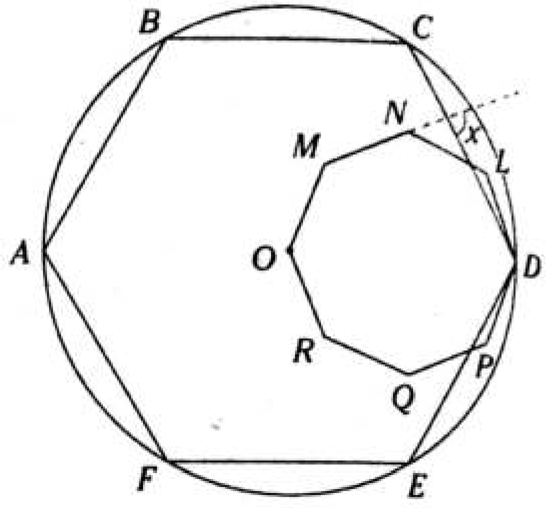
27. En un decágono regular se trazan dos diagonales que se intersecan en el centro de dicho polígono. Si de los polígonos parciales determinados ninguno es triángulo, calcule el número de diagonales trazados desde dos vértices consecutivos en el polígono de mayor número de lados.

A) 4 B) 7 C) 9
D) 6 E) 12

28. La razón geométrica de las medidas de los ángulos centrales de dos polígonos regulares es de 8 a 9 y la suma de sus números de lados es 17. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores de dichos polígonos.

A) 5400° B) 2320° C) 2230°
D) 2340° E) 2430°

29. En el gráfico se muestran dos polígonos regulares. Si *O* es el centro de uno de ellos, calcule *x*.



A) 82°30' B) 83°30' C) 84°30'
D) 85°30' E) 86°

30. En un nonágono *ABCDEFGHI* convexo se traza $\overline{EK}$ (*K* es el punto medio de uno de los lados), tal que los números de lados de los polígonos determinados son pares. Calcule el número de triángulos parciales formados que se determina al trazar las diagonales desde un vértice en el polígono de mayor número de lados.

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

31. En un decágono convexo se trazan dos diagonales que se intersecan y determinan cuatro polígonos, donde su número de lados son consecutivos. Calcule el número total de diagonales medios del polígono que tiene el mayor número de lados.

A) 9 B) 15 C) 21
D) 28 E) 12

Cuadriláteros

Capítulo IV

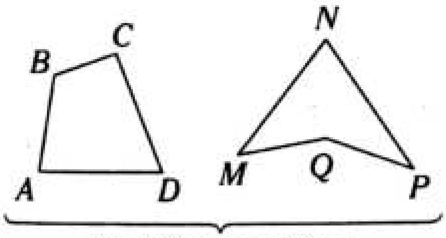
OBJETIVOS

- Definir el cuadrilátero rectilíneo y conocer sus propiedades.
- Conocer los tipos de cuadriláteros.

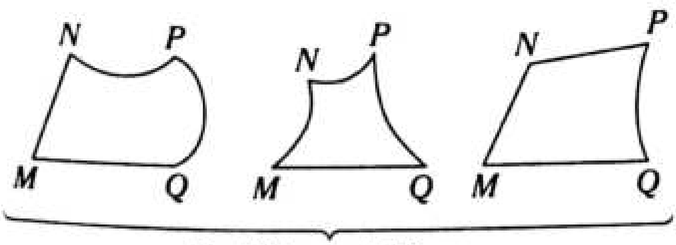
Definición

Es la figura que se forma al unir cuatro puntos no colineales mediante cuatro líneas coplanares.

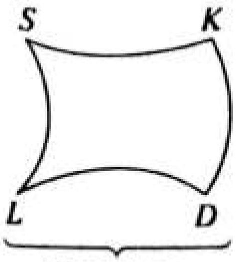
A continuación se muestran algunos ejemplos.



Cuadriláteros rectilíneos



Cuadriláteros mixtilíneos

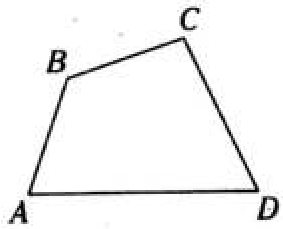


Cuadrilátero curvilíneo

CUADRILÁTERO RECTILÍNEO

Es aquel que se forma al unir cuatro puntos no colineales mediante segmentos de rectas coplanares.

A este cuadrilátero rectilíneo se le denomina, comúnmente, cuadrilátero.

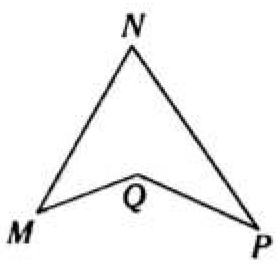


Notación:

⏢$ABCD$ se lee "cuadrilátero convexo $ABCD$".

Elementos

- Vértices: A, B, C y D
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$



Notación:

⩓$MNPQ$ se lee "cuadrilátero no convexo (cóncavo) $MNPQ$".

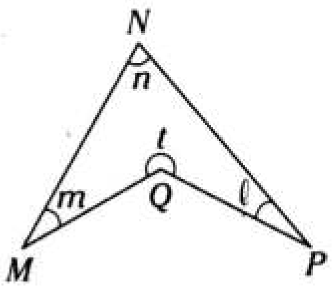
Elementos

- Vértices: M, N, P y Q
- Lados: $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QM}$

> **NOTA**
>
> Por cuestiones didácticas, cuando nos referimos a un cuadrilátero rectilíneo, diremos simplemente cuadrilátero.

Tipos de cuadriláteros

CUADRILÁTERO NO CONVEXO (CÓNCAVO)

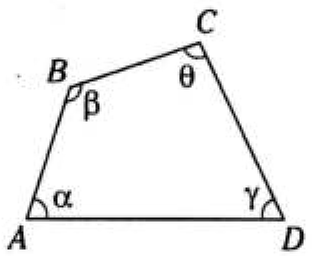


Diagonales: $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$

Propiedad: $\boxed{m+n+\ell+t=360°}$

t: medida angular

CUADRILÁTERO CONVEXO



Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Propiedad: $\boxed{\alpha+\beta+\theta+\gamma=360°}$

Clasificación de los cuadriláteros convexos

Se clasifican teniendo en cuenta el paralelismo de sus lados.

Existen tres tipos de cuadriláteros convexos y son los siguientes:

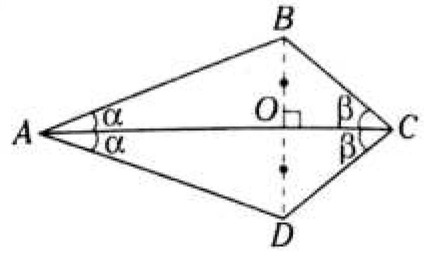
a. Trapezoide

Es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos.

Se clasifica según la simetría que presente.

Trapezoide simétrico

Es aquel en que solamente una de sus diagonales biseca perpendicularmente a la otra



Si $BO=OD$ y $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

$\rightarrow$ ⏢$ABCD$ es un trapezoide simétrico.

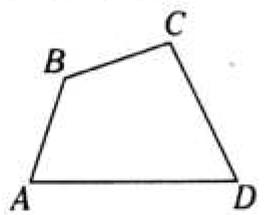
$\overleftrightarrow{AC}$: eje de simetría

$\overleftrightarrow{BD}$: no es eje de simetría

Propiedades: $\boxed{AB=AD, BC=CD \rightarrow \alpha\neq\beta}$

Trapezoide asimétrico

Es aquel que no tiene las propiedades del trapezoide simétrico.

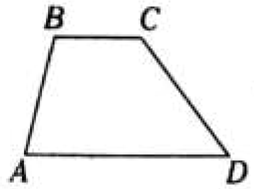


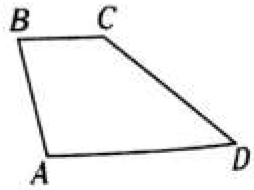
$\overleftrightarrow{AC}$: no es eje de simetría

$\overleftrightarrow{BD}$: no es eje de simetría

b. Trapecio

Es aquel cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos no son paralelos.

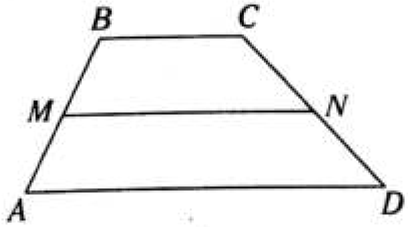




$\overline{BC}//\overline{AD}$: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se denominan bases.

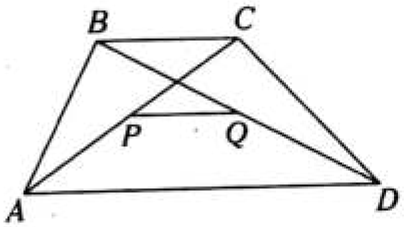
$\overline{AB}$ no es paralelo a $\overline{CD}$: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se denominan lados laterales o lados oblicuos.

Teoremas

1. 

Si $\overline{BC} // \overline{AD} // \overline{MN}$ y $AM=MB$, se cumple

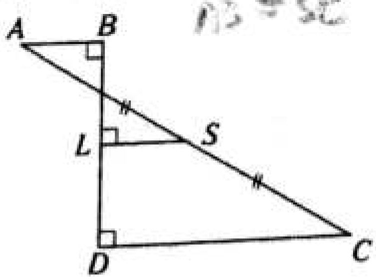
$$\boxed{MN=\frac{AD+BC}{2}}$$

2. 

Si $\overline{BC} // \overline{AD} // \overline{PQ}$ y $AP=PC$, se cumple

$$\boxed{PQ=\frac{AD-BC}{2}}$$

NOTA



AB ≠ SC

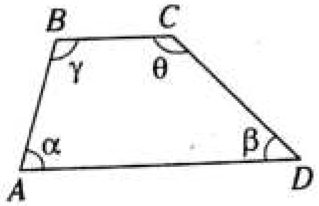
Si $\overline{AB} // \overline{DC} // \overline{LS}$ y $DC > AB$, se cumple

$$\boxed{LS=\frac{DC-AB}{2}}$$

El trapecio se clasifica teniendo en cuenta las longitudes de los lados laterales.

Trapecio escaleno

Es aquel cuyos lados laterales tienen longitudes diferentes.

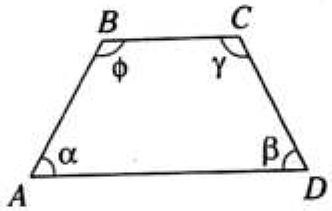


Si $BC // AD$ y $AB \neq CD$,

se cumple $\boxed{\alpha \neq \beta;\ \gamma \neq \theta}$

Trapecio isósceles

Es aquel cuyos lados laterales tienen longitudes iguales.

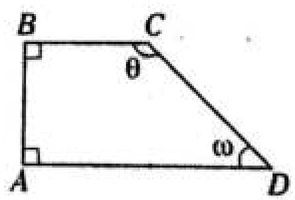


Si $BC // AD$ y $AB=CD$,

se cumple $\boxed{\alpha=\beta;\ \phi=\gamma}$

NOTA

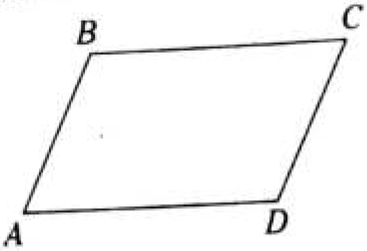
Si un lado lateral de un trapecio escaleno es perpendicular a las bases, entonces al trapecio se le denomina trapecio rectángulo.



$\overline{BC} // \overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $BC \neq AD$

c. Paralelogramo

Es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

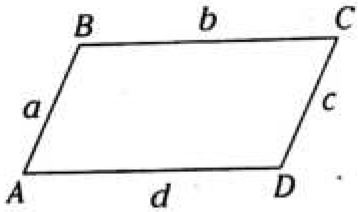


Si $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{AD}$

$\rightarrow$ $\square ABCD$ es paralelogramo

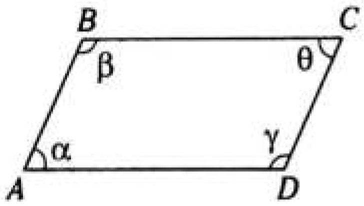
Teoremas

1. Los lados opuestos tienen longitudes iguales.



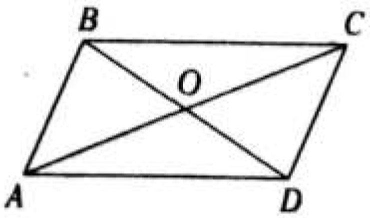
$$\boxed{a=c \wedge b=d}$$

2. Los ángulos opuestos tienen medidas iguales.



$$\boxed{\alpha=\theta \wedge \beta=\gamma}$$

3. Las diagonales se intersecan en su punto medio.

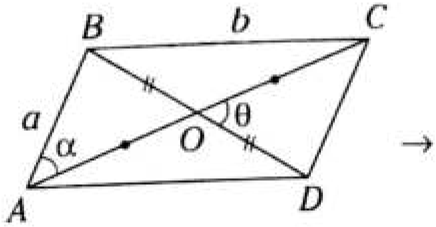


$$\boxed{AO=OC \wedge BO=OD}$$

El paralelogramo se clasifica teniendo en cuenta los lados y los ángulos interiores.

Romboide

No es equiángulo ni equilátero.

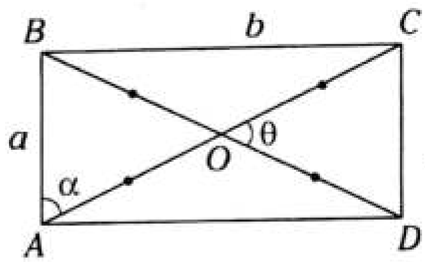


$a \neq b,\ \alpha \neq 90°$

$\rightarrow$ $\boxed{\theta \neq 90°}$

Rectángulo

Es aquel paralelogramo que solamente es equiángulo.

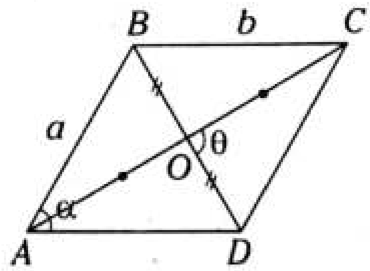


$a \neq b,\ \alpha=90°$

$\rightarrow$ $\boxed{\theta \neq 90°}$

Rombo

Es aquel paralelogramo que solamente es equilátero.

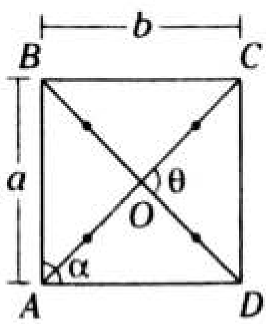


$a=b,\ \alpha \neq 90°$

$\rightarrow$ $\boxed{\theta=90°}$

Cuadrado

Es el paralelogramo que es equilátero y equiángulo a la vez.

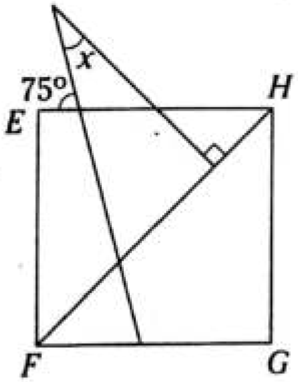


$a=b,\ \alpha=90°$

$\rightarrow$ $\boxed{\theta=90°}$

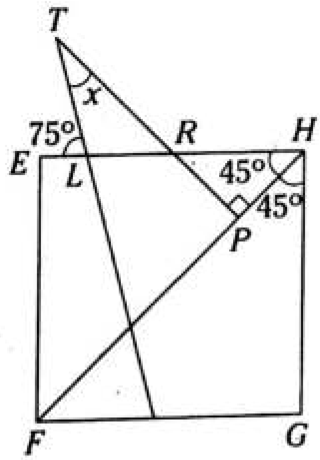
Problema N.° 1

En la figura, *EFGH* es un cuadrado. Halle el valor de *x*.



UNMSM 1996

Resolución



Nos piden *x*.

Como *EFGH* es un cuadrado

$\rightarrow$ $m\sphericalangle EHF = m\sphericalangle GHF = 45°$

Observamos de *L*

$m\sphericalangle TLR + m\sphericalangle TLE = 180°$

$m\sphericalangle TLR + 75° = 180°$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle TLR = 105°$

Aplicando ⋈

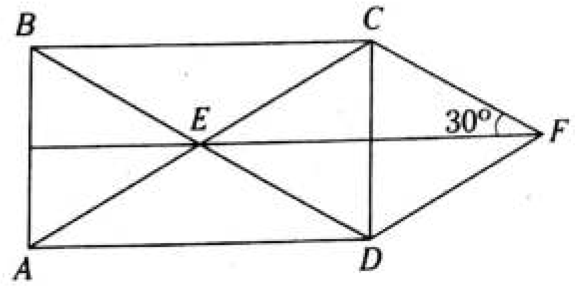
$x + m\sphericalangle TLR = m\sphericalangle RHF + RPH$

$x + 105° = 45° + 90°$

$\therefore$ $x = 30°$

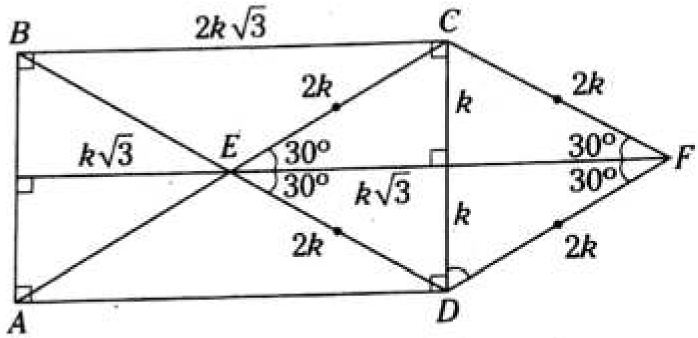
Problema N.° 2

En la figura, la razón entre el perímetro del rectángulo *ABCD* y el perímetro del rombo *ECFD* es



UNMSM 1997

Resolución



Nos piden $\dfrac{2p_{ABCD}}{2p_{ECFD}}$

Del rombo *ECFD*

$m\sphericalangle CFE = m\sphericalangle DFE = 30°$ y

$m\sphericalangle CEF = m\sphericalangle DEF = 30°$

Sea $CF = 2k$. (En los ⊿ notables de 30° y 60°)

$2p_{ABCD} = 2k + 2k + 2k\sqrt{3} + 2k\sqrt{3} = 4k(1+\sqrt{3})$

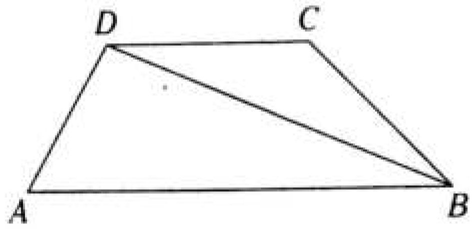
$2p_{ECFD} = 2k + 2k + 2k + 2k = 8k$

$\rightarrow$ $\dfrac{2p_{ABCD}}{2p_{ECFD}} = \dfrac{4k(\sqrt{3}+1)}{8k}$

$\therefore$ $\dfrac{2p_{ABCD}}{2p_{ECFD}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

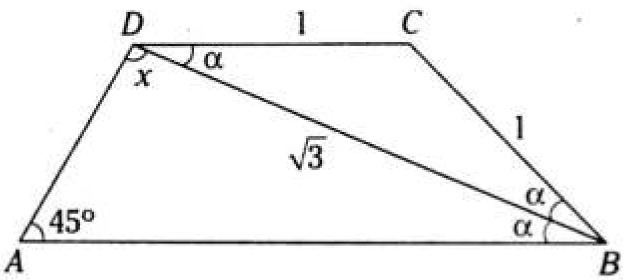
Problema N.° 3

En la figura, $ABCD$ es un trapecio, $CB=CD=1$ m, $BD=\sqrt{3}$ m y la medida del ángulo BAD es 45°. Halle la medida del ángulo ADB.



UNMSM 2010-II

Resolución



Nos piden $m\sphericalangle ADB=x$.

Del $\triangle DCB$

$m\sphericalangle CDB=m\sphericalangle CBD=\alpha$

Del dato $\overline{DC}//\overline{AB}$

$m\sphericalangle ABD=m\sphericalangle CDB \rightarrow m\sphericalangle ABD=\alpha$

$\triangle ABD$ (suma de medidas angulares internas)

$x+45°+\alpha=180°$ (I)

$\triangle DCB$ isósceles es notable

$DB=\sqrt{3}DC$

$\rightarrow \alpha=30°$ (II)

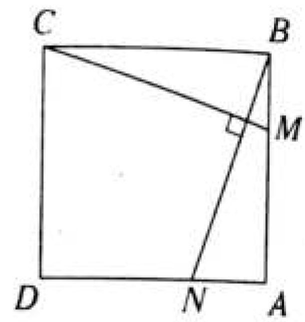
Reemplazamos (II) en (I)

$x+45°+30°=180°$

$\therefore x=105°$

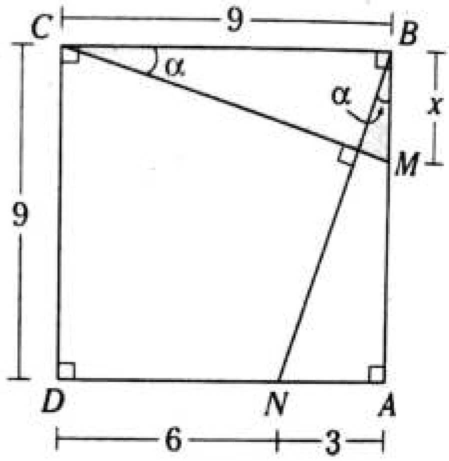
Problema N.° 4

En la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 9 m y $DN=6$ m. Halle BM.



UNMSM 2011-I

Resolución



Nos piden $BM=x$.

Como $ABCD$ es un cuadrado

$\rightarrow AB=BC=CD=DA=9$

Completamos las medidas angulares en función de α.

$\triangle CBM \cong \triangle BAN$ (A-L-A)

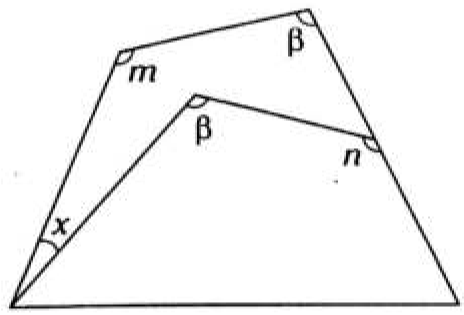
$\rightarrow BM=AN$

$\therefore x=3$ m

Problemas Propuestos

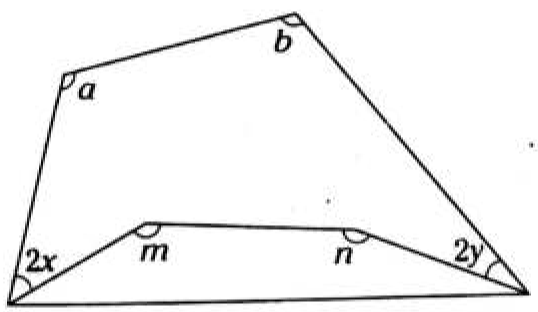
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, $n-m < 14°$. Calcule el mayor valor entero de x.



A) 15° B) 13° C) 14°
D) 12° E) 11°

2. Del gráfico, $m+n-(a+b) > 96°$. Calcule el menor valor entero de $x+y$.



A) 51° B) 50° C) 49°
D) 48° E) 47°

3. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, donde $m\sphericalangle BAD=90°$, AB, BC y CD toman valores consecutivos, $AB+BC+CD=6$ y BD toma el mínimo valor entero. Calcule el perímetro de la región triangular BCD.

A) 5 B) 7 C) 8
D) 10 E) 11

4. En un trapezoide simétrico $ABCD$, el perímetro de la región triangular equilátera ABD es 24 cm y BC toma el menor valor entero. Calcule la $m\sphericalangle BCD$.

A) 37° B) 53° C) 60°
D) 90° E) 106°

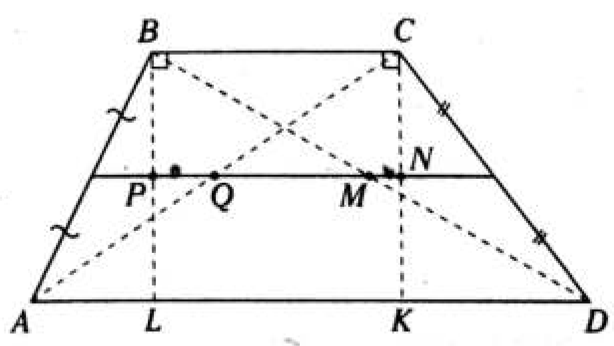
5. En un trapecio $ABCD$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$), $AC+BD=14$ y $AD=2(BC)$. Calcule el mayor valor entero de AD.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

6. En un trapecio isósceles $ABCD$ se ubica el punto medio K de la base menor BC, la longitud de la base media relativa a DA del triángulo AKD es igual a BA y $AB=5$. Calcule la longitud de la base media del trapecio $ABCD$ si $m\sphericalangle ABK=127°$.

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

7. Del gráfico $\overline{BC}//\overline{AD}$, AL, KD y LK toman valores consecutivos y $AD=9$. Calcule PQ/MN.



A) 4/3 B) 3/2 C) 2
D) 2,5 E) 5/3

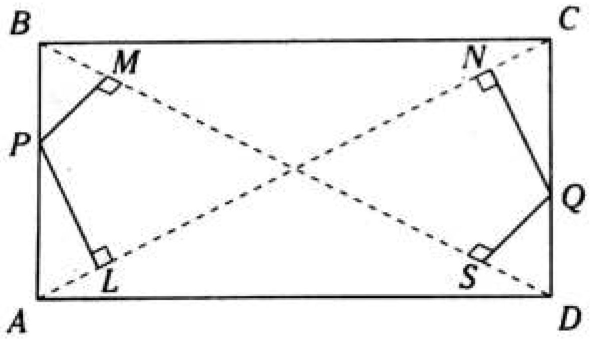
8. En un romboide $ABCD$ se ubican los puntos L y K en $\overline{BC}$, tal que $BL=LK=KC$. Luego se ubican los puntos medios S y M de $\overline{LD}$ y $\overline{KA}$, respectivamente. Calcule la longitud de la base media de $BKSM$ si $AD=6$ cm.

A) 4,5 cm B) 4 cm C) 3,5 cm
D) 3 cm E) 2,5 cm

9. En un romboide $ABCD$ se ubican los puntos K y S en $\overline{BC}$, tal que $KS=2(BK)=2$, $BS=SC$, $m\sphericalangle BAS=m\sphericalangle DAS$. Calcule el mayor valor entero de KD.

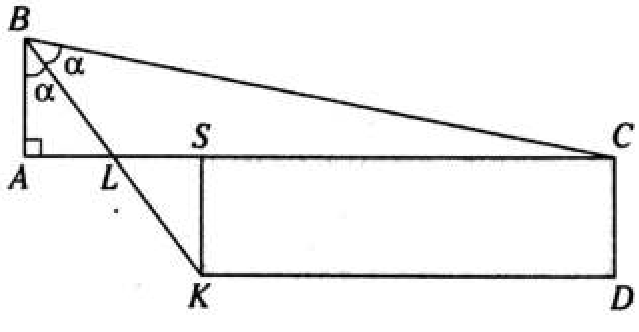
A) 11 B) 10 C) 7
D) 8 E) 9

10. Del gráfico, $ABCD$ es un rectángulo, $PM=2$, $PL=3$ y $NQ=4$. Calcule QS.



A) 0,5 B) 1 C) 1,2
D) 1,5 E) 1,8

11. Del gráfico, $AL=3$, $BL=KL$ y la longitud de una diagonal del rectángulo $SCDK$ es 10. Calcule la $m\sphericalangle BCK$.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

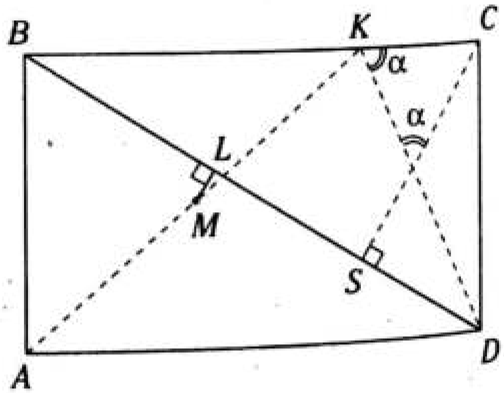
12. En un cuadrado $ABCD$, al prolongar $\overline{AD}$, se ubican los puntos M y N, tal que $MN=AB=2(DM)=2\sqrt{2}$ cm; luego se construye el cuadrado $MPNQ$. Calcule el menor valor de BP.

A) $2\sqrt{7}$ cm
B) $\sqrt{30}$ cm
C) $4\sqrt{2}$ cm
D) $\sqrt{35}$ cm
E) $\sqrt{34}$ cm

13. En un rectángulo $ABCD$ se ubica E en su región interior y se construye el rectángulo $DELK$, que es congruente al anterior, $m\sphericalangle CED=m\sphericalangle ECD$, $BE=CK$, $EL=4+2\sqrt{3}$ y $m\sphericalangle ELC=\frac{53°}{2}$. Calcule EC.

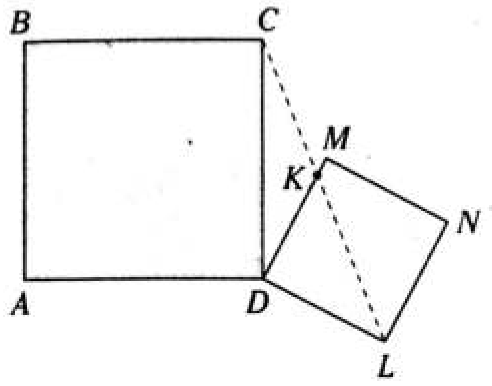
A) 3 B) 4 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 5

14. Del gráfico, $CK=2$, $CS=3$ y $AM=MK$. Calcule ML si $ABCD$ es un rectángulo.



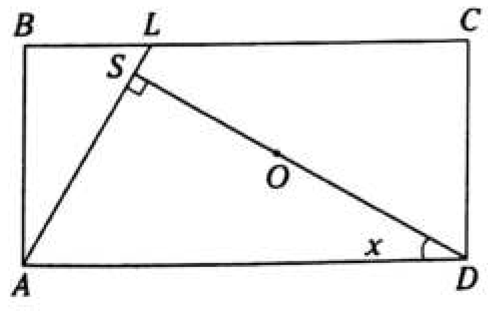
A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,8

15. Se muestran los cuadrados *ABCD* y *DMNL*, tal que $DK=3(MK)$ y $MN=5$. Calcule el menor valor entero del perímetro de la región cuadrilátera *ABCD*.



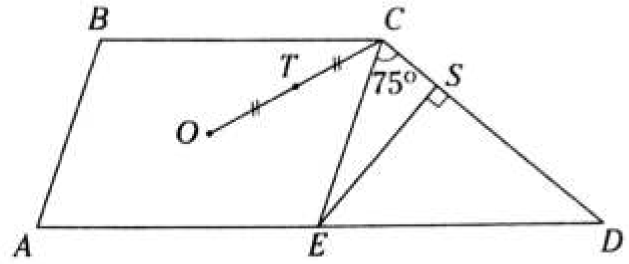
A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

16. Del gráfico, *O* es el centro del rectángulo, $AL=2(LB)$, $OS=4$ y *OD* toma el menor entero. Calcule x.



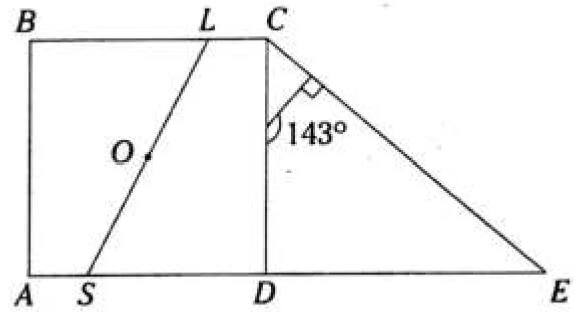
A) 5° B) 6° C) 7°
D) 8° E) 9°

17. Del gráfico, *O* es el centro del romboide *ABCE* y $CD=2(SE)=4$. Calcule la distancia de *T* a *ED*.



A) 3/2 B) 5/2 C) 2
D) 4/3 E) 5/4

18. Del gráfico, *O* es el centro del cuadrado y $BL=2(LC)=4$ cm. Calcule la longitud de la base media del trapecio mayor.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

NIVEL INTERMEDIO

19. Sea el cuadrado *ABCD*. En la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto *Q* y se construye el triángulo equilátero *APQ*, tal que $\overline{BC} \cap \overline{AP}=\{T\}$, $C \in \overline{PQ}$ y $\overline{TQ} \cap \overline{CD}=\{L\}$. Calcule $m\sphericalangle TLP$.

A) 60° B) 15° C) 45°
D) 75° E) 30°

20. En un trapecio rectángulo $ABCD$, recto en A y B, M es punto medio de $\overline{CD}$, $\overline{BM} \cap \overline{AC}=L$. Si $m\sphericalangle CBM=m\sphericalangle BAC+20°=35°$ y $BM=18$, calcule AL.

A) 9 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 18 E) 6

21. Sea $ABCD$ un rectángulo. En la región exterior relativa a $\overline{AD}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{AC} \cap \overline{BP}=M$. Si $m\sphericalangle BMC=m\sphericalangle BPD$, $AM=4$ y $PD=10$, calcule BD.

A) 7 B) 6 C) 5
D) 18 E) 14

22. En un paralelogramo $ABCD$ se traza $\overline{BH} \perp \overline{AD}$ ($H \in \overline{AD}$) y $\overline{BH} \cap \overline{AC}=\{L\}$.
Si $m\sphericalangle BCD=3m\sphericalangle CAD$, calcule LC/CD.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) $\frac{2}{3}$ E) 3

23. En un trapecio $ABCD$, $\overline{BC}//\overline{AD}$,

$\frac{CD}{10}=\frac{BC}{11}=\frac{AB}{12}$ y $AD=BC+CD$.

Calcule $m\sphericalangle BAD$.

A) 16° B) 30° C) 53°
D) 74° E) 37°

24. En un trapecio $ABCD$, las diagonales trisecan a la base media. Calcule la razón de las longitudes de las bases.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 3 E) $\frac{2}{3}$

25. En un rombo $ABCD$ se traza $\overline{BH} \perp \overline{AD}$, $H \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que $2(AH)=3(HD)$. Si $\overline{AC} \cap \overline{BH}=\{F\}$, calcule $m\sphericalangle CFD$.

A) 75° B) $\frac{143°}{2}$ C) $\frac{127°}{2}$
D) $\frac{137°}{2}$ E) $\frac{135°}{2}$

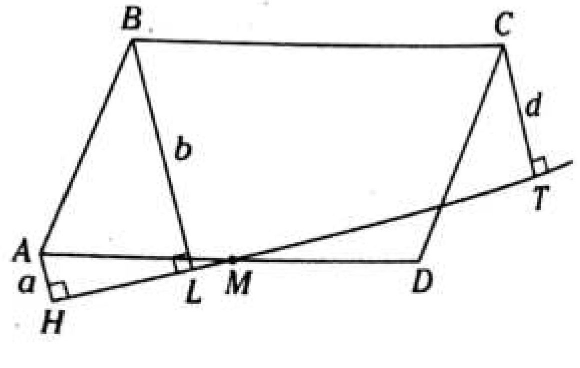
26. En un rombo $ABCD$ se ubica el punto T en $\overline{CD}$, tal que $\overline{TB} \cap \overline{AC}=\{F\}$. Si $m\sphericalangle CBF=2m\sphericalangle CAD$ y $FT=TD$, calcule $m\sphericalangle BAD$.

A) 30° B) 15° C) 53°/2
D) 45° E) 45°/2

27. En un romboide $ABCD$ se traza $\overline{BH}$ y $\overline{BM}$, los cuales son perpendiculares a $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, respectivamente (H en $\overleftrightarrow{AD}$ y M en $\overleftrightarrow{DC}$). La bisectriz del ángulo ADC interseca al lado BC en F. Si $BH=8$, $BM=14$, calcule la distancia de F hacia $\overline{AB}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 11 E) 5

28. Sea $ABCD$ un paralelogramo, tal que $AM=MD$, $BL=b$, $AH=a$ y $CT=d$. Indique la relación correcta.



A) $a=b+d$ B) $2a=b+d$ C) $2a=b-d$
D) $3a=b+d$ E) $b=a+d$

Circunferencia

Capítulo V

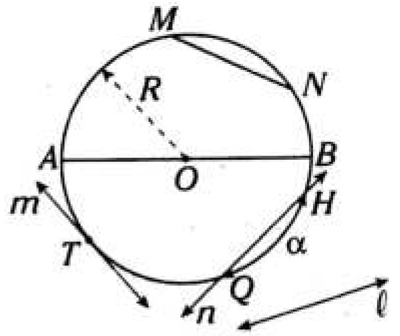
Objetivos

- Estudiar la definición de la circunferencia y los elementos asociados a ella.
- Utilizar las diferentes relaciones entre los elementos de una circunferencia para calcular las medidas angulares de los arcos utilizando los ángulos en la circunferencia.

Definición

Es la figura geométrica plana cuyos puntos equidistan a un punto fijo del mismo plano.

El punto del cual equidistan los puntos de una circunferencia se denomina centro y a la distancia entre él y un punto de la circunferencia se le denomina radio.



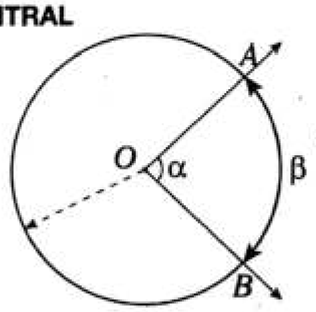
Elementos asociados

- Centro: O
- Radio: $\overline{OA}$ ($OA=R$)
- Cuerda: $\overline{MN}$
- Diámetro: $\overline{AB}$, $AB=2R$
- Recta secante: $\overleftrightarrow{n}$
- Recta tangente: $\overleftrightarrow{m}$
- Recta exterior: $\overleftrightarrow{\ell}$
- Punto de tangencia: T
- Arco AM (parte de una circunferencia): $\overset{\frown}{AM}$

Ángulos asociados a la circunferencia

Son aquellos ángulos cuyas medidas guardan relación con las medidas de los arcos.

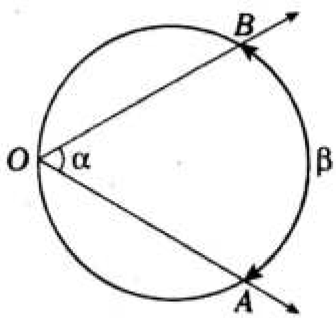
Ángulo central



$\measuredangle AOB$: ángulo central

Se cumple $\boxed{\alpha=\beta}$

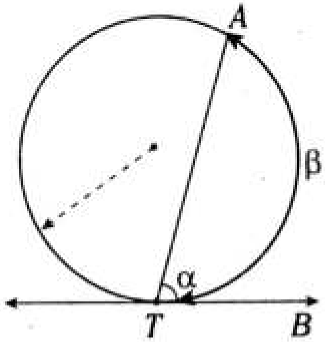
Ángulo inscrito



$\measuredangle AOB$: ángulo inscrito

Se cumple $\boxed{\alpha=\frac{\beta}{2}}$

Ángulo semiinscrito



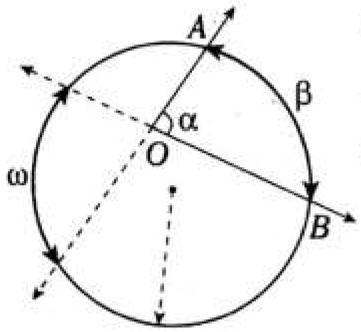
T: punto de tangencia

$\measuredangle ATB$: ángulo semiinscrito

Se cumple

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta}{2}}$$

Ángulo interior



O: punto interior

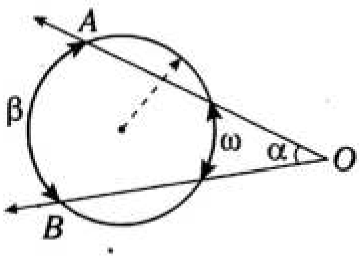
$\measuredangle AOB$: ángulo interior

Se cumple

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta+\omega}{2}}$$

Ángulo exterior

a. Formado por dos lados secantes a la circunferencia.



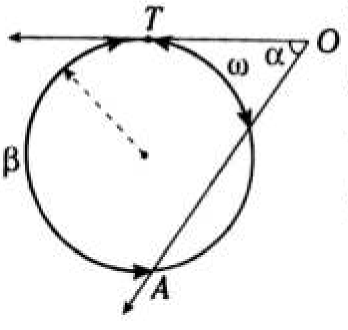
O: punto exterior

$\measuredangle AOB$: ángulo exterior

Se cumple

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

b. Formado por un lado tangente y el otro secante a la circunferencia.



T: punto de tangencia

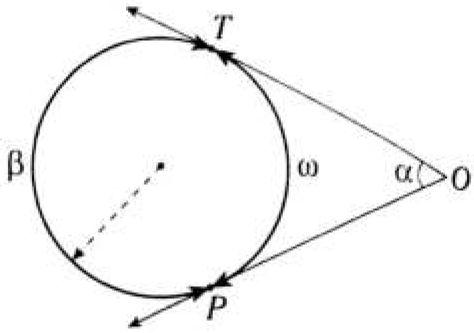
O: punto exterior

$\measuredangle AOT$: ángulo exterior

Se cumple

$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

c. Formado por dos lados tangentes a la circunferencia.



T y P: puntos de tangencia

O: punto exterior

$\measuredangle TOP$: ángulo exterior

Se cumple

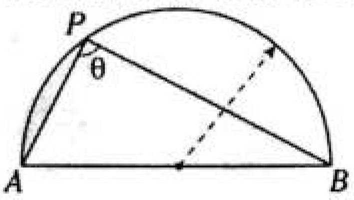
$$\boxed{\alpha=\frac{\beta-\omega}{2}}$$

Además

$$\boxed{\alpha+\omega=180^\circ}$$

Nota

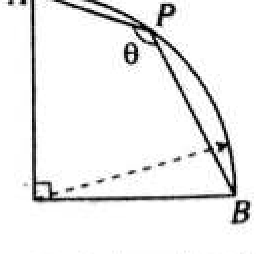
- En la semicircunferencia ($\overset{\frown}{AB}$)



Si P es un punto de la semicircunferencia y $\overline{AB}$ es diámetro, entonces

$$\boxed{\theta=90^\circ}$$

- En el cuadrante ($\overset{\frown}{AB}$)

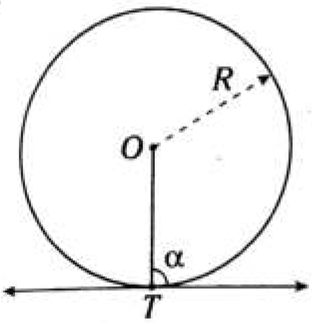


Si P es punto del cuadrante, entonces

$$\boxed{\theta=135^\circ}$$

Propiedades fundamentales

1.



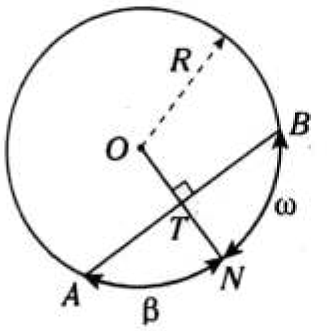
Si T es punto de tangencia, se cumple

$\boxed{\alpha=90^\circ}$

Además

$\boxed{OT=R}$

2.



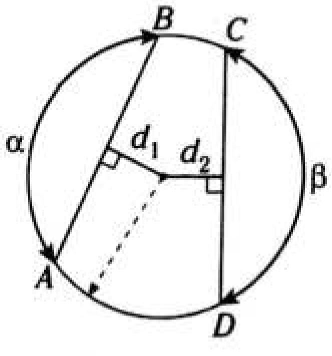
Si $\overline{ON}\perp\overline{AB}$, se cumple

$\boxed{AT=TB}$

Además

$\boxed{\beta=\omega}$

3.



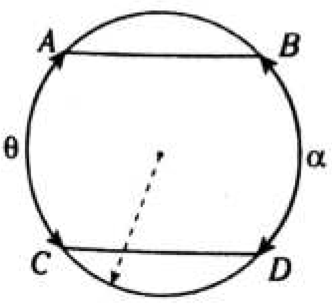
Si $AB=CD$, se cumple

$\boxed{\alpha=\beta}$

Además

$\boxed{d_1=d_2}$

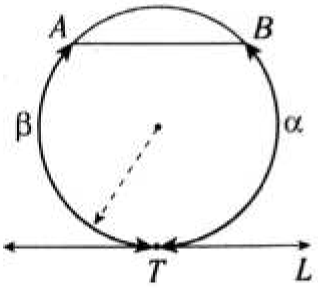
4.



Si $\overline{AB}//\overline{CD}$, se cumple

$\boxed{\alpha=\theta}$

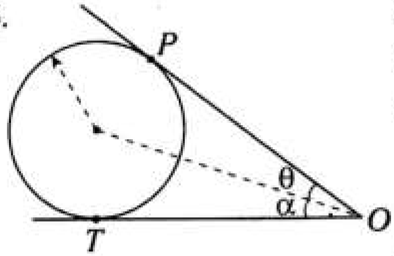
También



Si $\overline{AB}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y T es punto de tangencia, se cumple

$\boxed{\alpha=\beta}$

5.



Si T y P son puntos de tangencia, se cumple

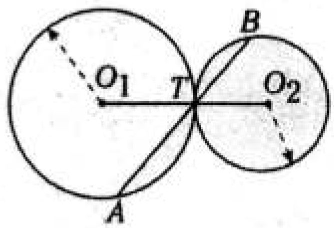
$\boxed{OT=OP}$

Además

$\boxed{\alpha=\theta}$

Nota

- Circunferencias tangentes exteriores

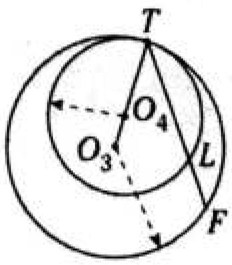


Se cumple que O_1, T y O_2 son colineales.

Además

$m\overset{\frown}{AT}=m\overset{\frown}{TB}$

- Circunferencias tangentes interiores



Se cumple que O_3, O_4 y T son colineales.

Además

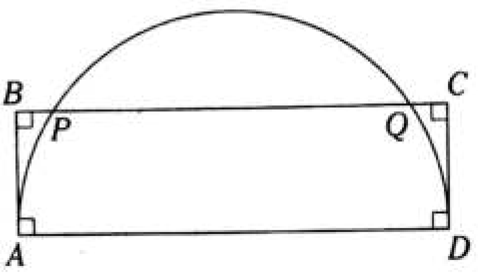
$m\overset{\frown}{TL}=m\overset{\frown}{TF}$

En ambos casos, T es punto de tangencia.

Problemas Resueltos

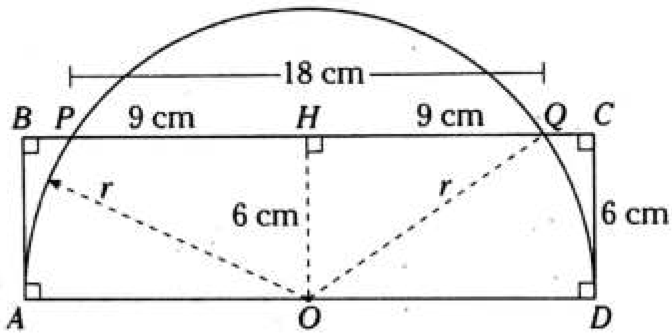
Problema N.º 1

En la figura, PQ=18 cm y CD=6 cm. Calcule la longitud del diámetro $\overline{AD}$ de la semicircunferencia.



UNMSM 2009-I

Resolución



Nos piden $AD=x$.

Dato: PQ=18 cm

CD=6 cm

Se sabe que el diámetro

$x=2r$

Trazamos $\overline{OH}\perp\overline{PQ}$; por teorema

$PH=HQ$

$\rightarrow$ HQ=9 cm

En el $\triangle OHQ$, por teorema de Pitágoras,

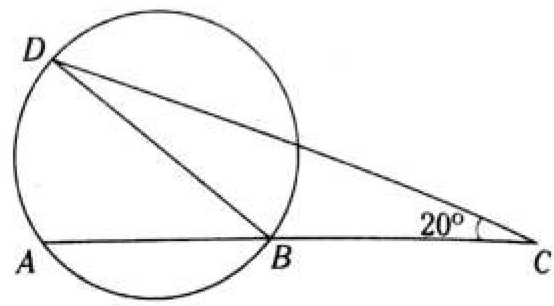
$r^2=(6\text{ cm})^2+(9\text{ cm})^2$

$\rightarrow$ $r=\cancel{2}\sqrt{13}$ cm $3\sqrt{13}$

$\therefore$ $x=\cancel{4}\sqrt{13}$ cm $x=6\sqrt{13}$

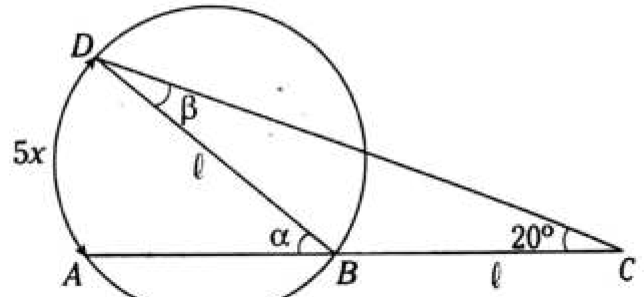
Problema N.º 2

En la figura, $BD=BC$ y la medida del arco $\widehat{AD}$ es igual a $5x$. Halle el valor de x.



UNMSM 2010-I

Resolución



Nos piden x.

Datos: $m\widehat{AD}=5x$

$BD=BC$

En la circunferencia, por ángulo inscrito

$$\alpha=\frac{5x}{2} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle$isósceles DBC

$\alpha=\beta+20°$

Pero como $\beta=20°$

$$\rightarrow \quad \alpha=40° \qquad \text{(II)}$$

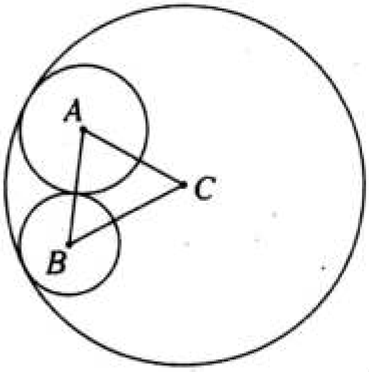
Reemplazamos (II) en (I)

$$40°=\frac{5x}{2}$$

$\therefore$ $x=16°$

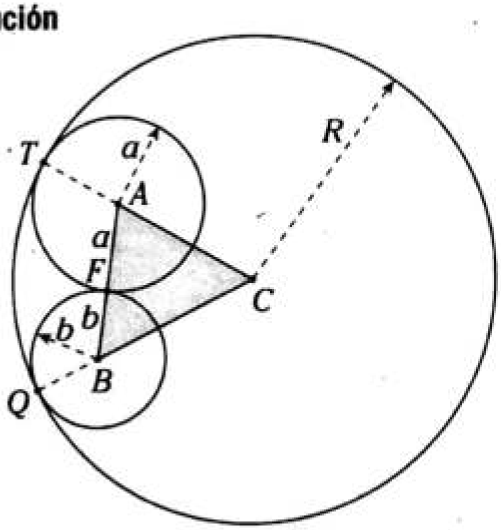
Problema N.º 3

En la figura, los puntos A, B y C son centros de las circunferencias tangentes. Si el radio de la circunferencia mayor es 5 cm, halle el perímetro del triángulo ABC.



UNMSM 2010-I

Resolución



Nos piden x.

Donde x es perímetro de la región ▲ABC.

Dato: $R=5$ cm

Considerando que Q, F y T son puntos de tangencia, sabemos que

T, A y C son colineales

Q, B y C son colineales

A, F y B son colineales

$\rightarrow$ $AC=TC-AT=5\text{ cm}-a$

$BC=QC-QB=5\text{ cm}-b$

$AB=a+b$

En ▲ABC

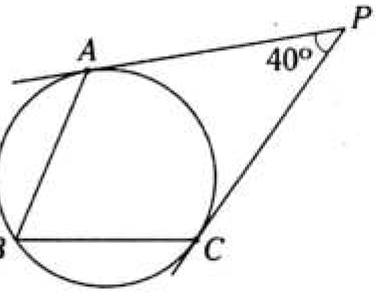
$x=AC+BC+AB$

$x=5\text{ cm}-a+5\text{ cm}-b+a+b$

$\therefore$ $x=10$ cm

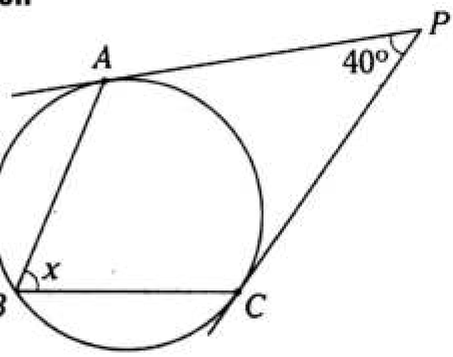
Problema N.º 4

En la figura, A y C son puntos de tangencia. Calcule la medida del ángulo inscrito ABC en la circunferencia.



UNMSM 2010-II

Resolución



Nos piden x.

Por ángulo inscrito

$$x=\frac{m\overset{\frown}{AC}}{2} \qquad \text{(I)}$$

Por teoremas, en la circunferencia

$$m\overset{\frown}{AC}+40°=180°$$

$$\rightarrow \quad m\overset{\frown}{AC}=140° \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$x=\frac{140°}{2}$$

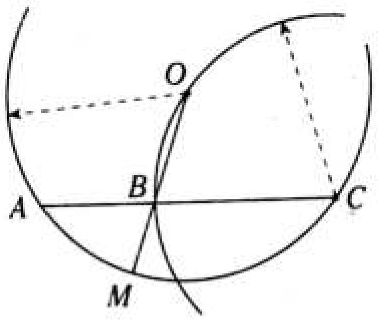
$\therefore$ $x=70°$

Problemas Propuestos

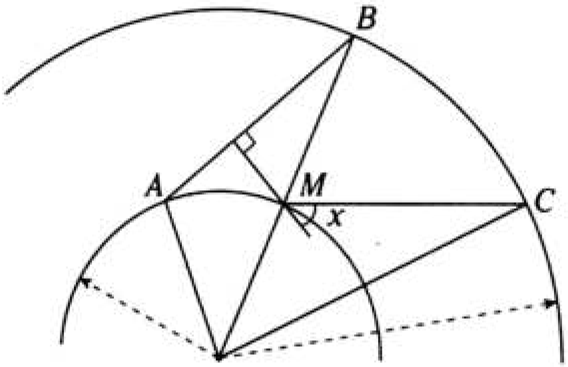
NIVEL BÁSICO

1. En el gráfico, $m\widehat{OB} = 40°$. Calcule $m\widehat{AM}$.

A) 40°
B) 20°
C) 50°
D) 60°
E) 30°

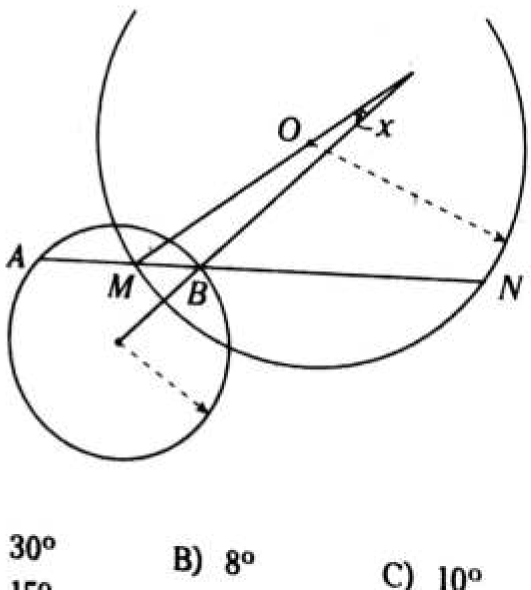


2. En el gráfico, $m\widehat{AM} = m\widehat{BC} = 40°$. Calcule x.



A) 20° B) 50° C) 25°
D) 45° E) 30°

3. En el gráfico, $m\widehat{MN} - m\widehat{AB} = 30°$. Calcule x.



A) 30° B) 8° C) 10°
D) 15° E) 45°/2

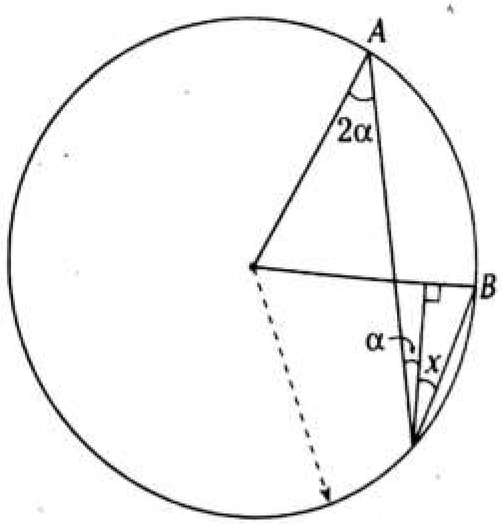
4. Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB. Se traza la cuerda $\overline{CE}$, tal que $\overline{CE} // \overline{AB}$. En $\widehat{CE}$ y $\overline{AE}$ se ubican los puntos D y F, respectivamente, tal que $CDEF$ es un paralelogramo. Si $m\widehat{AC} = 40°$, calcule $m\measuredangle DCF$.

A) 70° B) 20° C) 50°
D) 30° E) 40°

5. En una circunferencia se traza el diámetro AB, y las cuerdas TB y AQ, las cuales se intersecan en M. Si $m\measuredangle AMT = 60°$ y el radio de dicha circunferencia es 6, calcule la distancia del centro de la circunferencia hacia la cuerda TQ.

A) 6 B) 3 C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

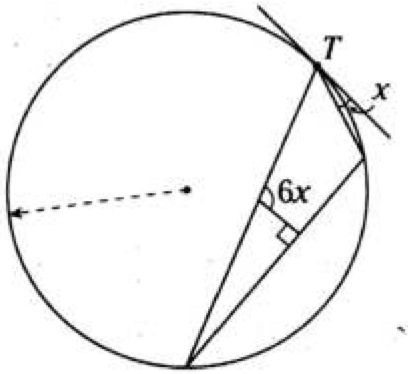
6. En el gráfico, $m\widehat{AB} = 3\alpha$. Calcule x.



A) $\dfrac{45°}{2}$ B) $\dfrac{45°}{4}$ C) $\dfrac{53°}{2}$

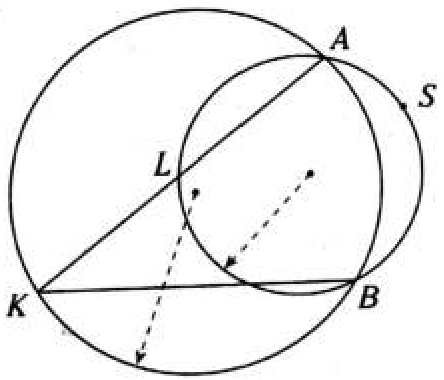
D) $\dfrac{53°}{4}$ E) $\dfrac{37°}{4}$

7. Del gráfico, T es punto de tangencia. Calcule x.



A) 16° B) 17° C) 18°
D) 19° E) 20°

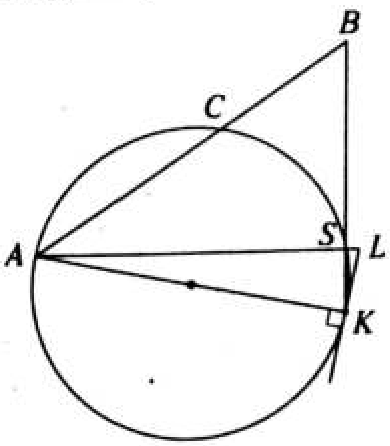
8. Del gráfico, $2(m\widehat{AB}) = m\widehat{ASB}$ y $KL=1$. Si KB toma un valor entero, calcule $m\widehat{AB}$.



A) 100° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 135°

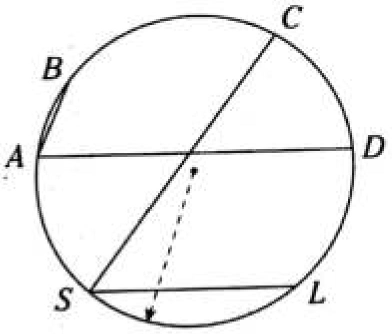
9. Del gráfico, $AS=8$, $AC=CB$ y AC toma el menor valor entero. Calcule $m\sphericalangle SKL$.
(K: punto de tangencia)

A) 14°
B) 15°
C) 16°
D) 17°
E) 18°

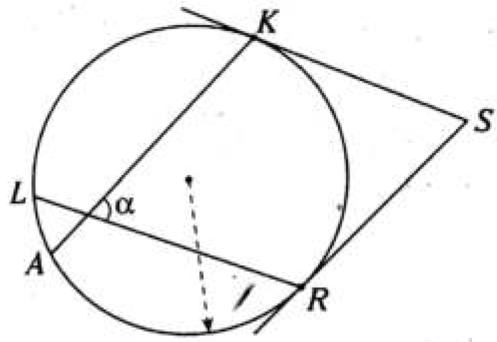


10. Del gráfico, $\overline{AB} // \overline{SC}$, $\overline{AD} // \overline{SL}$,
$m\widehat{AB} = \dfrac{m\widehat{CD}}{2} = \dfrac{m\widehat{SL}}{3} = \alpha$ y $m\widehat{AS} > 60°$. Si α toma el mayor valor entero, calcule $m\widehat{DC}$.

A) 52°
B) 54°
C) 56°
D) 58°
E) 60°

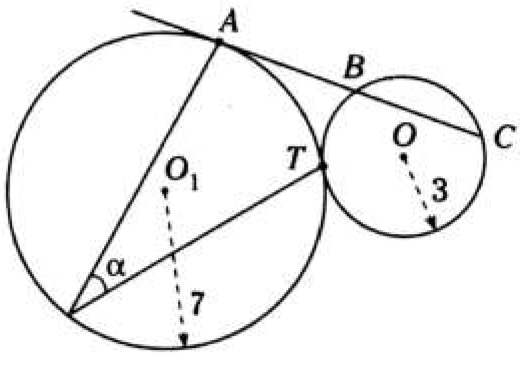


11. Del gráfico, $m\sphericalangle KSR = 2(m\widehat{AL})$ y $\alpha > m\widehat{AL}$. Calcule el mayor valor entero de la $m\widehat{AL}$.



A) 59° B) 58° C) 57°
D) 56° E) 55°

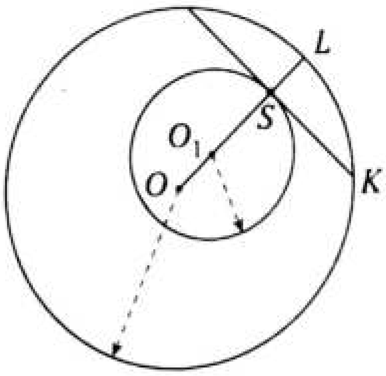
12. Del gráfico, A y T son puntos de tangencia, y $\alpha = \dfrac{53°}{2}$. Calcule BC.



A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{2}$

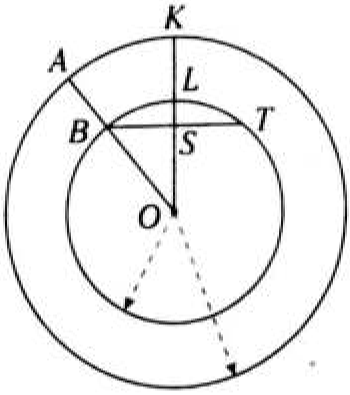
13. Del gráfico, S es punto de tangencia, el radio mayor es 6 cm y el radio menor es 2 cm, y $OO_1=LS$. Calcule LK.

A) $2\sqrt{3}$ cm
B) $2\sqrt{5}$ cm
C) $2\sqrt{6}$ cm
D) $2\sqrt{7}$ cm
E) $4\sqrt{2}$ cm

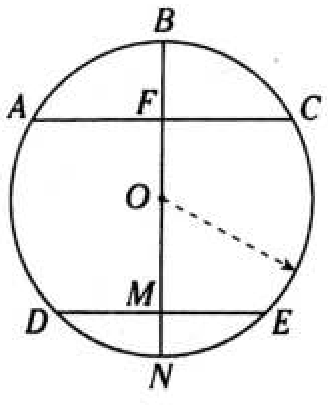


14. Del gráfico, $m\widehat{BL}=m\widehat{LT}$, $AB=BO=10$ y $BT=12$. Calcule $\dfrac{LK}{LS}$.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2



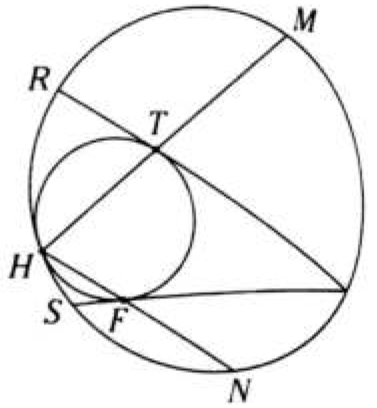
15. Si $BF=FO$, $2(OM)=3(MN)$, $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}$ y $m\widehat{DN}=m\widehat{NE}$, calcule $m\widehat{CE}$.



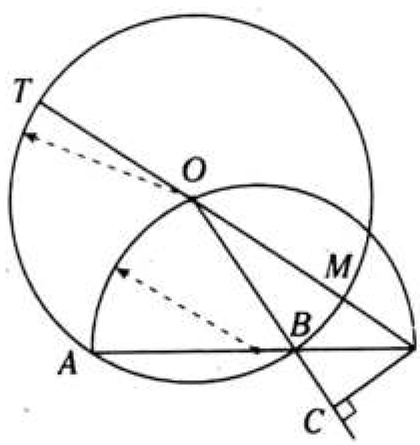
A) 75°
B) 74°
C) 90°
D) 67°
E) 72°

16. En el gráfico, $m\widehat{MN}=2m\widehat{RS}=2x$, y T, F y H son puntos de tangencia. Calcule x.

A) 37°
B) 72°
C) 60°
D) 74°
E) 90°



17. Si $OB=2(BC)$, calcule $m\widehat{AT}-m\widehat{BM}$.



A) 60°
B) 53/°2
C) 37°
D) 53°
E) 37°/2

NIVEL INTERMEDIO

18. Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan los segmentos tangentes PA y PB (A y B son puntos de tangencia). Luego se traza la secante PST, donde S y T son los puntos de intersección. El punto R se ubica en $\overline{ST}$, tal que $AP=RP$. Si $m\measuredangle ARB=110°$, calcule $m\widehat{ATB}$.

A) 330°
B) 70°
C) 220°
D) 210°
E) 320°

19. Exteriormente al cuadrado $ABCD$ se construye una semicircunferencia de diámetro BC. En el arco BC se ubica el punto L. Si $AL=2(BL)$, calcule $m\sphericalangle ALC$.

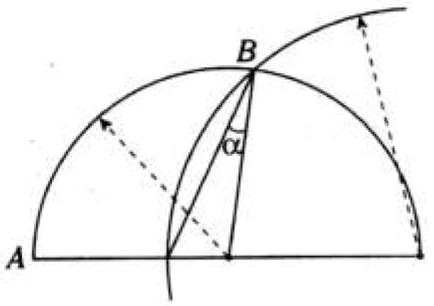
A) 60° B) 53°/2 C) 37°/2
D) 120° E) 90°

20. En un cuadrante AB de radios OA y OB se ubica el punto N y se traza $\overline{OM}\perp\overline{AN}$, $M\in\overline{AN}$ Si $MB=5(AM)$, calcule $m\sphericalangle OMB$.

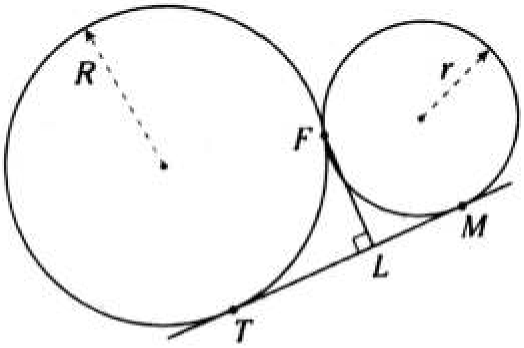
A) 30° B) 37° C) 74°
D) 16° E) 53°

21. Si $m\widehat{AB}=\alpha+71°$, calcule α.

A) 21°
B) 19°
C) 15°
D) 14°
E) 13°

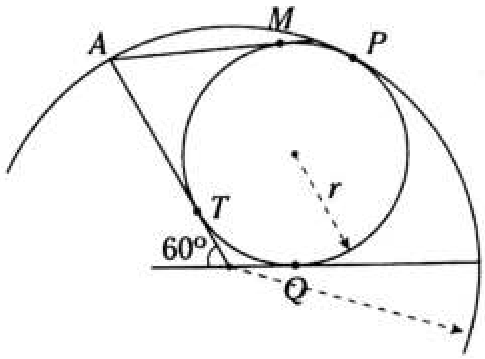


22. Sean F, T y M puntos de tangencia. Si $R=4$ y $r=2$, calcule FL.



A) 3 B) $\dfrac{9}{5}$ C) $\dfrac{8}{3}$
D) $\dfrac{9}{4}$ E) $\dfrac{8}{5}$

23. Los puntos Q, T, M y P son de tangencia. Si $r=\sqrt{3}$, calcule AM.

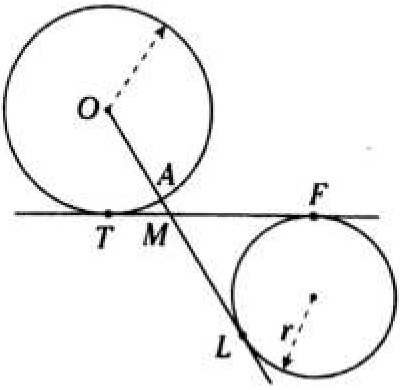


A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-1$ C) 3
D) $1+\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}-1$

24. Sean las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ tangentes interiores en el punto S. Desde el centro O de $\mathscr{C}_1$ se trazan los segmentos tangentes OF y OP a la otra circunferencia, además F y P son los puntos de tangencia. Si la razón de radios es de 3/8, calcule la $m\sphericalangle FOP$.

A) 60° B) 74° C) 53°
D) 37° E) 75°

25. Sean T, F y L puntos de tangencia. $OA=4(AM)=4$ y $MF=6$. Calcule r.

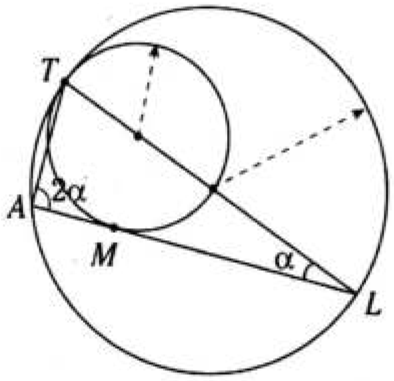


A) 3 B) 2 C) 1
D) 1,5 E) 2,5

26. Se tienen las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ tangentes exteriores, cuyos radios miden 3 y 4, respectivamente. Se traza el segmento tangente común $\overline{AB}$ (A y B son puntos de tangencia, respectivamente). Si $\overline{AO_2}$ interseca a la $\mathscr{C}_1$ en el punto M, y O_2 es centro de $\mathscr{C}_2$, calcule m$\widehat{AM}$.

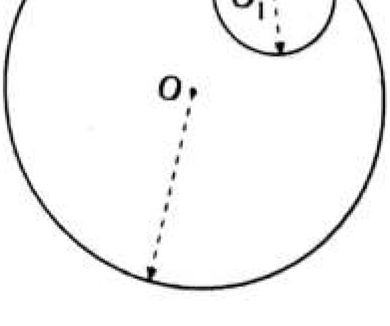
A) 37° B) 53° C) 60°
D) 37°/2 E) 30°

27. En el gráfico, T y M son puntos de tangencia. Si TA=6 y AM=4, calcule TL.



A) 5 B) $2\sqrt{6}$ C) 24
D) 6 E) 10

28. Del gráfico, los radios de las circunferencias son de 6 y 2 cm. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{LO}$ y $\overline{NO}_1$.



A) 1 B) 1,2 C) 1,6
D) 2 E) 2,4

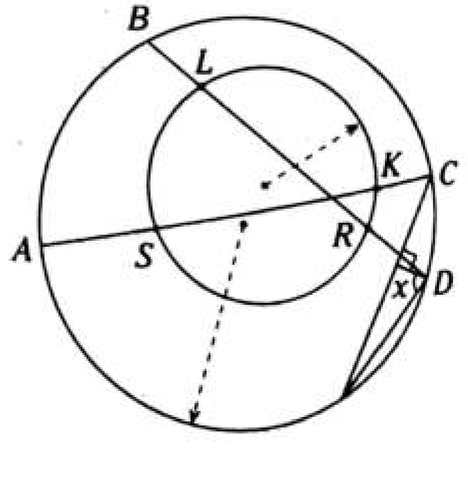
29. Se tienen dos circunferencias no ortogonales $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de centros O_1 y O_2, que son secantes en A y B. Si la suma de los radios de dichas circunferencias es 7, indique la cantidad de valores enteros que puede tomar O_1O_2.

A) 7 B) 5 C) 6
D) 4 E) 3

30. Se tienen dos circunferencias ortogonales congruentes que se intersecan en A y B. Si el perímetro de la región triangular O_1AO_2 es $2(2+\sqrt{2})$ cm (O_1 y O_2 son centros de circunferencias), calcule la distancia entre los centros.

A) 2 cm B) 3 cm C) $\sqrt{2}$ cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) $2\sqrt{2}$ cm

31. Del gráfico, $m\widehat{LS} = 2(m\widehat{CD})$.
Si $m\widehat{AB} - m\widehat{KR} = 48°$, calcule x.



A) 56° B) 60° C) 62°
D) 64° E) 66°

Cuadrilátero inscrito en la circunferencia

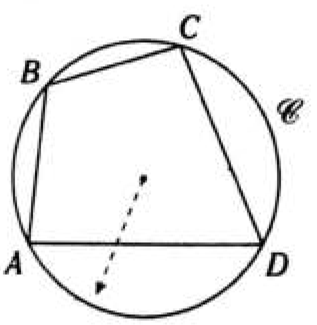
Capítulo VI

Objetivos

- Conocer las definiciones del cuadrilátero inscrito e inscriptible.
- Establecer los principales teoremas del cuadrilátero inscrito e inscriptible.

Definición

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.



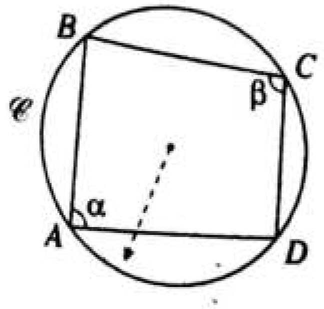
Si $A, B, C, D \in \mathscr{C}$

$\rightarrow$ $\square ABCD$ está inscrito en $\mathscr{C}$.

Generalmente al cuadrilátero inscrito en una circunferencia se le llama cuadrilátero inscrito.

Teoremas

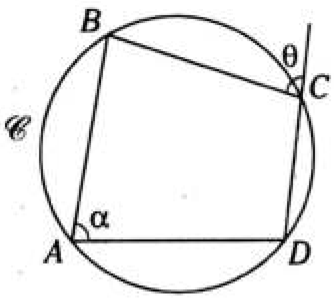
1. En todo cuadrilátero inscrito, la suma de las medidas de dos ángulos internos opuestos es 180°.



$\square ABCD$: inscrito en $\mathscr{C}$

$\rightarrow$ $\boxed{\alpha+\beta=180°}$

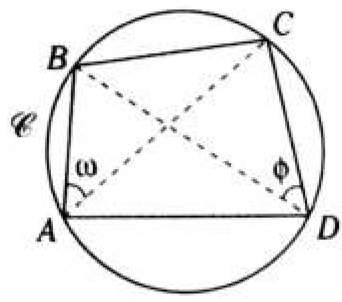
2. En todo cuadrilátero inscrito, la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior opuesto.



$\square ABCD$: inscrito en $\mathscr{C}$

$\rightarrow$ $\boxed{\alpha=\theta}$

3. En todo cuadrilátero inscrito, las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos.



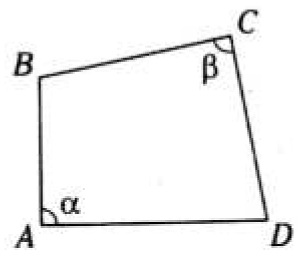
$\square ABCD$: inscrito en $\mathscr{C}$

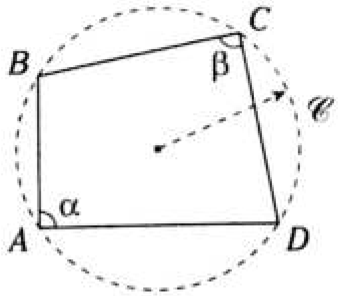
$\rightarrow$ $\boxed{\omega=\phi}$

Cuadrilátero inscriptible

Es aquel cuadrilátero por cuyos vértices puede pasar una misma circunferencia, para ello se debe cumplir por lo menos uno de los teoremas del cuadrilátero inscrito.

1.

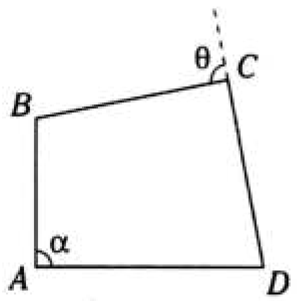


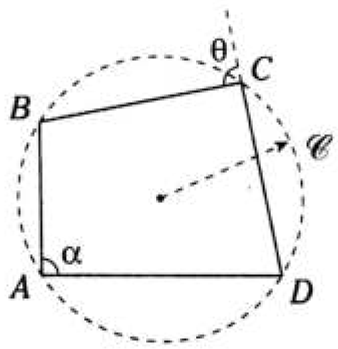


Si $\alpha+\beta=180°$
$\rightarrow$ $\square ABCD$ es inscriptible.

$\mathscr{C}$: Las líneas discontinuas representan una circunferencia imaginaria.

2.

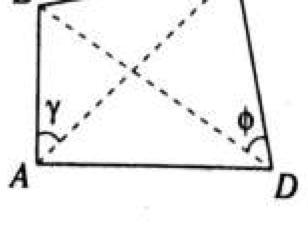


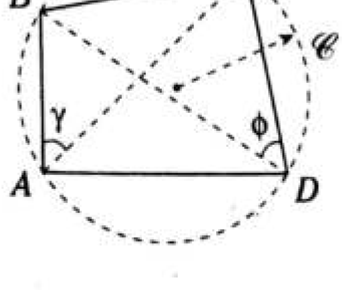


Si $\alpha=\theta$
$\rightarrow$ $\square ABCD$ es inscriptible.

$\mathscr{C}$: Las líneas discontinuas representan una circunferencia imaginaria.

3.



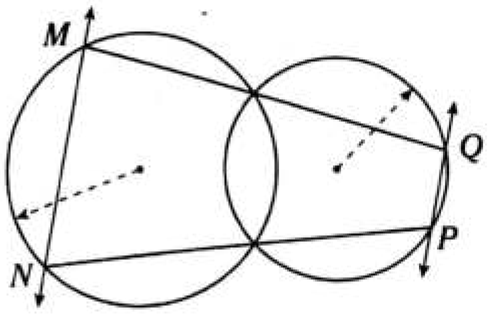


Si $\phi=\gamma$
$\rightarrow$ $\square ABCD$ es inscriptible.

$\mathscr{C}$: Las líneas discontinuas representan una circunferencia imaginaria.

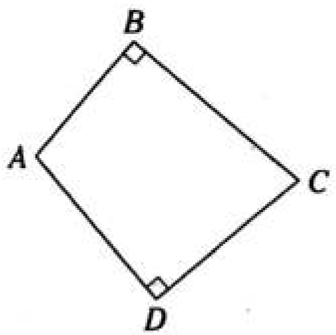
TEOREMAS

1.



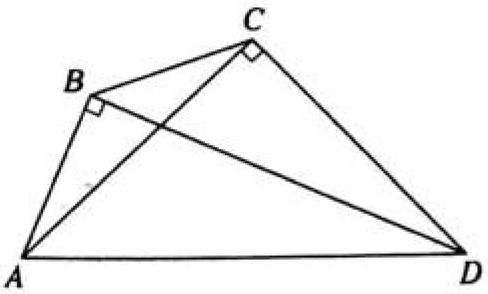
Del gráfico, $\overline{MN} // \overline{PQ}$.

2.



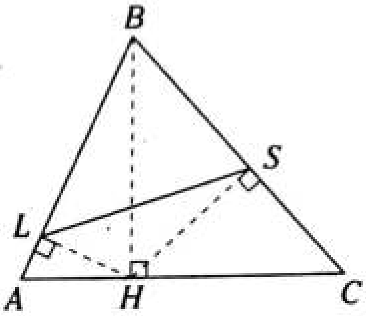
⏢*ABCD* es inscriptible.

3.



⏢*ABCD* es inscriptible.

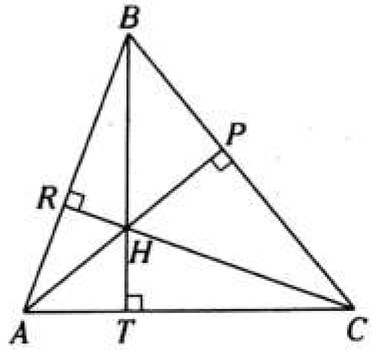
4.



⏢*LBSH* es inscriptible y

⏢*ALSC* es inscriptible.

5.



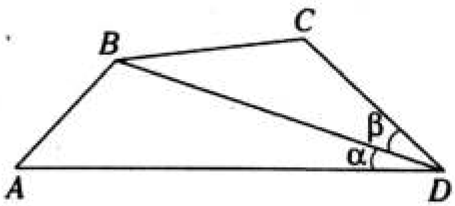
⏢*ARHT* es inscriptible.

⏢*CPHT* es inscriptible.

⏢*BRHP* es inscriptible.

6. Si $\alpha=\beta$,

$AB=BC$ y $AD \neq DC$

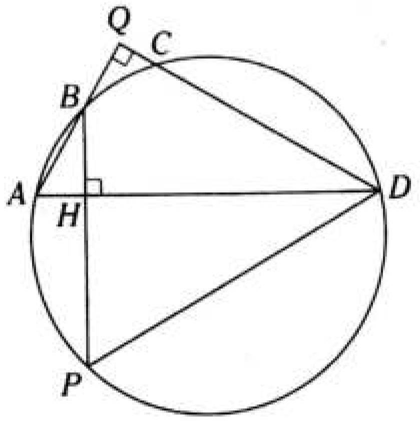


→ ⏢*ABCD* es inscriptible.

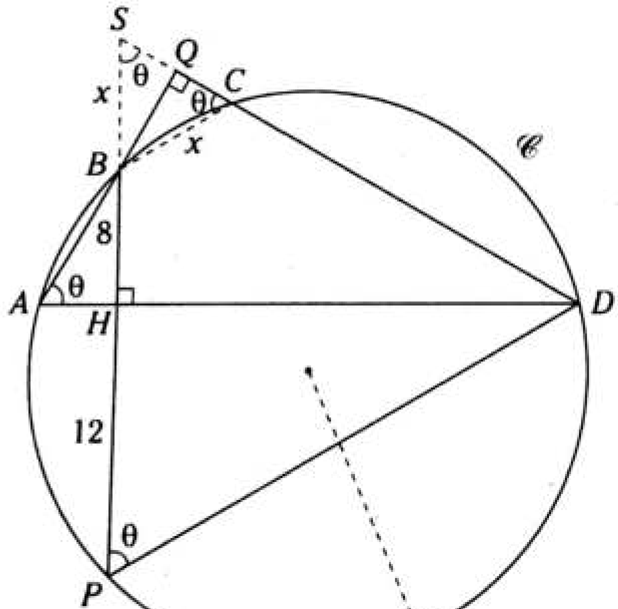
Problemas Resueltos

Problema N.° 1

En la gráfico, $BH=8$ cm y $HP=12$ cm. Halle BC.



Resolución



Nos piden $BC=x$.

Se prolongan $\overline{PB}$ y $\overline{DC}$ hasta S.

$m\sphericalangle BAH = m\sphericalangle BSQ$

$\square ABCD$ inscrito en $\mathscr{C}$

$\rightarrow \quad m\sphericalangle BAD=\theta=m\sphericalangle BCQ$

Como podemos ver, $m\sphericalangle SBQ=m\sphericalangle QBC=90°-\theta$

$\rightarrow \quad BS=BC=x$

Como $m\widehat{BCD}=2\theta \rightarrow m\sphericalangle BPD=\dfrac{2\theta}{2}=\theta$

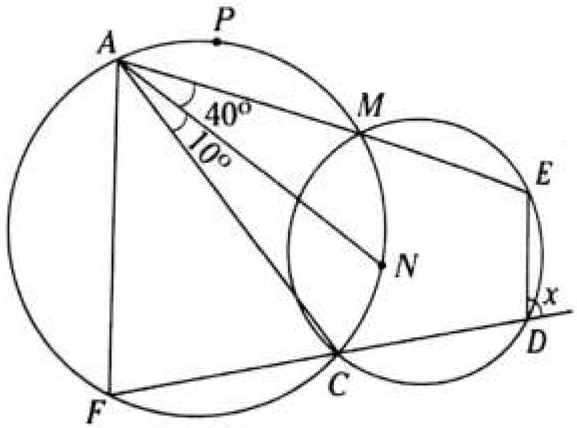
$\triangle PDS$ es isósceles ($SD=PD$)

$\rightarrow \quad x+8=12$

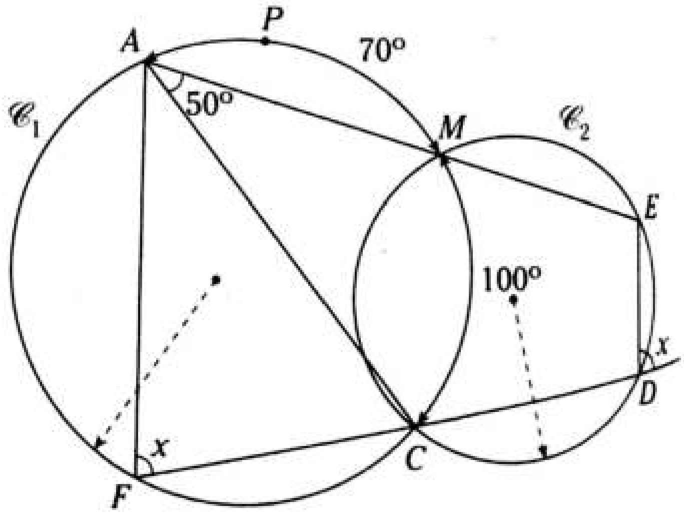
$\therefore \quad x=4$ cm

Problema N.° 2

En el gráfico $m\widehat{APM}=70°$. Halle x.



Resolución



Nos piden x.

Se sabe que $\overline{AF} // \overline{ED} \rightarrow m\sphericalangle AFC=x$.

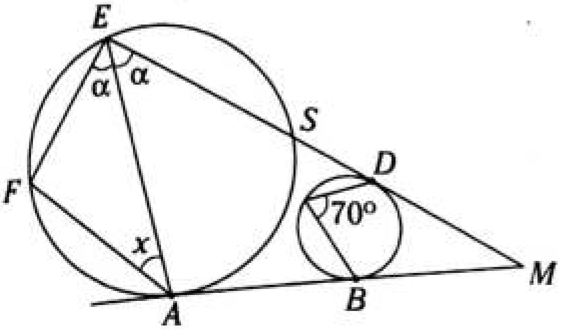
$\mathscr{C}_1$: por $\sphericalangle$ inscrito, $m\widehat{MC}=2(40°+10°)=100°$.

$\mathscr{C}_1$: por $\sphericalangle$ inscrito, $x=\dfrac{70°+100°}{2}$

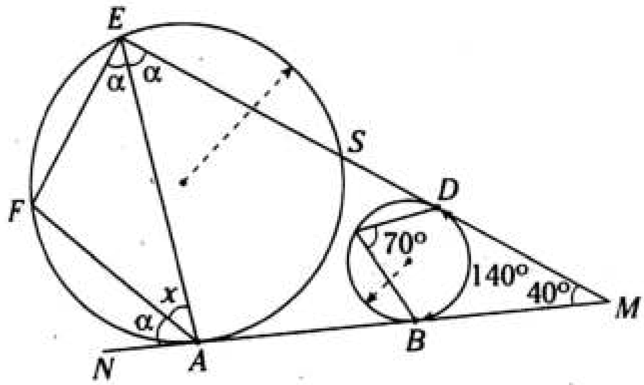
$\therefore \quad x=85°$

Problema N.° 3

En el gráfico A, B y D son puntos de tangencia. Halle el valor de x.



Resolución



Nos piden x.

En la circunferencia menor, por teorema

$$m\overset{\frown}{DB}+m\measuredangle DMB=180°$$

$$140°+m\measuredangle DMB=180°$$

$\rightarrow\quad m\measuredangle DMB=40°$

Por $\measuredangle$ semiinscrito, $m\measuredangle FAN=\dfrac{m\overset{\frown}{AF}}{2}$

Por $\measuredangle$ inscrito: $m\measuredangle AEF=\dfrac{m\overset{\frown}{AF}}{2}$

$\rightarrow\quad m\measuredangle FAN=m\measuredangle AEF=\alpha$

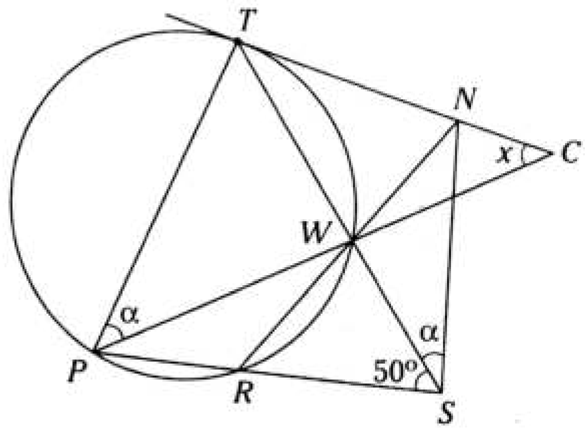
$\triangle MEA$: por teorema del $\measuredangle$ exterior en A

$$x+\alpha=\alpha+40°$$

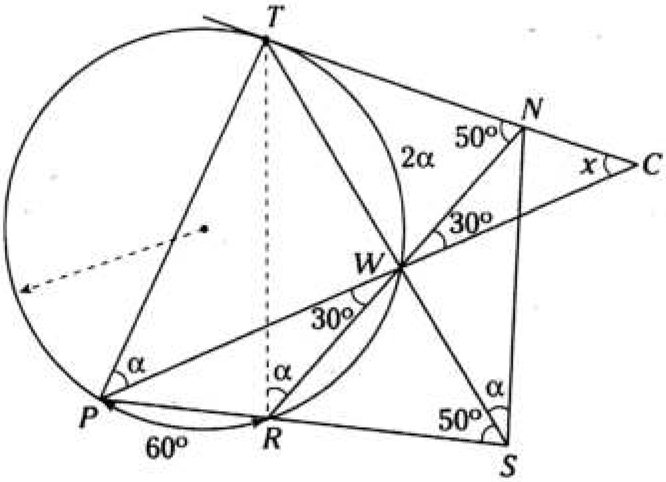
$\therefore\quad x=40°$

Problema N.° 4

En el gráfico, T es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{PR}=60°$. Halle x.



Resolución



Nos piden x.

Por $\measuredangle$ inscrito, $m\measuredangle PWR=\dfrac{60°}{2}=30°$.

$\square PTWR$ inscrito, se traza $\overline{TR}$

$\rightarrow\quad m\measuredangle TRW=m\measuredangle TPW=\alpha$

Como $m\measuredangle TRN=m\measuredangle TSN=\alpha$

$\rightarrow\quad \square TNSR$ es inscriptible, por lo cual

$$m\measuredangle TNR=m\measuredangle TSR=50°$$

$\triangle NWC$: $\measuredangle$ exterior en N

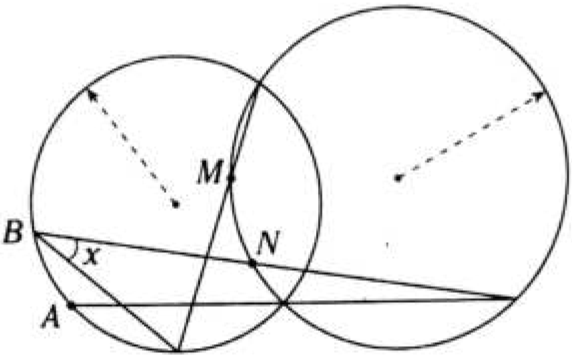
$$x+30°=50°$$

$\therefore\quad x=20°$

PROBLEMAS PROPUESTOS

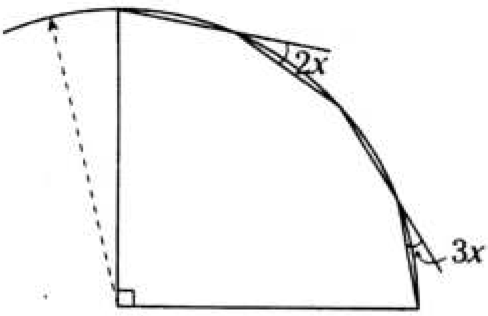
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico adjunto, la $m\widehat{AB} = 40^\circ$ y la $m\widehat{MN} = 50^\circ$. Calcule x.



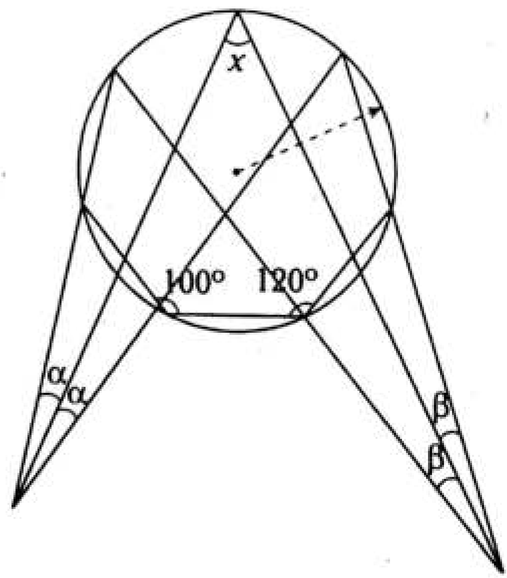
A) 42° B) 45° C) 44°
D) 40° E) 20°

2. Del gráfico adjunto, calcule x.



A) 12°
B) 18°
C) 15°
D) 9°
E) 14°

3. Del gráfico adjunto, calcule x.

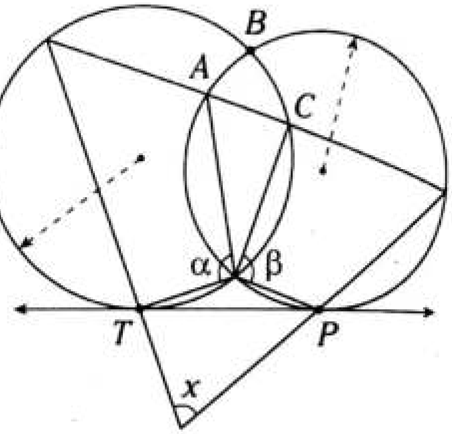


A) 80° B) 55° C) 70°
D) 60° E) 50°

4. Se tiene el hexágono $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia. Si $m\measuredangle ABC + m\measuredangle AFE = 250^\circ$, calcule $m\measuredangle CDE$.

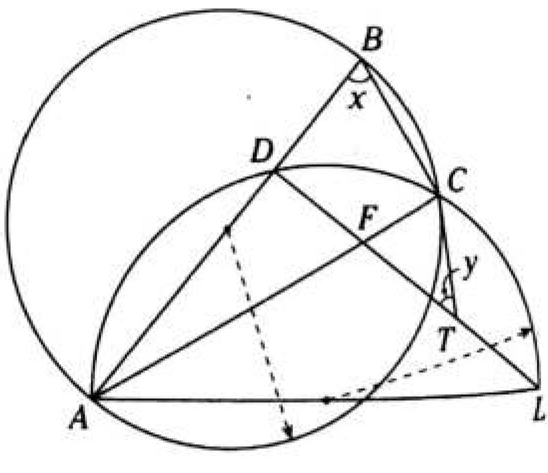
A) 120° B) 110° C) 70°
D) 135° E) 125°

5. En el gráfico, $\alpha + m\widehat{BC} = 100^\circ$, $\beta + m\widehat{AB} = 120^\circ$ y los puntos T y P son de tangencia. Calcule x.



A) 80° B) 70° C) 65°
D) 75° E) 40°

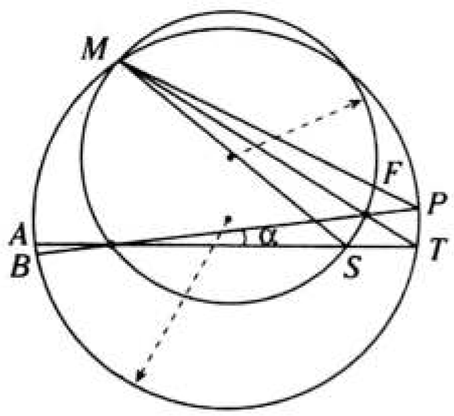
6. En el gráfico, si $x - y = 60^\circ$ y $FT = TL$, calcule x.



A) 90° B) 80° C) 70°
D) 75° E) 95°

7. En el gráfico, $m\widehat{AB}=\beta$ y $2\alpha-\dfrac{\beta}{2}=30°$. Calcule $m\widehat{FS}$.

A) 30°
B) 15°
C) 45°
D) 60°
E) 15°/2

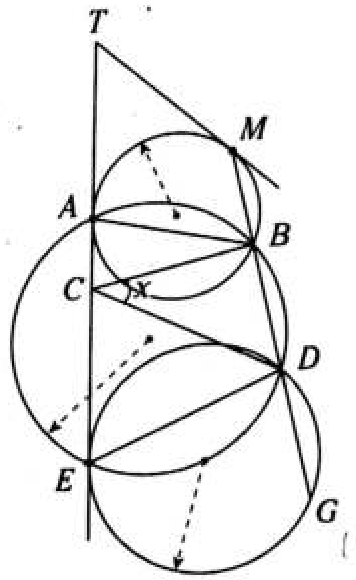


8. En una circunferencia se inscribe el rectángulo $ABCD$. En $\widehat{BC}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PH}\perp\overline{AD}$ ($H\in\overline{AD}$), tal que $3(AH)=2(HD)$. Si $\overline{PC}//\overline{BD}$, calcule $m\sphericalangle BCP$.

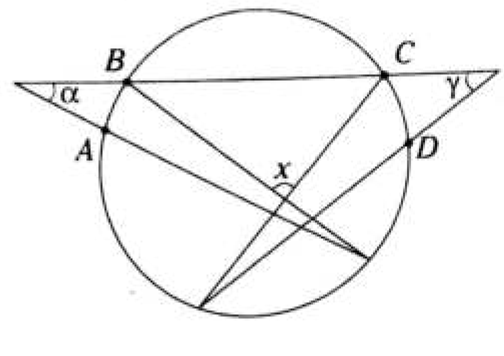
A) 30° B) 37°/2 C) 53°/2
D) 60° E) 37°

9. En el gráfico, $m\widehat{EG}=160°$, $m\sphericalangle ATM=40°$, $AB=BC$ y $CD=DE$. Calcule x. (A, M y E son puntos de tangencia).

A) 40°
B) 35°
C) 25°
D) 20°
E) 30°



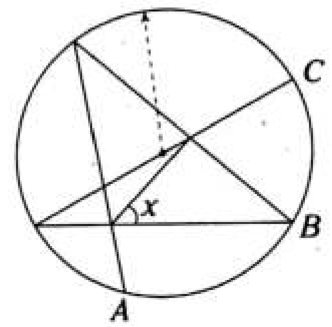
10. Del gráfico, si $\alpha+\beta+\theta+\gamma<80°$, $m\widehat{AB}=2\beta$ y $m\widehat{CD}=2\theta$, calcule el menor valor entero de x.



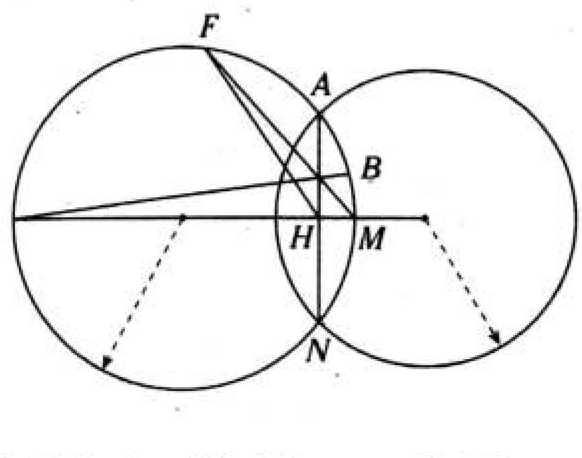
A) 100° B) 101° C) 102°
D) 105° E) 108°

11. Del gráfico adjunto, la $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=70°$. Calcule x.

A) 40°
B) 70°
C) 35°
D) 50°
E) 55°

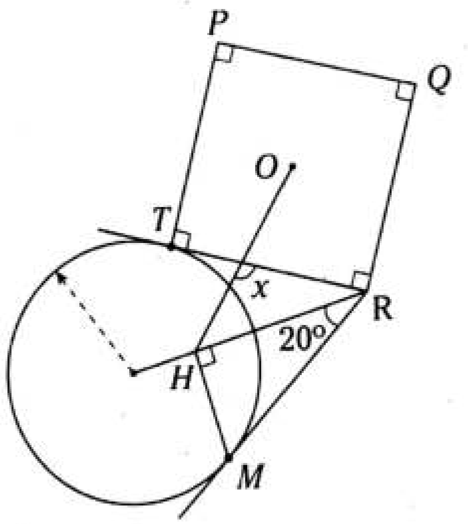


12. Del gráfico adjunto, la $m\widehat{MN}=50°$ y la $m\widehat{AB}=30°$. Calcule $m\sphericalangle MFH$.



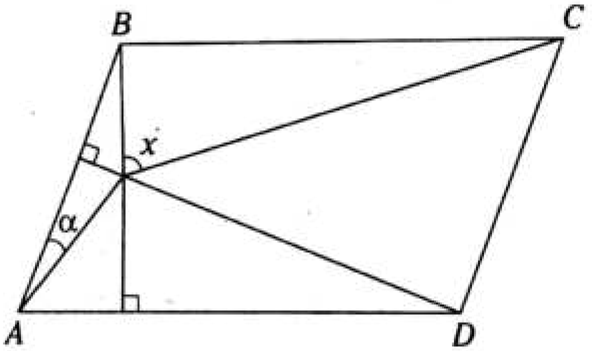
A) 20° B) 10° C) 25°
D) 40° E) 15°

13. Del gráfico adjunto, O es el centro del cuadrado $TPQR$. Calcule x.
(T y M son puntos de tangencia)



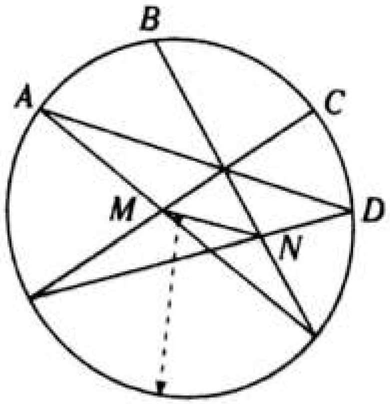
A) 135°
B) 120°
C) 115°
D) 150°
E) 100°

14. Del gráfico, $ABCD$ es un romboide. Calcule x.



A) 2α B) $3\alpha/2$ C) $30°+\alpha$
D) $90°-\alpha$ E) $60°-\alpha$

15. Del gráfico adjunto, $\overline{AD}//\overline{MN}$ y $m\overset{\frown}{AB}=40°$. Calcule $m\overset{\frown}{CD}$.



A) 25° B) 20° C) 30°
D) 50° E) 40°

16. En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto P; en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos R, S y T, respectivamente. Si los cuadriláteros $ARPT$, $BSPR$ y $SPTC$ son inscriptibles, además $\overline{PT}//\overline{AR}$, $\overline{RP}//\overline{BS}$ y $m\measuredangle BAC=70°$, calcule $m\measuredangle ACB$.

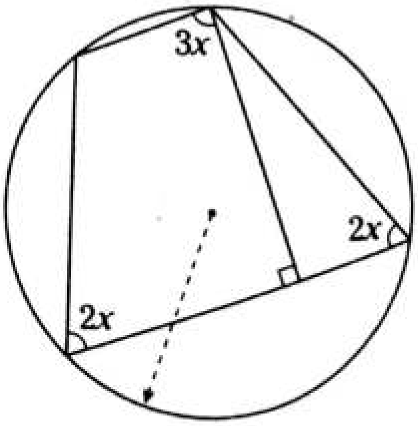
A) 20° B) 70° C) 35°
D) 40° E) 10°

17. En una circunferencia de centro O, el radio OM y la cuerda AB se intersecan perpendicularmente en el punto T. Se prolonga la cuerda AB y en ella se ubica el punto P, luego se traza el segmento tangente PH, tal que $\overline{MH}\cap\overline{AB}=\{F\}$. Además se traza $\overline{OP}$, $\overline{OP}\perp\overline{MH}=\{D\}$. Si $m\measuredangle TDO=70°$, calcule $m\measuredangle MPF$.

A) 70° B) 20° C) 35°
D) 40° E) 55°

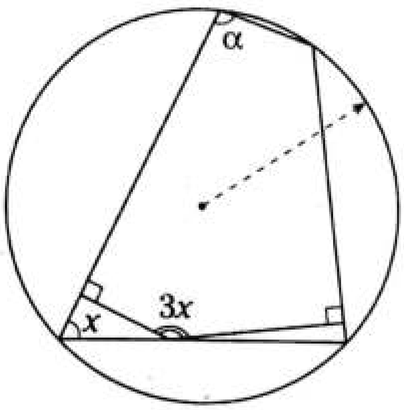
NIVEL INTERMEDIO

18. Del gráfico, calcule x.



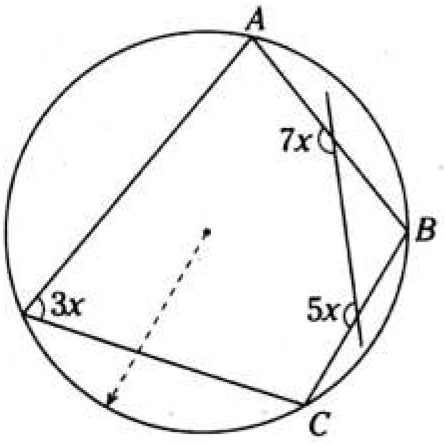
A) 28° B) 30° C) 32°
D) 34° E) 36°

19. Del gráfico, $\alpha > 100^\circ$. Calcule el mayor valor entero de x.



A) 37° B) 38° C) 39°
D) 40° E) 45°

20. Del gráfico, calcule $m\widehat{ABC}$.

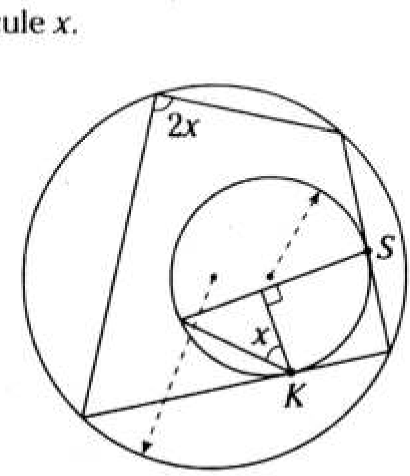


A) 120° B) 140° C) 142°
D) 144° E) 146°

21. En un cuadrilátero inscrito $ABCD$ en la circunferencia $\mathscr{C}$, la $m\measuredangle BCD > m\measuredangle CDA$ y $m\measuredangle BAD = 49^\circ$. Calcule el menor valor entero de la $m\measuredangle ABC$.

A) 45° B) 48° C) 49°
D) 50° E) 51°

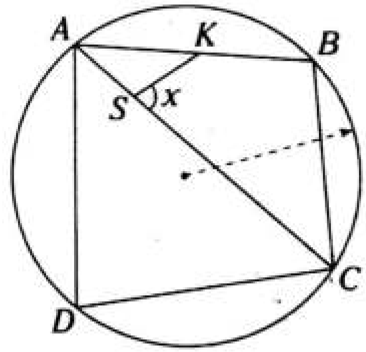
22. Del gráfico, K y S son puntos de tangencia. Calcule x.



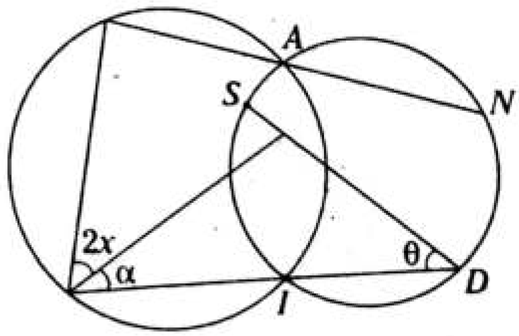
A) 45° B) 46° C) 48°
D) 50° E) 52°

23. Del gráfico, $AS=SK$, $DC=4$, $BC=3$ y DB toma el mayor valor entero impar. Calcule x.

A) 60°
B) 53°
C) 74°
D) 90°
E) 92°

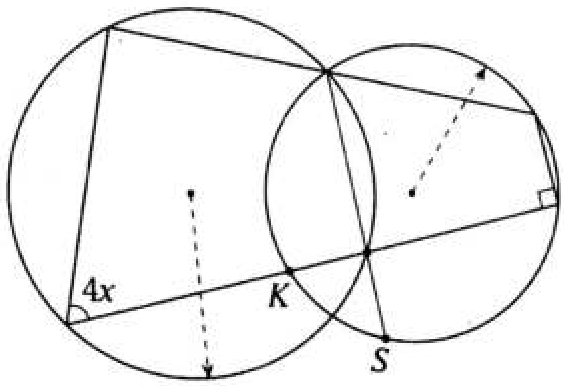


24. Del gráfico, $\alpha + \theta < 48^\circ$ y $m\widehat{SAN} = 6x$. Calcule el menor entero de x.



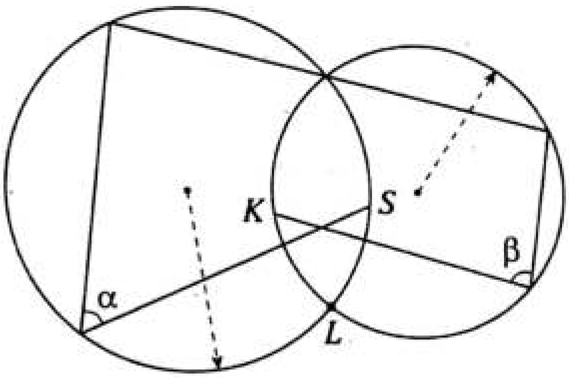
A) 28° B) 29° C) 27°
D) 30° E) 24°

25. Del gráfico, $m\widehat{KS}=2x$, Calcule x.



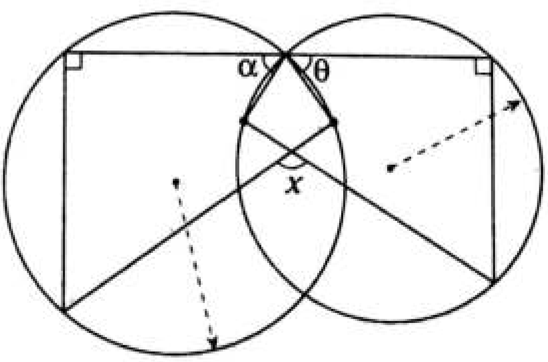
A) 12°   B) 14°   C) 16°
D) 18°   E) 20°

26. Del gráfico, $\alpha+\beta=132°$. Calcule $m\widehat{KL}+m\widehat{LS}$.



A) 60°   B) 90°   C) 92°
D) 94°   E) 96°

27. Del gráfico, $\alpha+\theta<132°$. Calcule el mayor entero de x.

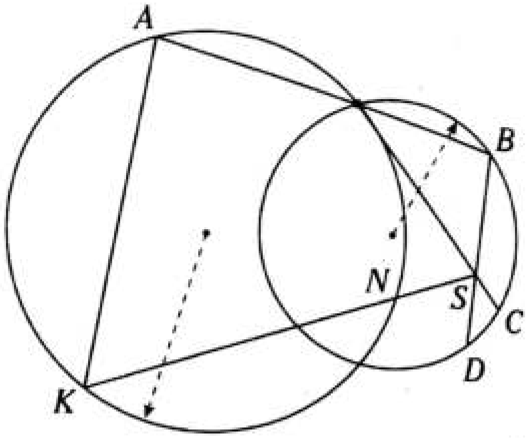


A) 130°   B) 131°   C) 132°
D) 133°   E) 134°

28. En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, que se intersecan en K; luego se traza $\overline{MS}\perp\overline{CK}$ ($S\in\overline{KC}$). Si $m\measuredangle SMC=2(m\measuredangle BAM)$ y $MC=10$, calcule MS.

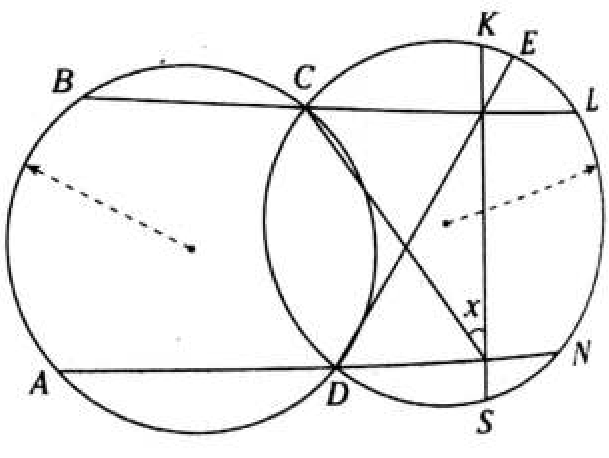
A) 6   B) 8   C) 5
D) 7   E) $5\sqrt{3}$

29. Del gráfico, $\overline{AK}\,//\,\overline{BD}$ y la $m\widehat{BLC}=48°$. Calcule la $m\measuredangle BNS$.



A) 22°   B) 23°   C) 24°
D) 25°   E) 26°

30. Del gráfico, $m\widehat{LK}=m\widehat{NS}$ y $m\widehat{CKE}=84°$. Calcule x.



A) 42°   B) 43°   C) 44°
D) 45°   E) 46°

Puntos notables asociados a un triángulo

Capítulo VII

Objetivos

- Estudiar las definiciones de los puntos notables, del baricentro, incentro, ortocentro, circuncentro y excentro.
- Reconocer su ubicación respecto al triángulo.
- Relacionar los elementos asociados a través de teoremas de cada punto notable.

Puntos notables

Se les conoce así a los puntos ubicados ya sea en el triángulo, en su región interior o en la región exterior de un triángulo determinados por las líneas notables.

Estas líneas notables asociadas al triángulo son:

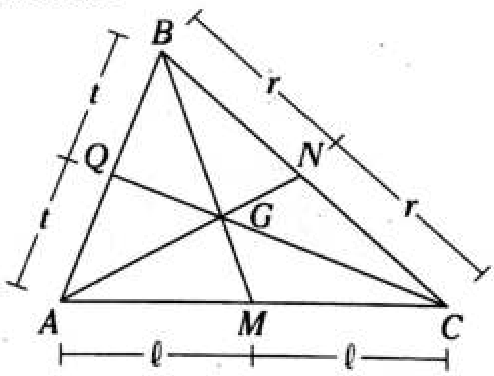
- La mediana, la cual siempre se ubica en la región triangular.
- La bisectriz interior, que se encuentra en la región triangular.
- La bisectriz exterior, la cual se ubica en la región exterior del triángulo, excepto un extremo.
- La altura como segmento puede ubicarse en la región triangular o en la región exterior, excepto un extremo.

En cambio, una parte de la mediatriz, por ser una recta, está contenida tanto en la región interior como en la región exterior del triángulo.

Baricentro

Es el punto de intersección de las medianas de un triángulo.

Gráficamente



G: baricentro de la región triangular ABC

Dicho punto determina en cada mediana dos segmentos, cuya razón de longitudes es de 2 a 1.

Se cumple

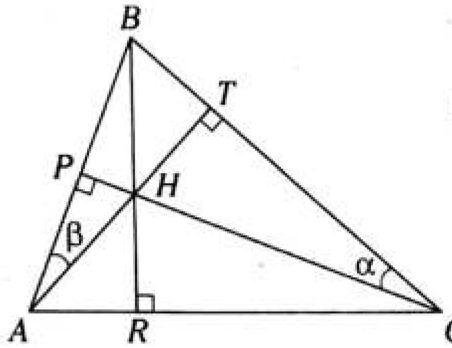
$$\boxed{\begin{array}{c} BG=2(GM) \\ AG=2(GN) \\ CG=2(CQ) \end{array}}$$

Ortocentro

Es el punto de concurrencia de las alturas o de sus prolongaciones.

Gráficamente, su ubicación depende del tipo de triángulo.

El $\triangle ABC$ es acutángulo.

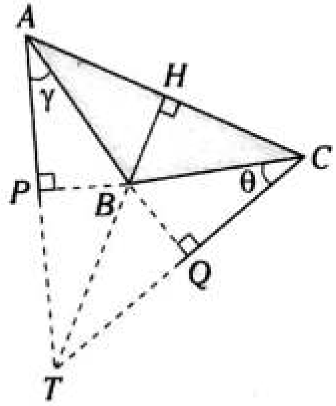


Se cumple

$$\boxed{\alpha=\beta}$$

H: ortocentro del triángulo *ABC*

El $\triangle ABC$ es obtusángulo, obtuso en *B*.

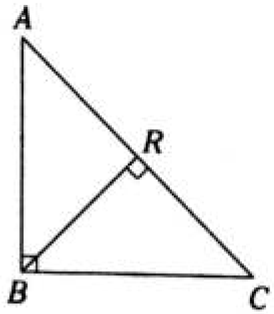


Se cumple

$$\boxed{\theta=\gamma}$$

T: ortocentro del triángulo *ABC*

El $\triangle ABC$ es rectángulo, recto en *B*.

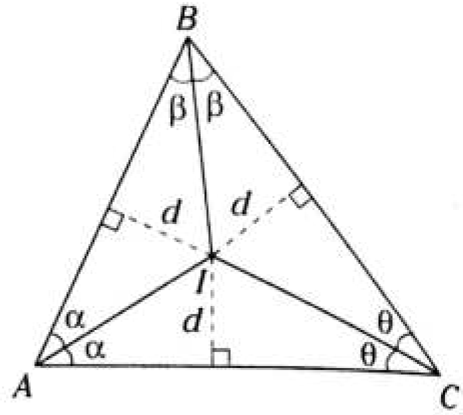


B: ortocentro del triángulo *ABC*

Incentro

Es el punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo.

Gráficamente, el incentro pertenece a la región triangular.



I: incentro del $\triangle ABC$

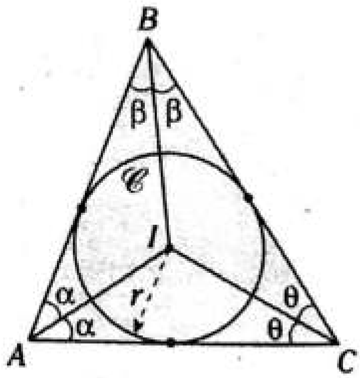
El incentro equidista de los lados del triángulo.

Se cumple

$$\boxed{m\measuredangle AIC=90°+\frac{m\measuredangle ABC}{2}}$$

Nota

Como el incentro equidista de los lados de un triángulo, también es el centro de una circunferencia que es tangente a los lados del triángulo.



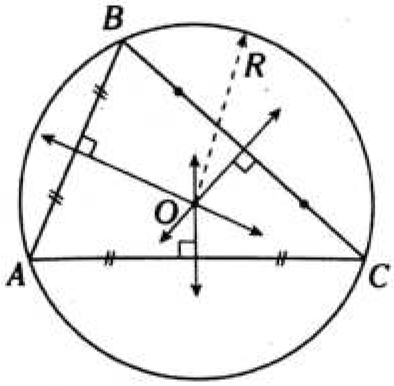
$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el triángulo *ABC*
$\triangle ABC$: circunscrito a $\mathscr{C}$
r: inradio del $\triangle ABC$

Circuncentro

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Gráficamente, su ubicación respecto al triángulo dependerá de la naturaleza de dicho triángulo.

El $\triangle ABC$ es acutángulo.



O: circuncentro del $\triangle ABC$

O: centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$

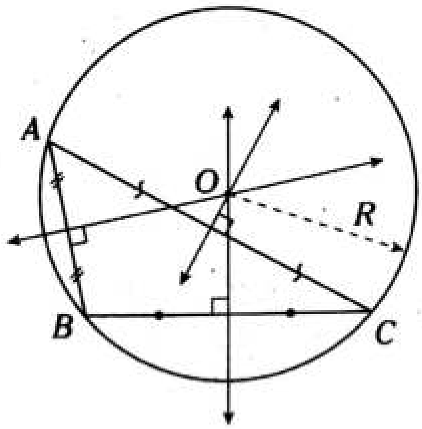
R: circunradio del $\triangle ABC$

Se cumple

$$\boxed{AO=OC=OB}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m\measuredangle AOC=2m\measuredangle ABC \\ m\measuredangle AOB=2m\measuredangle ACB \\ m\measuredangle BOC=2m\measuredangle BAC \end{array}}$$

El $\triangle ABC$ es obtusángulo, obtuso en B.



O: circuncentro del $\triangle ABC$

O: centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$

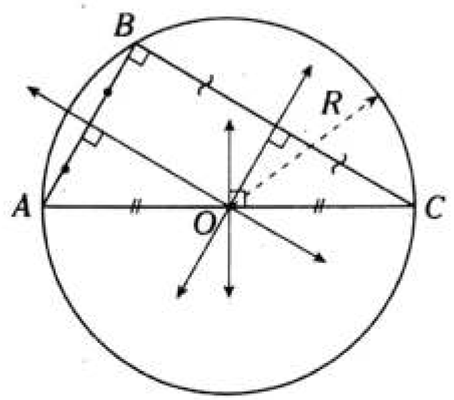
R: circunradio del $\triangle ABC$

Se cumple

$$\boxed{AO=OB=OC}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m\measuredangle AOB=2m\measuredangle ACB \\ m\measuredangle BOC=2m\measuredangle BAC \end{array}}$$

El $\triangle ABC$ es rectángulo, recto en B.



O: circuncentro del $\triangle ABC$

O: centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$

R: circunradio del $\triangle ABC$

Se cumple

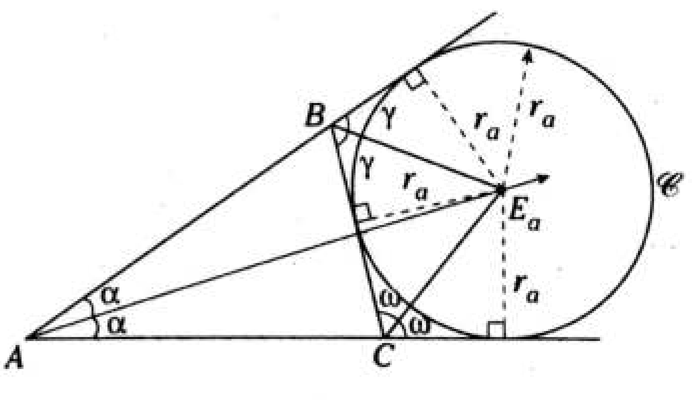
$$\boxed{AO=OB=OC}$$

EXCENTRO

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior trazada desde el tercer vértice.

Este punto notable se ubica en la región exterior.

El excentro equidista de los lados de un triángulo, por eso es el centro de la circunferencia exinscrita a dicho triángulo.



$\mathscr{C}$: circunferencia exinscrita al $\triangle ABC$, relativa a $\overline{BC}$

E_a: excentro del $\triangle ABC$, relativo al lado $\overline{BC}$

r_a: exradio del $\triangle ABC$, relativo al lado $\overline{BC}$

El triángulo tiene un excentro relativo a cada lado, es decir, tiene tres excentros.

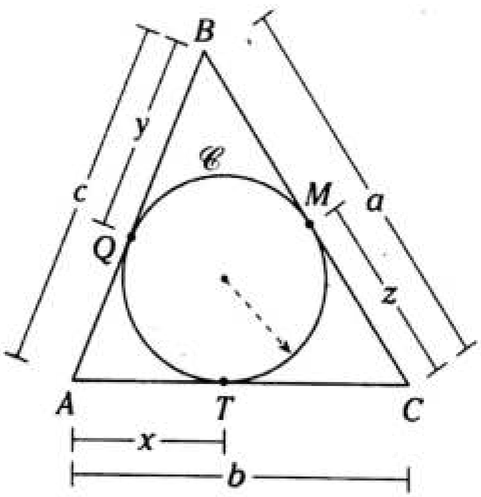
Se cumple

$$\boxed{m\measuredangle AE_aC=\frac{1}{2}m\measuredangle ABC}$$

Teoremas asociados

Circunferencia inscrita en el triángulo

Es aquella circunferencia cuyo centro es el incentro del triángulo y es tangente a los lados del triángulo.



$\mathscr{C}$: circunferencia inscrita en el triángulo ABC

M, Q y T: puntos de tangencia

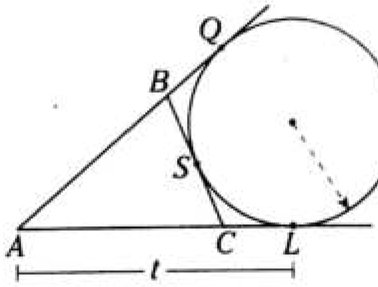
Se cumple

$$\boxed{\begin{gathered}x=p-a\\ y=p-b\\ z=p-c\end{gathered}}$$

Donde p es semiperímetro de la región triangular ABC.

Circunferencia exinscrita al triángulo

Es aquella circunferencia cuyo centro es el excentro del triángulo, y es tangente a un lado y a la prolongación de dos lados del triángulo.



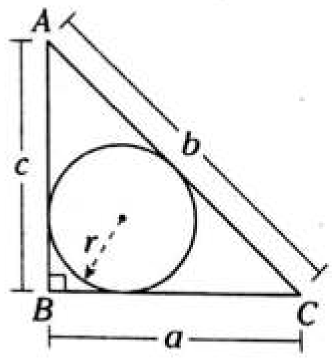
Se cumple

$$\boxed{t=p}$$

Donde p es semiperímetro de la región triangular ABC.

Teorema de J. V. Poncelet

En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa más el diámetro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.



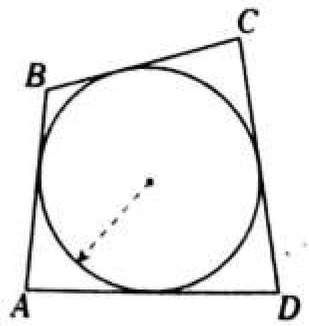
En el ⊿ABC, r es inradio

Se cumple

$$\boxed{a+c=b+2r}$$

Teorema de H. Pitot

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de los lados opuestos son iguales.



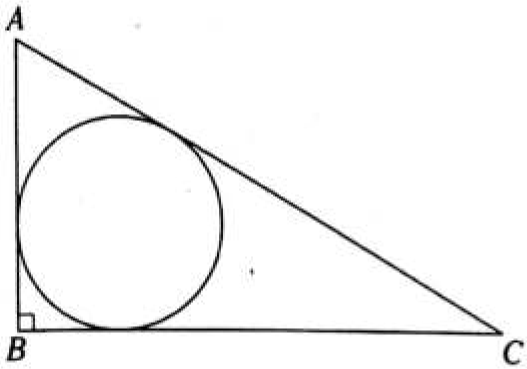
⏢$ABCD$ circunscrito

Se cumple

$$\boxed{AB+CD=BC+AD}$$

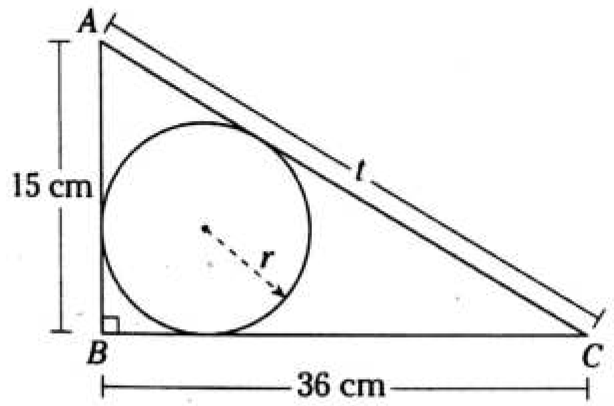
Problema N.° 1

En el gráfico, $AB=15$ cm y $BC=36$ cm. Halle la medida del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



UNMSM 2005-I

Resolución



Nos piden r.

Por teorema de Poncelet en el $\triangle ABC$

$$15\text{ cm}+36\text{ cm}=\ell+2r \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de Pitágoras en el $\triangle ABC$

$$(15\text{ cm})^2+(36\text{ cm})^2=\ell^2$$

$\rightarrow \quad \ell=39$ cm $\qquad$ (II)

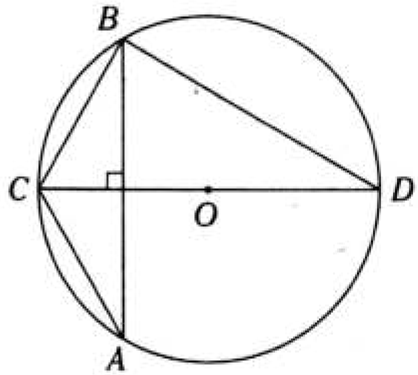
Reemplazamos (II) en (I)

$$15\text{ cm}+36\text{ cm}=39\text{ cm}+2r$$

$\therefore \quad r=6$ cm

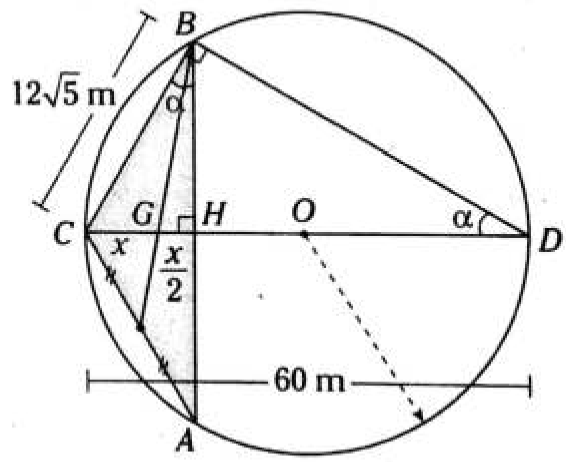
Problema N.° 2

En el triángulo ABC, calcule la distancia del baricentro al vértice C, siendo $\overline{CD}$ diámetro de la circunferencia, $BC=12\sqrt{5}$ m y $OD=30$ m.



UNMSM 2005-II

Resolución



Nos piden $GC=x$.

Donde G es baricentro de la región triangular ABC.

Por teorema del baricentro

$$GC=2(GH) \quad \rightarrow \quad x=2(GH)$$

$$\rightarrow \quad GH=\frac{x}{2}$$

Observamos en el $\triangle CBD$

$$\frac{BC}{CD}=\frac{12\sqrt{5}}{60}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \quad \alpha=\frac{53°}{2}$$

En el ⊿CHB: notable de $\frac{53^\circ}{2}$, sabemos que

$$\frac{CH}{1}=\frac{BC}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{x+\frac{x}{2}}{1}=\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

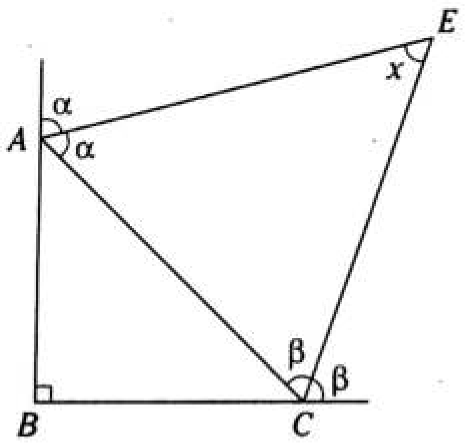
$\therefore \quad x=8$ m

Problema N.° 3

¿Cuánto vale el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos exteriores adyacentes a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

UNMSM 2005-II

Resolución



Nos piden x.

Datos:

- $\overrightarrow{AE}$: bisectriz del ángulo exterior
- $\overrightarrow{CE}$: bisectriz del ángulo exterior

Observamos que

E es el excentro del $\triangle ABC$.

Por teorema

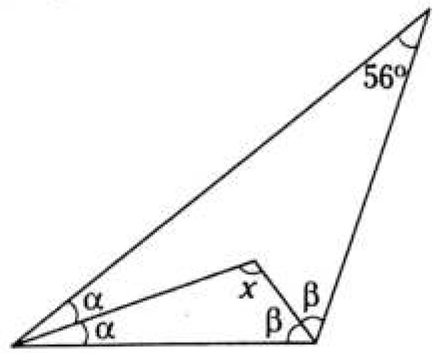
$$x=90^\circ-\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$x=90^\circ-\frac{90^\circ}{2}$$

$\therefore \quad x=45^\circ$

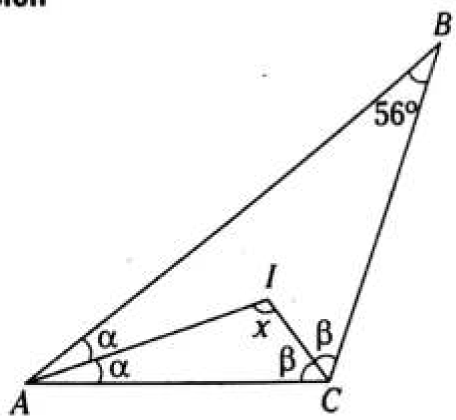
Problema N.° 4

En el gráfico, halle x.



UNMSM 2005-II

Resolución



Nos piden x.

Observamos que I es el incentro del $\triangle ABC$.

Por teorema

$$x=90^\circ+\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

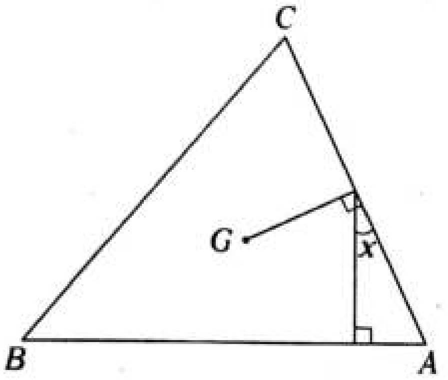
$$x=90^\circ+\frac{56^\circ}{2}$$

$\therefore \quad x=118^\circ$

PROBLEMAS PROPUESTOS

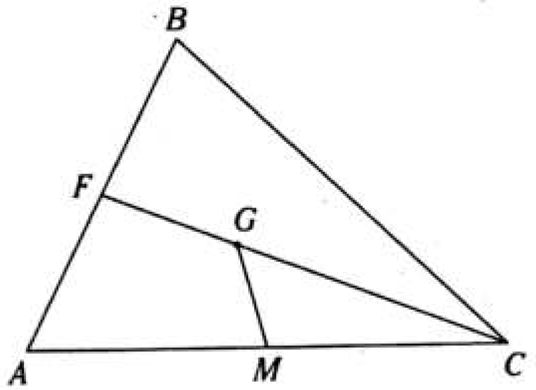
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, G es baricentro del triángulo ABC, $AB=BC$ y $m\sphericalangle GAC=45°$. Calcule x.



A) 15°
B) 14°
C) 37°/2
D) 53°/2
E) 16°

2. En el gráfico adjunto, G es baricentro del $\triangle ABC$, $AM=MC$, $AF=2(MG)$ y $m\sphericalangle AFC=110°$. Calcule $m\sphericalangle MGC$.



A) 70° B) 20° C) 55°
D) 35° E) 40°

3. En un triángulo ABC se trazan las medianas AM y BN, las cuales se intersecan en P. Si $AB=2(MB)=2(AN)$, calcule $m\sphericalangle BPM$.

A) 30° B) 45° C) 37°
D) 60° E) 53°

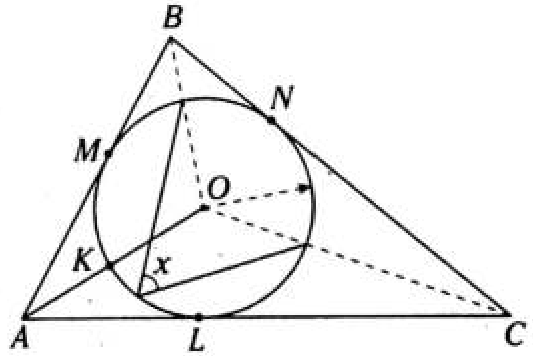
4. En un triángulo ABC se ubica el incentro I, tal que $m\sphericalangle AIC+m\sphericalangle ABC<180°$. Calcule el mayor entero de $m\sphericalangle ABC$.

A) 45° B) 46° C) 58°
D) 59° E) 60°

5. En un triángulo ABC de incentro I
$3(m\sphericalangle ABC)=2(m\sphericalangle BCA)$ y la
$m\sphericalangle BIA-m\sphericalangle CIA>30°$.
Calcule el menor valor entero de la $m\sphericalangle ABC$.

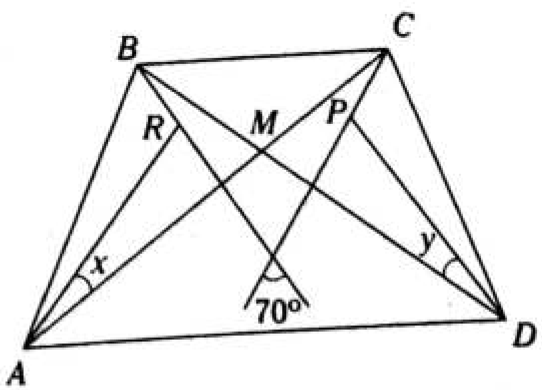
A) 122° B) 121° C) 120°
D) 119° E) 118°

6. Del gráfico, M, N y L son puntos de tangencia, y $AK=KO$. Calcule x.



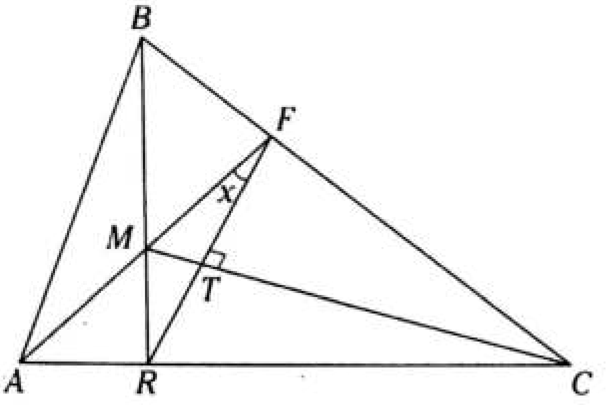
A) 76° B) 44° C) 45°
D) 48° E) 60°

7. Del gráfico, R y P son ortocentros de los triángulos ABM y CMD. Calcule $x+y$.



A) 35° B) 40° C) 20°
D) 140° E) 70°

8. Si $TC=3(MT)$ y M es ortocentro del $\triangle ABC$, calcule x.



A) $15°$ B) $30°$ C) $14°$
D) $8°$ E) $37°/2$

9. Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan los segmentos tangentes PE y PF (E y F son puntos de tangencia). En el arco EF se ubica el punto M, el cual es el ortocentro del $\triangle PEF$. Calcule $m\sphericalangle PME$.

A) $137°$ B) $60°$ C) $153°$
D) $45°$ E) $120°$

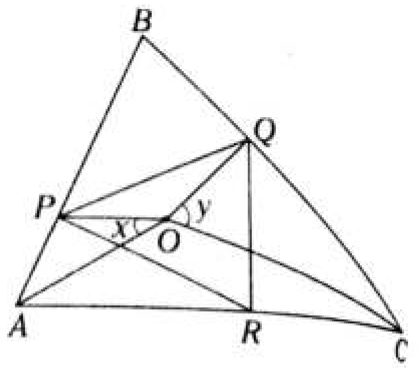
10. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM y en ella se ubica el incentro P. Si $PC=MC$, calcule $\dfrac{m\sphericalangle ABC}{m\sphericalangle ACB}$.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{3}{4}$

D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

11. Sea O incentro de los triángulos ABC y PQR. Si $m\sphericalangle ABC+m\sphericalangle PRQ=\alpha$, calcule $x+y$.

A) $90°+\alpha$
B) 2α
C) $180°-\dfrac{\alpha}{2}$
D) $90°-\alpha$
E) 3α



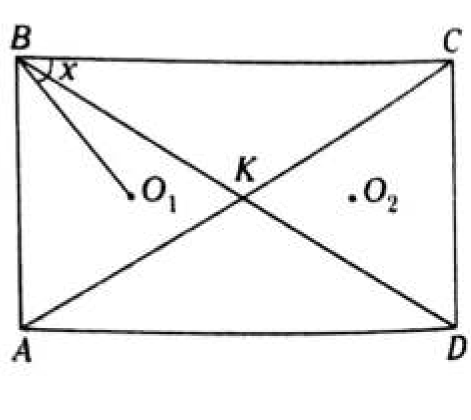
12. En un triángulo ABC se ubica el incentro I, tal que $m\sphericalangle BIC=90°+\dfrac{m\sphericalangle ACB}{2}$.
Si $AC=AB$, calcule $m\sphericalangle ACI$.

A) $80°$ B) $10°$ C) $20°$
D) $100°$ E) $30°$

13. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BF; en $\overline{BF}$ se ubica el circuncentro O del $\triangle ABC$. Si $OF=FC$ y $m\sphericalangle FBC=25°$, calcule $m\sphericalangle AFB$.

A) $80°$ B) $50°$ C) $75°$
D) $100°$ E) $65°$

14. En el rectángulo $ABCD$ mostrado, O_1 y O_2 son circuncentros de los triángulos ABK y CDK. Si $3(O_1O_2)=2(BC)$, calcule x.

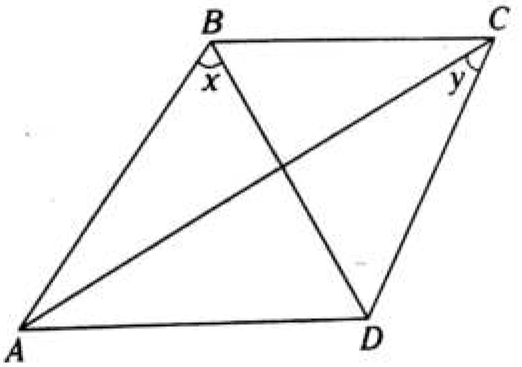


A) $53°$ B) $37°$ C) $60°$
D) $45°$ E) $75°$

15. En un triángulo acutángulo ABC de incentro I y circuncentro O, si $m\sphericalangle ACB=2m\sphericalangle ABC$, calcule $m\sphericalangle AIB+m\sphericalangle ACO$.

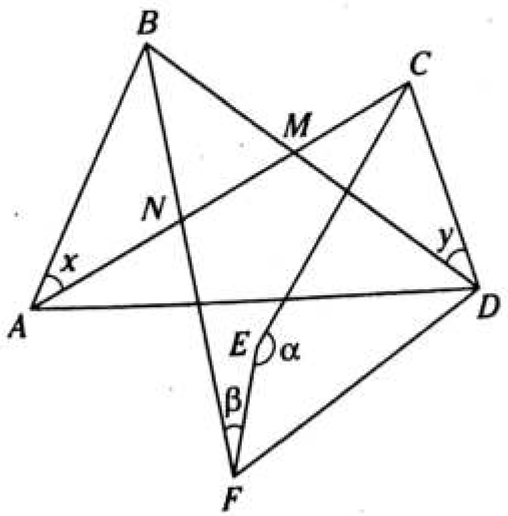
A) 45° B) 135° C) 120°
D) 60° E) 180°

16. Del gráfico se muestra el trapecio $ABCD$ ($\overline{AB}$ no paralelo a $\overline{CD}$), A es el excentro del $\triangle BCD$. Calcule $x+y$.



A) 60° B) 70° C) 90°
D) 50° E) 75°

17. En el gráfico adjunto, E y F son excentros de los triángulos MCD y ABM, respectivamente. Si $\alpha-\beta=110^\circ$, calcule $x+y$.



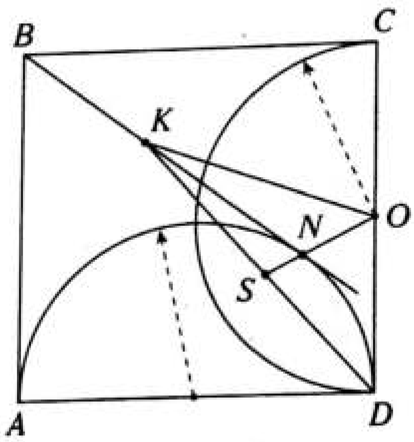
A) 70° B) 140° C) 110°
D) 20° E) 55°

NIVEL INTERMEDIO

18. En un triángulo ABC se trazan las medianas AM y BN, que se intersecan en L; luego en $\overline{AL}$ se ubica T, tal que $AT=LM$ y, finalmente, se traza la mediana $\overline{TK}$ del triángulo BTM, $\overline{TK}\cap\overline{BL}=\{S\}$. Si $LS=14$ cm, calcule LN.

A) 14 cm B) 18 cm C) 21 cm
D) 28 cm E) 32 cm

19. Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrado, N es punto de tangencia, $KN=\dfrac{AB}{2}$ y $NS=18$ cm. Calcule NO.



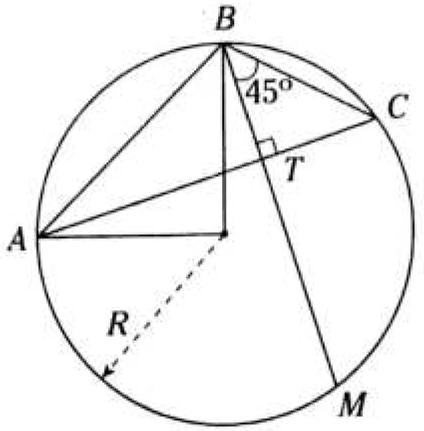
A) 26 cm B) 30 cm C) 32 cm
D) 36 cm E) 38 cm

20. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica el punto medio K de $\overline{AB}$, se traza $\overline{KP}\perp\overline{AC}$ ($P\in\overline{AC}$), luego la prolongación de $\overline{PK}$ interseca en L a la prolongación de $\overline{CB}$, además se ubica el punto medio S de $\overline{LB}$ y $\overline{AS}\cap\overline{LK}=\{U\}$. Si $BK=6$, calcule el menor valor entero de AS.

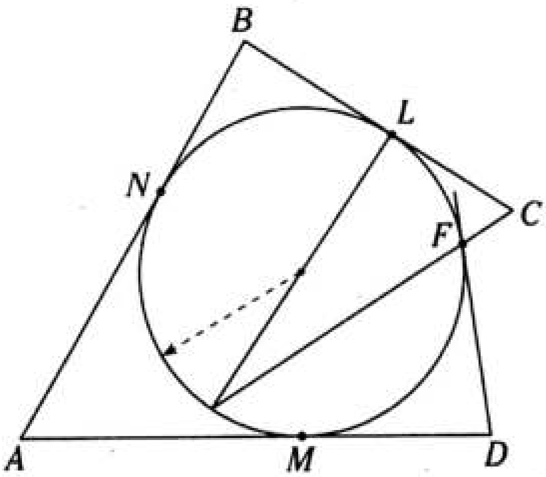
A) 8 B) 10 C) 9
D) 11 E) 12

21. Del gráfico, calcule el inradio del $\triangle ATB$ si $BM=14$ y $R=6\sqrt{2}$.

A) $\sqrt{2}$
B) 1,5
C) 1
D) 2
E) $2\sqrt{2}$



22. Sean N, L, F y M puntos de tangencia, $BC+AD=18$ y $AB+FD=14$. Calcule LC.



A) 1,5 B) 1 C) 2
D) 2,5 E) 4

23. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, $AB=a+2$, $BC=2a+8$ y $AC=3a+2$. Calcule su inradio.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 5

24. En un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O se traza $\overline{OM}\perp\overline{AC}$ ($M\in\overline{AC}$), tal que la $m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle OCM)$. Si $OM=4$, calcule el circunradio.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

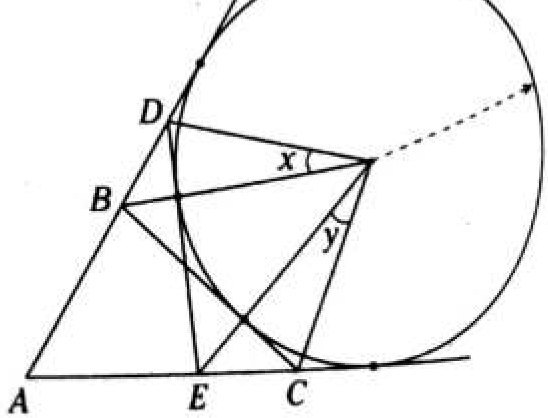
25. En un triángulo acutángulo ABC se ubica el circuncentro O. Si $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle ABC$, indique la relación correcta.

A) $m\sphericalangle OCB=m\sphericalangle OCA$
B) $m\sphericalangle OCB > m\sphericalangle OCA$
C) $m\sphericalangle OCB < m\sphericalangle OCA$
D) $m\sphericalangle OCB \geq m\sphericalangle OCA$
E) $m\sphericalangle OCB \leq m\sphericalangle OCA$

26. En una circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que no son paralelas. Respecto a lo anterior, indique la alternativa correcta.

A) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en O.
B) $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en O.
C) Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no pasan por O.
D) Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pueden pasar por O.
E) Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pasan por O.

27. Del gráfico, calcule $\dfrac{x}{y}$.

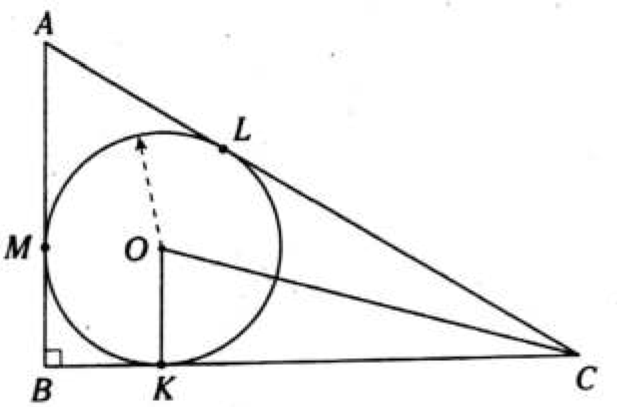


A) 2/3 B) 3/2 C) 1/2
D) 2 E) 1

28. En un triángulo ABC se ubica el punto K en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que $m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle AKC)$ y $m\sphericalangle ACB=2(m\sphericalangle AKB)$. ¿Qué punto notable es K del triángulo ABC?

A) baricentro
B) ortocentro
C) incentro
D) circuncentro
E) excentro

29. Del gráfico, $AB=3$ y $AC=5$. Calcule el inradio del triángulo KOC (M, L y K son puntos de tangencia).

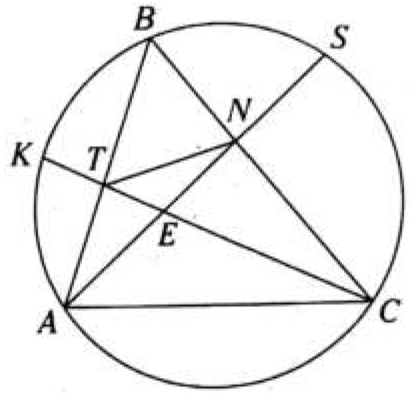


A) 0,4
B) 0,41
C) 0,42
D) 0,43
E) 0,44

30. En un triángulo ABC se ubica el ortocentro H, que se encuentra en su región interior, tal que $m\sphericalangle HAC+m\sphericalangle HCA=60°$ y $AB=10$. Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.

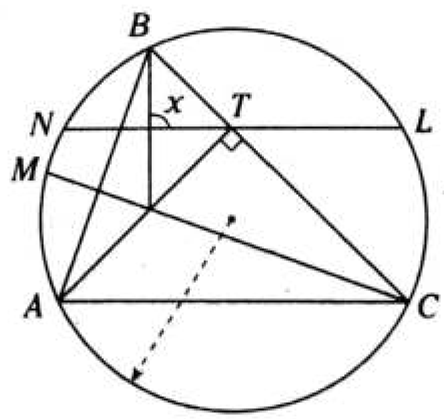
A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

31. Del gráfico, el cuadrilátero $ATNC$ es inscriptible y $m\widehat{KBS}+2(m\widehat{AC})=360°$. ¿Qué punto notable es E del triángulo ABC?



A) baricentro
B) ortocentro
C) incentro
D) circuncentro
E) excentro

32. Del gráfico, $m\widehat{MB}+2(m\sphericalangle ABC)=180°$ y $m\widehat{LC}=m\widehat{NA}$. Calcule x.



A) 76° B) 82° C) 90°
D) 100° E) 120°

Proporcionalidad de segmentos

Capítulo VIII

Objetivos

- Establecer la definición de razón de segmentos y segmentos proporcionales.
- Reconocer algunos teoremas en los triángulos relacionando segmentos proporcionales.

Razón de dos segmentos

Cuando nos referimos a la razón de dos segmentos, debemos considerar la razón geométrica de sus longitudes en la misma unidad de medida.

Ejemplo

$\dfrac{AB}{MN}=\dfrac{2}{3}$ significa que la razón de los segmentos AB y MN es de 2 a 3.

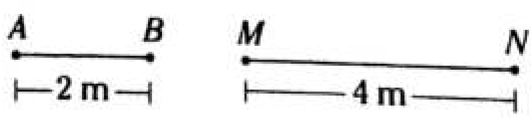
o

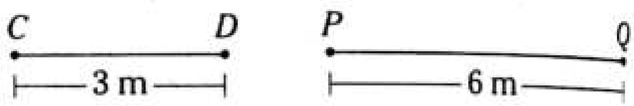
$\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{3}{2}$ significa que la razón de los segmentos MN y AB es de 3 a 2.

Segmentos proporcionales

Dos segmentos son proporcionales a otros dos si la razón de los dos primeros es igual a la razón de los otros dos.

Ejemplo





La razón de AB y CD: $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{2}{3}$

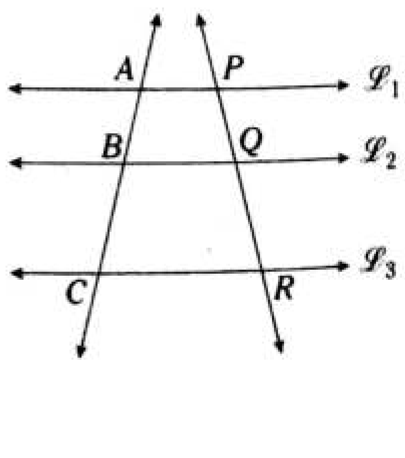
La razón de MN y PQ: $\dfrac{MN}{PQ}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\rightarrow \quad \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{MN}{PQ}$

Ahora se puede decir que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$.

Teorema de Tales de Mileto

Tres o más rectas paralelas determinan, en dos rectas secantes cualesquiera, segmentos proporcionales.



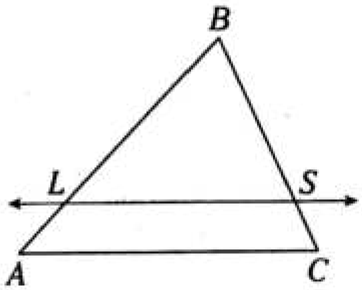
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, se cumple

$$\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}}$$

Pero la relación anterior se puede plantear así

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR} \quad \text{o} \quad \frac{AB}{AC}=\frac{PQ}{PR}, \text{ etc.}$$

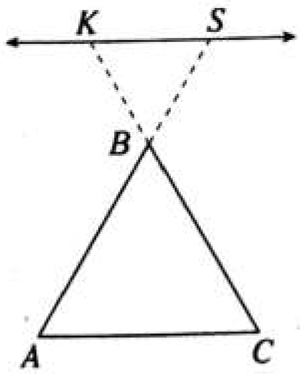
Corolario del teorema de Tales o Corolario 1



Si $\overleftrightarrow{LS} \,//\, \overline{AC}$, se cumple

$$\boxed{\frac{BL}{LA}=\frac{BS}{SC}} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{BL}{BS}=\frac{LA}{SC}}$$

Corolario del teorema de Tales o Corolario 2

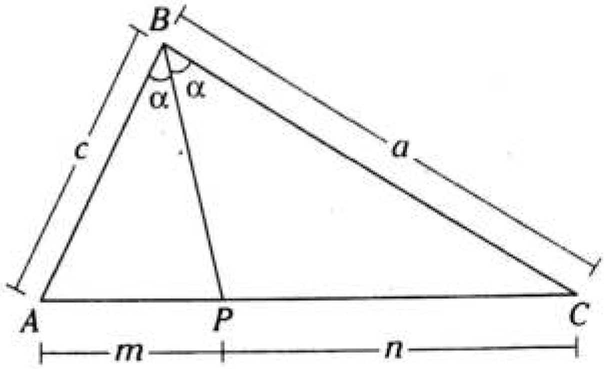


Si $\overleftrightarrow{KS} \,//\, \overline{AC}$, se cumple

$$\boxed{\frac{KB}{BC}=\frac{SB}{BA}} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{KB}{SB}=\frac{BC}{BA}}$$

Teorema de la bisectriz interior

En todo triángulo, una bisectriz interior determina, en el lado al cual es relativa, segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

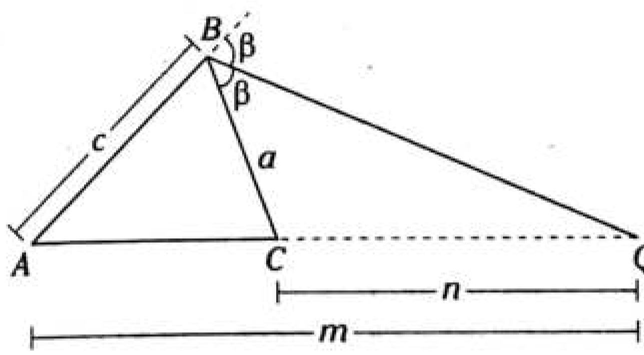


Si $\overline{BP}$ es bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$, se cumple

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{c}{a}}$$

Teorema de la bisectriz exterior

En todo triángulo, una bisectriz exterior determina, en el lado al cual es relativa, segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

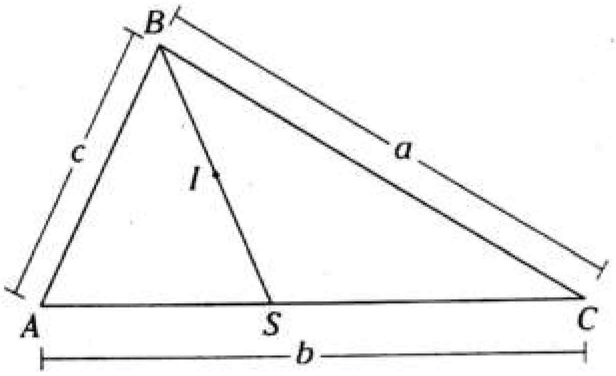


Si $\overline{BQ}$ es bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$, se cumple

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{c}{a}}$$

Teorema del incentro

En todo triángulo, la razón de los segmentos determinados por el incentro en una bisectriz interna, ubicados a partir del vértice correspondiente, es igual a la razón de la suma de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz y el tercer lado.

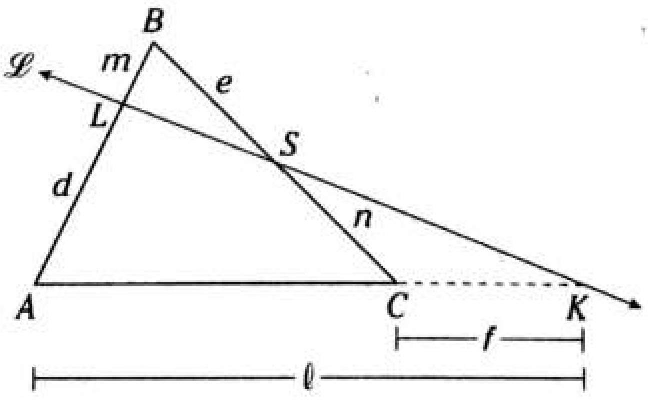


Si I es incentro del $\triangle ABC$, se cumple

$$\boxed{\frac{BI}{IS}=\frac{c+a}{b}}$$

Teorema de Menelao

En todo triángulo, al trazar una recta secante que interseca a dos lados y a la prolongación del tercer lado, se determinan seis segmentos, en los cuales se cumple que el producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos son iguales.

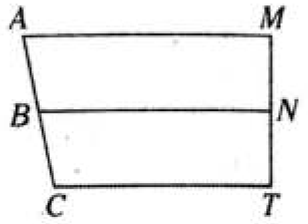


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es secante al $\triangle ABC$, se cumple

$$\boxed{d\cdot e\cdot f=m\cdot n\cdot \ell}$$

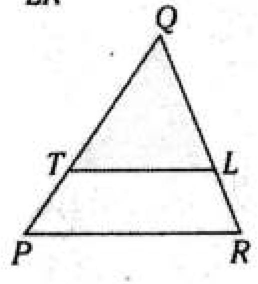
Nota

a. En el gráfico adjunto,
si $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{MN}{NT}$



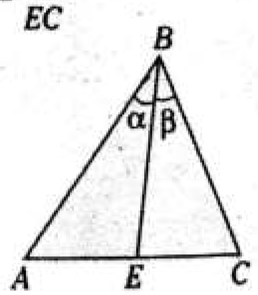
entonces $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CT}$ no son paralelos necesariamente; es decir, el teorema de Tales no es recíproco.

b. En el triángulo adjunto,
si $\dfrac{QT}{TP}=\dfrac{QL}{LR}$



entonces $\overline{TL}\,//\,\overline{PR}$ necesariamente.

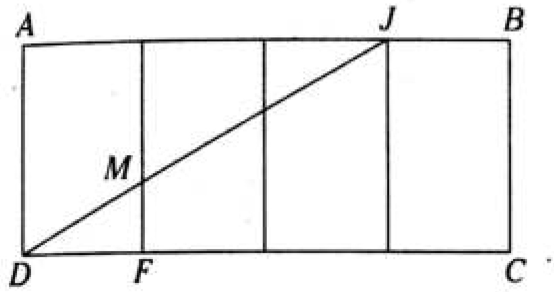
c. En el triángulo adjunto,
si $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EC}$



entonces $\alpha=\beta$; es decir, $\overline{BE}$ es bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

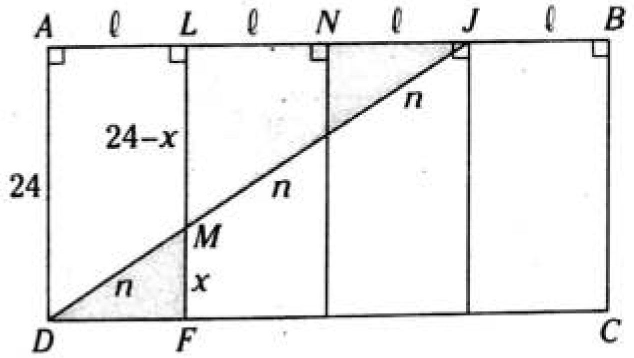
Problema N.º 1

En el gráfico $ABCD$ es un rectángulo dividido en cuatro rectángulos de igual área. Si $\overline{AD}$ mide 24 cm y trazamos $\overline{DJ}$, ¿cuánto mide $\overline{MF}$?



UNMSM 1992

Resolución



Nos piden $MF=x$.

Del dato, $AL=LN=NJ=JB=\ell$.

Como $\overline{LJ}//\overline{DF}$, aplicamos el corolario 2.

$$\frac{x}{24-x}=\frac{n}{2n}$$

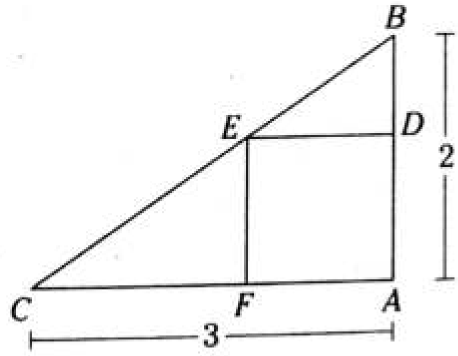
$2x=24-x$

$3x=24$

$\therefore\ x=8$ cm

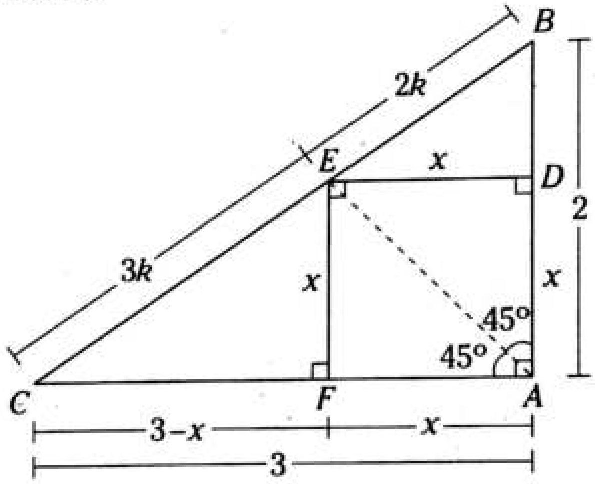
Problema N.º 2

En el gráfico, $ADEF$ es un cuadrado y ABC es un triángulo rectángulo. El lado del cuadrado es



UNMSM 1995

Resolución



Nos piden x.

Como $\overline{AE}$ es bisectriz interior del $\triangle BAC$, aplicamos el teorema de la bisectriz interior.

$$\frac{CE}{EB}=\frac{2}{3}$$

Como $\overline{EF}//\overline{AB}$, aplicamos el corolario 1.

$$\frac{x}{3-x}=\frac{2k}{3k}$$

$3x=2(3-x)$

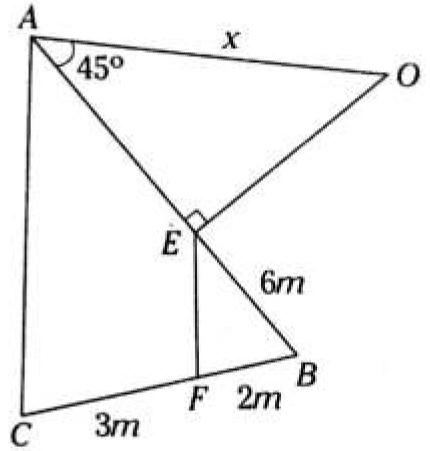
$3x=6-2x$

$5x=6$

$\therefore\ x=6/5$

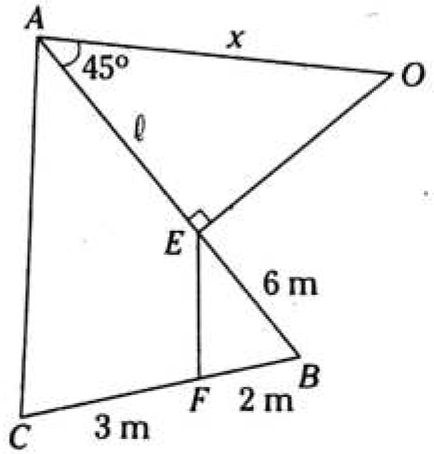
Problema N.° 3

Sabiendo que $\overline{EF} // \overline{AC}$, halle x.



UNMSM 2002

Resolución



Nos piden $x=AO$.

Como $\overline{EF} // \overline{AC}$, podemos aplicar el corolario 1.

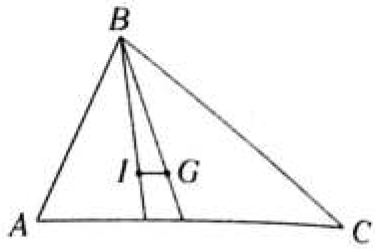
$$\frac{\ell}{6}=\frac{3}{2} \rightarrow \ell=9$$

$\triangle AEO$ es notable de 45°

$\therefore \quad x=9\sqrt{2}$ m

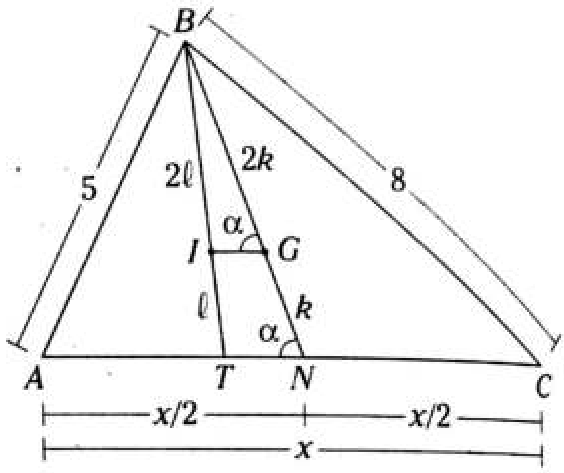
Problema N.° 4

En el gráfico, I es incentro y G es baricentro del triángulo ABC, $AB=5$ cm, $BC=8$ cm e $\overline{IG} // \overline{AC}$. Halle AC.



UNMSM 2010-II

Resolución



Nos piden $AC=x$.

Como G es baricentro de $\triangle ABC$, $BG=2(GN)$.

Del dato, $\overline{IG} // \overline{TN}$

Por el corolario (I)

$$\frac{BI}{IT}=\frac{BG}{GN}$$

$$\rightarrow \quad \frac{BI}{IT}=\frac{2k}{k} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle ABC$, por teorema del incentro

$$\frac{BI}{IT}=\frac{AB+BC}{AC}$$

$$\frac{BI}{IT}=\frac{5+8}{x} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\frac{5+8}{x}=\frac{2\cancel{k}}{\cancel{k}}$$

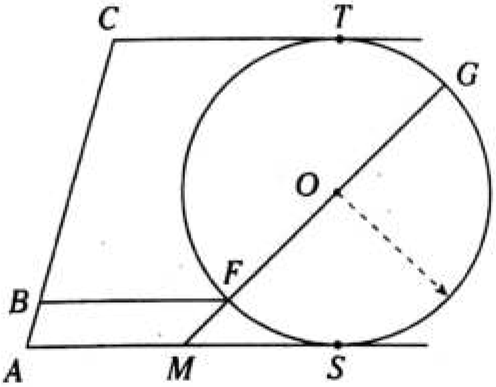
$$\frac{13}{x}=2$$

$\therefore \quad x=6{,}5$ cm

PROBLEMAS PROPUESTOS

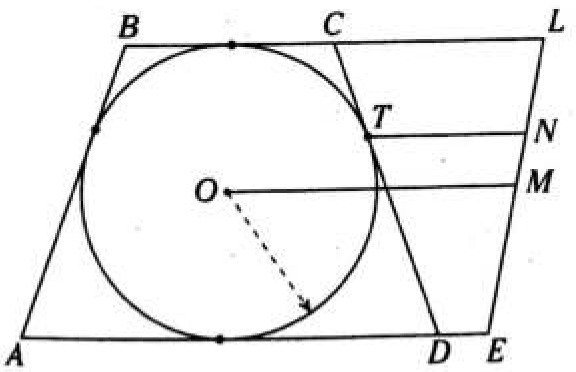
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico mostrado, T y S son puntos de tangencia, $\overline{CT}//\overline{BF}//\overline{AS}$, $m\widehat{TG}=53°$ y $BC=24$. Calcule AB.



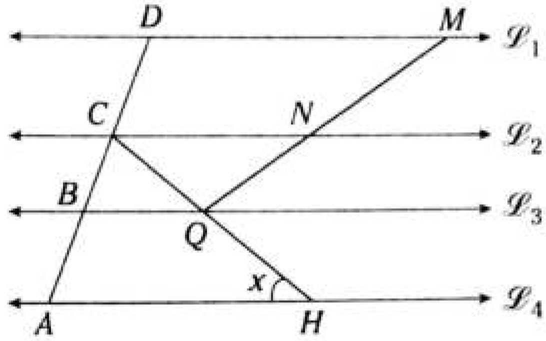
A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 6

2. Del gráfico adjunto, el trapecio isósceles $ABCD$ está circunscrito a la circunferencia de centro O y T es punto de tangencia. Si $\overline{OM}//\overline{TN}//\overline{CL}$, $BC=4$ y $AD=12$, calcule $\dfrac{MN}{LE}$.



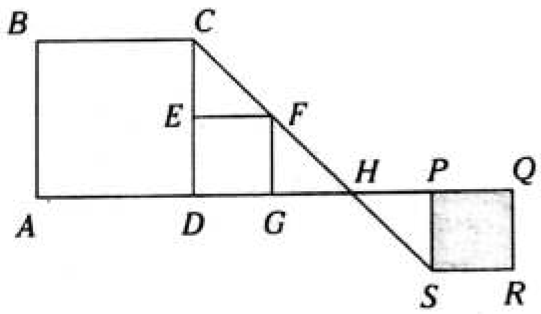
A) 1/3 B) 2/5 C) 2/3
D) 1/2 E) 1/4

3. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, $AB=CD$, $NM=QH$, $CQ=5$ y $CN=8$. Calcule x.



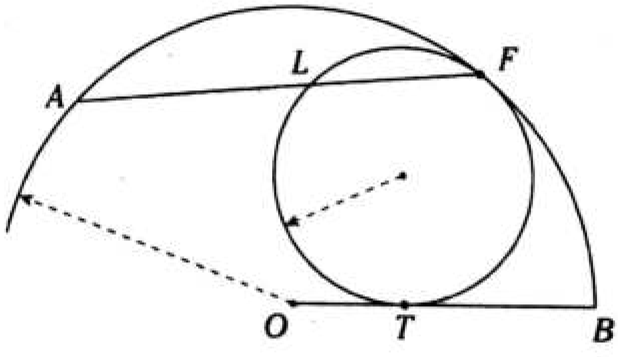
A) 53° B) 30° C) 53°/2
D) 37° E) 37°/2

4. Del gráfico, se muestran los cuadrados $ABCD$, $DEFG$ y $SPQR$. Si $AD=10$, $DG=HP=6$, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) 8 B) 12 C) 20
D) 24 E) 16

5. Del gráfico, T y F son puntos de tangencia, $TB=6$ y $OT=3$. Calcule $\dfrac{AL}{LF}$.



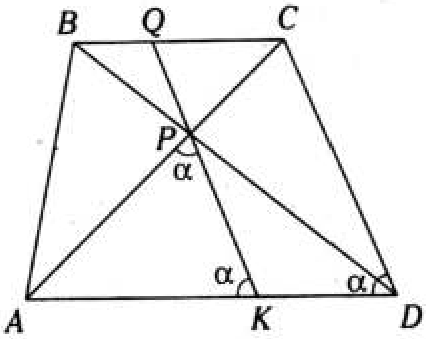
A) 6/5 B) 2 C) 5/4
D) 7/2 E) 11/7

6. En un triángulo ABC se ubican M y N en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que $\overline{MN}//\overline{AC}$. Si $AB=9$, $BC=6$, $AC=12$ y $MB+BN=10$, calcule MN.

A) 7 B) 9 C) 10
D) 8 E) 6

7. En el trapecio $ABCD$ mostrado ($\overline{BC}//\overline{AD}$), $AP=8$ y $PC=4$. Calcule BQ.

A) 2
B) 1
C) 3
D) 2,5
E) 1,5

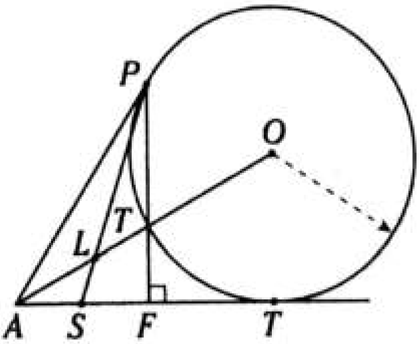


8. Se tiene el trapecio isósceles $ABCD$ ($\overline{BC}//\overline{AD}$). Sus diagonales se intersecan en R y $AB=RD$. En la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica el punto M, tal que $\overline{BM}//\overline{AR}$. Si $\dfrac{BM}{MC}=2$, $\overline{BC}\cap\overline{MR}=\{S\}$, calcule $\dfrac{CS}{SB}$.

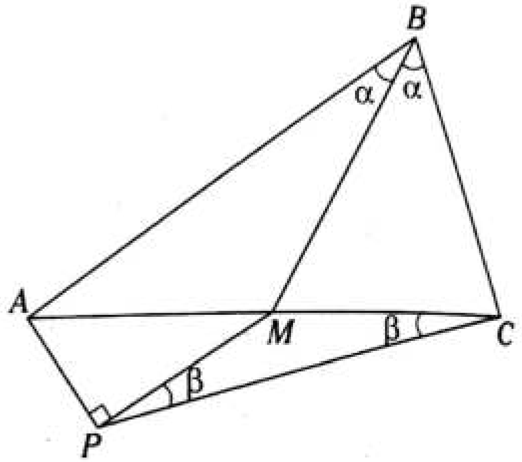
A) 2 B) 1/2 C) 1/3
D) 3 E) 2/3

9. En el gráfico mostrado, T y P son puntos de tangencia. Calcule $\dfrac{LS}{LB}$ si $AS=SF$.

A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/5
E) 1/6

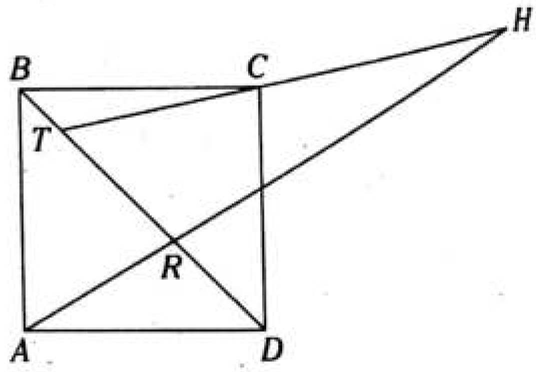


10. Del gráfico, $AM+BC=9$, $AB+MC=11$ y $AP=\sqrt{5}$. Calcule AB^2-BC^2.



A) 40 B) 50 C) 36
D) 45 E) 27

11. Del gráfico, $ABCD$ un cuadrado, $TC=6$, $CH=9$ y $AR=4$. Calcule HR.

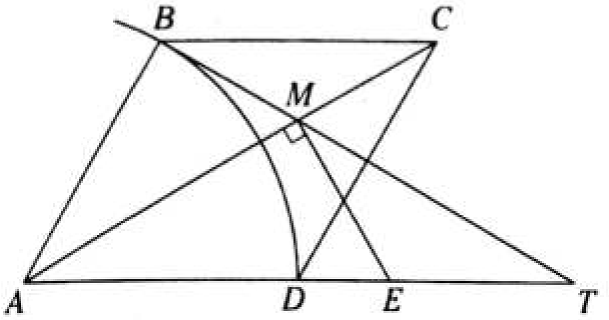


A) 6 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

12. En un cuadrado $ABCD$ se ubica el punto M en la prolongación de $\overline{CB}$. Si $(MB)(TD)=24$. ($\overline{MD}\cap\overline{AB}=\{T\}$), calcule $(TB)(MD)$.

A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) 24
D) $2\sqrt{6}$ E) $24\sqrt{2}$

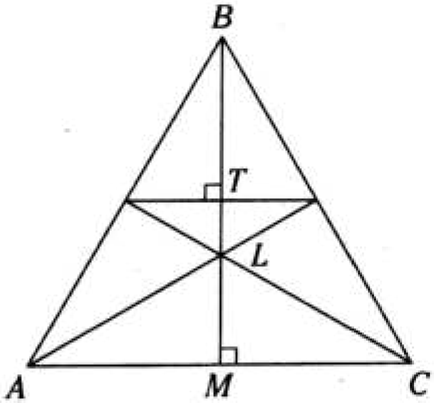
13. Del gráfico mostrado, $ABCD$ es un rombo, $AB=6$ y $DE=2$. Calcule ET.



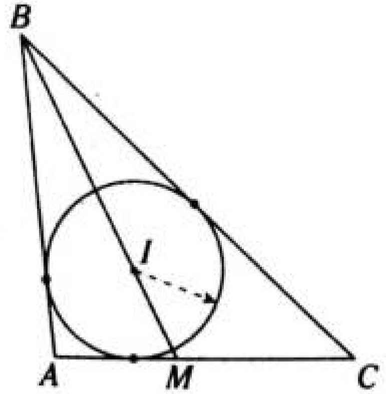
A) 3,5 B) 3 C) 4,5
D) 4 E) 5,5

14. En el gráfico, $AM=MC$, $LM=4$ y $TL=2$. Calcule TB.

A) 6
B) 5
C) 3
D) 7
E) 3,5

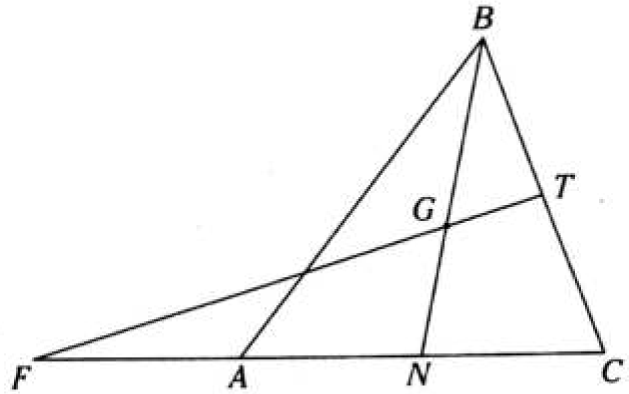


15. Del gráfico, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC. Si $AB=7$, $BC=8$ y $AC=3$, calcule $\frac{MI}{IB}$.



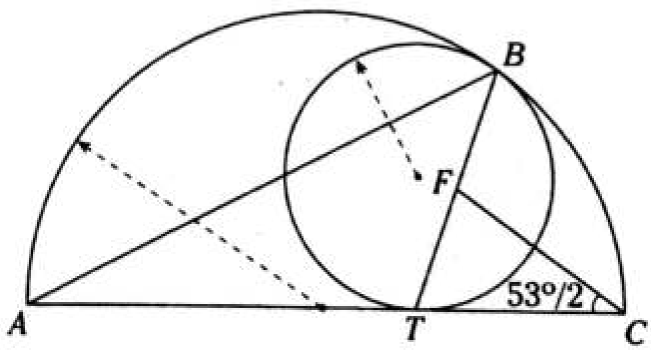
A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

16. Del gráfico, G es el baricentro del triángulo ABC y $FA=2(AN)$. Calcule $\frac{TB}{TC}$.



A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) $\frac{4}{3}$

17. Del gráfico, B y T son puntos de tangencia y $m\widehat{BC}=74°$. Calcule $\frac{BF}{FT}$.

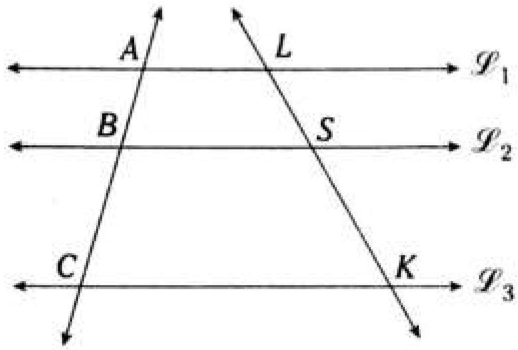


A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{8}{5}$

NIVEL INTERMEDIO

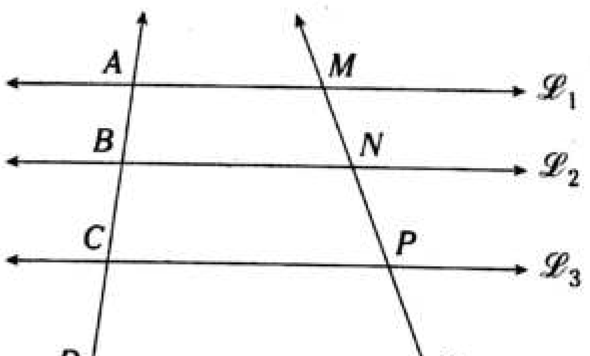
18. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, $BC=2(AB)$, $LS=2x$, $KS=y+3$, $y > x$.

Calcule el menor valor entero de x.



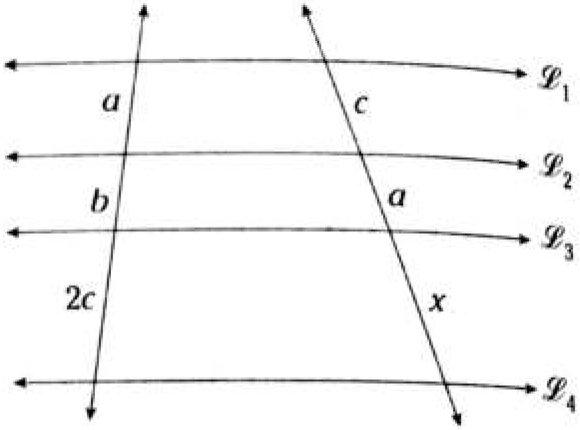
A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

19. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$, $MN+PQ=6$ y $CD=2(NP)=2(AB)$. Calcule $\dfrac{(AB)^2}{BC}$.



A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

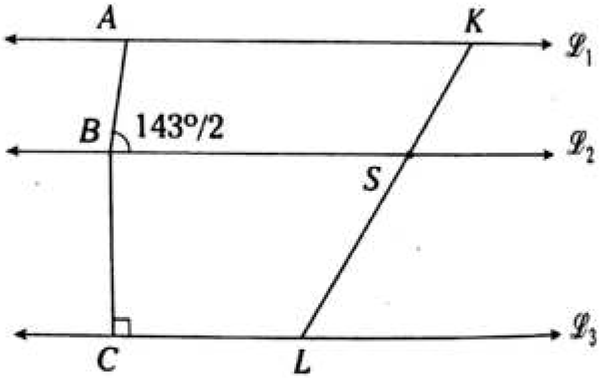
20. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$ y $\dfrac{a^3}{b^2}=4$.
Calcule x.



A) 6 B) 4 C) 8
D) 9 E) 16

21. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

Calcule $\dfrac{LS}{SK}$.



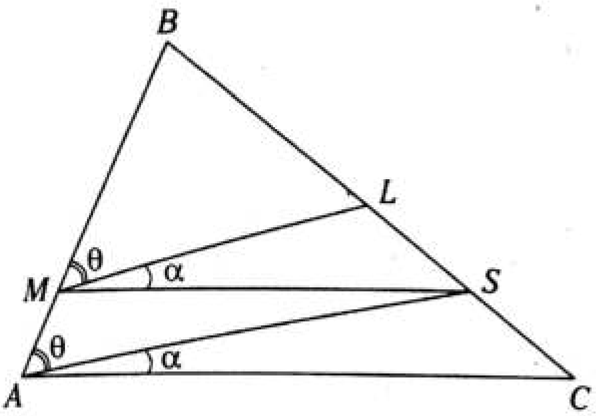
A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{4}{5}$

D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{5}{6}$

22. En un triángulo ABC se traza $\overline{MN} // \overline{AC}$ ($M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$), $5(AM)=3(MB)$ y $BN-NC=8$. Calcule $(BN)\cdot(NC)$.

A) 220 B) 240 C) 260
D) 280 E) 320

23. Del gráfico, $BL(SC-LS)=4$. Calcule LS.

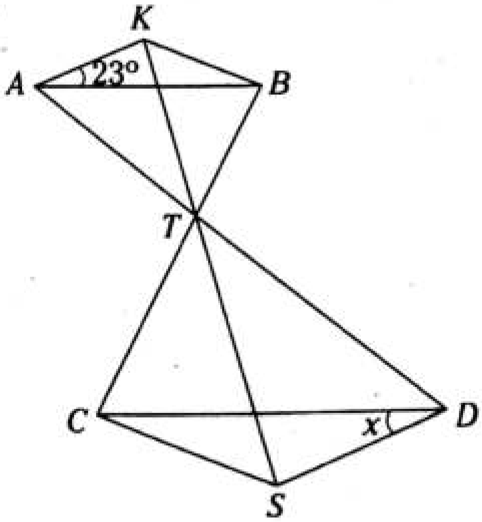


A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

24. En un triángulo ABC se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ hasta K y S, respectivamente, tal que $\overline{KS}//\overline{AC}$, $SB=4$, $BC=7$, $BK=x+6$, $BA=y+3$ y $2x > y$. Calcule el menor valor entero de x.

A) 29 B) 30 C) 31
D) 32 E) 33

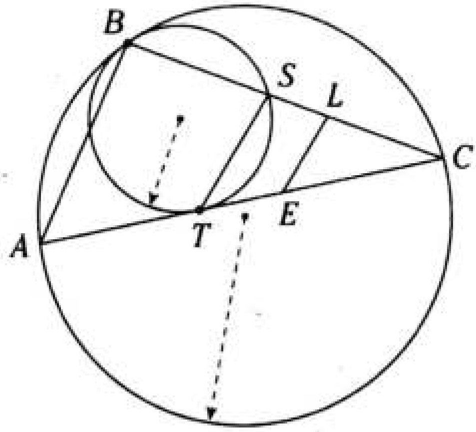
25. Del gráfico, $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{\overline{KT}}{TS}$. Calcule x.



A) 21° B) 22° C) 23°
D) 24° E) 25°

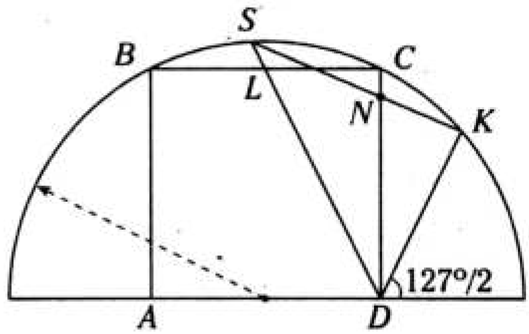
26. Del gráfico, $m\widehat{AC}=4(m\sphericalangle LEC)$, $CL=2(LS)$ y $AT=EC$. Calcule AB/BC.

A) 1/2
B) 3/5
C) 2/5
D) 3/4
E) 2/3



27. Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrado y $BL=LC$.

Si $\dfrac{DS}{DK}=\ell$, calcule $\dfrac{SN}{NK}$.

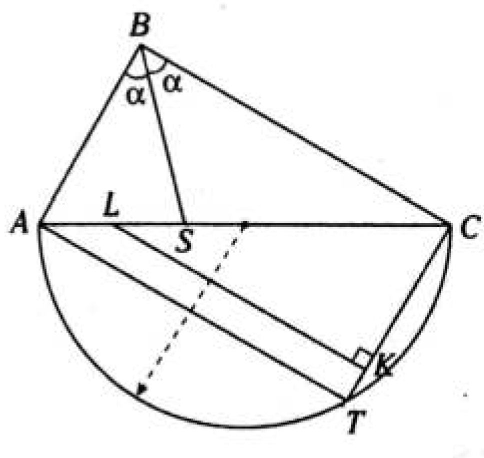


A) 2ℓ B) ℓ C) $\ell/2$
D) $\ell/3$ E) $\ell/4$

28. Del gráfico, $5(AB)=3(BC)$ y $AL=LS$.

Calcule $\dfrac{CK}{KT}$.

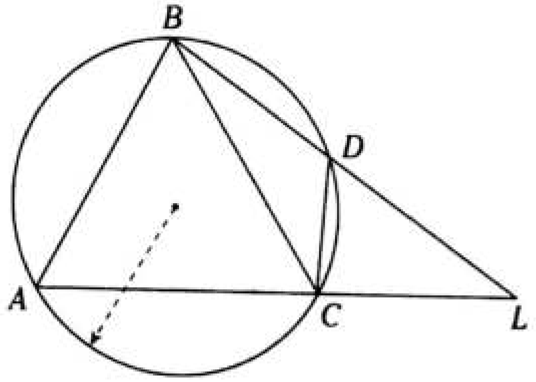
A) 3
B) 9/2
C) 13/3
D) 5/3
E) 12/5



29. En un triángulo ABC, donde $AB=8$, se prolonga $\overline{CB}$ hasta L, tal que $m\sphericalangle LBA=m\sphericalangle CBK$ ($K\in\overline{AC}$), $BK=4$. Calcule el mayor valor entero de AC.

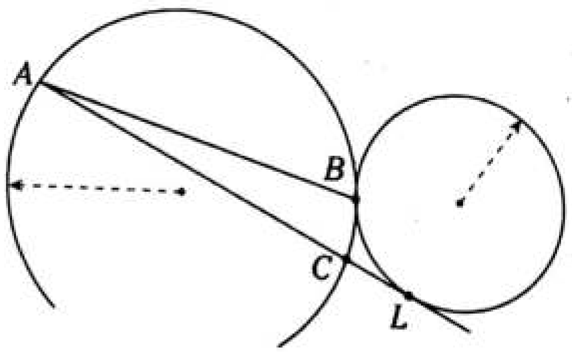
A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

30. Del gráfico, $DC=2$, $AC=3$, $AB=BC$ y $(AD)(CL)=8$. Calcule CL.



A) 0,5 B) 0,8 C) 1
D) 1,2 E) 1,4

31. Del gráfico, B y L son puntos de tangencia, $AC=AB+2$, $CL=BC+1$. Halle la relación entre AB y BC.

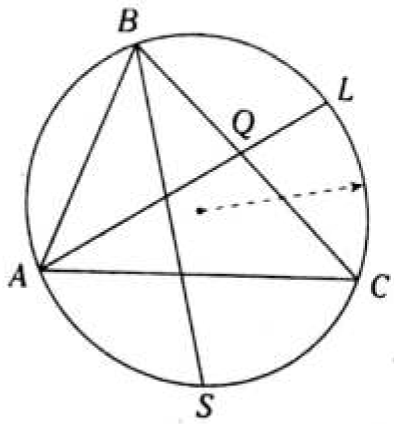


A) $AB=BC^2+1$
B) $AB=BC^2-2$
C) $AB=BC^2+2$
D) $AB=BC^2+3BC$
E) $AB=BC^2-BC$

32. En un triángulo ABC de incentro I se traza la bisectriz interior BS, tal que $BS=4(IS)$ y el perímetro de la región triangular ABC es 24. Calcule AC.

A) 7 B) 8 C) 4
D) 5 E) 6

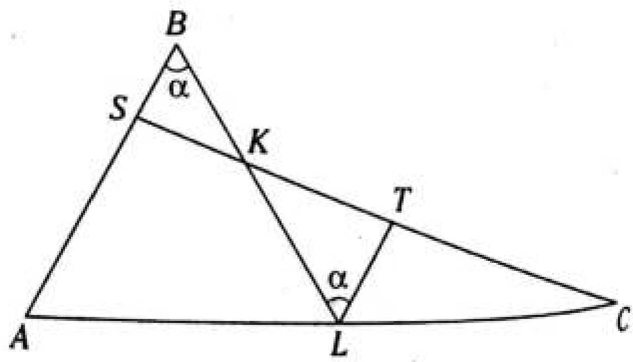
33. Del gráfico, $m\widehat{BL}=m\widehat{LC}$, $m\widehat{AS}=m\widehat{SC}$, $2(AB)=3(BQ)$ y $3(BC)-2(AC)=12$. Calcule AB.



A) 5 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

34. Del gráfico, $AS=3(SB)$ y $AL=LC$.

Calcule $\dfrac{SK}{KT}$.



A) 1/2 B) 3/1 C) 3/4
D) 2/3 E) 3/5

Semejanza de triángulos

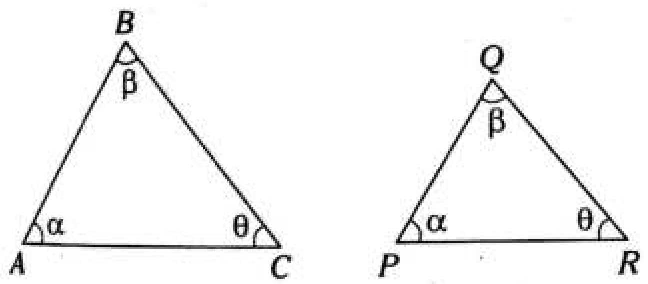
Capítulo IX

Objetivos

- Definir la semejanza de triángulos y conocer los elementos homólogos y su relación.
- Estudiar los criterios necesarios y suficientes para que dos triángulos sean semejantes.
- Utilizar la información de un triángulo para calcular los lados o las medidas angulares de otro triángulo a través de la semejanza.

Definición

Dos triángulos son semejantes si tienen igual forma y tamaños diferentes.



$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

$\sim$ se lee "es semejante a".

En el gráfico, $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ y $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ y $\overline{PR}$ son lados homólogos.

Lados homólogos son proporcionales

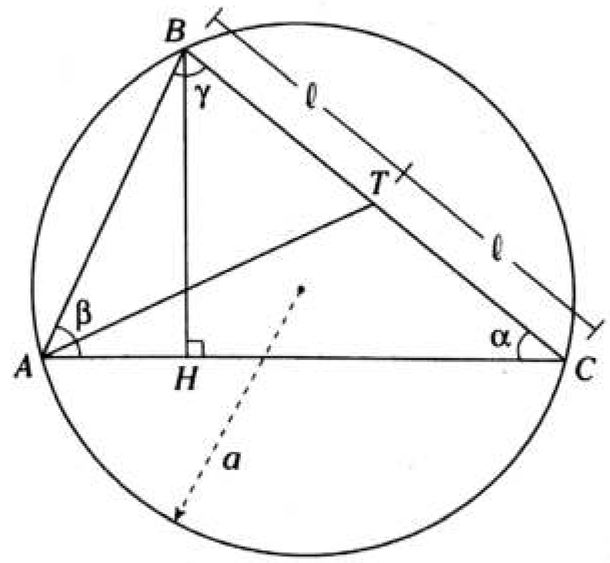
$$\boxed{\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}=k}$$

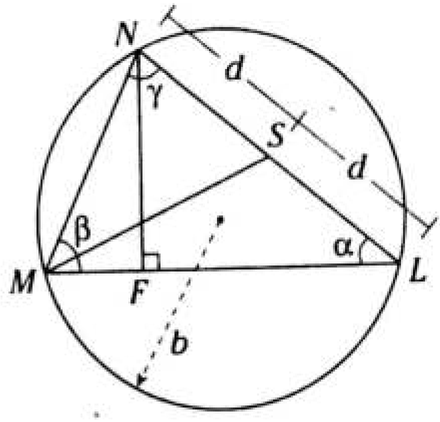
Donde k es la razón de semejanza o constante de proporcionalidad.

Nota

En dos triángulos, los lados homólogos son aquellos lados opuestos a los ángulos de igual medida.

Proporcionalidad de elementos homólogos



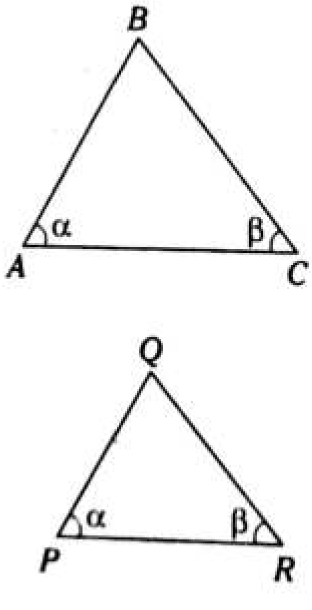


$$\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NL}=\frac{AC}{ML}=\frac{BH}{NF}=\frac{AT}{MS}=\frac{HC}{FL}=\frac{AH}{MF}=\frac{a}{b}=k$$

Donde k es la razón de semejanza.

Casos notables de triángulos semejantes

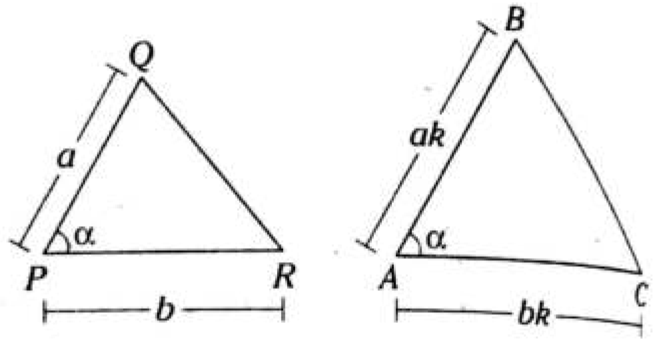
I. Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos pares de ángulos interiores, respectivamente, de igual medida.



En el gráfico, los triángulos mostrados son semejantes.

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

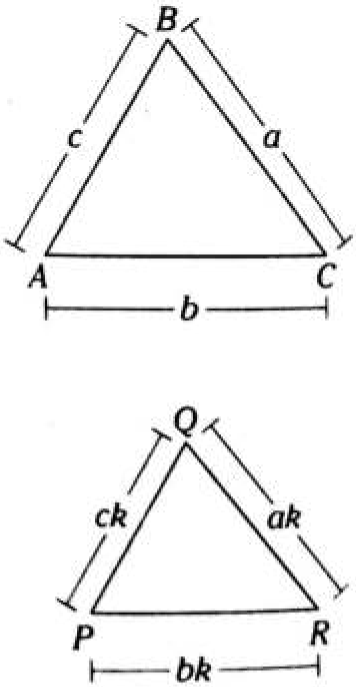
II. Dos triángulos son semejantes si un ángulo del primero es de igual medida que un ángulo del segundo y los lados que los determinan son, respectivamente, proporcionales.



En el gráfico, los triángulos mostrados son semejantes.

$$\boxed{\triangle PQR \sim \triangle ABC}$$

III. Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primero son proporcionales a los tres lados del segundo.

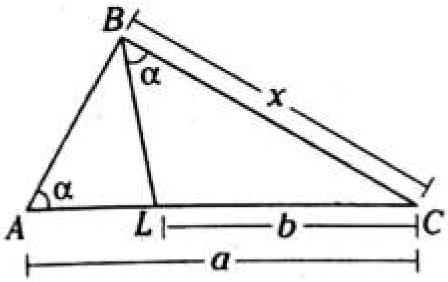


En el gráfico, los triángulos mostrados son semejantes.

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

Teoremas asociados a la semejanza de triángulos

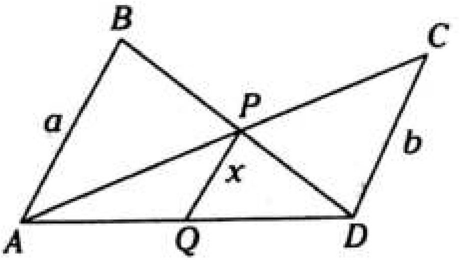
1.



En el gráfico, si m∢BAC=m∢LBC, se cumple

$$\boxed{x^2=ab}$$

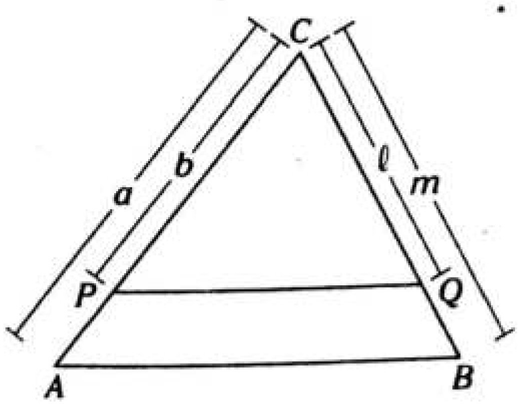
2.



Si $\overline{AB}//\overline{PQ}//\overline{CD}$, se cumple

$$\boxed{x=\frac{ab}{a+b}}$$

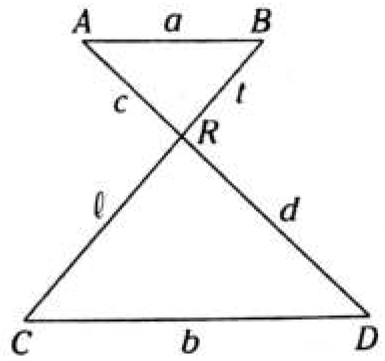
3.



Si $\overline{AB}//\overline{PQ}$, se cumple

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{m}{\ell}}$$

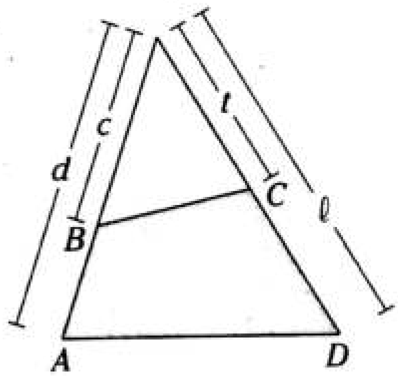
4.



Si $\overline{AB}//\overline{CD}$, se cumple

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{t}{\ell}}$$

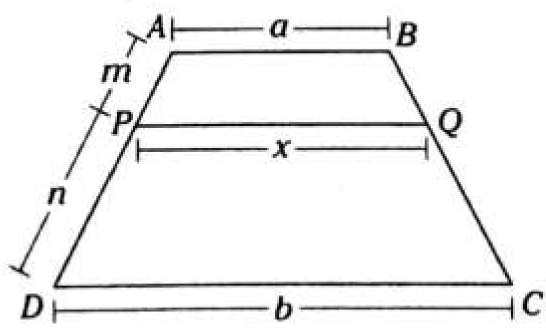
5.



Si ⏢$ABCD$ es inscriptible, se cumple

$$\boxed{dc=\ell t}$$

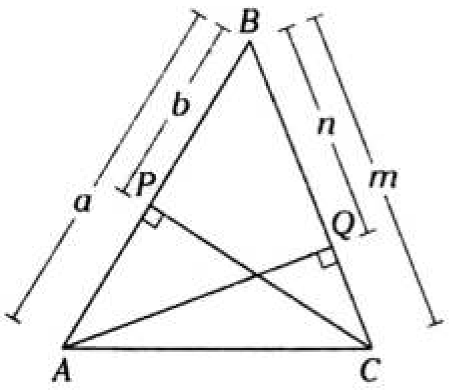
6.



Si $\overline{AB}//\overline{PQ}//\overline{CD}$, se cumple

$$\boxed{x=\frac{an+bm}{n+m}}$$

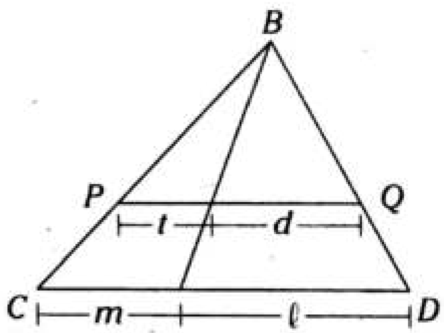
7.



Si $\overline{CP}$ y $\overline{AQ}$ son alturas, se cumple

$$\boxed{ab=mn}$$

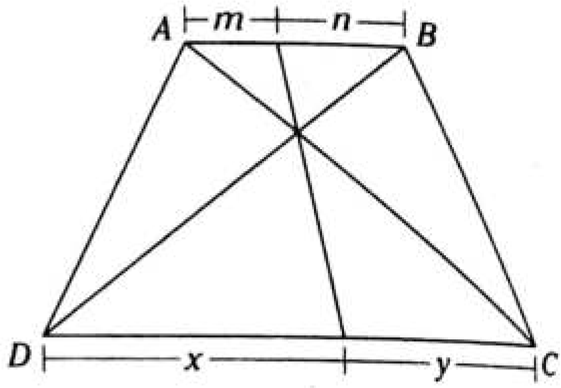
8.



Si $\overline{PQ} // \overline{CD}$, se cumple

$$\boxed{\frac{t}{d}=\frac{m}{\ell}}$$

9.

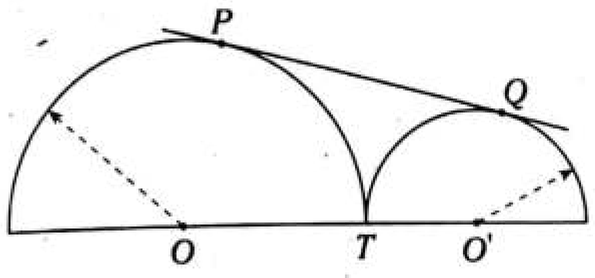


Si $\overline{AB} // \overline{CD}$, se cumple

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{y}{x}}$$

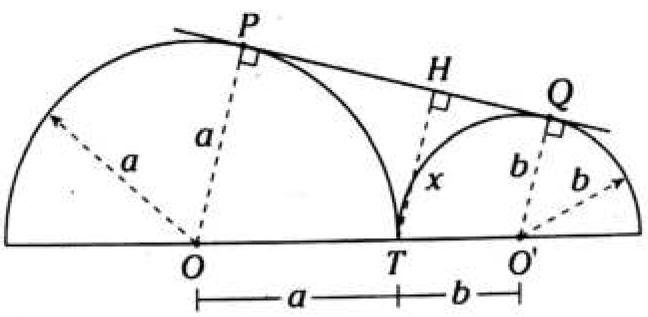
Problema N.º 1

En el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia, a y b son los radios de las semicircunferencias. Determine la distancia del punto T a la recta PQ.



UNMSM 2011

Resolución



Nos piden $TH=x$.

Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{O'Q}$

→ ⏢$OPQO'$ es un trapecio rectángulo

Como $\overline{TH} \parallel \overline{OP}$ y $\overline{O'Q}$, por teorema de semejanza

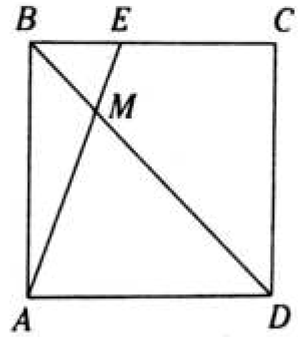
$$TH=\frac{(OP)(TO')+(O'Q)(OT)}{TO'+OT}$$

$$TH=\frac{a(b)+b(a)}{b+a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{2ab}{a+b}$$

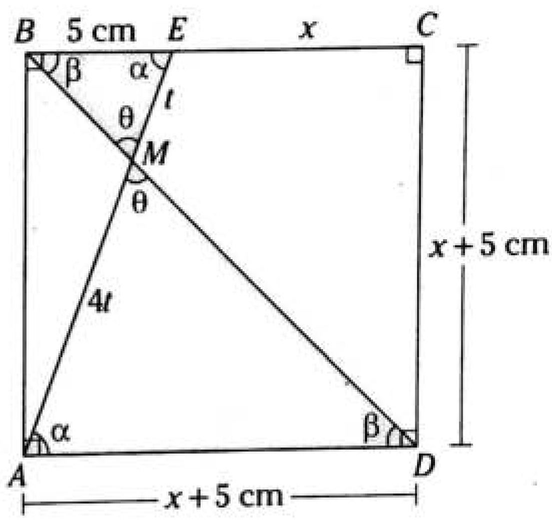
Problema N.º 2

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado, $AM=4ME$ y $BE=5$ cm. Calcule EC.



UNMSM 2008-II

Resolución



Nos piden $EC=x$.

Dato: $AM=4(ME)$

$BE=5$ cm

$ABCD$ es un cuadrado.

Como $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$,

m∢EBD=m∢MDA (ángulos alternos)

m∢BEA=m∢MAD (ángulos alternos)

Observamos que

△BEM ~ △DAM (A-A-A)

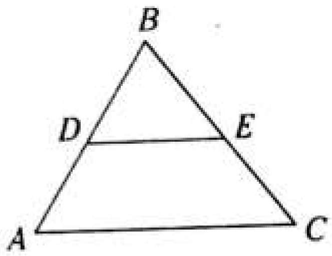
$$\frac{BE}{AD}=\frac{EM}{MA}$$

$$\frac{5\text{ cm}}{x+5\text{ cm}}=\frac{\cancel{\ell}}{4\cancel{\ell}}$$

$\therefore \quad x=15$ cm

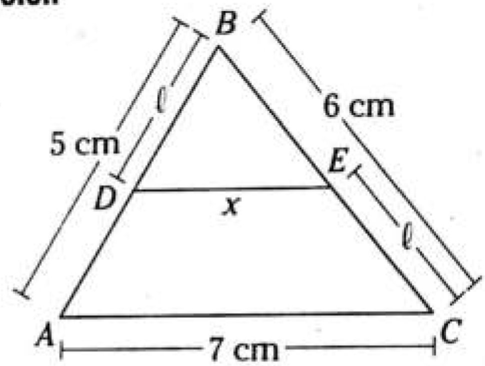
Problema N.° 3

En la figura, $AB=5$ cm, $BC=6$ cm y $AC=7$ cm. Si $\overline{DE} // \overline{AC}$ y $BD=EC$, calcule DE.



UNMSM 2008-II

Resolución



Nos piden $DE=x$.

Datos: $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $AC=7$ cm,

$\overline{DE} // \overline{AC}$ y $BD=EC=\ell$

Por teorema de semejanza

$$\frac{x}{7\text{ cm}}=\frac{BD}{AB} \rightarrow \frac{x}{7\text{ cm}}=\frac{\ell}{5\text{ cm}}$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{7}{5}\ell \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de Tales en el $\triangle ABC$

$$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC} \rightarrow \frac{\ell}{5-\ell}=\frac{6-\ell}{\ell}$$

$$\rightarrow \quad \ell=\frac{30}{11} \qquad \text{(II)}$$

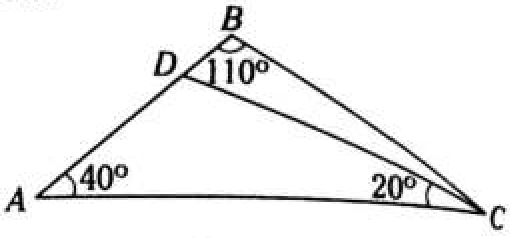
Reemplazamos (II) en (I)

$$x=\frac{7}{\cancel{5}_{1}}\left(\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{11}\right)$$

$$\therefore \quad x=\frac{42}{11}\text{ cm}$$

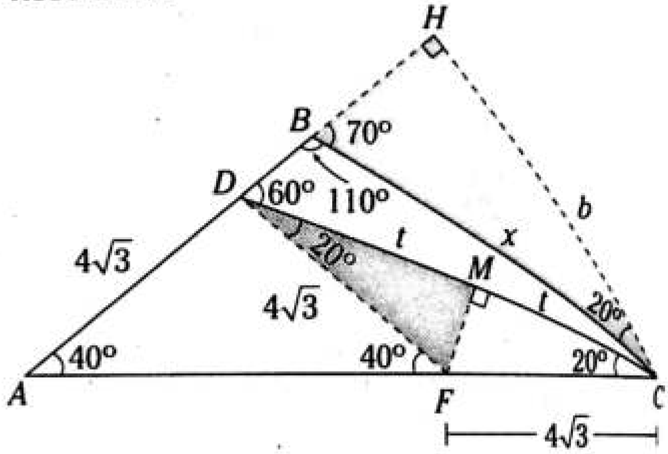
Problema N.° 4

En el triángulo ABC del gráfico, $AD=4\sqrt{3}$ cm. Halle BC.



UNMSM 2012-I

Resolución



Nos piden $BC=x$.

Dato: $AD=4\sqrt{3}$

Trazamos $\overline{DF}$, tal que $m\measuredangle FDC=20°$.

$\rightarrow \quad FC=FD=AD=4\sqrt{3}$

En el $\triangle DFC$ isósceles trazamos $\overline{FM} \perp \overline{DC}$.

$\rightarrow \quad DM=MC=t$

Luego trazamos $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\rightarrow \quad \triangle BHC \sim \triangle FMD$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{4\sqrt{3}}=\frac{b}{t} \qquad \text{(I)}$$

$\triangle DHC$ es notable de 30° y 60°

$$CH=\frac{DC}{2}\sqrt{3} \rightarrow b=\frac{2t}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{t}=\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

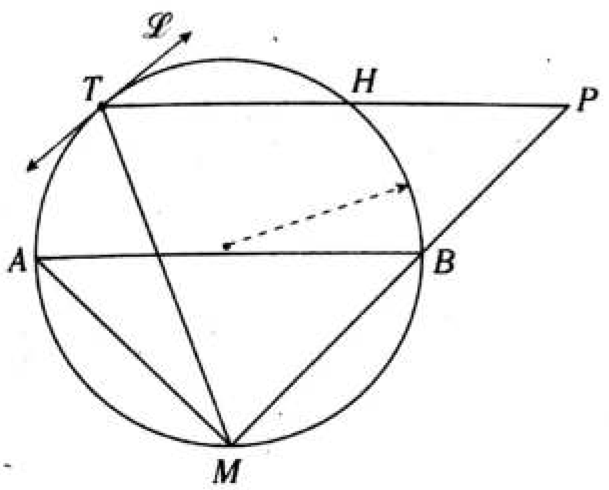
$$\frac{x}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$\therefore \quad x=12$ cm

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Sea $\overline{TH} // \overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{MP}$. Si T es punto de tangencia, $AM=6$ y $TP=8$, calcule MT.



A) 7 B) 5 C) 14
D) $4\sqrt{3}$ E) 10

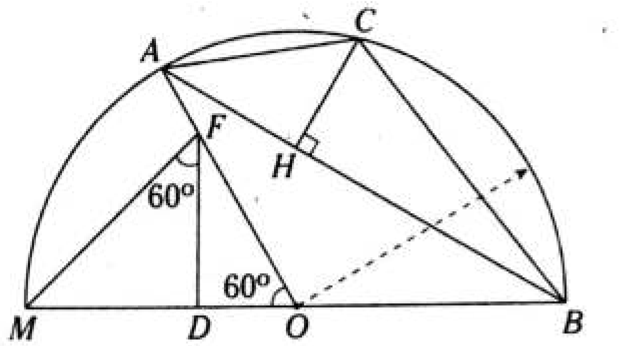
2. En un triángulo rectángulo ABC se traza la bisectriz interior BD, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos F y E, respectivamente, tal que $\overline{FE} // \overline{AC}$ y $m\sphericalangle EDC=45°$. Si $FB=8$ y $BC=10$, calcule BD.

A) 6 B) $4\sqrt{5}$ C) 9
D) 20 E) 2

3. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, se trazan $\overline{BH}$ y $\overline{AM}$, los cuales son altura y ceviana interior, respectivamente, y se intersecan en P. Si $\dfrac{BP}{PH}=4$ y $AP=12$, calcule PM.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 3 E) 9

4. En el gráfico adjunto, $AC=OF$, $3(MF)=2(BC)$ y $CH=6$. Calcule FD.

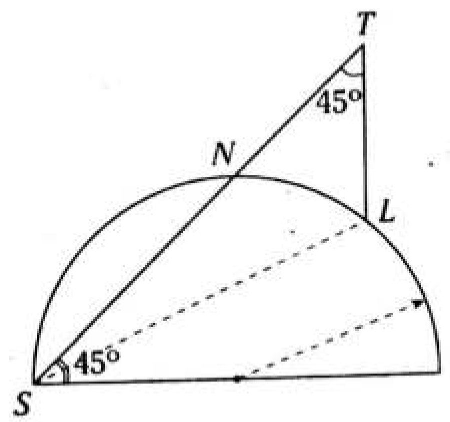


A) 8 B) 6 C) 5
D) 12 E) 4

5. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BL, luego se traza la ceviana interior LS en el triángulo BLC, $BL=BS$, $m\sphericalangle BAC=2(m\sphericalangle SLC)$ y $AL=2(LC)=4$. Calcule AB.

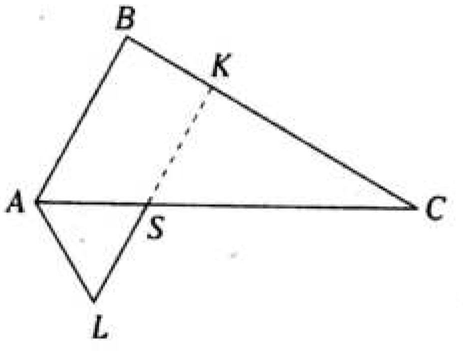
A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{7}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

6. Del gráfico, $SN=2(NT)=8$. Calcule LS.



A) $4\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{6}$

7. Del gráfico, $AS=2$, $SL=3$, $AL=4$, $AB=6$, $SC=7$ y $BC=6(AS)$. Calcule SK.



A) 5 B) 14/3 C) 4
D) 13/4 E) 11/3

8. En un triángulo ABC se ubica el punto incentro I; en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, tal que $BC=9$, $IC=6$ y $MC=4$. Si $m\sphericalangle AMI=70°$, calcule $m\sphericalangle BIC$.

A) 125° B) 130° C) 110°
D) 140° E) 120°

9. En un triángulo ABC, $AB=7$ y $BC=8$; además en las prolongaciones de $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos R y M, respectivamente. Si $16(RA)=11(RC)=176$, $RE=14$ y $m\sphericalangle ABC=m\sphericalangle CRE$ (E es punto exterior relativo a $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$), calcule $m\sphericalangle ECM$.

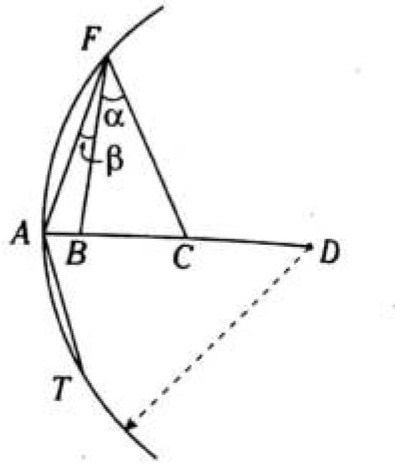
A) 60° B) 30° C) 37°/2
D) 53°/2 E) 53°

10. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BM, y en $\overline{BM}$ se ubica el punto L, tal que $BL=5(LM)=5$ y $AL=3$. Si $MC=2(AM)$ y $BC=10$, calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 53° B) 37°/2 C) 53°/2
D) 37° E) 30°

11. Del gráfico, $AC=AT=4(AB)=4$, $FB=FC=6$ y $m\sphericalangle FAC=2\alpha+\beta$. Calcule $\frac{m\sphericalangle BFC}{2}+m\sphericalangle DAT$.

A) 37°
B) 60°
C) 53°
D) 90°
E) 45°



12. Se tiene el rectángulo $ABCD$. En las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ se ubican los puntos E y F, respectivamente, y en $\overline{DF}$ se ubica el punto T, tal que $\overline{CT}//\overline{ED}$. Si $2(AB)=3(BE)$, calcule $\frac{DT}{AD}$. Considere que E, C y F son colineales.

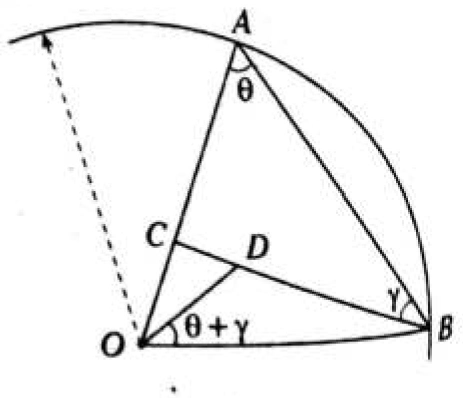
A) 3/7 B) 2/3 C) 3/5
D) 4/3 E) 3/4

13. En un cuadrilátero $ABCD$, $m\sphericalangle BCA=m\sphericalangle ADB=90°$, $\overline{BD}\cap\overline{AC}=\{R\}$ y $AD=DC$. Si $AR=7(RC)$ y $BR=2$, calcule RD.

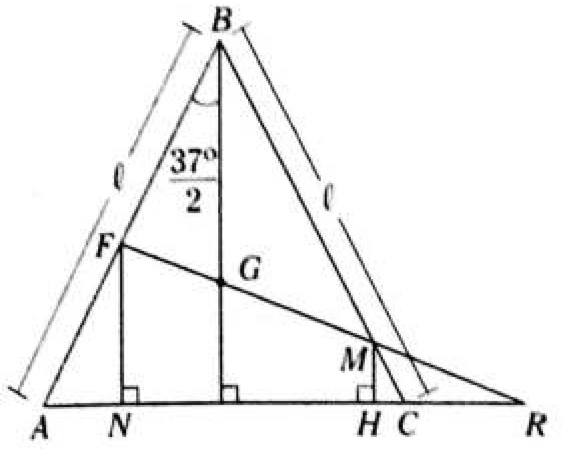
A) 5 B) 14 C) 6
D) 8 E) 7

14. Del gráfico, $CB=10$, $OD=4$ y $OC=5$. Calcule AC.

A) 5
B) 3
C) 2
D) 1
E) 6



15. Del gráfico, $GM=MR$, G es baricentro del $\triangle ABC$ y $HC=1$. Calcule FN.

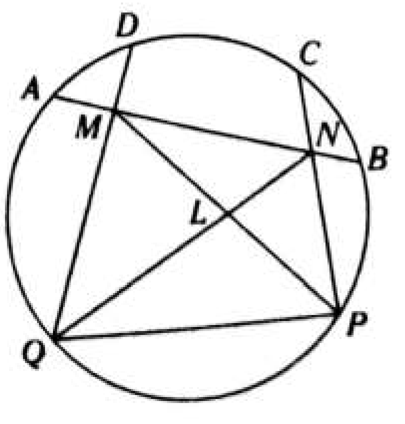


A) 6 B) 4 C) 7
D) 7,5 E) 8

16. En un triángulo ABC está inscrito un rectángulo $MNLS$, donde $\overline{MS} \subset \overline{AC}$, $NL=4$, $MN=6$ y $(AC)h=32$ (h es la altura del triángulo NBL relativa a $\overline{NL}$). Calcule h.

A) 1 B) 2 C) 2,5
D) 3 E) 3,5

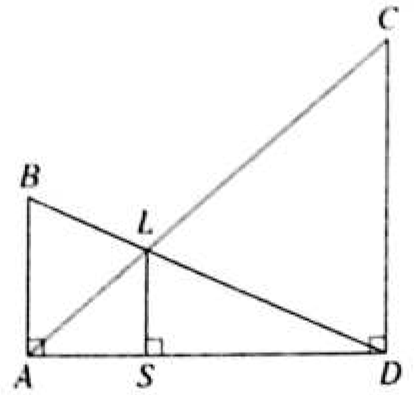
17. Del gráfico, $m\widehat{ADC} = m\widehat{DCB}$, $QL=NL+LP=5$, NL y PL toman valores consecutivos. Calcule LM.



A) 2 B) 5/2 C) 7/3
D) 3 E) 10/3

NIVEL INTERMEDIO

18. Del gráfico, $CD-AB=1$. Calcule AB si $LS=1,2$.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

19. En un triángulo isósceles ABC se inscribe el cuadrado $MNPQ$ (M y Q en $\overline{AC}$), $MP=2\sqrt{2}$, la distancia de B a $\overline{NP}$ es 5 y $AN=PC$. Calcule AC.

A) 2,6 B) 2,2 C) 2,4
D) 2,8 E) 3

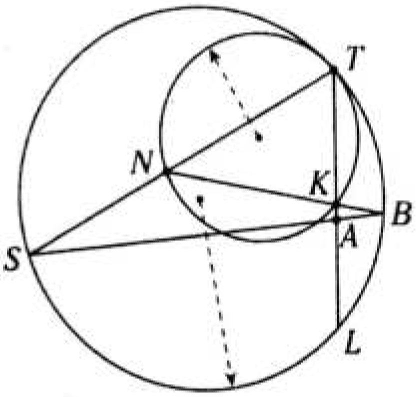
20. En un triángulo ABC se traza $\overline{MN}$ ($M \in \overline{AC}$, $N \in \overline{BC}$), tal que $AM=4(MC)=8$ y $NC=4$. Si $BN < 16$ y las regiones triángulares ABC y MNC son semejantes, calcule BN.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

21. En un triángulo ABC se trazan la ceviana interior AN y la mediana BM, que se intersecan en L, $AL=3(LN)=6$ y $m\sphericalangle BAN = m\sphericalangle LBN$. Calcule NC.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

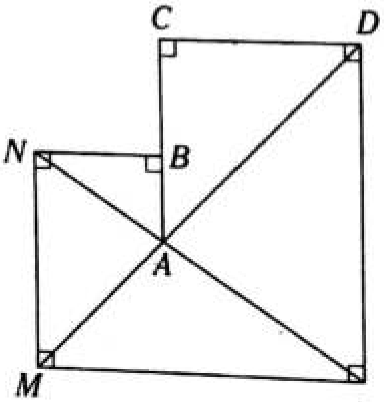
22. Del gráfico, T es punto de tangencia y $TK=5(AK)=5$. Calcule AB.



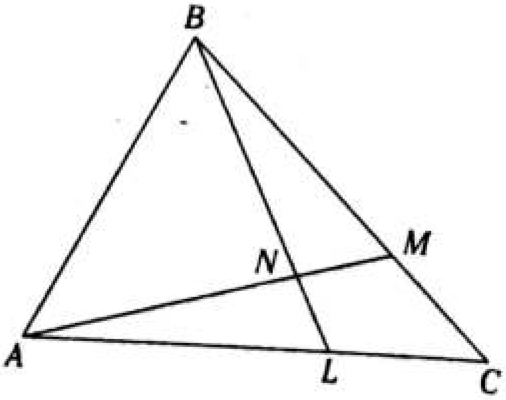
A) 2
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{4}$
D) $\sqrt{5}$
E) $\sqrt{6}$

23. Si $AB=2$ y $CB=3$, calcule $MN-2$.

A) $2\sqrt{2}$
B) $\sqrt{5}$
C) $\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{5}$
E) $2\sqrt{3}$

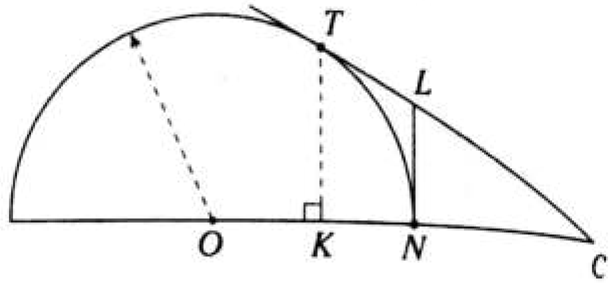


24. Del gráfico, $m\sphericalangle ABM=m\sphericalangle BNM$, $AN=3(NM)=3$ y $AL=2(LC)$. Calcule MC.



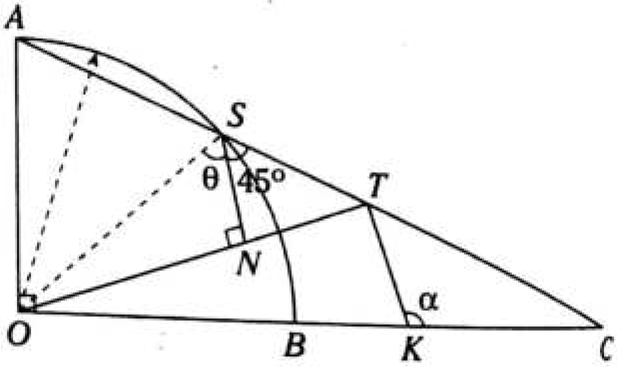
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

25. Del gráfico, T y N son puntos de tangencia, y $2(CT)=5(TK)$. Calcule la razón de perímetros de las regiones triangulares NLC y TKC.



A) 2/5
B) 3/7
C) 5/7
D) 4/9
E) 2/7

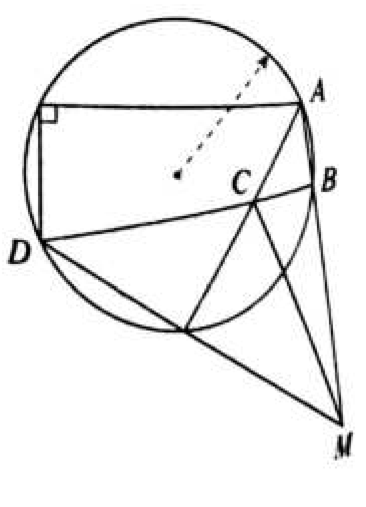
26. Del gráfico, $\theta+\alpha=180°$, $SN=2$ y $TC=5\sqrt{2}$. Calcule $\dfrac{CK}{BK}$.



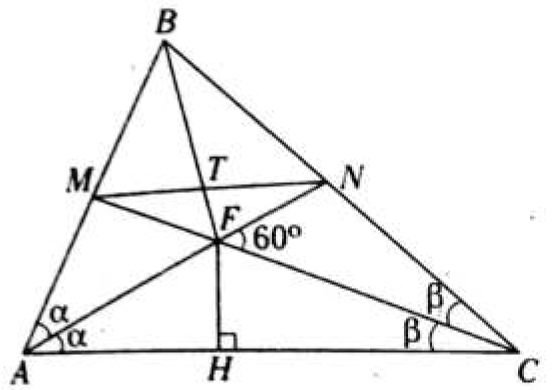
A) 3
B) 5/2
C) 7/2
D) 8/3
E) 4

27. En el gráfico adjunto, $DC=10$, $BC=2$ y $AB=3$. Calcule MC.

A) 4
B) 6
C) 9
D) $2\sqrt{17}$
E) 8



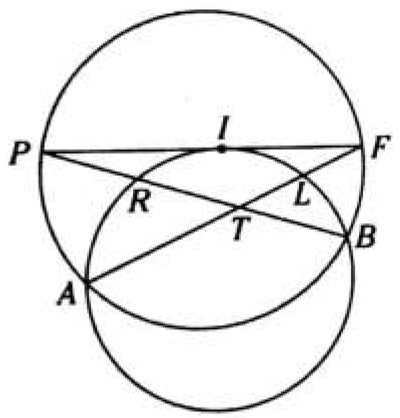
28. Del gráfico, $TB=2(FT)$ y $(MB)(NB)=24$, calcule FH.



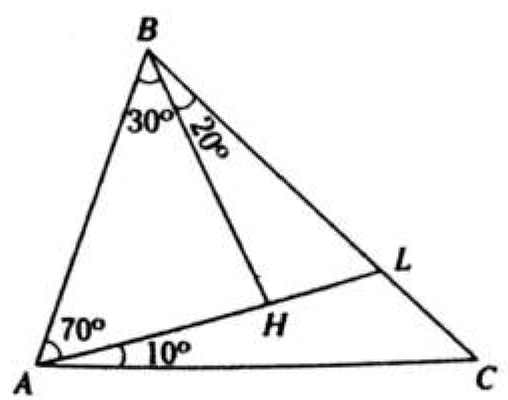
A) 4 B) 6 C) 3
D) 2 E) 8

29. Del gráfico, $PR=TL$, $RT=9$ y $LF=4$, calcule $\frac{AT}{TB}$.

A) 5/3
B) 5/2
C) 6/5
D) 3/2
E) 4/3



30. Si $BL=6$ y $LC=4$, calcule AH.



A) $2\sqrt{10}$ B) 5 C) 10
D) 6 E) 8

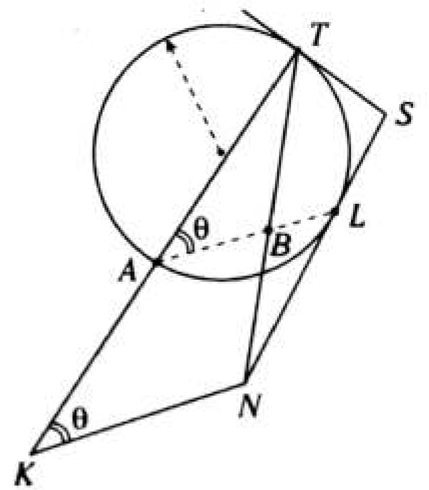
31. En un triángulo ABC se traza el $\overline{MN}//\overline{AC}$ ($M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{BC}$), tal que $BM=3(MA)$ y $MN+AC=35$. Calcule $AC-MN$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

32. En un triángulo ABC se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ hasta P y Q, respectivamente, tal que $\overline{QP}//\overline{AC}$; además, BQ, BC y BP toman valores consecutivos. Calcule el valor entero de AB si es menor que 7.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

33. Del gráfico, $m\widehat{AL} = m\sphericalangle TSL$ y $LN=3(TS)$. Calcule $\frac{AB}{KN}$ (T y L son puntos de tangencia).



A) 1/3 B) 2/3 C) 3/4
D) 1/5 E) 2/5

Relaciones métricas

Capítulo X

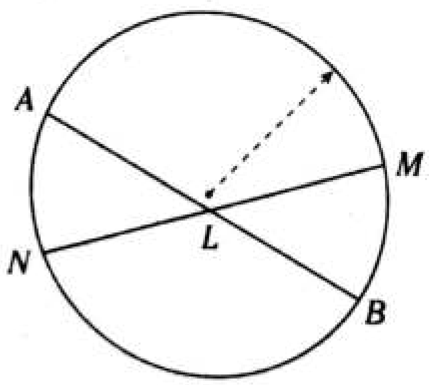
Objetivos

- Establecer la relación entre las longitudes de los elementos en una circunferencia, en un triángulo rectángulo y en un triángulo oblicuángulo.

Relaciones métricas en la circunferencia

Teorema de las cuerdas

Si en una circunferencia se tienen dos cuerdas secantes, se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos determinados en la otra cuerda.

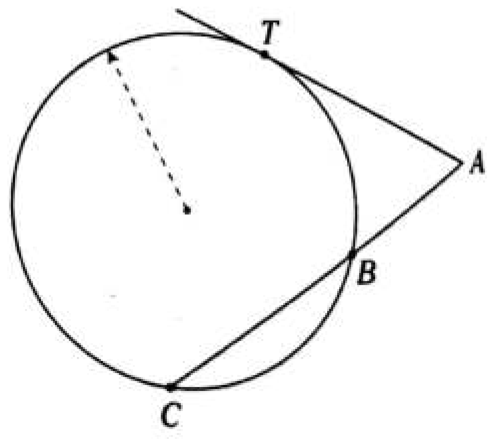


En el gráfico se cumple

$$\boxed{(AL)(LB)=(NL)(LM)}$$

Teorema de la tangente

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una recta tangente y una recta secante a ella, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente será igual al producto de las longitudes del segmento secante y su parte externa.

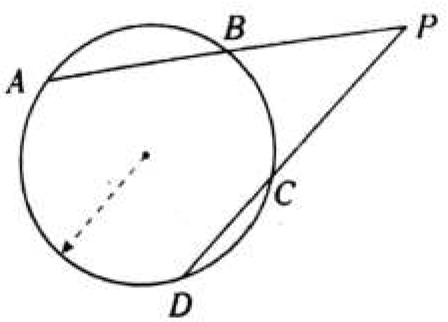


En el gráfico se cumple

$$\boxed{(AT)^2=(AC)(AB)}$$

Teorema de las secantes

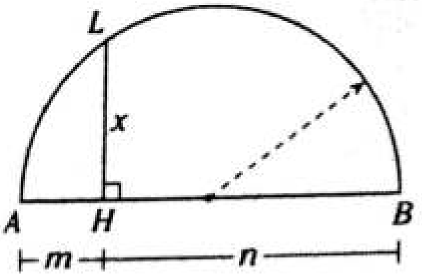
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes a ella, entonces los productos de las longitudes de un segmento secante y su parte externa serán iguales.



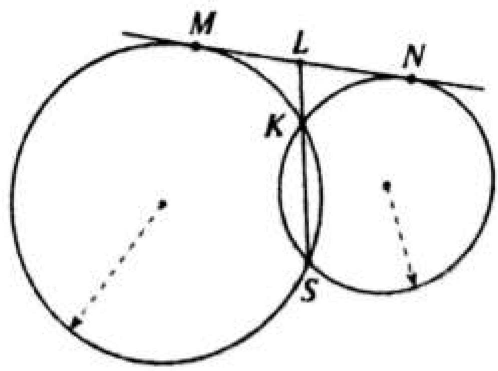
En el gráfico se cumple

$$\boxed{(PA)(PB)=(PD)(PC)}$$

Nota



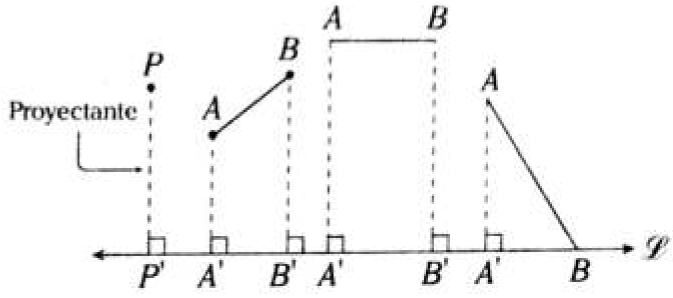
$$\boxed{x^2=m\cdot n}$$



$$\boxed{ML=LN}$$

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Proyección ortogonal



La proyección ortogonal de un punto sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta. Asimismo, la proyección ortogonal de un segmento sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es el segmento cuyos extremos son las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento dado a dicha recta.

Si $\overline{AB}$ es no paralelo a la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \rightarrow A'B' < AB$

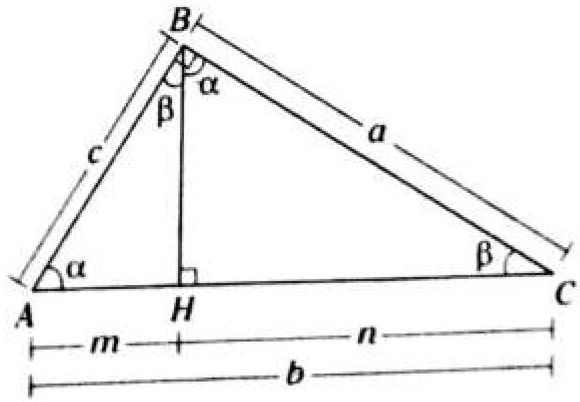
Si $\overline{AB} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \rightarrow A'B'=AB$

Del gráfico anterior

P': proyección ortogonal de P sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

En el triángulo rectángulo

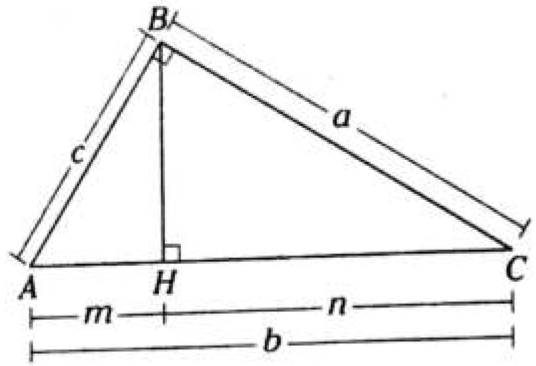


$\overline{AH}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

$\overline{HC}$: proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

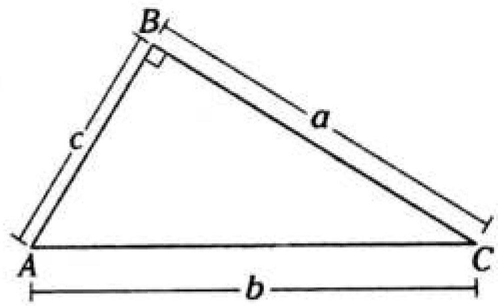
Teoremas

1. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto sobre la hipotenusa.



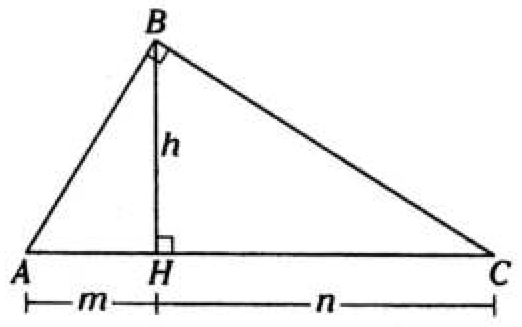
$$\boxed{\begin{array}{c} c^2=bm \\ a^2=bn \end{array}}$$

2. En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



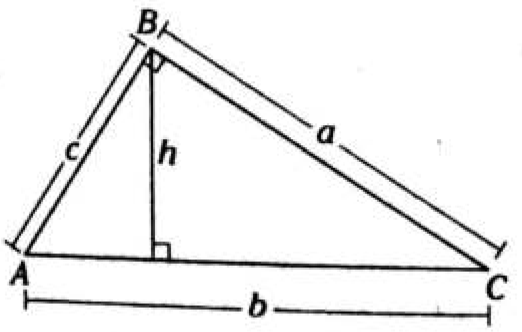
$$\boxed{a^2+c^2=b^2}$$

3. En todo triángulo rectángulo, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones ortogonales de los catetos sobre dicha hipotenusa.



$$\boxed{h^2=m\cdot n}$$

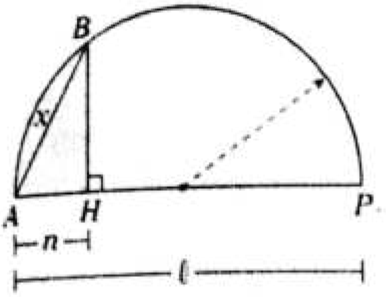
4. En todo triángulo rectángulo, el producto entre las longitudes de los catetos es igual al producto entre las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a la hipotenusa.



$$\boxed{a\cdot c=b\cdot h}$$

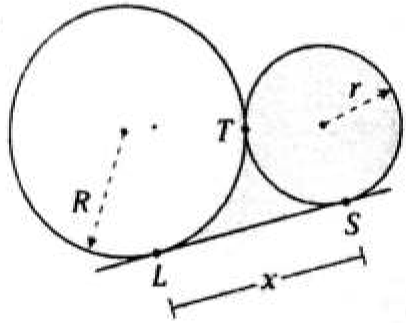
NOTA

1.



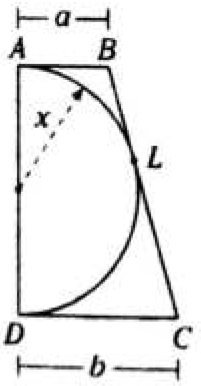
Del gráfico, $\overline{BH} \perp \overline{AP}$, entonces $x^2=n \cdot \ell$.

2.



Del gráfico si T, L y S son puntos de tangencia, entonces $x=2\sqrt{Rr}$.

3.

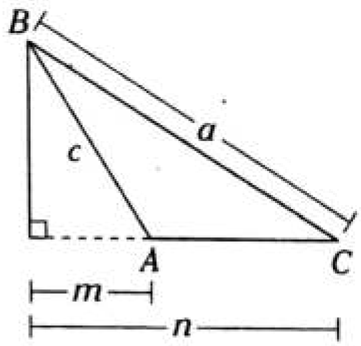


Del gráfico, si A, L y D son puntos de tangencia, entonces $x^2=a \cdot b$.

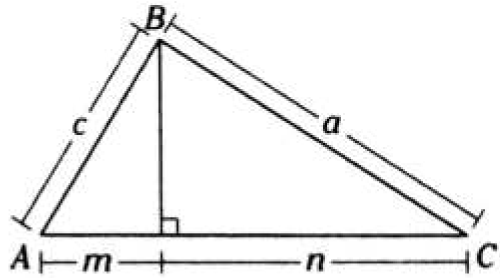
Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo

Teorema de las proyecciones

En todo triángulo, al trazar la altura relativa a un lado (el pie de la altura está en el lado o en la prolongación de dicho lado), se determinan dos segmentos, en los cuales se cumple que la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dichos segmentos es igual a la diferencia de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha altura.



$$\boxed{a^2-c^2=n^2-m^2}$$

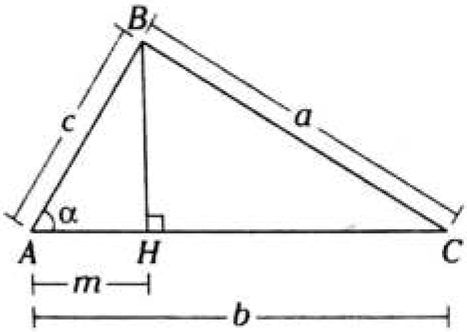


$$\boxed{a^2-c^2=n^2-m^2}$$

TEOREMA DE EUCLIDES

Primer caso

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos menos el doble del producto de las longitudes de uno de ellos con la proyección ortogonal del otro sobre aquel.

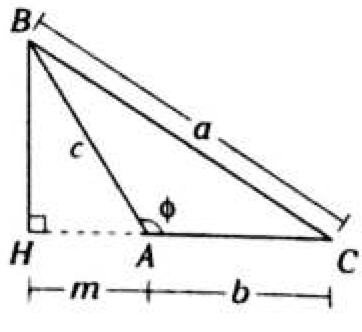


En el gráfico, para $\alpha < 90°$, se cumple

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bm}$$

Segundo caso

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos más el doble del producto de las longitudes de uno de ellos con la proyección ortogonal del otro sobre aquel.

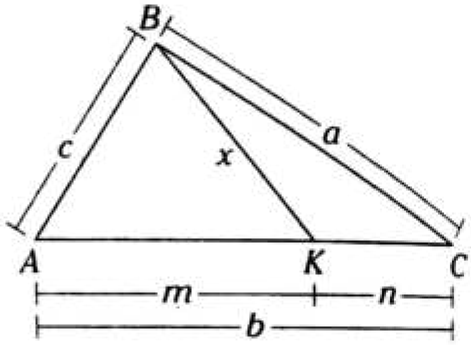


En el gráfico, para $\phi > 90°$, se cumple

$$\boxed{a^2=b^2+c^2+2bm}$$

TEOREMA DE STEWART

En todo triángulo, al trazar una ceviana interior, se cumple que el cuadrado de la longitud de la ceviana por la longitud del lado al cual es relativo es igual a la suma del producto de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha ceviana con la longitud del segmento parcial opuesto menos el producto de las longitudes de los segmentos determinados por dicha ceviana y la ceviana.

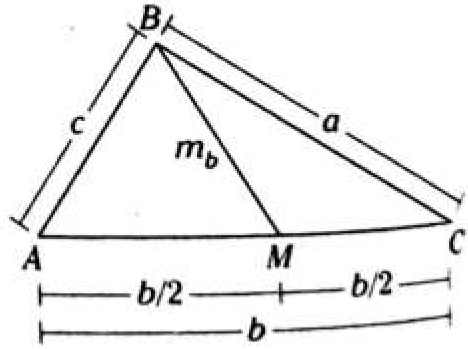


Del gráfico, $\overline{BK}$, que es ceviana interior,

se cumple $\boxed{x^2b=c^2n+a^2m-m\cdot n\cdot b}$

TEOREMA DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado.

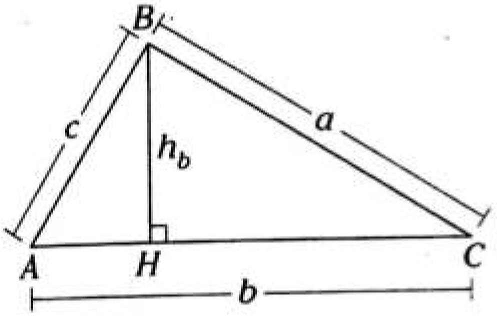


Del gráfico, $\overline{BM}$, que es mediana, se cumple

$$\boxed{c^2+a^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2}}$$

Teorema de Herón (cálculo de la altura)

En todo triángulo, la longitud de una de sus alturas es igual al producto entre el doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativo con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y las diferencias de este con las longitudes de cada uno de los lados.



Del gráfico, $\overline{BH}$, que es altura, se cumple

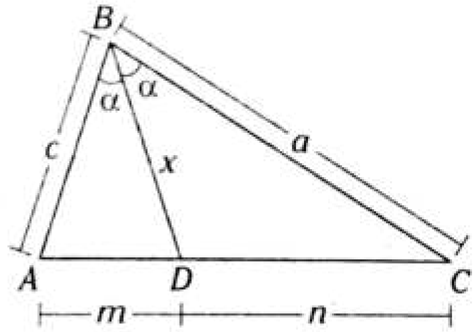
$$\boxed{h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Donde

$$p=\frac{a+b+c}{2}\ \text{(semiperímetro)}$$

Cálculo de la bisectriz interior

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia entre el producto de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz con el producto entre las longitudes de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo.

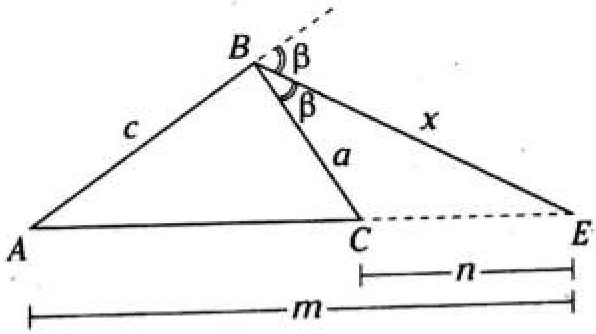


Del gráfico, $\overline{BD}$, que es bisectriz interior, se cumple

$$\boxed{x^2=c\cdot a-m\cdot n}$$

Cálculo de la bisectriz exterior

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz exterior es igual a la diferencia entre el producto de las longitudes de los segmentos que dicha bisectriz determina en el lado al cual es relativo con el producto entre las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz.



Del gráfico, $\overline{BE}$, que es bisectriz exterior, se cumple

$$\boxed{x^2=m\cdot n-a\cdot c}$$

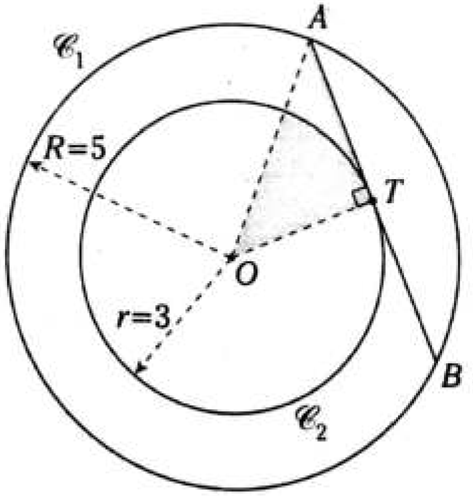
Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Las longitudes de dos circunferencias concéntricas son 31,4 m y 18,84 m. Si se traza una cuerda al círculo mayor que sea tangente al círculo menor, entonces la longitud de dicha cuerda es

UNMSM 1993

Resolución



Nos piden $AB=x$.

Datos

long. $\mathscr{C}_1=31,4=2\pi R \rightarrow R=5$

long. $\mathscr{C}_2=18,84=2\pi r \rightarrow r=3$

Por teorema, $\overline{OT}\perp\overline{AB}$ y $AT=TB=x/2$

Del $\triangle ATO$, por teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=5^2-3^2$$

$$\frac{x^2}{4}=16$$

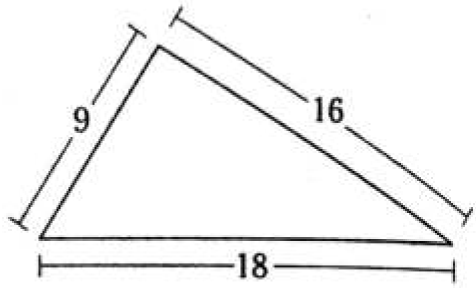
$\therefore\quad x=8$ m

Problema N.° 2

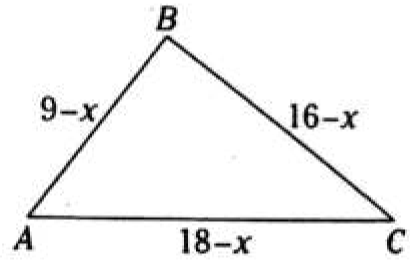
Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. ¿Qué longitud igual se debe quitar a cada lado para obtener un triángulo rectángulo?

UNMSM 1996

Resolución



Ahora restando x a cada lado



Nos piden x.

Del $\triangle ABC$, por teorema de Pitágoras

$$(9-x)^2+(16-x)^2=(18-x)^2$$

$$x^2-18x+81+256+x^2-32x=324+x^2-36x$$

$$x^2-14x+13=0$$

$$\begin{array}{ll} x & -13 \\ x & -1 \end{array}$$

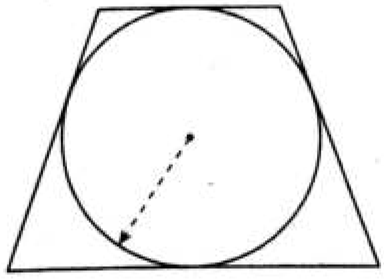
$x=13$ o $x=1$

$x=13$ cm: no puede ser porque un lado sería negativo.

$\therefore\quad x=1$ cm

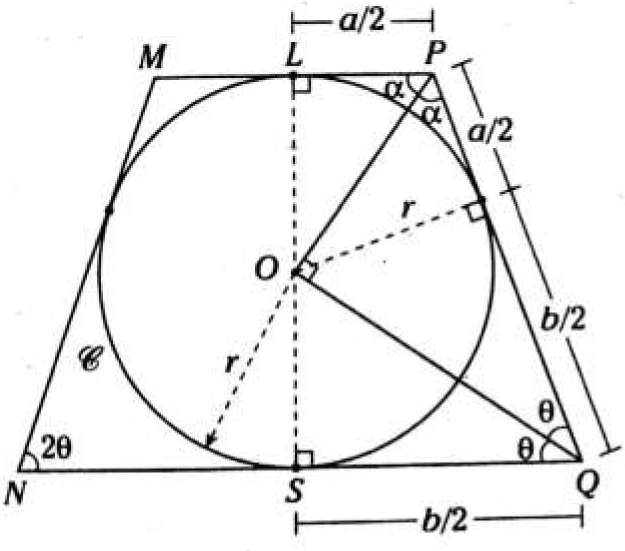
Problema N.º 3

En el gráfico, se muestra un trapecio isósceles cuyas bases miden a cm y b cm. Halle el radio de la circunferencia inscrita.



UNMSM 2003

Resolución



Nos piden r.

Como $MPQN$ es un trapecio isósceles circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$

$\rightarrow$ $ML=LP=a/2$ y $NS=SQ=b/2$

Se sabe que $2\alpha+2\theta=180°$ $\rightarrow$ $\alpha+\theta=90°$

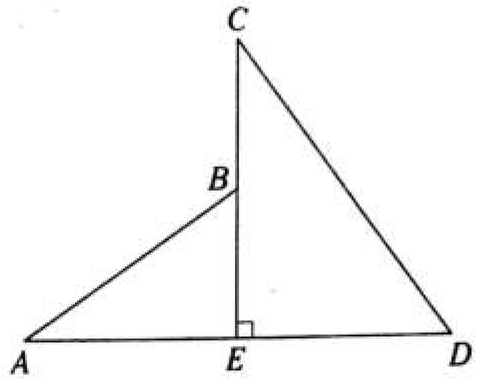
⊾POQ: por relaciones métricas (altura al cuadrado)

$$r^2=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$$

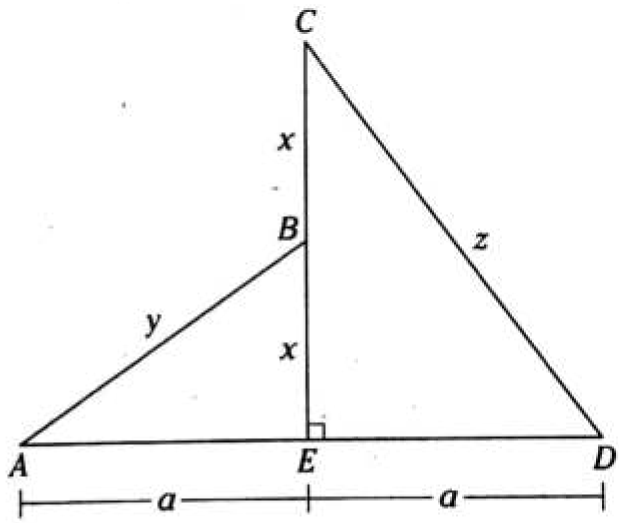
$$\therefore\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{ab}\text{ cm}$$

Problema N.º 4

En el gráfico, tenemos $CB=BE=x$ cm, $DC=z$ cm, $AB=y$ cm, además, $AE=ED=a$ cm. Halle el valor de z en función de x e y.



Resolución



Nos piden z en función de x e y.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AEB\text{: T. de Pitágoras } x^2+a^2=y^2\\ \triangle CED\text{: T. de Pitágoras } (2x)^2+a^2=z^2\end{array}\right\}\text{ restando}$$

$$x^2-4x^2=y^2-z^2$$

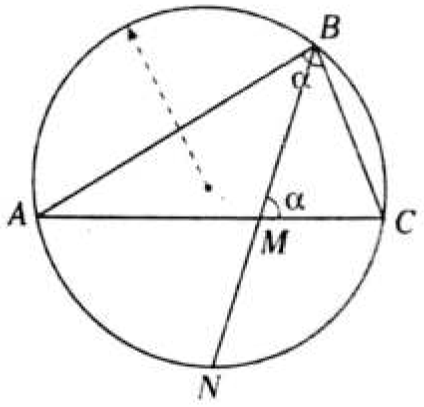
$$\rightarrow\quad z^2=y^2+3x^2$$

$$\therefore\quad z=\sqrt{3x^2+y^2}\text{ cm}$$

Problemas Propuestos

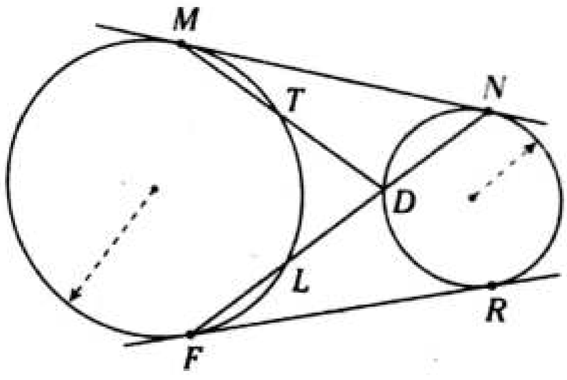
NIVEL BÁSICO

1. Si $BC=4$, $BM=3$ y $AM=3(MC)$, calcule MN.



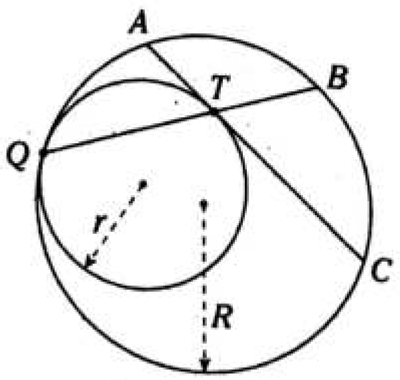
A) 4
B) 3
C) 6
D) 5
E) 8

2. Sean M, N, F y R puntos de tangencia, $m\widehat{MT} = m\widehat{FL}$ y $(FN)(TD+DN)=16$. Calcule $(RF)^2$.



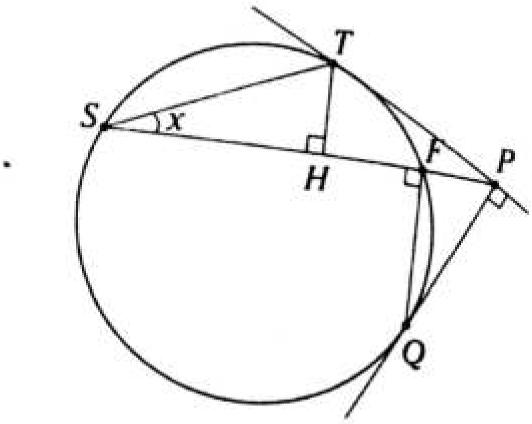
A) 15
B) 14
C) 16
D) 17
E) 13

3. Si T y Q son puntos de tangencia, $AT=5$, $TC=12$ y $8r=5R$, calcule QT.



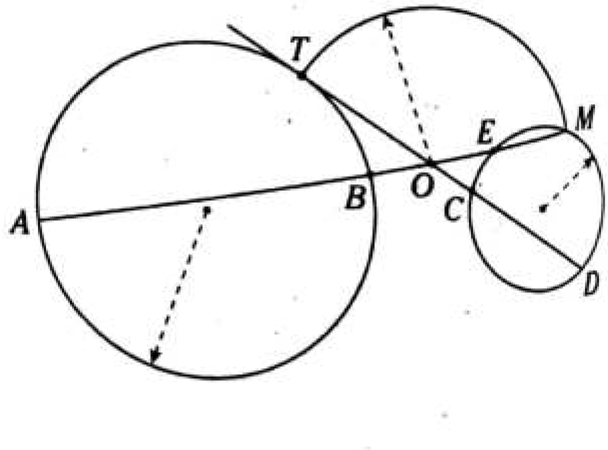
A) 6
B) 10
C) 8
D) 9
E) 7

4. Si $TH=HF=1$ y $(SP)(FP)=5$, calcule x. (T y Q puntos de tangencia)



A) $\frac{37°}{2}$
B) $\frac{53°}{2}$
C) $\frac{45°}{2}$
D) 30°
E) 15°

5. Del gráfico mostrado, $EM=3(OE)$ y $2(AO)=3(OD)$. Calcule $\frac{OB}{OC}$.

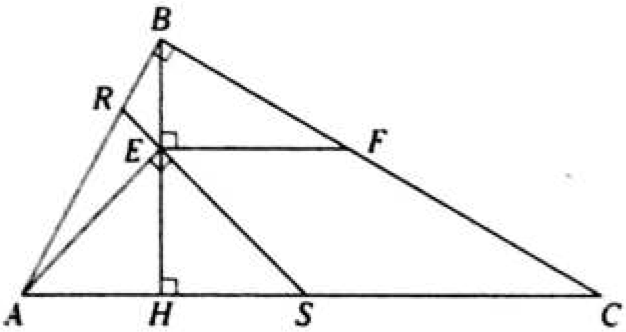


A) 2
B) $\frac{4}{3}$
C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{5}{3}$
E) $\frac{8}{3}$

6. En un cuadrilátero $ABCD$, las diagonales miden 6 y 8, y la diagonal media que tiene sus extremos ubicados en dos lados opuestos mide 5. Calcule la medida angular determinada por sus diagonales.

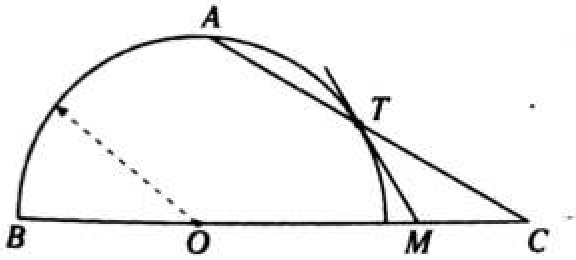
A) 37° B) 90° C) 53°
D) 37°/2 E) 53°/2

7. Del gráfico mostrado, $RB=RE$ y $(AS)(AH)=18$. Calcule FC.



A) 9 B) 3 C) 6
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

8. Sea T punto de tangencia, $(OB)(OC)=24$, $TM=MC$ y $AC=8$. Calcule la distancia de O hacia $\overline{AC}$.



A) 1 B) 4 C) 5
D) 3 E) 2

9. Se tiene el triángulo BTP, donde la $m\sphericalangle BPT=30°$, y en la región exterior relativa a $\overline{TB}$ se ubica el punto A; luego se construye una semicircunferencia de diámetro AB y tangente a $\overline{TP}$ en el punto T. Si $BP=16$ y $AB=14$, calcule la distancia de T hacia AB.

A) 8 B) 7 C) $4\sqrt{3}$
D) 6 E) $2\sqrt{3}$

10. En el cuadrado $ABCD$ se ubica el punto P en la región interior, tal que $APQD$ es un romboide $m\sphericalangle ABP=45°$ y $(BP)^2+(PD)^2=72$. Calcule PC.

A) $12\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 12
D) $3\sqrt{2}$ E) 6

11. Del gráfico, $BMNT$ es un rombo, $AM=6$, $NT=3$ y $AC=12$. Calcule BN.

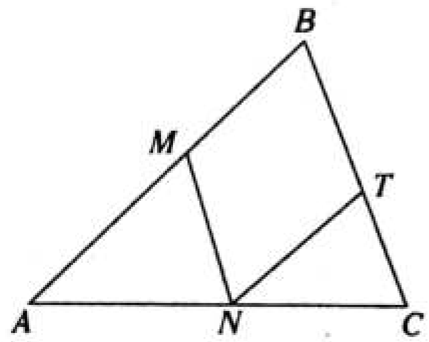
A) 4

B) 3

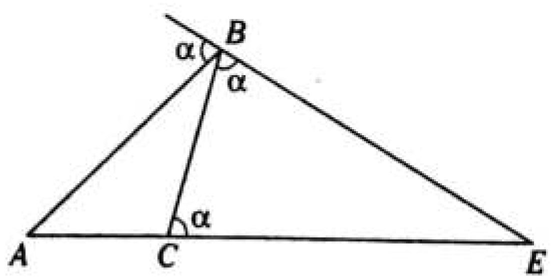
C) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

D) $\frac{9}{2}$

E) 5

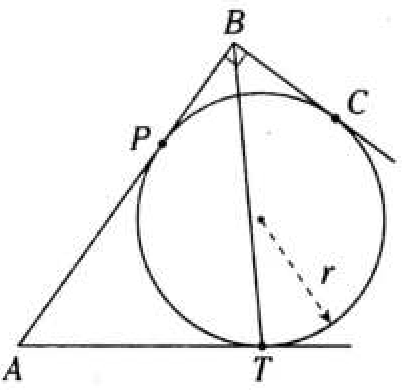


12. Del gráfico adjunto, $AB=2(AC)=4$. Calcule BE.



A) 8 B) 3 C) 9
D) 5 E) 4

13. Sean P, T y C puntos de tangencia, $r=2$ y $AB=5$. Calcule $13(TB)^2$.

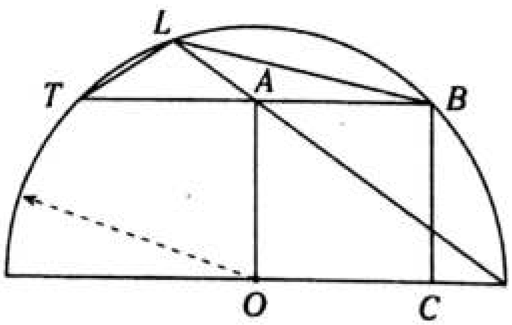


A) 320 B) 280 C) 325
D) 292 E) 282

14. Se tiene el triángulo ABC y se traza la circunferencia que contiene al vértice y es tangente a $\overline{AC}$ en su punto medio M. Dicha circunferencia interseca a los lados AB y BC en los puntos Q y T, respectivamente. Si $AQ=4$, $QB=5$, $TC=3$ y $\overline{BH}\perp\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$), calcule $(HM)\cdot(MC)$.

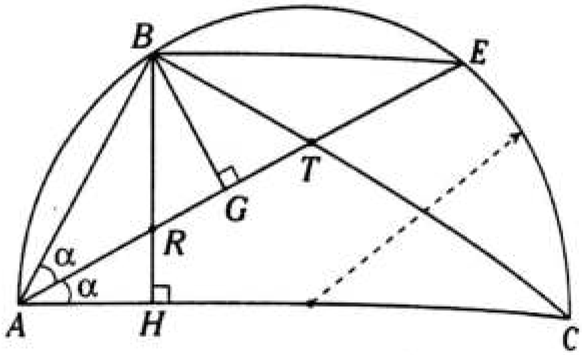
A) $\dfrac{62}{5}$ B) $\dfrac{38}{3}$ C) $\dfrac{63}{4}$
D) $\dfrac{26}{3}$ E) $\dfrac{25}{4}$

15. Del gráfico mostrado, $ABCO$ es un cuadrado y $OC=\sqrt{3}$. Calcule $(TL)^2+(LB)^2$.



A) 10 B) 9 C) 6
D) 4 E) 8

16. Calcule BR si $2(BG)(BE)-(RT)(TE)=24$.



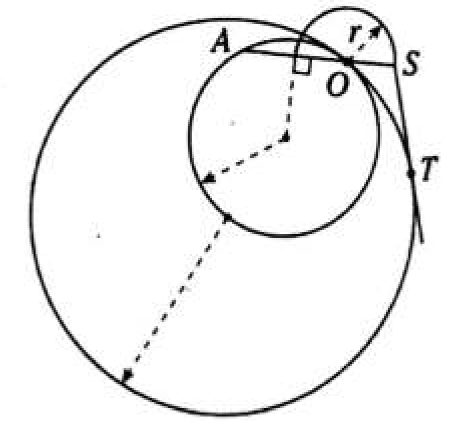
A) $2\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}$ C) 3
D) $2\sqrt{3}$ E) 8

17. En un triángulo ABC, $AB=4$, $BC=6$ y $AC=2\sqrt{3}$. Calcule la altura relativa al lado AC.

A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{33}$ B) $\sqrt{66}$ C) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$
D) $\sqrt{22}$ E) $2\sqrt{11}$

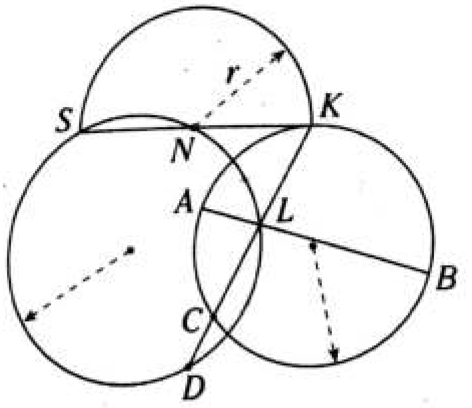
NIVEL INTERMEDIO

18. Del gráfico, $r=2$. Calcule TS si T y O son puntos de tangencia.



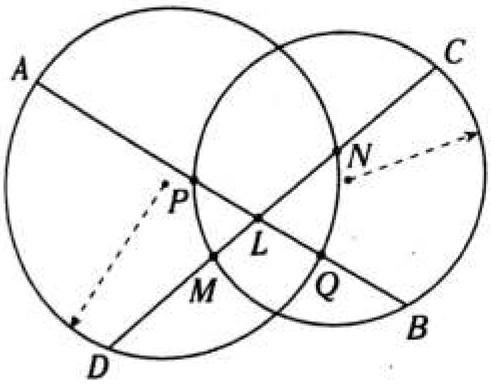
A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $2\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

19. Del gráfico, $r^2=(AL)(LB)$ y $KL=2(CD)=4$. Calcule LC.



A) 7
B) 6
C) 5
D) 4
E) 3

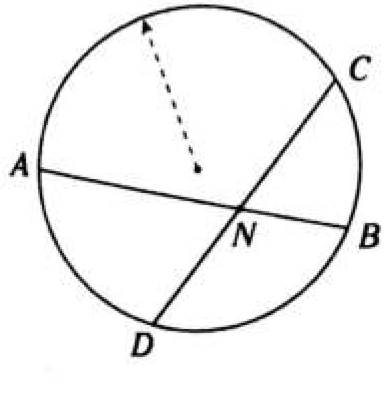
20. Del gráfico, $PL=LQ$, $DM=2(LN)$, $NC=2(ML)$ y $(LN)^2-(LM)^2=PQ$. Calcule $AP-QB$.



A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 4

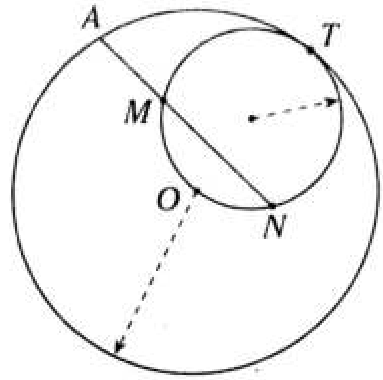
21. Del gráfico, $NC=NB+1$, $AN=DN+2$ y $(AN)(NC)=32$. Calcule DN.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



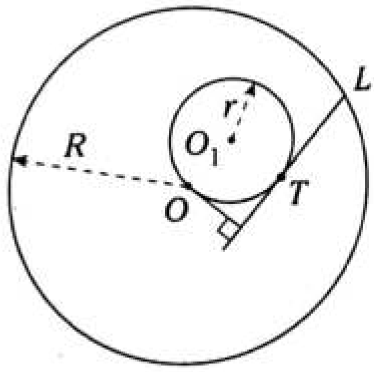
22. Del gráfico, T es punto de tangencia, $m\widehat{MO}=m\widehat{NO}=60^{o}$ y $AM=2\sqrt{3}$. Calcule MN.

A) $\sqrt{3}(\sqrt{6}+1)$
B) $\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)$
C) $2(\sqrt{5}+1)$
D) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
E) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$

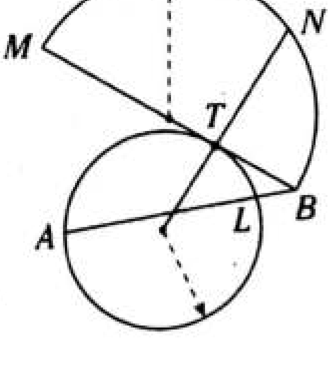


23. Del gráfico, $R=3r=6$, T y O son puntos de tangencia. Calcule LT.

A) $\sqrt{2}+1$
B) $2(\sqrt{3}-1)$
C) $4(\sqrt{2}-1)$
D) $2(\sqrt{2}-1)$
E) $3(\sqrt{2}-1)$

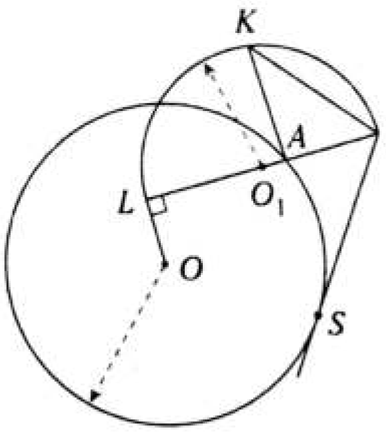


24. Del gráfico, T es punto de tangencia, $LB=1$, $AB=3(TB)$ y $MT=2(TB)$. Calcule NB.



A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{2}$
D) 4
E) $2\sqrt{5}$

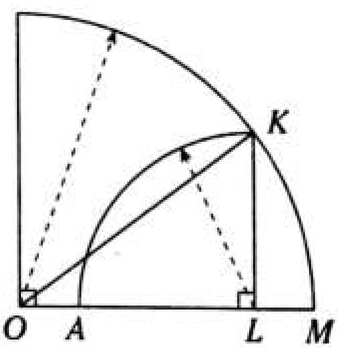
25. Del gráfico, S es punto de tangencia, $\overline{OL} // \overline{KA}$ y $LA=2(AM)$. Calcule $\dfrac{KM}{MS}$.



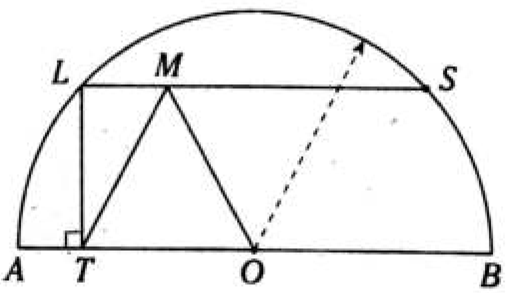
A) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$
D) $\dfrac{5}{6}$ E) $\dfrac{2}{3}$

26. Del gráfico, $OA=LM=1$. Calcule la distancia de L a $\overline{OK}$.

A) 1,8
B) 2
C) 2,2
D) 2,4
E) 2,6

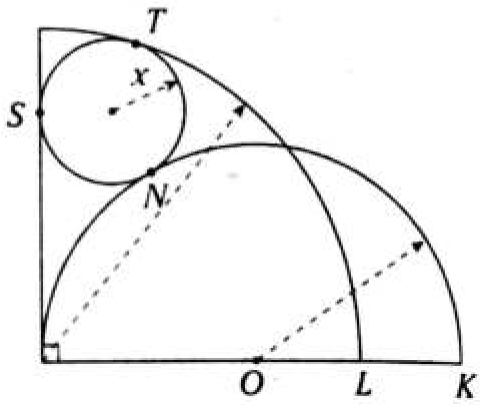


27. Del gráfico, $TM=MO$, $LT=2(LM)=6$ y la $m\overset{\frown}{AL}=m\overset{\frown}{SB}$. Calcule AT.



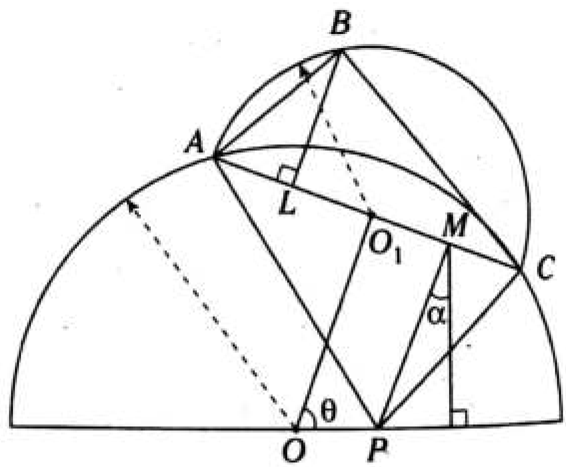
A) $6(\sqrt{5}-1)$ B) $5(\sqrt{3}-1)$ C) $6(\sqrt{3}-1)$
D) $5(\sqrt{2}-1)$ E) $6(\sqrt{2}-1)$

28. Del gráfico, T, S y N son puntos de tangencia, $OL=LK=2$. Calcule x.



A) 3/2 B) 5/3 C) 6/5
D) 9/8 E) 9/7

29. Del gráfico, $LO_1=O_1M$, $\alpha+\theta=90°$ y $(AP)^2+(AB)^2=14$. Calcule $(CP)^2+(CB)^2$.



A) 7 B) 9 C) 12
D) 14 E) 16

30. En un triángulo ABC, cuyas longitudes de los lados AB, BC y AC son valores consecutivos de forma creciente y el perímetro de la región ABC es 18, calcule la longitud de la proyección ortogonal del lado menor sobre el lado mayor.

A) 2 B) 24/7 C) 21/7
D) 19/7 E) 17/5

Área de regiones planas

Capítulo XI

OBJETIVOS

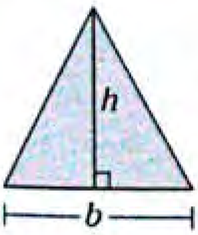
- Conceptualizar el área de una región plana, específicamente en las regiones triangulares, cuadrangulares y circulares.
- Conocer las expresiones para calcular el área de una región utilizando tanto elementos principales como elementos secundarios.
- Calcular el área de las regiones planas mediante la comparación con otras áreas cuando tengan algún elemento en común.

Definición

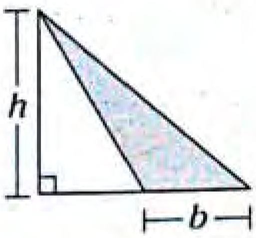
Una región plana es aquella porción de un plano limitada por una línea o conjunto de líneas.

Área de regiones triangulares

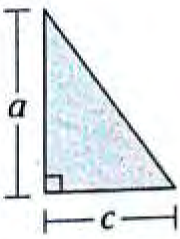
FÓRMULA BÁSICA



$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{bh}{2}$$

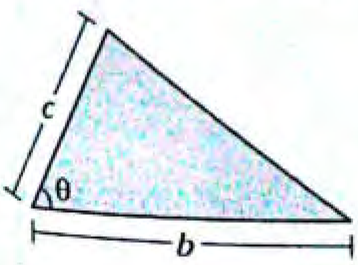


$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{bh}{2}$$



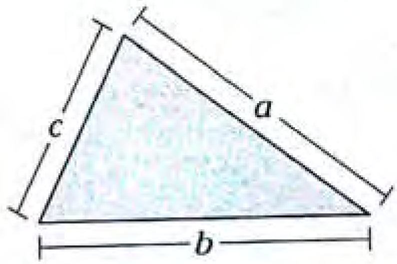
$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{ac}{2}$$

FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA



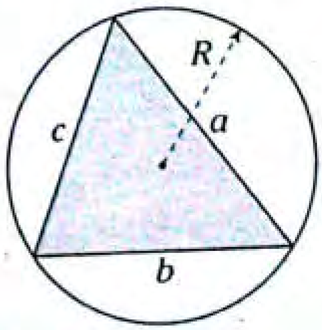
$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{b\cdot c}{2}\operatorname{sen}\theta$$

FÓRMULA DE HERÓN



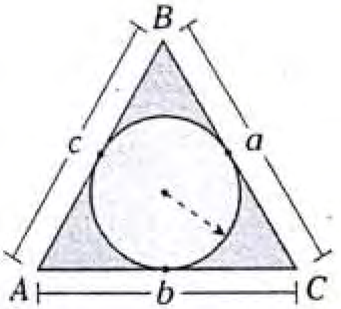
$$\mathbb{A}_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO



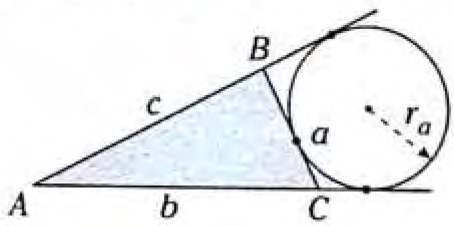
$$\mathbb{A}_{\triangle}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

EN FUNCIÓN DEL INRADIO



$$\mathbb{A}_{\triangle}=pr$$

EN FUNCIÓN DEL EXRADIO



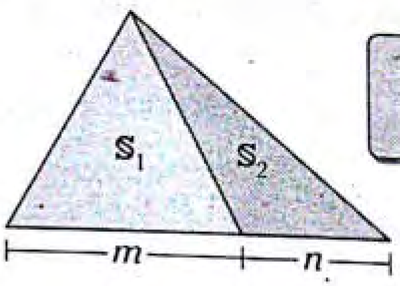
$$\mathbb{A}_{\triangle}=(p-a)r_a$$

Donde el semiperímetro es

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

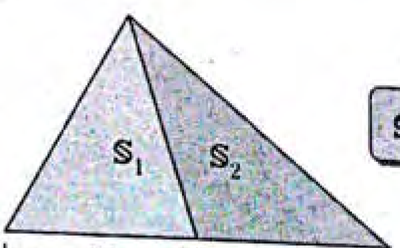
RELACIÓN DE ÁREAS

1.



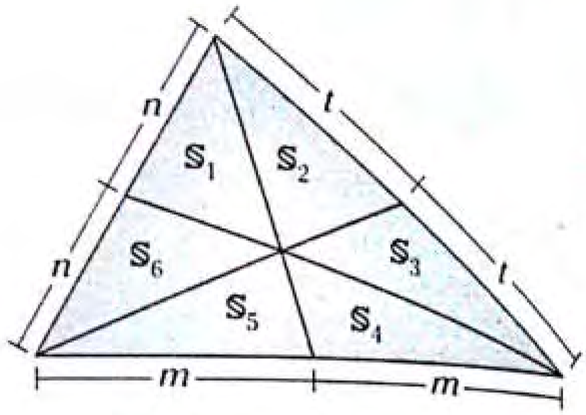
$$\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{m}{n}$$

2.



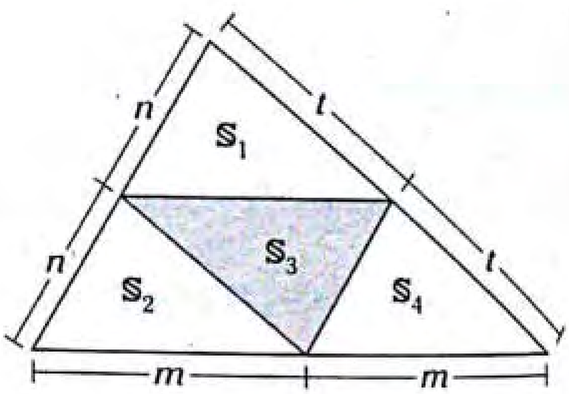
$$\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2$$

3.



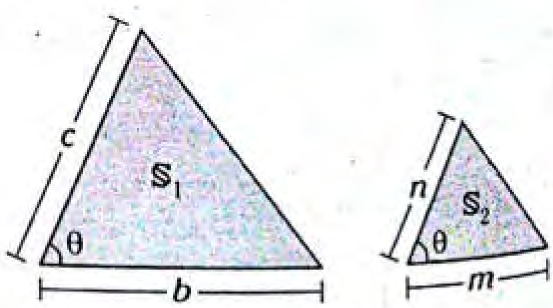
$$\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_4=\mathbb{S}_5=\mathbb{S}_6$$

4.



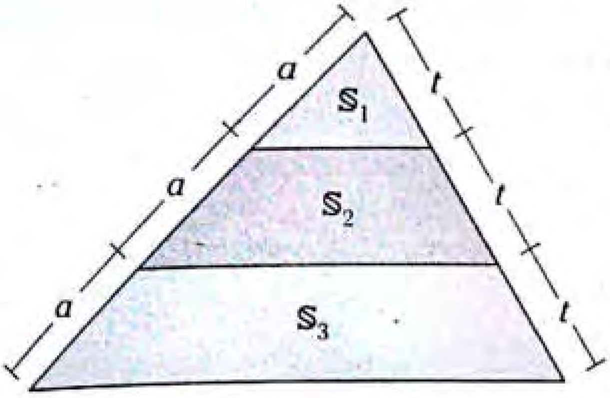
$$\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_3=\mathbb{S}_4$$

5.



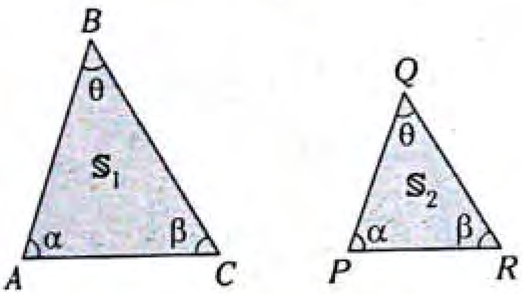
$$\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}=\frac{bc}{mn}$$

6.



$$\boxed{\frac{\mathbb{S}_1}{1}=\frac{\mathbb{S}_2}{3}=\frac{\mathbb{S}_3}{5}}$$

Para regiones triangulares limitadas por triángulos semejantes

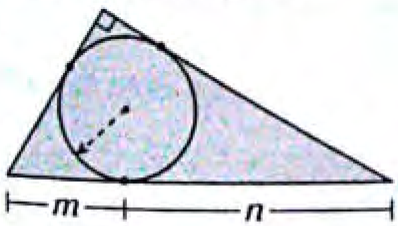


Del gráfico, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. Entonces se cumple

$$\boxed{\frac{\mathbb{A}_{\triangle ABC}}{\mathbb{A}_{\triangle PQR}}=\frac{(AB)^2}{(PQ)^2}=\frac{(BC)^2}{(QR)^2}=\frac{(AC)^2}{(PR)^2}=K^2}$$

Donde K es la razón de semejanza entre los triángulos ABC y PQR.

Para regiones triangulares limitadas por triángulos rectángulos



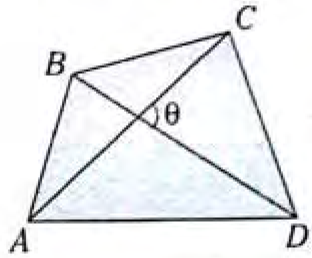
Se cumple

$$\boxed{\mathbb{A}_{\triangle}=m\cdot n}$$

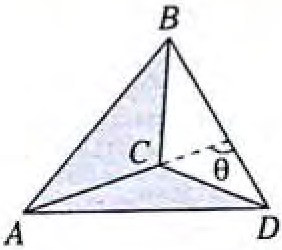
Donde la circunferencia mostrada está inscrita en el triángulo rectángulo.

Área de regiones cuadrangulares

FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA

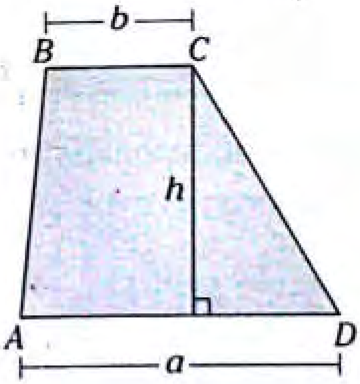


$$\boxed{\mathbb{A}_{ABCD}=\frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{sen}\theta}$$



$$\boxed{\mathbb{A}_{ABCD}=\frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

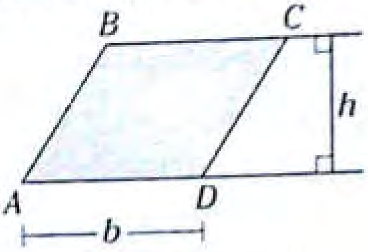
ÁREA DE UNA REGIÓN TRAPECIAL



$\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$

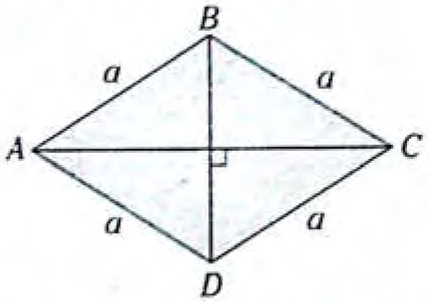
$$\boxed{\mathbb{A}_{ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA



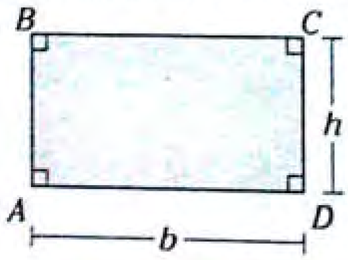
$$\mathbb{A}_{\square ABCD}=b\cdot h$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ROMBAL



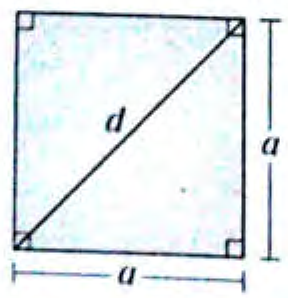
$$\mathbb{A}_{\square ABCD}=\frac{(AC)(BD)}{2}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN RECTANGULAR



$$\mathbb{A}_{\square ABCD}=b\cdot h$$

ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRADA

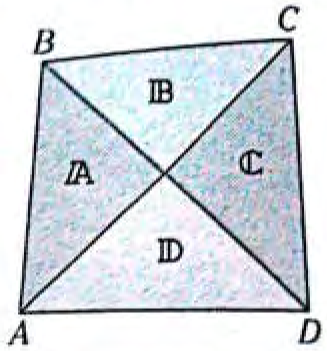


$$\mathbb{A}_{\square ABCD}=a^2=\frac{d^2}{2}$$

Teoremas asociados a regiones cuadrangulares

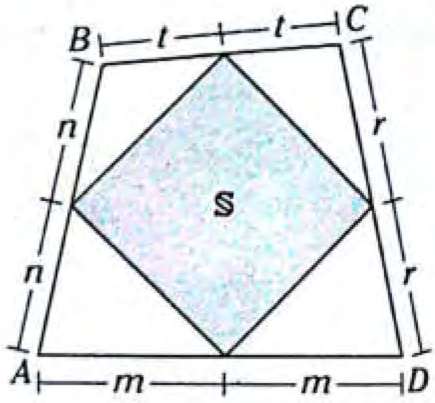
a. En todo cuadrilátero

1.



$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}=\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}$$

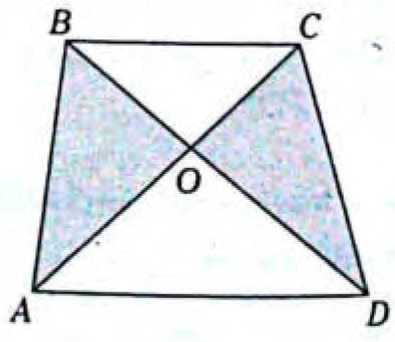
2.



$$\mathbb{S}=\frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{2}$$

b. En todo trapecio

1.

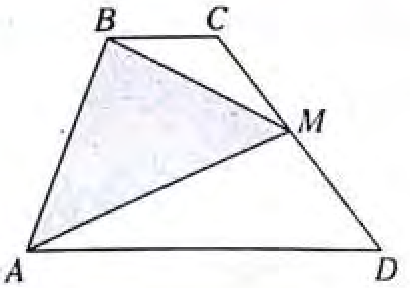


$\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$

$\mathbb{A}_{\triangle AOB}=\mathbb{A}_{\triangle COD}$

$$\mathbb{A}^2_{\triangle AOB}=(\mathbb{A}_{\triangle BOC})(\mathbb{A}_{\triangle AOD})$$

2.



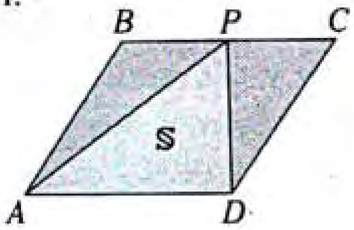
$\overline{BC} // \overline{AD}$ y $CM=MD$

$$\boxed{\mathbb{A}_{\triangle BMA}=\mathbb{A}_{\triangle BCM}+\mathbb{A}_{\triangle AMD}}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{\triangle BMA}=\frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{2}}$$

c. En todo paralelogramo

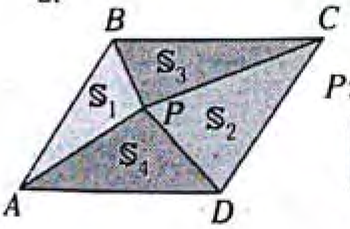
1.



$P \in \overline{BC}$

$$\boxed{\mathbb{S}=\frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{2}}$$

2.

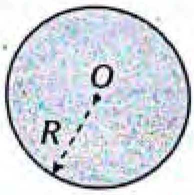


P: interior del $\square ABCD$

$$\boxed{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2=\mathbb{S}_3+\mathbb{S}_4}$$

Área de regiones circulares

Área del círculo

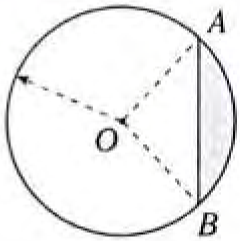


$$\boxed{\mathbb{A}_{\odot}=\pi R^2}$$

Área del sector circular

$$\boxed{\mathbb{A}=\frac{\pi R^2\theta}{360°}}$$

Área del segmento circular ($\mathbb{A}_{\frown}$)

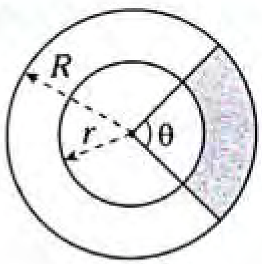


$$\boxed{\mathbb{A}_{\frown}=\mathbb{A}_{\sphericalangle AOB}-\mathbb{A}_{\triangle AOB}}$$

Área de la corona circular ($\mathbb{A}_{CC}$)

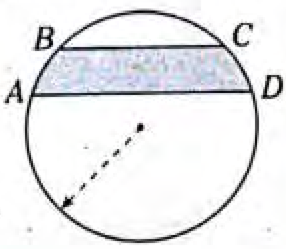
$$\boxed{\mathbb{A}_{CC}=\pi(R^2-r^2)}$$

Área del trapecio circular ($\mathbb{A}_{TC}$)



$$\boxed{\mathbb{A}_{TC}=\frac{\pi(R^2-r^2)\theta}{360°}}$$

Área de la faja circular ($\mathbb{A}_{FC}$)



Sea $\overline{BC} // \overline{AD}$

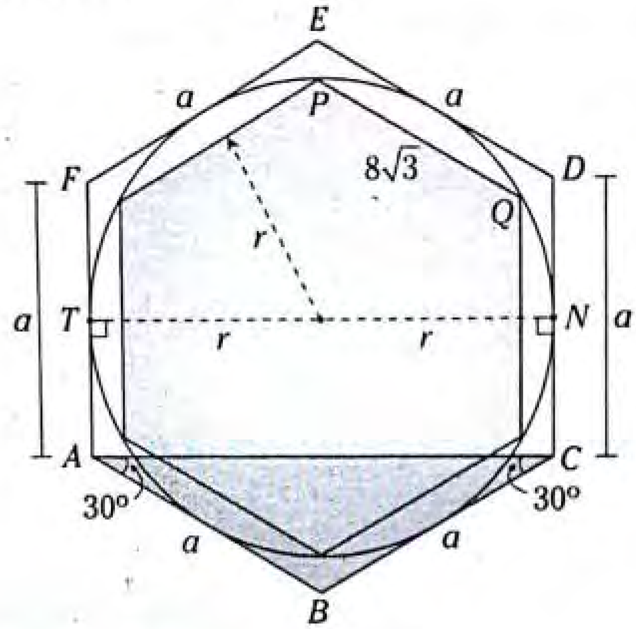
$$\boxed{\mathbb{A}_{FC}=\mathbb{A}_{\frown AD}-\mathbb{A}_{\frown BC}}$$

Problema N.° 1

El lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia mide $8\sqrt{3}$ cm. Halle el área del hexágono regular circunscrito.

UNMSM 2008-II

Resolución



Nos piden $\mathbb{A}_{HC}=x$.

Donde $\mathbb{A}_{HC}$ es el área del hexágono regular circunscrito.

Dato: El lado del hexágono regular inscrito mide $8\sqrt{3}$.

Sabemos que en el hexágono regular

$$\mathbb{A}_{HC}=6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

Por teorema, $m\widehat{PQ}=60°$.

$\rightarrow \quad PQ=r$

$8\sqrt{3}=r$

Observamos

$AC=TN$

$\rightarrow \quad AC=16\sqrt{3}$

En el $\triangle ABC$ isósceles, $m\measuredangle ABC=120°$.

$\rightarrow \quad AC=AB\sqrt{3}$

$2r=AB\sqrt{3}$

$2(8\sqrt{3})=AB\sqrt{3}$

$AB=16=a \qquad \text{(II)}$

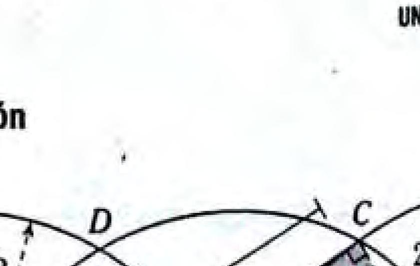
Reemplazamos (II) en (I)

$$\mathbb{A}_{HC}=\frac{3}{2}(16)^2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{HC}=384\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

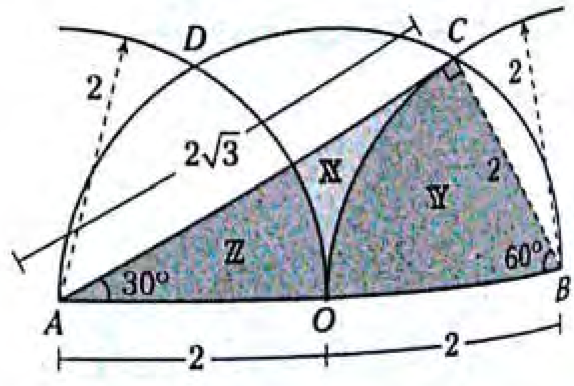
Problema N.° 2

En el gráfico, $\overline{AB}$ es diámetro del semicírculo y $AO=OB=2$ m. Haciendo centro en A y B se ha trazado los arcos $\widehat{DO}$ y $\widehat{CO}$, respectivamente. Halle el área de la región sombreada.



UNMSM 2009-I

Resolución



Nos piden $\mathbb{X}$.

Trazamos $\overline{BC}$, luego se observa que en ◣ACB

$$m\measuredangle CAB=30^{\circ}$$

En ◣ABC

$$\mathbb{X}+\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\mathbb{A}_{◣ABC} \qquad \text{(I)}$$

Pero, por ser radios de igual longitud,

$\mathbb{Z}+\mathbb{Y}$=área de una región cuadrantal.

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Y}=\frac{1}{4}\pi(2)^2$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{Z}+\mathbb{Y}=\pi \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

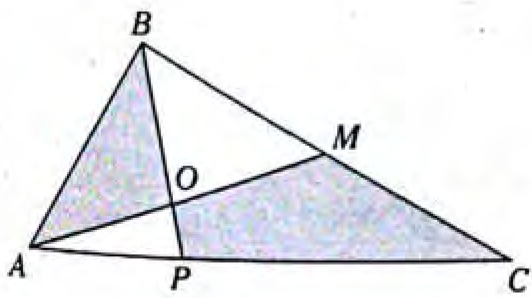
$$\mathbb{X}+\pi=\frac{(BC)(AC)}{2}$$

$$\mathbb{X}+\pi=\frac{(2)(2\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{X}=(2\sqrt{3}-\pi)\,\text{m}^2$$

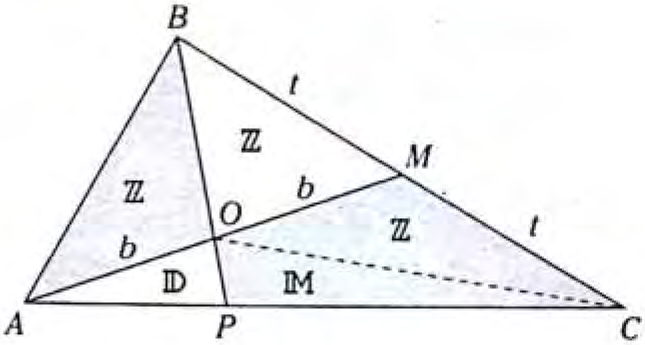
Problema N.° 3

En el gráfico, $BM=MC$ y $AO=OM$. ¿Qué parte del área del triángulo ABC es el área de la región sombreada?



UNMSM 2009-I

Resolución



Nos piden $\dfrac{\mathbb{A}_S}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}}=x$.

Donde $\mathbb{A}_S=\mathbb{A}_{\blacktriangle ABO}+\mathbb{A}_{OMCP}$ (I)

En $\blacktriangle ABM$, BO es mediana.

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle ABO}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BOM}=\mathbb{Z}$$

Trazamos $\overline{OC}$ ($\overline{OM}$ es mediana de $\blacktriangle BOC$).

$$\rightarrow \quad \mathbb{A}_{\blacktriangle BOM}=\mathbb{A}_{\blacktriangle OMC}=\mathbb{Z}$$

En $\blacktriangle ABC$, $\overline{BP}$ es ceviana interior.

$$\rightarrow \quad \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABO}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle BOC}}=\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle AOP}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle OPC}}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}=\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{M}=2\mathbb{D} \qquad \text{(II)}$$

Como $AO=OM$

$$\mathbb{D}+\mathbb{M}=\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{D}+2\mathbb{D}=\mathbb{Z}$$

$$3\mathbb{D}=\mathbb{Z} \qquad \text{(III)}$$

De (I), (II) y (III)

$$\mathbb{A}_S=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{M}=8\mathbb{D}$$

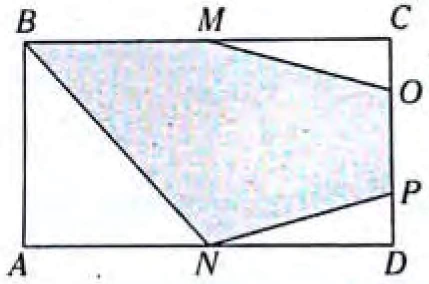
Como $\mathbb{A}_{\triangle ABC}=3\mathbb{Z}+\mathbb{D}+\mathbb{M}$,

$$\mathbb{A}_{\triangle ABC}=12\mathbb{D} \rightarrow x=\frac{8\mathbb{D}}{12\mathbb{D}}$$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{3}$$

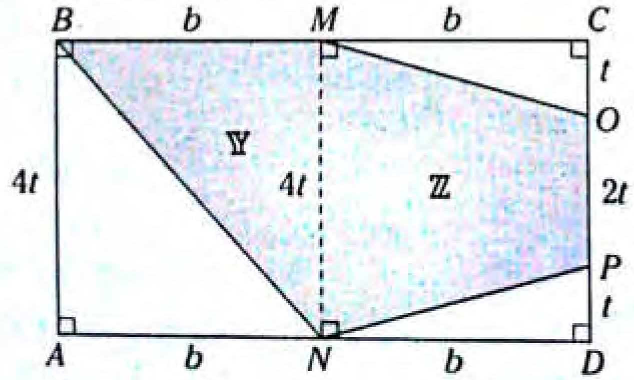
Problema N.° 4

En el gráfico, *ABCD* es un rectángulo y $OC=PD=\frac{1}{4}CD$. Si *M* y *N* son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, halle la razón entre el área de la región sombreada y el área de la región no sombreada.



UNMSM 2010-I

Resolución



Nos piden $\frac{\mathbb{A}_S}{\mathbb{A}_{NS}}=x$.

Donde $\mathbb{A}_S=\mathbb{A}_{BMOPN}$ ($\mathbb{A}_S$: área sombreada)

$\mathbb{A}_{NS}=\mathbb{A}_{\square ABCD}-\mathbb{A}_S$ ($\mathbb{A}_{NS}$: área no sombreada)

Datos: $CD=4(OC)=4(PD)$

$$BM=MC \text{ y } AN=ND$$

Trazamos $\overline{MN}$. (Como *M* y *N* son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$).

$\rightarrow \quad \overline{MN}//\overline{AB}$

Por teorema

$$\mathbb{Y}=\frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{4} \qquad \text{(I)}$$

$$\mathbb{Z}=\frac{\frac{4t+2t}{2}}{4t}\mathbb{A}_{\square NMCD}$$

$$\mathbb{Z}=\frac{3}{4}\mathbb{A}_{\square NMCD}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\square ABCD}\right)$$

$$\mathbb{Z}=\frac{3}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\frac{\mathbb{A}_{\square ABCD}}{4}+\frac{3}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD}$$

$$\mathbb{Y}+\mathbb{Z}=\frac{5}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD} \qquad \text{(III)}$$

De la región no sombreada

$$\mathbb{A}_{NS}=\mathbb{A}_{\square ABCD}-\frac{5}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD}$$

$$\mathbb{A}_{NS}=\frac{3}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD} \qquad \text{(IV)}$$

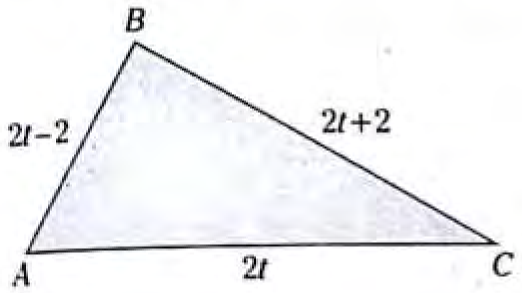
(III) ÷ (IV)

$$\frac{\mathbb{A}_S}{\mathbb{A}_{NS}}=\frac{\frac{5}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD}}{\frac{3}{8}\mathbb{A}_{\square ABCD}}$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{3}$$

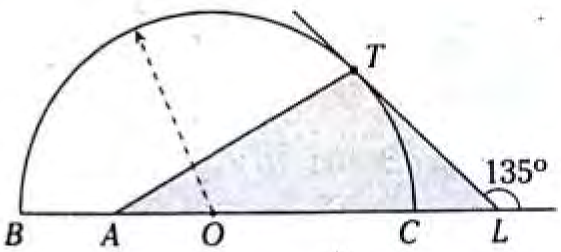
NIVEL BÁSICO

4. Del gráfico, calcule el área de la región triangular ABC si t toma su mínimo valor entero.



A) $4\sqrt{15}$
B) $\sqrt{15}$
C) $6\sqrt{15}$
D) $3\sqrt{15}$
E) $2\sqrt{3}$

5. Del gráfico, T es punto de tangencia, $AC=3(BA)=6$ cm. Calcule el área de la región triangular LAT.

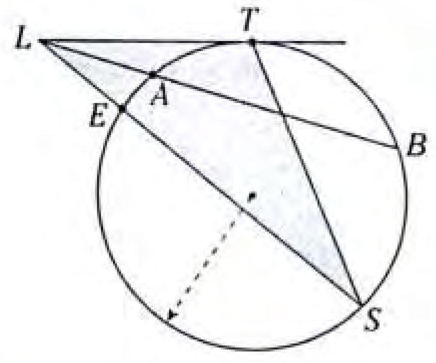


A) $4(2+\sqrt{2})\,\text{cm}^2$
B) $4(2+\sqrt{3})\,\text{cm}^2$
C) $3(3+\sqrt{2})\,\text{cm}^2$
D) $2(4+\sqrt{2})\,\text{cm}^2$
E) $2(3+\sqrt{2})\,\text{cm}^2$

6. Del gráfico, $m\widehat{TB}=2(m\widehat{AT})$,

$m\measuredangle ALE = 37^\circ - \dfrac{m\widehat{AT}}{2}$, y $SE=3(LE)=6$ cm.

Calcule el área de la región triangular LTS si T es punto de tangencia.

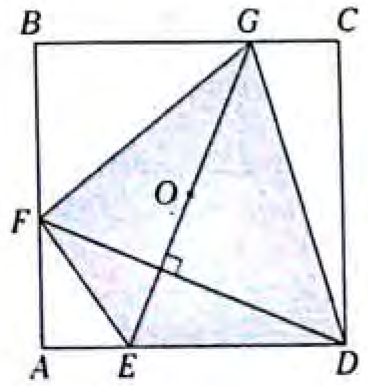


A) $8{,}6\ \text{cm}^2$
B) $8{,}8\ \text{cm}^2$
C) $9{,}2\ \text{cm}^2$
D) $9{,}4\ \text{cm}^2$
E) $9{,}6\ \text{cm}^2$

7. En un triángulo ABC, las longitudes de los lados AB, BC y AC toman valores consecutivos, tal que el perímetro de la región triangular ABC es 18. Calcule el área de la región triangular ABC.

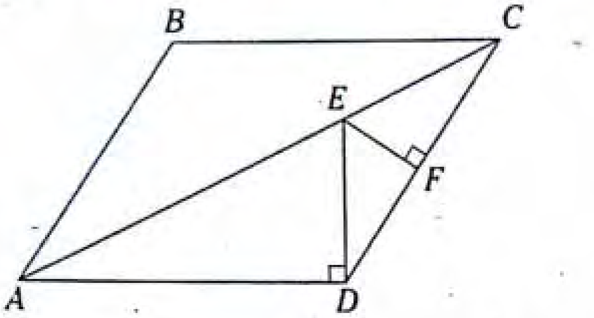
A) $5\sqrt{6}$
B) $6\sqrt{6}$
C) $6\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{6}$
E) $4\sqrt{6}$

8. Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrado de centro O. Si $BG=2(GC)$, calcule la razón de áreas de las regiones $ABCD$ y $EFGD$.



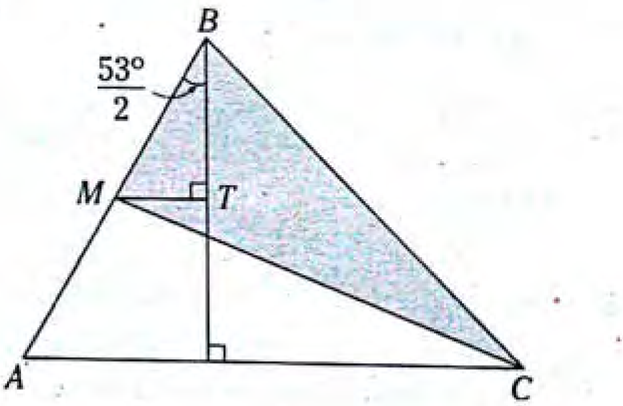
A) $\dfrac{8}{5}$
B) $\dfrac{6}{5}$
C) $\dfrac{10}{7}$
D) $\dfrac{3}{2}$
E) $\dfrac{9}{5}$

9. Del gráfico, $AC=3\sqrt{10}$ y $DE+EF=3$. Calcule el área de la región rombal $ABCD$.



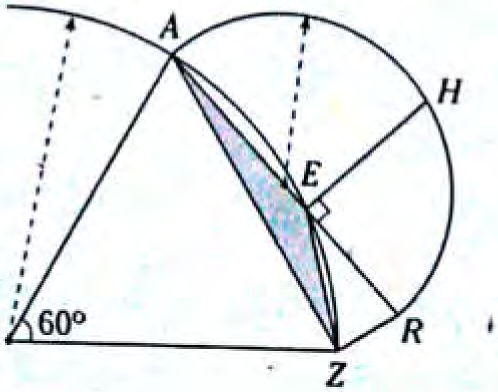
A) 18 B) 12 C) $6\sqrt{10}$
D) 15 E) $2\sqrt{10}$

10. Del gráfico, $MT=2$ y $AC=8$. Calcule el área de la región sombreada.



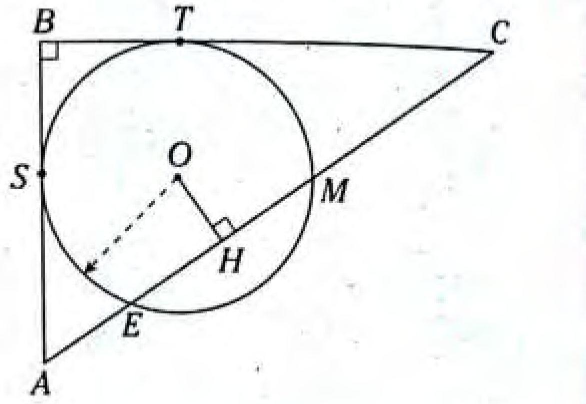
A) 15 B) 14 C) 16
D) 13 E) 12

11. Del gráfico, $m\measuredangle ERZ=75°$ y $EH=6$. Calcule el área de la región triangular ZEA.



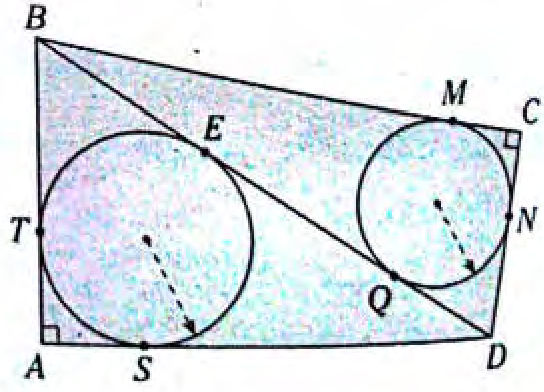
A) 16 B) 4 C) 12
D) 10 E) 9

12. Del gráfico, S y T son puntos de tangencia y la $m\widehat{EM}=120°$. Si $AB=57$ y $BC=76$, calcule OH.



A) 18 B) 12 C) 24
D) 25 E) 28

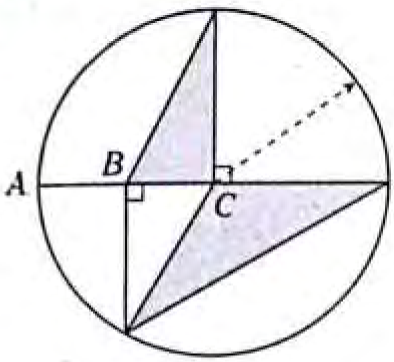
13. Del gráfico, T, S, E, Q, M y N son puntos de tangencia. Si $2(AS)=3(CM)=6r$ y $BD=\ell$, calcule $\dfrac{\mathbb{A}_{\triangle ABD}}{\mathbb{A}_{\triangle BCD}}$.



A) $\dfrac{3(\ell+3r)}{2(\ell+2r)}$ B) $\dfrac{\ell+3r}{\ell+2r}$ C) $\dfrac{\ell+2r}{\ell+3r}$

D) $\dfrac{2\ell+3r}{3\ell+2r}$ E) $\dfrac{r}{\ell}$

14. Del gráfico, $3(AB)=2(BC)$. Calcule la razón de áreas de las regiones mostradas.



A) $\frac{2}{5}$

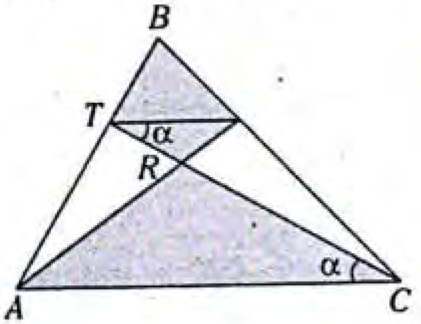
B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{2}{3}$

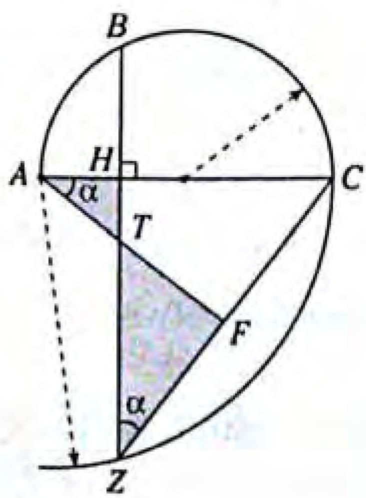
15. Del gráfico, el área de la región triangular ABC es $\mathbb{M}$. Calcule la diferencia de las áreas de las regiones sombreadas si $AT=2(TB)$.



A) $\frac{\mathbb{M}}{2}$ B) $\frac{\mathbb{M}}{4}$ C) $\frac{2\mathbb{M}}{3}$

D) $\frac{\mathbb{M}}{3}$ E) $\frac{\mathbb{M}}{5}$

16. Del gráfico, $m\widehat{AB}=53°$. Calcule la razón de las áreas de las regiones sombreadas.



A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{2}{13}$

17. Del gráfico, $m\widehat{APB}+m\widehat{ATB}=450°$. Calcule la razón de las áreas de las regiones circulares mostradas.

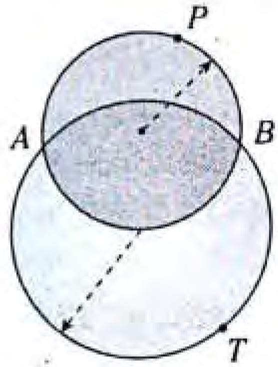
A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

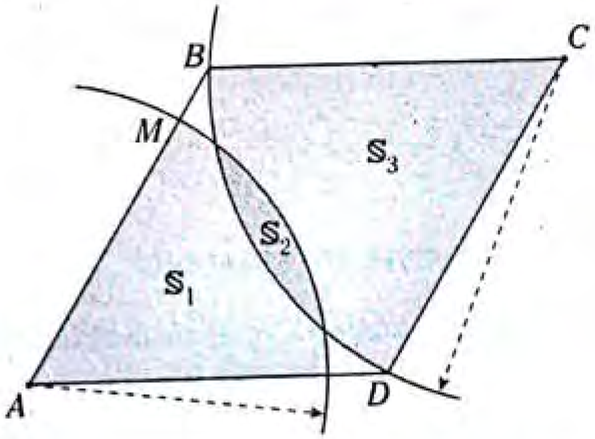
C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{5}{6}$



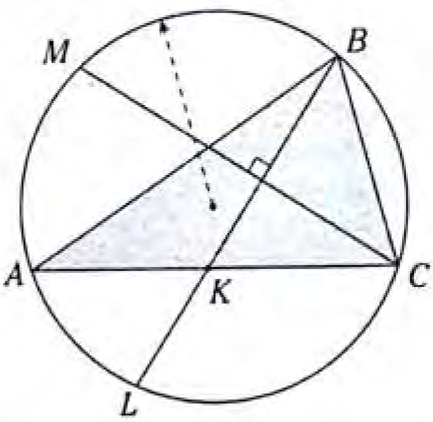
18. En el gráfico, $\mathbb{S}_1=7$, $\mathbb{S}_2=2$ y $\mathbb{S}_3=14$ representan las áreas de las regiones sombreadas. Si $ABCD$ es un paralelogramo, calcule BM/MA.



A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

19. Del gráfico, $m\widehat{AM}=60°$, $LK=CK+1$, $BK=6$ y $AK=8$. Calcule el área de la región triangular ABC.



A) $15{,}5\sqrt{2}$ B) $15{,}5\sqrt{3}$ C) $16{,}5\sqrt{2}$
D) $16{,}5\sqrt{3}$ E) $17{,}5\sqrt{3}$

20. En un triángulo ABC se encuentra inscrita una circunferencia que es tangente en M, N y P a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que las longitudes de MB, NC y PA se encuentran en forma consecutiva creciente y son pares; además, $AP=2(BN)$. Calcule el inradio del triángulo ABC.

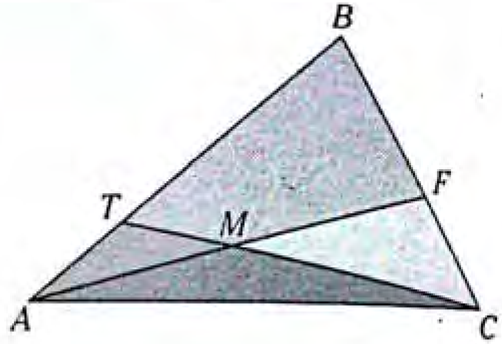
A) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ B) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ C) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{4}{3}\sqrt{5}$

NIVEL INTERMEDIO

21. En una circunferencia, el diámetro AM y la cuerda PQ son perpendiculares y se intersecan en el punto H. Si la razón de las áreas de las regiones triangulares APH y HQM están en relación de 1 a 4, calcule $m\widehat{AP}$.

A) 14° B) 28° C) 37°
D) 45° E) 53°

22. Del gráfico, $AM=MF$ y la razón de áreas de las regiones triangulares ATM y MFC es como de 3 a 5, respectivamente. Calcule $\dfrac{\mathbb{A}_{\triangle MTBF}}{\mathbb{A}_{\triangle AMC}}$.



A) $\frac{27}{5}$ B) $\frac{18}{5}$ C) $\frac{14}{3}$
D) $\frac{28}{5}$ E) $\frac{32}{5}$

23. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BL}$, luego en el triángulo BLC se traza la ceviana interior $\overline{LS}$, tal que $LC=3(AL)$, $BS=2(SC)$ y $\mathbb{A}_{\triangle BCL}-\mathbb{A}_{\triangle ABL}=14\text{ cm}^2$. Calcule el área de la región triangular ABC.

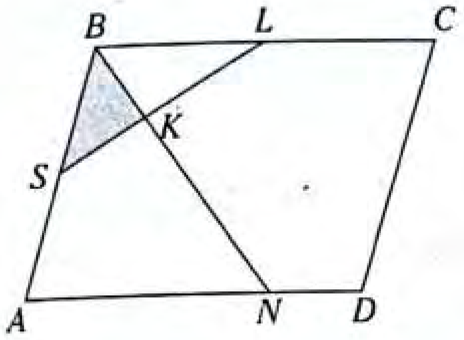
A) 14 cm^2 B) 21 cm^2 C) 28 cm^2
D) 35 cm^2 E) 42 cm^2

24. En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AN}$ y $\overline{BK}$ que se intersecan en L, tal que $NC=2(BN)$, $AK=3(KC)$ y

$\mathbb{A}_{\triangle LNCK}-\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\triangle ABL}=4\text{ cm}^2$. Calcule el área de la región triangular ABN.

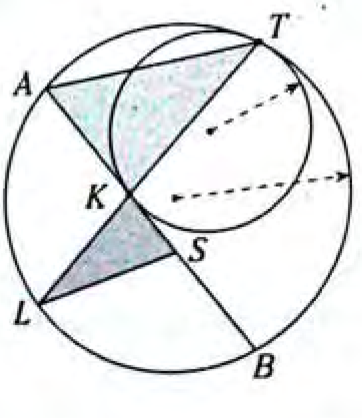
A) 20 cm^2 B) 18 cm^2 C) 16 cm^2
D) 14 cm^2 E) 12 cm^2

25. Del gráfico, $ABCD$ es un romboide, $BL=LC$, $AN=3(ND)$, $BS=SA$ y $\mathbb{A}_{\blacktriangle SBK}=6\ u^2$. Calcule el área de la región romboidal $ABCD$.



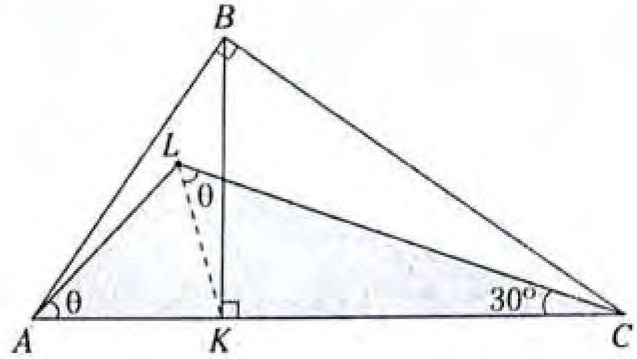
A) $116\ u^2$ B) $112\ u^2$ C) $108\ u^2$
D) $104\ u^2$ E) $100\ u^2$

26. Del gráfico, T y K son puntos de tangencia, $m\widehat{TB}=2(m\sphericalangle ASL)$, $BS=3$, $KS=1$ y $\dfrac{TB}{4}=\dfrac{AT}{3}$. Calcule la razón de áreas de las regiones triangulares ATK y LKS.



A) 4 B) $\dfrac{9}{4}$ C) 3
D) 9 E) $\dfrac{16}{9}$

27. Del gráfico, $AK=2$ cm y $BC=2\sqrt{6}$ cm. Calcule el área de la región triangular AKL.

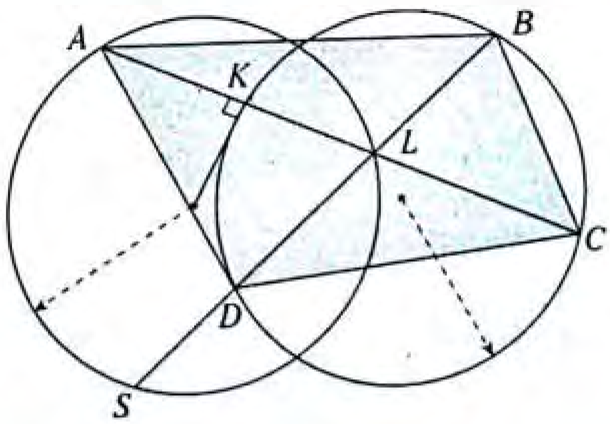


A) $8\ cm^2$ B) $2\sqrt{3}\ cm^2$ C) $2\sqrt{6}\ cm^2$
D) $\sqrt{5}\ cm^2$ E) $3\sqrt{6}\ cm^2$

28. En un triángulo equilátero ABC, se ubican los puntos M, N, P y en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $BM=2(AM)=8$, $AP=PC$ $m\sphericalangle MNC=90°$, luego se traza $\overline{PS}\perp\overline{MN}$ (S en $\overline{MN}$). Calcule el área de la región cuadrilátera $PSNC$.

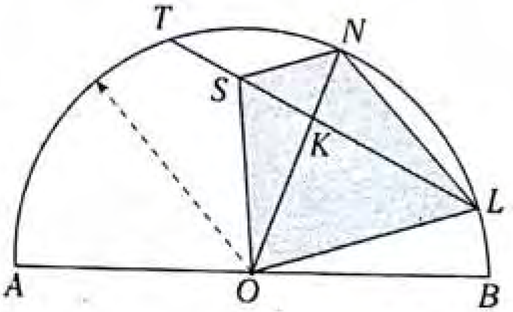
A) $19{,}5\sqrt{2}$ B) $20{,}5\sqrt{3}$ C) $20{,}5\sqrt{2}$
D) $19{,}5\sqrt{3}$ E) $18{,}5\sqrt{3}$

29. Del gráfico $BL=4$, $LD=6$, $m\widehat{AS}=120°$, $LC=3(AK)-1$. Calcule el área de la región cuadrilátera $ABCD$.



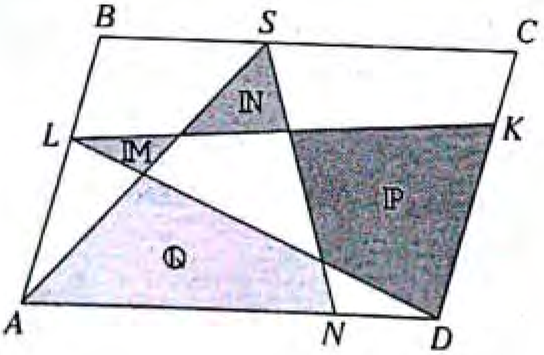
A) $34\sqrt{3}$ B) $35\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{3}$
D) $35\sqrt{2}$ E) $36\sqrt{2}$

30. Del gráfico, $LK=2(TS)=2(SK)=2\sqrt{5}$ y $NK=2$. Calcule el área de la región cuadrangular $SNLO$.



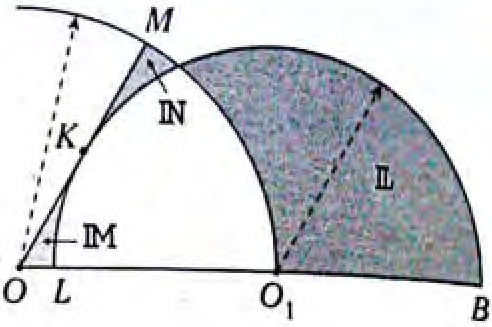
A) $8\sqrt{5}$
B) $9\sqrt{5}$
C) $9\sqrt{3}$
D) 18
E) $6\sqrt{5}$

31. Del gráfico, $ABCD$ es un romboide, $DK=3(CK)$, $AN=3(ND)$ y $\mathbb{M}+\mathbb{P}=14\ \text{cm}^2$. Calcule $\mathbb{N}+\mathbb{Q}$.



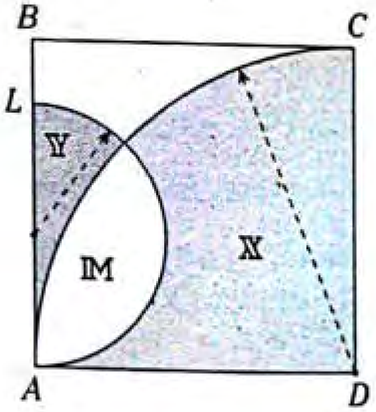
A) $10\ \text{cm}^2$
B) $11\ \text{cm}^2$
C) $12\ \text{cm}^2$
D) $13\ \text{cm}^2$
E) $14\ \text{cm}^2$

32. Del gráfico, K es punto de tangencia, $m\widehat{MO_1}=60^\circ$ y $4\mathbb{L}-9(\mathbb{M}+\mathbb{N})=10\ \text{u}^2$. Calcule el área de la región no sombreada.



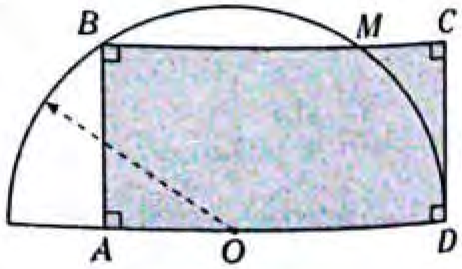
A) $1\ \text{u}^2$
B) $1{,}5\ \text{u}^2$
C) $2\ \text{u}^2$
D) $2{,}5\ \text{u}^2$
E) $3\ \text{u}^2$

33. Del gráfico, $ABCD$ es un cuadrado; $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{M}$ son las áreas de las regiones mostradas; $AL=3(LB)=6$ y $9\mathbb{X}-32\mathbb{Y}=46\ \text{cm}^2$. Calcule $\mathbb{M}$.



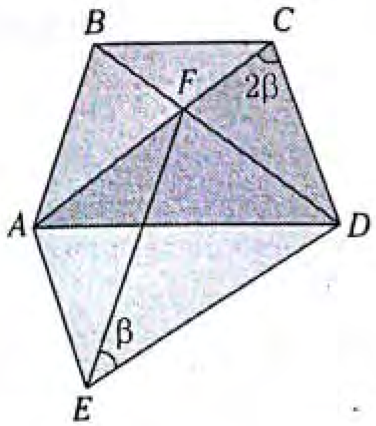
A) $0{,}5\ \text{cm}^2$
B) $1\ \text{cm}^2$
C) $1{,}5\ \text{cm}^2$
D) $2\ \text{cm}^2$
E) $2{,}5\ \text{cm}^2$

34. Del gráfico, $(AO)^2+(OC)^2=50$ y $MC=1$. Calcule el área de la región sombreada.



A) 27
B) 25
C) 50
D) 49
E) 24

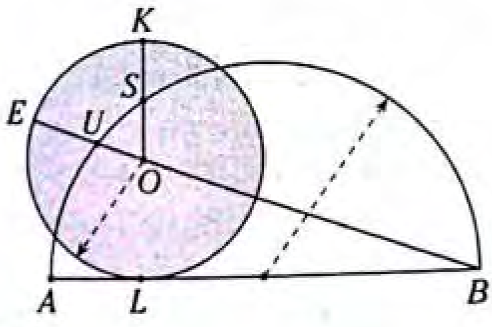
35. Del gráfico, $AF=b$ y $BF=a$. Calcule la razón de áreas entre la región romboidal $AEDC$ y la región trapecial isósceles $ABCD$.



A) $\dfrac{b}{a+b}$ B) $\dfrac{a}{a+b}$ C) $\dfrac{2a}{a+b}$

D) $\dfrac{a+b}{b-a}$ E) $\dfrac{2b}{a+b}$

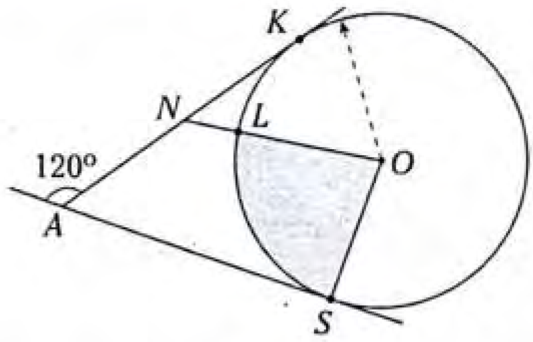
36. Del gráfico, L es punto de tangencia, $2(m\widehat{EK})+m\widehat{AU}=180°$, $KS=OS$, $AL=4$ y $LB=9$. Calcule el área del círculo mostrado.



A) 4π B) 8π C) 12π

D) 16π E) 20π

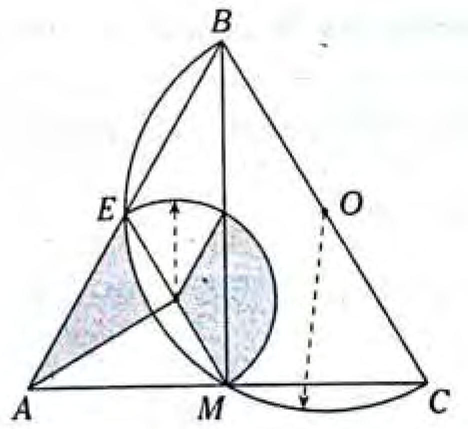
37. Del gráfico, K y S son puntos de tangencia, y $LO=4(NL)=4$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{176\pi}{45}$ B) $\dfrac{22\pi}{3}$ C) $\dfrac{155\pi}{45}$

D) $\dfrac{166\pi}{45}$ E) $\dfrac{35\pi}{9}$

38. Del gráfico, ABC es un triángulo equilátero y E, M y O son puntos medios de los lados AB, AC y BC. Si $AC=2$, calcule la suma de áreas de las regiones sombreadas.



A) 4 B) 1 C) 2

D) 2π E) $\sqrt{3}$

Geometría del espacio

Capítulo XII

Objetivos

- Estudiar las figuras geométricas en las que sus puntos no solamente se encuentran en un mismo plano.
- Estudiar el teorema de las tres perpendiculares y sus aplicaciones.

Definición

Es aquella parte de la geometría que estudia las figuras geométricas en el espacio.

Plano

El plano se considera como una superficie llana e ilimitada en toda su extensión, y de espesor despreciable.

Representación geométrica de un plano

Tradicionalmente al plano se le representa mediante una región paralelográmica; eso no significa que no lo podemos representar por cualquier otra región plana.

Se ubica la letra en una de sus esquinas.

Notación: ▱L. Se lee "plano L".

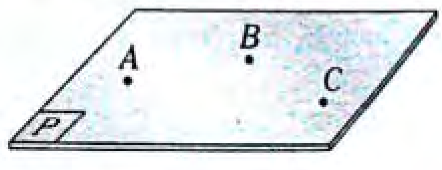
Determinación de un plano

Significa ubicarlo o fijarlo en un determinado lugar. Para que se entienda mejor, de manera análoga, citaremos un ejemplo real: Si deseamos que la pizarra quede fija en la pared, debemos apoyarla en la pared donde queramos fijarla y clavar en tres de sus esquinas.

A continuación veamos qué es necesario para determinar un plano:

Postulado

Con tres puntos no colineales se determina un plano.

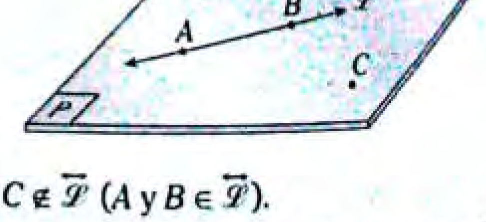


Sean A, B y C puntos no colineales.

Entonces con los puntos A, B y C se determina el ▱P.

Teorema 1

Con una recta y un punto que no pertenece a dicha recta se determina un plano.

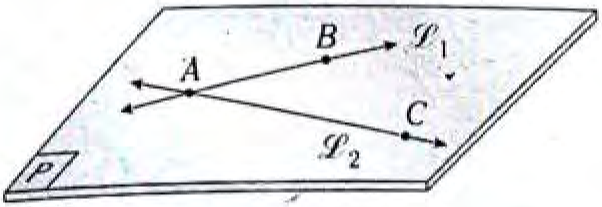


Sea $C \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (A y $B \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$).

Entonces con C y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ se determina el ▱P.

Teorema 2

Con dos rectas secantes se determina un plano.

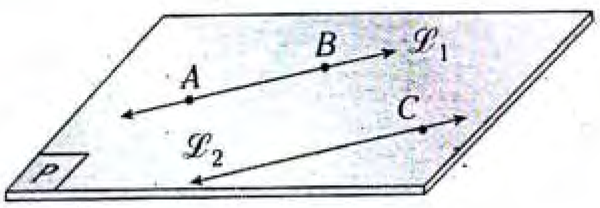


Como A y $B \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, A y $C \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Entonces con $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ se determina el ▱P.

Teorema 3

Con dos rectas paralelas se determina un plano.



Como A y $B \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $C \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$

Entonces con $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ se determina el ▱P.

Posiciones relativas entre rectas y/o planos en el espacio

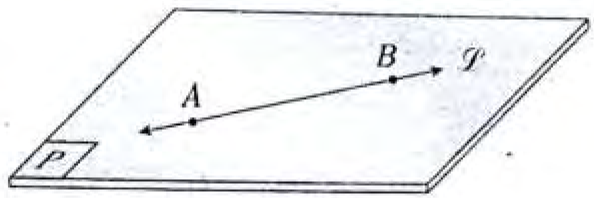
En el espacio se pueden analizar las posiciones relativas entre una recta y un plano, entre dos rectas y entre dos planos, las que explicaremos a continuación.

Entre una recta y un plano

Pueden ser una recta contenida, secante o paralela al plano.

Recta contenida en el plano

Si los puntos de la recta pertenecen al plano.

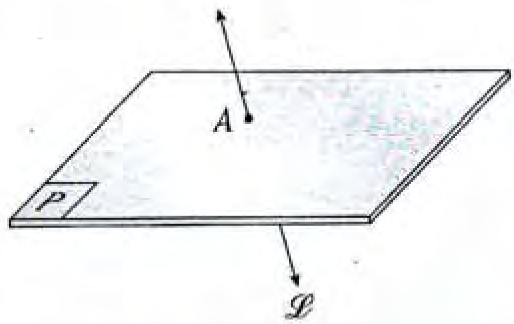


Si $A, B, ... \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $A, B, ... \in$ ▱P

$\rightarrow\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \subset$ ▱P

Recta secante al plano

Si la recta y el plano tienen un solo punto en común.

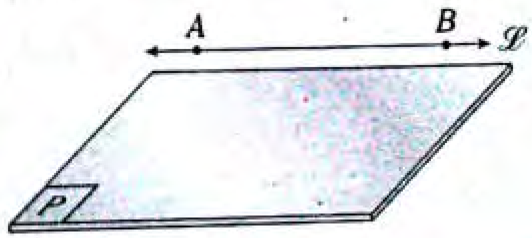


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap$ ▱$P=\{A\}$

$\rightarrow\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y ▱P son secantes

Recta paralela al plano

Si la recta y el plano no tienen un punto o puntos en común.



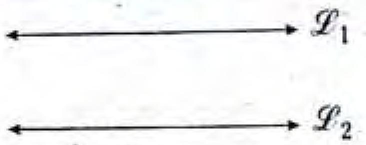
Si $A, B \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $A, B \notin$ ▱P

$\rightarrow\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y ▱P son paralelos.

ENTRE DOS RECTAS

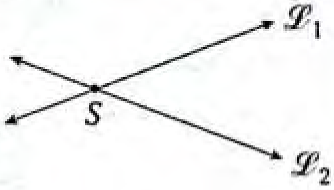
Pueden ser paralelas, secantes o alabeadas (cruzadas).

Rectas paralelas



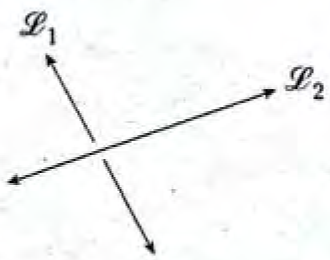
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ son coplanares $\wedge$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \phi$

Rectas secantes



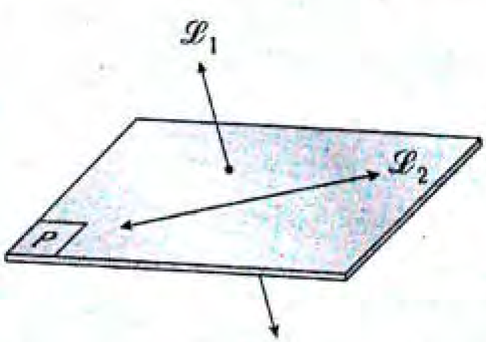
$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \{S\}$$

Rectas alabeadas



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ no son coplanares $\wedge$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \phi$

A continuación se traza un plano que contenga a $\mathscr{L}_2$ e interseca a $\mathscr{L}_1$ para poder visualizarlo mejor.

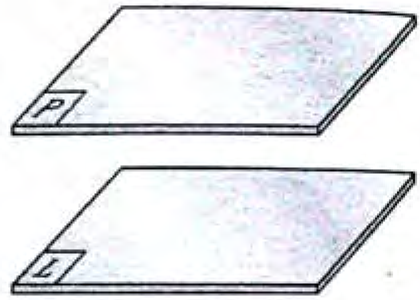


ENTRE DOS PLANOS

Pueden ser planos paralelos o secantes.

Planos paralelos

Son aquellos que no tienen ningún punto en común.

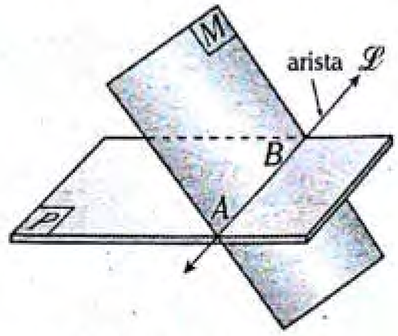


Si ▰$P \cap$ ▰$L = \phi$

$\rightarrow$ ▰P y ▰L son paralelos.

Planos secantes

Son aquellos que tienen en común una recta.

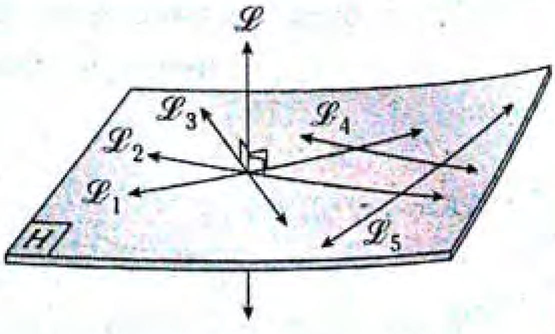


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \subset$ ▰P y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \cap$ ▰M

$\rightarrow$ ▰P y ▰M son secantes.

Recta perpendicular a un plano

Una recta perpendicular a un plano se define como aquella que es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

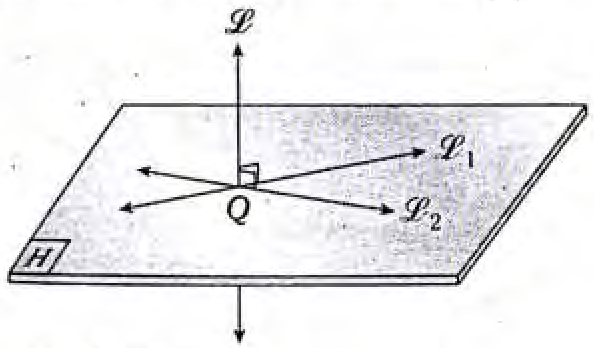


Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3, \ldots, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_n$ contenidas en ▰H y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp$ ▰H.

$$\rightarrow \begin{array}{l} \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_n \end{array}$$

Condición para que una recta sea perpendicular a un plano

La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que debe ser perpendicular a dos rectas secantes contenidas en dicho plano. Luego de esto podemos decir que la recta será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

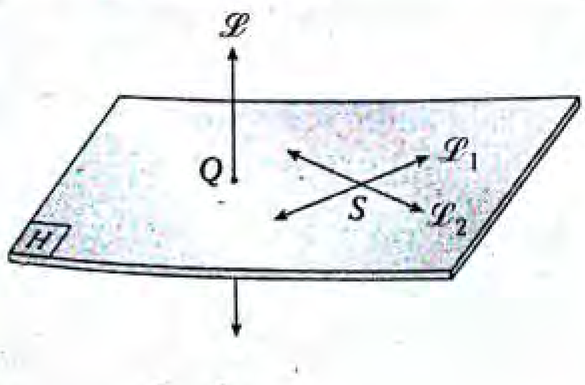


Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \subset$ ▰H.

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp$ ▰H

Luego $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.



Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \subset$ ▰H

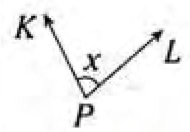
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

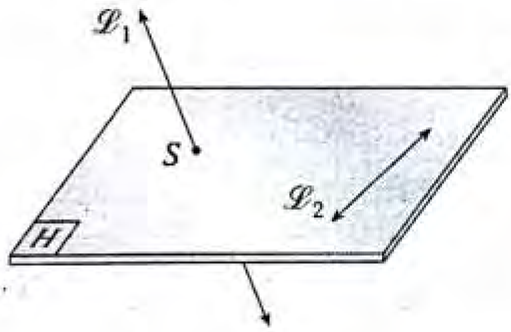
$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp$ ▰H

Luego $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

Ángulo entre dos rectas alabeadas o cruzadas

El ángulo entre dos rectas alabeadas es aquel cuya medida se determina al trazar, por un punto cualquiera del espacio, dos rayos que son paralelos a las rectas alabeadas.





Para esto vamos a trazar ▰H, que contenga a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y que sea secante a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, por cuestiones didácticas.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap$ ▰$H = \{S\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \subset$ ▰H

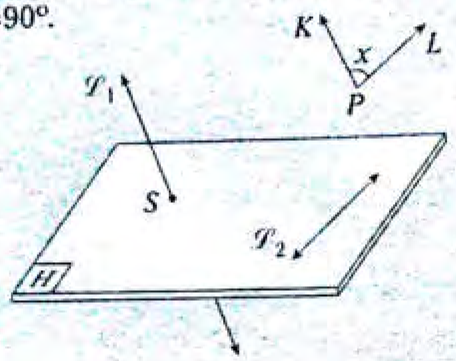
Sea P un punto del espacio. Entonces

$\overline{PL} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y $\overline{PK} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$

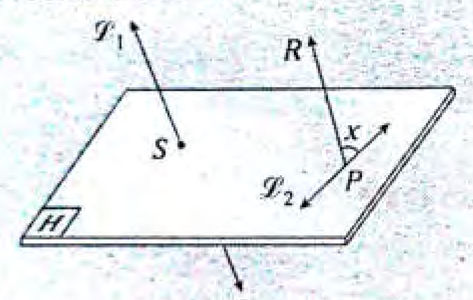
Por lo tanto, x es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$.

NOTA

- Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son ortogonales, entonces $x=90^o$.



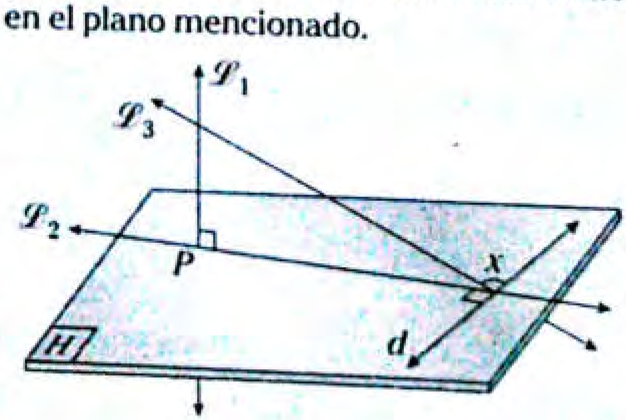
- El punto P puede ser un punto de una de las rectas alabeadas o cruzadas.



Se sabe que $P \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.
Luego $\overrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
Por lo tanto, x es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

Teorema de las tres perpendiculares

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza otra recta perpendicular y secante a una de las rectas contenidas en el plano, entonces por el pie de esta última recta y un punto cualquiera de la primera recta se determina otra recta perpendicular a dicha recta contenida en el plano mencionado.



Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp$ ▱H

$\vec{d} \subset$ ▱H

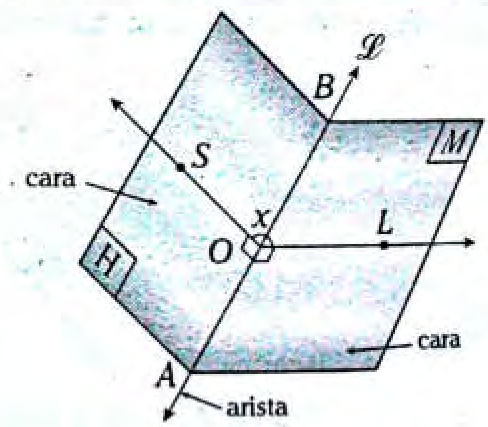
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \vec{d}$

$(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{P\})$

$\rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \vec{d}\ (x=90^o)$

Ángulo diedro

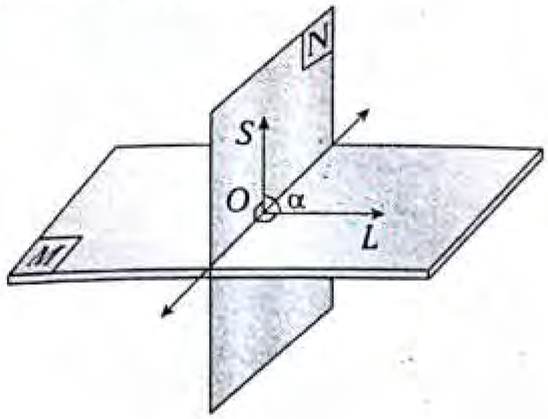
El ángulo diedro o simplemente diedro es la figura geométrica que se forma por la unión de dos semiplanos que tienen en común la recta de origen (la cual se denomina arista).



Notación

- Ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$ o ángulo diedro $H-\overleftrightarrow{AB}-M$
- $\measuredangle SOL$: ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$
- x: medida del ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overline{OS} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overline{OL} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, además $\overline{OS} \subset$ ▱$H \wedge \overline{OL} \subset$ ▱M)

Planos perpendiculares

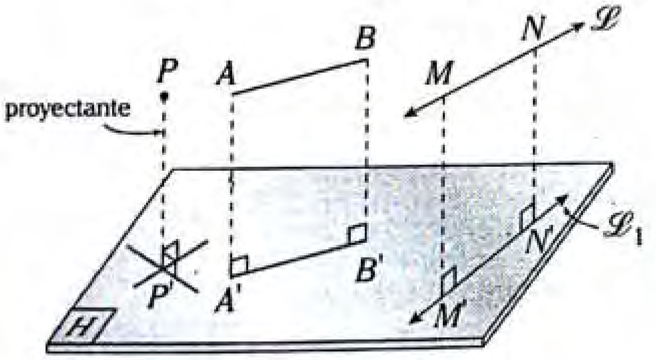


Sea ▱$M \perp$ ▱N.

→ $\sphericalangle SOL$ es recto

($\alpha = 90°$)

Proyección ortogonal de un punto, un segmento y una recta respecto a un plano



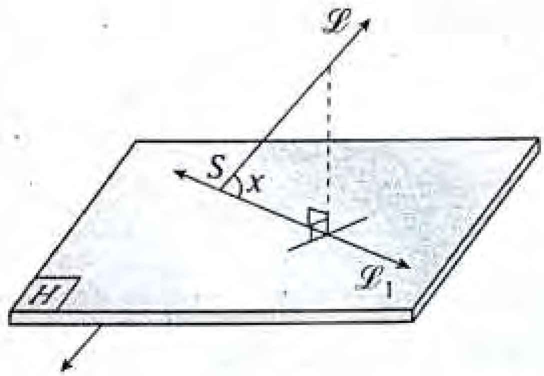
- P': proyección ortogonal de P sobre ▱H
- A' y B': proyecciones ortogonales de A y B sobre ▱H
- M' y N': proyecciones ortogonales de M y N sobre ▱H
- $\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre ▱H
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ sobre ▱H

NOTA

- $\overline{A'B'}$ puede ser congruente a $\overline{AB}$.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ puede ser paralela a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo entre una recta y un plano se define como aquel que determina la recta con su respectiva proyección ortogonal sobre el plano.



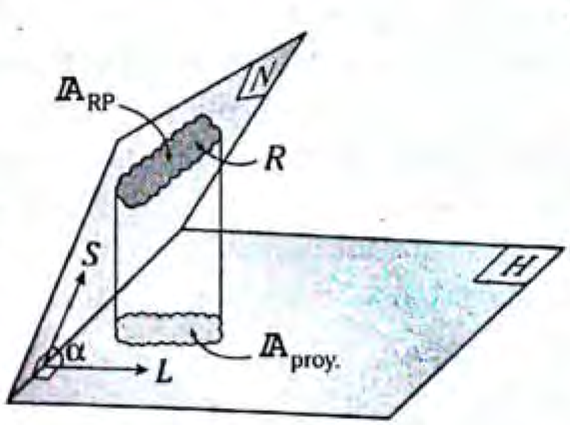
Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ secante al ▱H en S.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ sobre ▱H

x: medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y ▱H

Proyección ortogonal de una región plana respecto a un plano

El área de la proyección ortogonal de una región plana sobre un plano dado es igual al producto del área de dicha región y al coseno del ángulo diedro determinado por el plano que contiene a dicha región y al plano dado.



$$\mathbb{A}_{proy.} = \mathbb{A}_{RP} \cdot \cos\alpha$$

Sea la región plana R.

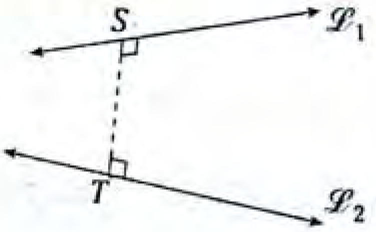
- $\mathbb{A}_{RP}$: área de la región plana contenida en ▱N
- $\mathbb{A}_{proy.}$: área de la proyección ortogonal de dicha región R sobre ▱H
- α: medida del ángulo diedro determinado por el ▱N y ▱H

NOTA

Cuando ▱$N \wedge$ ▱H son paralelos, entonces $\mathbb{A}_{proy}=\mathbb{A}_{RP}$.

Distancia entre dos rectas alabeadas

La distancia entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento de recta común que es perpendicular a dichas rectas.



Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ alabeadas o cruzadas.

Si $\overline{ST} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \wedge \overline{ST} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

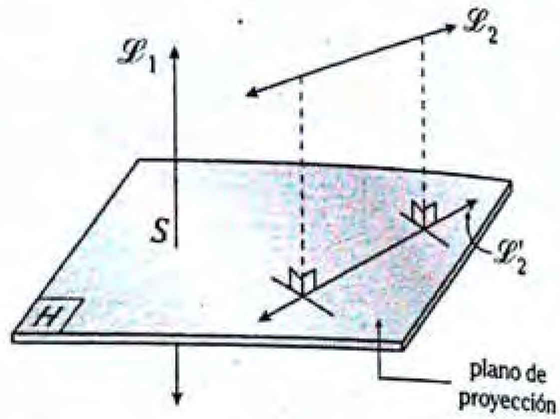
Entonces ST es la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

MÉTODO PARA HALLAR LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Para hallar la distancia entre dos rectas alabeadas, se debe trazar un plano perpendicular a una de las rectas y luego proyectarlas ortogonalmente sobre el plano mencionado. Finalmente la distancia entre las proyecciones (punto y recta) será la distancia entre las rectas alabeadas.

Sean $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ alabeadas.

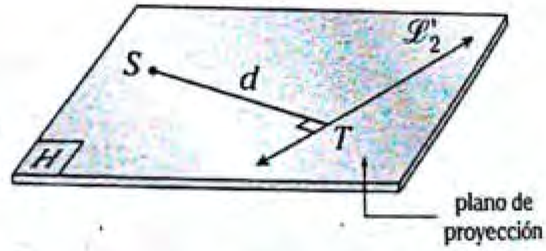
Se traza el ▱H de manera perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.



▱$H \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_2}$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ sobre ▱H

S: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ sobre ▱H

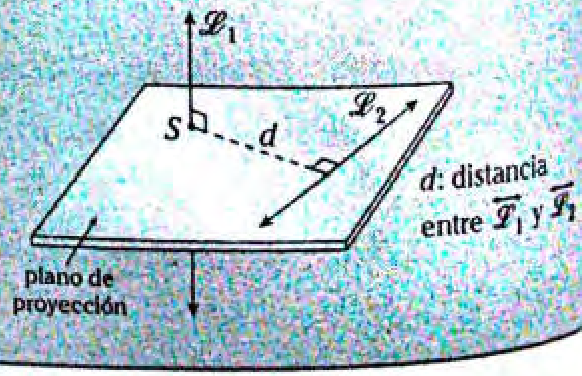


Se traza la perpendicular ST a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_2}$

$ST=d$: distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

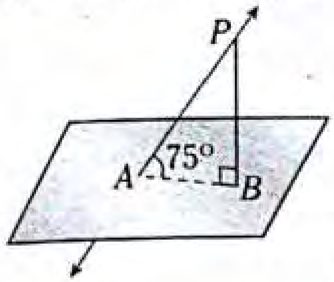
NOTA

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son ortogonales, entonces el llamado plano de proyección podría ser el plano que contiene a uno de dichas rectas.



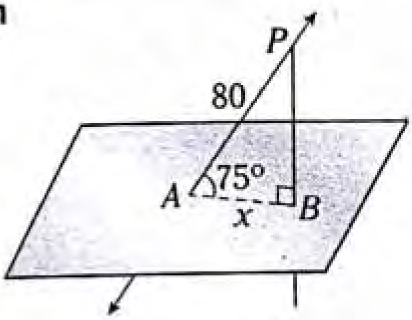
Problema N.° 1

En el gráfico $AP=80$ cm. Halle AB.



UNMSM 2007-II

Resolución



Nos piden $AB=x$.

Se sabe que $\triangle ABP$ es notable de 15° y 75°

$x=(\sqrt{6}-\sqrt{2})k$ y $4k=80$ $\rightarrow$ $x=(\sqrt{6}-\sqrt{2})20$

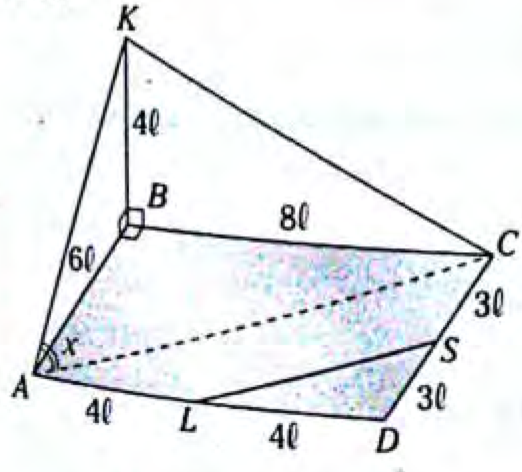
$\therefore$ $x=20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ cm

Problema N.° 2

En un rectángulo $ABCD$ se traza $\overline{BK}$ perpendicular al plano del rectángulo, luego se ubican los puntos medios L y S de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, $\frac{AB}{3}=\frac{BC}{4}=\frac{BK}{2}$. Calcule la medida del ángulo $\overleftrightarrow{LS}$ y $\overleftrightarrow{AK}$.

UNMSM 2011-II

Resolución



Nos piden la medida del $\measuredangle$ entre $\overline{LS}$ y $\overline{AK}=x$.

Como podemos ver, $\overline{AK}$ y $\overline{LS}$ son alabeados, para lo cual se traza $\overline{AC}//\overline{LS}$.

$\triangle ABK$: $AK=\sqrt{(4\ell)^2+(6\ell)^2}$ $\rightarrow$ $AK=2\sqrt{13}\ell$

$\triangle CBK$: $CK=\sqrt{(4\ell)^2+(8\ell)^2}$ $\rightarrow$ $CK=4\sqrt{5}\ell$

$\triangle ABC$: $AC=10\ell$

$\triangle AKC$: por teorema de cosenos

$$(4\sqrt{5}\ell)^2=(2\sqrt{13}\ell)^2+(10\ell)^2-2(2\sqrt{13}\ell)(10\ell)\cos x$$

$$80=52+100-40\sqrt{13}\cos x$$

$$40\sqrt{13}\cos x=72$$

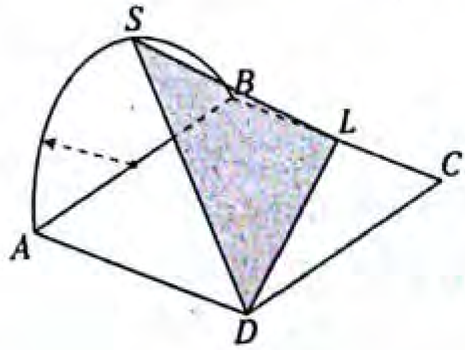
$$\cos x=\frac{9}{5\sqrt{13}}$$

$$\cos x=\frac{9\sqrt{13}}{65}$$

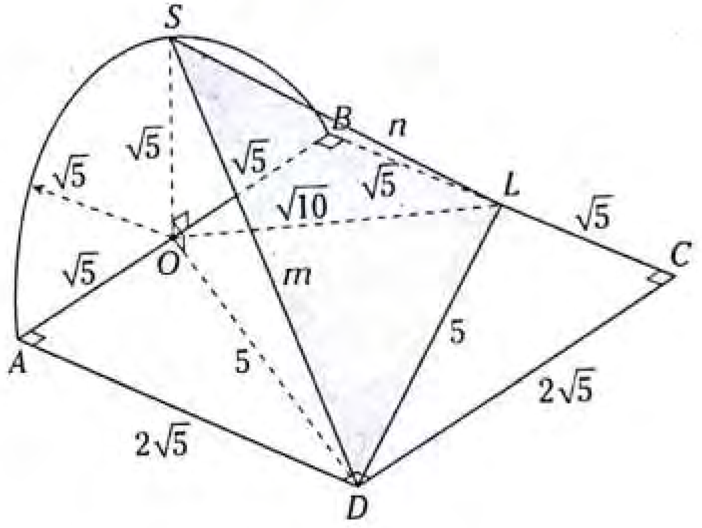
$$\therefore \quad x=\arccos\left(\frac{9\sqrt{13}}{65}\right)$$

Problema N.° 3

Del gráfico, el cuadrado $ABCD$ y la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se encuentran en planos perpendiculares, $BL=LC=\sqrt{5}$ y $m\overset{\frown}{AS}=m\overset{\frown}{SB}$. Calcule el área de la región triangular SLD.



Resolución



Nos piden $\mathbb{A}_{SLD}$.

Dato: la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y el cuadrado se encuentran en planos perpendiculares.

Como $\overline{SO} \perp \square ABCD$

$\rightarrow \overline{SO} \perp \overline{OD} \wedge \overline{SO} \perp \overline{OL}$

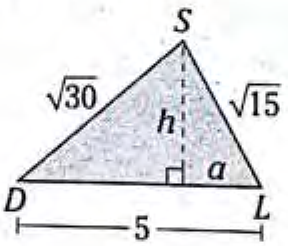
$\triangle SOD$: $m^2 = \sqrt{5}^2 + 5^2$

$m = \sqrt{30}$

$\triangle SOL$: $n^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2$

$n = \sqrt{15}$

Teorema de Euclides

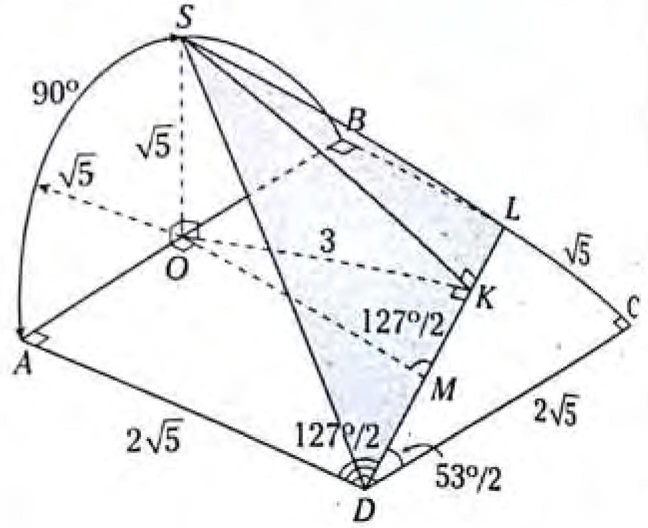


$\sqrt{30}^2 = \sqrt{15}^2 + 5^2 - 2(5)a$

$\rightarrow a = 1 \wedge h = \sqrt{14}$

$\mathbb{A}_{SLD} = \dfrac{(5)\sqrt{14}}{2}$

Otra forma



Nos piden $\mathbb{A}_{SLD}$.

Dato: la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y el cuadrado se encuentran en planos perpendiculares.

Se sabe que $\overline{SO} \perp \overline{AB} \rightarrow SO \perp \square ABCD$

Aplicamos el teorema de las 3 perpendiculares

1.ª $\perp$: $\overline{SO}$

2.ª $\perp$: $\overline{OK}$

$\rightarrow$ 3.ª $\perp$: $\overline{SK}$ $(m\measuredangle SKL = 90°)$

Se traza $\overline{OM} // \overline{AD}$. Como $\triangle LCD$ es notable de 53°/2

$\rightarrow m\measuredangle LMO = 127°/2$

En el trapecio $BLDA$: teorema $OM = \dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}$

$\triangle OKM$ es notable de 53°/2

$OK = 3$

$\triangle SOK$, por teorema de Pitágoras, $SK = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2}$

$SK = \sqrt{14}$

$\mathbb{A}_{SLD} = \dfrac{(DL)(SK)}{2}$

$\therefore \mathbb{A}_{SLD} = \dfrac{(5)\sqrt{14}}{2}$

NIVEL BÁSICO

1. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   I. Si una recta no está contenida en un plano, entonces dicha recta será necesariamente paralela.

   II. Si una recta es secante a un plano, entonces dicha recta puede ser perpendicular a dicho plano.

   III. Si dos rectas no se intersecan, entonces dichas rectas son alabeadas.

A) FVV B) FFV C) FVF
D) VVF E) FFF

2. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   I. Si una recta es secante a dos planos, entonces dichos planos tienen que ser paralelos.

   II. Si una recta es secante a la recta de intersección de dos planos, entonces uno de los planos contiene a dicha recta.

   III. Si dos planos son secantes y una recta es secante a uno de ellos, entonces dicha recta es secante al otro plano.

A) FFV B) FVF C) VFF
D) FFF E) FVV

3. De las siguientes proposiciones, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   I. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son alabeadas, entonces todos los planos que contienen a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ no intersecan a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

   II. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ se ubican en el espacio, donde solo $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son alabeadas, entonces el plano que contiene a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ siempre es paralelo a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

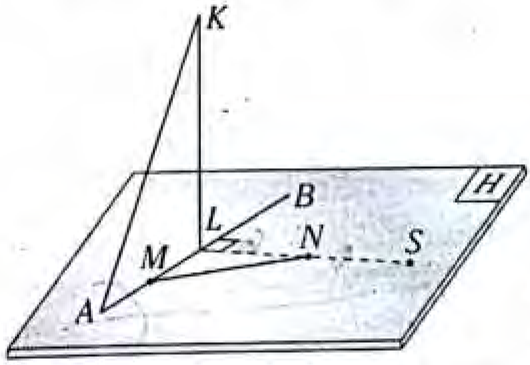
   III. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ no son paralelas, entonces las rectas pueden ser secantes o alabeadas.

A) FVV B) FFV C) FVF
D) VFV E) VFF

4. Se tiene que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es perpendicular al plano del triángulo ABC, luego se traza $\overline{BM}$ perpendicular a dicho plano, $A \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $m\measuredangle ACB=90°$, $m\measuredangle CAB=37°$ y $MB=\dfrac{AC+AB}{3}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{MC}$.

A) 37° B) 30° C) 45°
D) 53° E) 60°

5. Del gráfico, $\overline{KL} \perp ▱H$, $LN=NS$, $KL=2(AM)=2(ML)$, $m\measuredangle LNM=45°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AK}$ y $\overline{MN}$.



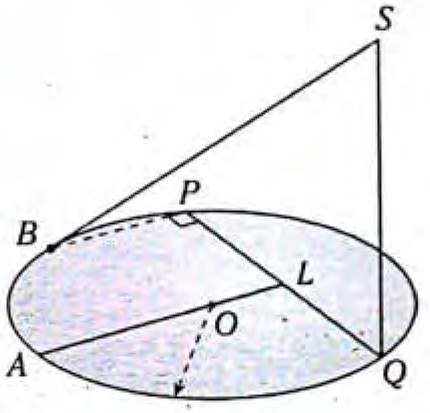
A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 76°

6. Se tiene $\overline{LA}$, que es perpendicular al plano del cuadrado $ABCD$; luego se ubica el punto medio S del $\overline{LB}$ y $m\measuredangle ALB=30^{\circ}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AS}$ y $\overleftrightarrow{LC}$.

A) $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$ B) 60° C) 53°

D) $\frac{127^{\circ}}{2}$ E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

7. Del gráfico, $\overline{QS}$ es perpendicular al plano del círculo de centro O, $PL=LQ$, $AO=2\sqrt{6}$, $LO=2$ y $SQ=2\sqrt{5}$. Calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{AL}$ y $\overleftrightarrow{BS}$.



A) 1 B) 1,5 C) 2

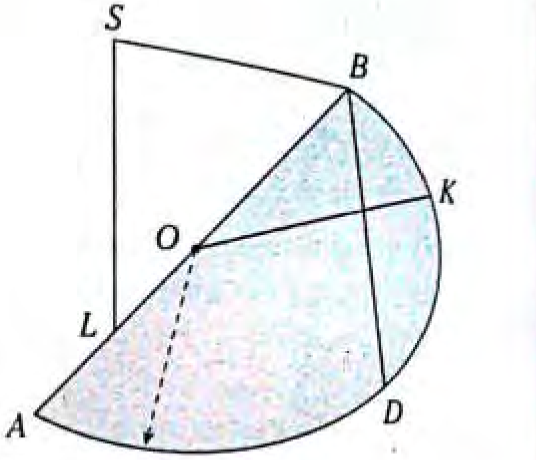
D) 2,5 E) $\sqrt{5}$

8. En un cuadrado $ABCD$ de centro O se traza $\overline{OL}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado, luego se ubican los puntos medios M y N en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, tal que $LO=2$ y $MN=2\sqrt{3}$. Calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{BL}$.

A) $1,5\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) $1,5\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

9. Del gráfico, $\overline{LS}$ es perpendicular al plano del semicírculo de centro O, $AL=LO$, $m\widehat{BK}=m\widehat{KD}$, $BD=LS=20$. Calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{OK}$ y $\overleftrightarrow{BS}$.



A) 5 B) 6 C) 8

D) 4 E) 10

10. Si en un plano de un triángulo equilátero ARC, de circuncentro O, se traza la recta secante SA, tal que O es la proyección ortogonal de S sobre dicho plano, además, $AS=RC$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AS}$ y el plano mencionado.

A) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

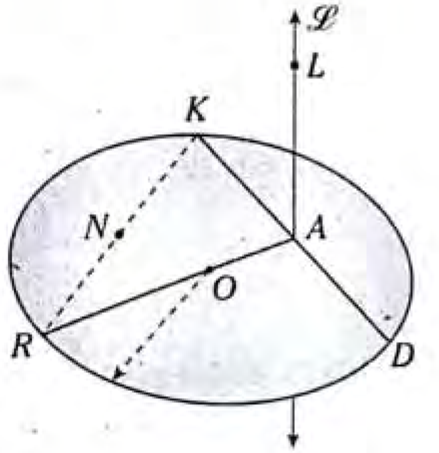
B) $\arctan\sqrt{2}$

C) $\arctan\sqrt{3}$

D) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

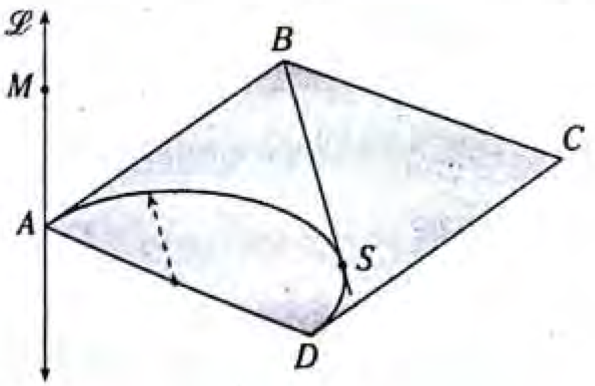
E) $\arctan\sqrt{5}$

11. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es perpendicular al plano del círculo de centro O, $KA=DA$, $RN=NK$, $LA=5$, $KD=12$ y $m\widehat{RD}=106°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{LN}$ y el círculo mencionado.



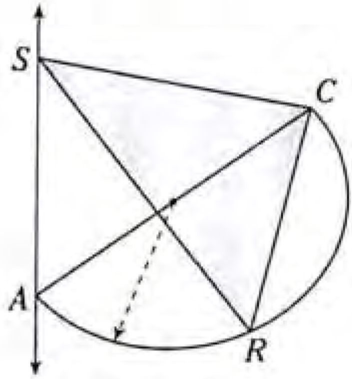
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

12. Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es perpendicular al plano del cuadrado $ABCD$, S es punto de tangencia, la distancia de S a $\overline{DA}$ es 4 cm y $AM=2\sqrt{5}$ cm. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{MS}$ y el plano de dicho cuadrado.



A) 16° B) 37°/2 C) 14°
D) 53°/2 E) 30°

13. Del gráfico, $\overline{SA}$ es perpendicular al plano de la semicircunferencia, $3(AS)=2(CR)$ y $AC=SA+CR$. Calcule el área de la región triangular SCR si $AS=4$.



A) $10\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{6}$ C) $8\sqrt{5}$
D) $10\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{5}$

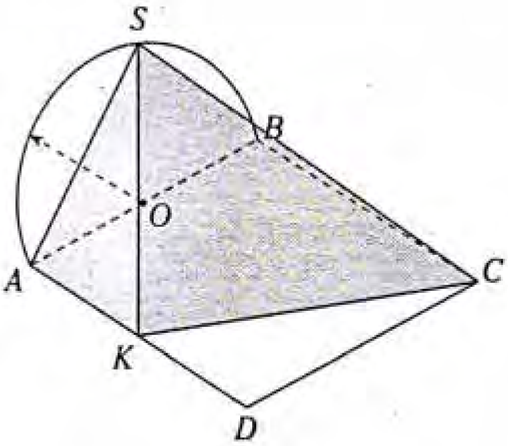
14. En el lado $\overline{AB}$ de un cuadrado $ABCD$ se ubica S, luego se traza LS perpendicular al plano de dicho cuadrado, tal que $SL=3$ y $CD=6$. Calcule el área de la región triangular LCD.

A) $8\sqrt{5}$ B) $9\sqrt{5}$ C) $9\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{5}$ E) $10\sqrt{3}$

15. En un triángulo equilátero ABC de circuncentro S se traza el cuadrante KS de centro A, que es perpendicular al plano de dicho triángulo. Si el área de la región equilátera es $3\sqrt{3}$, calcule el área de la región triangular KBC.

A) $\sqrt{38}$ B) $2\sqrt{13}$ C) 6
D) $\sqrt{39}$ E) $\sqrt{49}$

16. Del gráfico, $m\widehat{AS} = m\widehat{SB}$, $\overline{SO} \perp ▱ABCD$ ($ABCD$ es un cuadrado) y $AK=KD$. Calcule la razón de las medidas de los diedros $\overleftrightarrow{CK}$ y $\overleftrightarrow{AK}$.



A) $\frac{1}{2}$

B) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C) 1

D) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

E) $\text{arccot}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. En un rectángulo $ABCD$ se ubica S en AB, luego se traza el triángulo equilátero AKS perpendicular al plano de dicho rectángulo, tal que $AS=SB=4$; además, la distancia de C a $\overline{BD}$ es $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Calcule la medida del diedro $\overline{BD}$.

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

18. En un rectángulo $ABCD$ se traza el triángulo ASB isósceles, que es perpendicular al plano de dicho rectángulo, $AS=SB=3\sqrt{3}$, $CD=6$; luego se ubica K en $\overline{AD}$, tal que $m\sphericalangle KCD=45°$ y $BC=11$. Calcule la medida del diedro determinado por los triángulos KSC y ABD.

A) 36°
B) 39°
C) 53°
D) 45°
E) 37°

NIVEL INTERMEDIO

19. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si dos rectas son secantes a un plano, entonces estas rectas siempre son secantes entre sí.

II. Con cuatro puntos se pueden construir como máximo seis planos.

III. Si una recta es alabeada a una recta contenida en un plano, entonces dicha recta es paralela al plano.

IV. Si una recta es paralela a uno de dos planos secantes, entonces será paralela al otro plano.

A) FVFV
B) VVFF
C) FFFV
D) FFFF
E) FVVF

20. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si por el punto de intersección de dos rectas secantes se traza un plano, entonces una de las rectas siempre estará contenida en el plano.

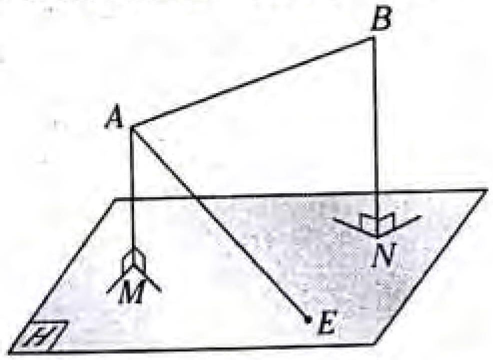
II. Si una recta está contenida en un plano y otra recta es paralela a la primera, entonces la segunda recta es paralela a dicho plano.

III. Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano, entonces dicha recta es perpendicular al plano.

IV. Si tres puntos ubicados en una recta, la cual es secante a un plano, se proyectan ortogonalmente a dicho plano, entonces dichas proyecciones pueden formar un triángulo.

A) FFFV B) FFFF C) FFVV
D) VVFF E) VFFF

21. Del gráfico mostrado, $ME=MN$, $BN=6$ y $AM=2$. Calcule AB^2-AE^2. ($E \in$ ▱H).

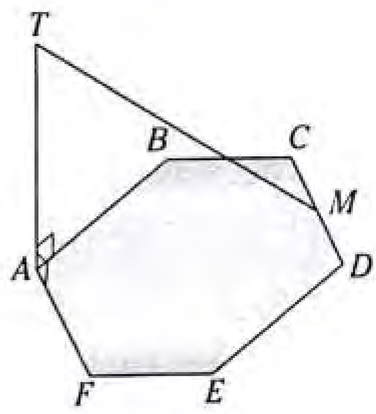


A) 32 B) 12 C) 10
D) 8 E) 14

22. Del gráfico, $EFCD$ es un rectángulo, $EC=10$, $BD=DC$ y $AB=12$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{DF}$.

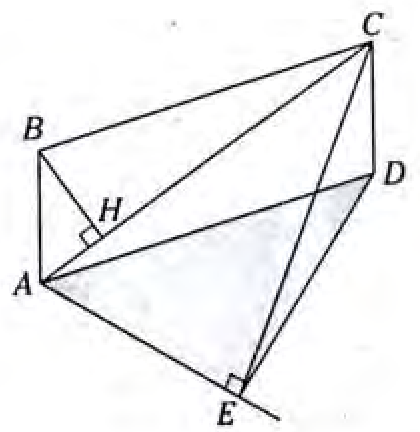
A) $37^{\circ}/2$ B) 53° C) 37°
D) $53^{\circ}/2$ E) 74°

23. Del gráfico, $ABCDEF$ es un hexágono regular, $CM=MD=2$ y $AT=\sqrt{73}$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{MT}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.



A) 53° B) $127^{\circ}/2$ C) 37°
D) $53^{\circ}/2$ E) 30°

24. Del gráfico, $ABCD$ es un paralelogramo. Además la distancia entre las rectas alabeadas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AE}$ es AB. Si $AE=2(BH)$, calcule $\dfrac{m\sphericalangle BCA}{m\sphericalangle ACE}$.

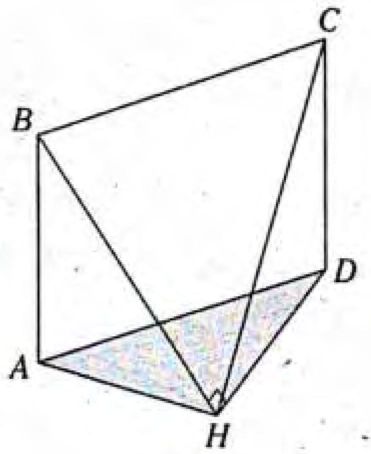


A) 2/3 B) 1/3 C) 1/4
D) 1/2 E) 3/4

25. Sea $ABCD$ un cuadrado. Por el punto D se traza $\overline{DH}$, el cual es perpendicular al plano que contiene al cuadrado. Por H se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, la cual es paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. Si la distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ es 6 y $AD=8$, calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

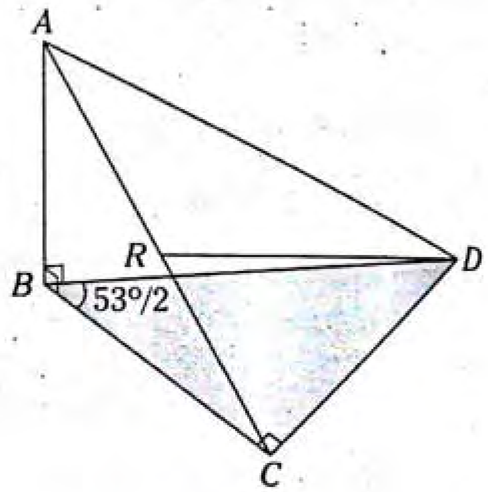
A) 3 B) 4 C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

26. Del gráfico, AB es la distancia entre las rectas alabeadas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AH}$, $ABCD$ es un rectángulo $(AH)^2+(HC)^2=36$ y $AB=3$. calcule $m\sphericalangle BCA$.



A) $\frac{37^\circ}{2}$ B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) 30°
D) $\frac{45^\circ}{2}$ E) 16

27. Del gráfico, $AB=CD(\sqrt{2})$. Calcule la medida del ángulo determinado por la mediana RD del triángulo ACD y el plano que contiene al triángulo BCD.



A) $\frac{45^\circ}{2}$ B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) $\frac{53^\circ}{2}$
D) 14° E) 30°

Poliedro y poliedros regulares

Capítulo XIII

OBJETIVOS

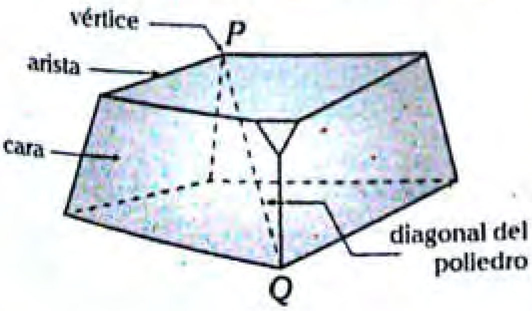
- Estudiar la forma de los poliedros, y reconocer los elementos principales y secundarios, así como también la relación que hay entre ellos.
- Analizar los poliedros regulares empleando fórmulas que permitan calcular su volumen y el área de la superficie que los limita.

Poliedro

Es el sólido geométrico limitado por cuatro o más regiones poligonales denominadas caras de poliedro.

El lado común a dos caras se denomina arista y al punto de concurrencia de las aristas se le denomina vértice del poliedro. Un poliedro se identifica según el número de caras.

N.° de caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Nonaedro
10	Decaedro



DIAGONAL

Es aquel segmento cuyos extremos son dos vértices de caras diferentes.

En todo poliedro se cumple

$\boxed{C+V=A+2}$ Teorema de Euler

donde

C: número de caras

V: número de vértices

A: número de aristas

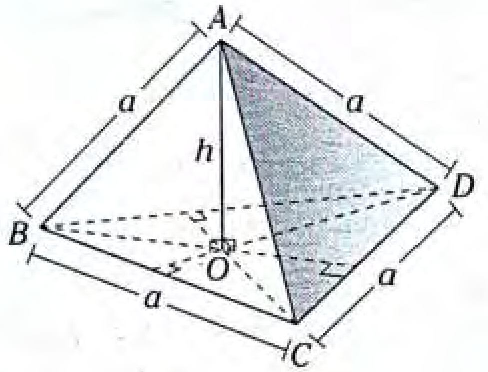
Poliedro regular

Un poliedro regular es aquel que tiene por caras regiones poligonales regulares congruentes entre sí y en cada vértice concurren igual número de aristas.

Solamente existen cinco poliedros regulares, los cuales son tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular y el icosaedro regular. A continuación analizaremos los poliedros regulares.

Tetraedro regular

Es aquel poliedro regular que se caracteriza por tener 4 caras que son regiones triangulares equiláteras.



Notación:

Tetraedro regular *ABCD*

Cálculo de la longitud de su altura

$$\boxed{h=\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

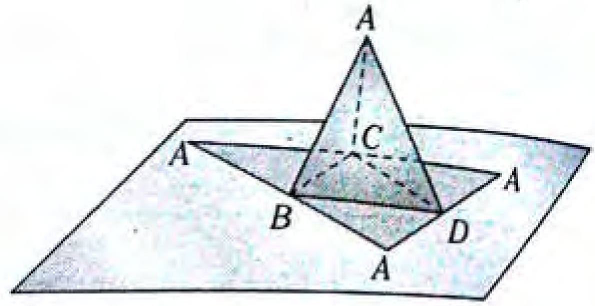
$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=a^2\sqrt{3}}$$

Cálculo del volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

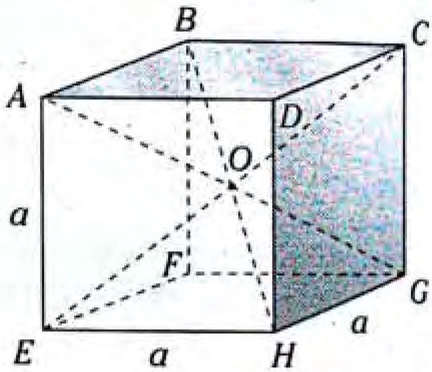
Desarrollo de la superficie de un tetraedro regular

En la figura se muestra un tetraedro regular cuyas caras son de cartón. Al desplegar sus caras y ubicarlas sobre un plano se observa una superficie triangular equilátera, la cual se denomina desarrollo de su respectiva superficie.



Hexaedro regular o cubo

Es aquel poliedro regular limitado por seis regiones cuadradas congruentes entre sí.



Notación:

Hexaedro regular *ABCD-EFGH*

Diagonal del hexaedro: $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$

a: longitud de la arista
O: centro del hexaedro regular

Cálculo de la diagonal

$$\boxed{AG=BH=CE=DF=a\sqrt{3}}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

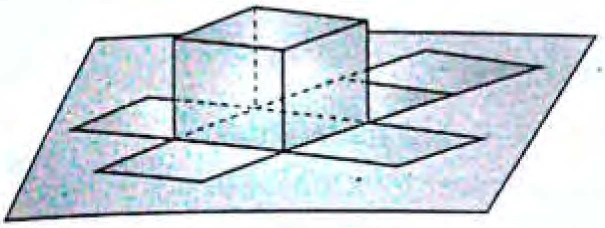
$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=6a^2}$$

Cálculo del volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V}=a^3}$$

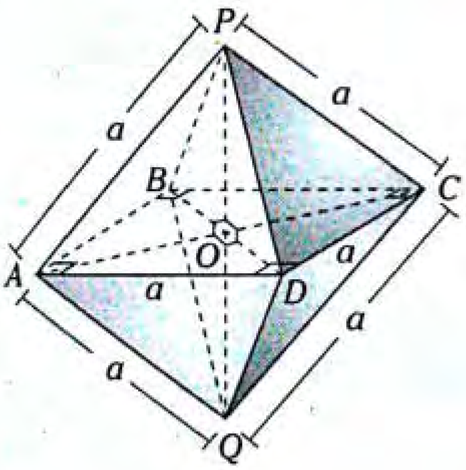
Desarrollo de la superficie de un hexaedro regular

En la figura se muestra una caja de cartón cuya forma es cúbica. Al desplegar sus caras y ubicarlas en un plano se obtiene lo que se denomina el desarrollo de su respectiva superficie.



Octaedro regular

Es aquel poliedro regular limitado por ocho regiones triangulares equiláteras.



Notación:

Octaedro regular $P\text{-}ABCD\text{-}Q$

Diagonal del octaedro regular: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{PQ}$

a: longitud de la arista

O: centro del octaedro regular

Cálculo de la diagonal

$$\boxed{AC = BD = PQ = a\sqrt{2}}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST} = 2a^2\sqrt{3}}$$

Cálculo del volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

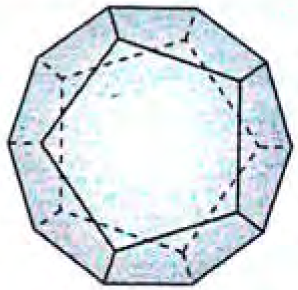
En un octaedro regular, si sus caras son de cartón, entonces se podrán desplegar, y al ubicarlas sobre una mesa (tal como se ha realizado con el tetraedro regular y el hexaedro regular) se obtendrán ocho cartones triangulares equiláteras. A dicho procedimiento se le denomina desarrollo de la superficie del octaedro regular. Sugerimos al lector realizar el proceso inverso para el tetraedro regular, hexaedro regular y el octaedro regular.

Estos procesos se pueden realizar también con el dodecaedro regular y el icosaedro regular.

Dodecaedro regular

Es el poliedro regular limitado por doce caras, las cuales son regiones pentagonales regulares y congruentes entre sí.

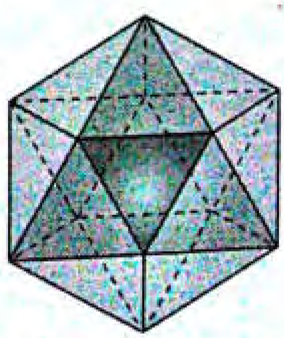
N.º de caras: 12
N.º de aristas: 30
N.º de vértices: 20



Icosaedro regular

Es el poliedro regular limitado por veinte caras, las cuales son regiones triangulares equiláteras congruentes entre sí.

N.º de caras: 20
N.º de aristas: 30
N.º de vértices: 12



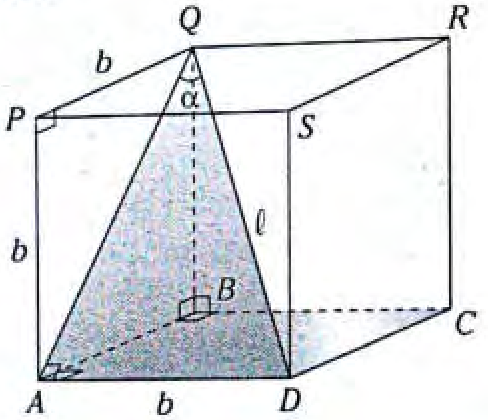
Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Se tiene un cubo de arista a, desde un vértice se traza una de sus diagonales y una de las diagonales de sus caras. Calcule el seno del ángulo que forman dichas diagonales.

UNMSM 2004-I

Resolución



Nos piden senα.

Donde α es la medida del ángulo que forman las diagonales de una cara y del cubo.

$ABCD$-$PQRS$ es un cubo.

Sabemos que por el teorema de las tres perpendiculares

$\overline{QB} \perp \square ABCD$ (1.ª $\perp$)

$\overline{BA} \perp \overline{AD}$ (2.ª $\perp$)

$\rightarrow$ $\overline{AQ} \perp \overline{AD}$ (3.ª $\perp$)

Por la razón seno ($\triangle QAD$)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AD}{QD}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\ell} \qquad \text{(I)}$$

Pero por el teorema del cubo

$$\ell = b\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{b\sqrt{3}}$$

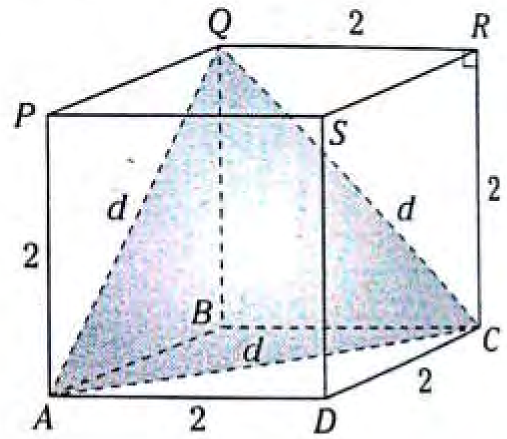
$$\therefore \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problema N.° 2

En un cubo de 2 m de arista, se unen 3 vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.

UNMSM 2009-I

Resolución



Nos piden $\mathbb{A}_{\triangle AQC}$.

Dato: cubo $ABCD$-$PQRS$

$DC=2$

Trazamos $\overline{AQ}$, $\overline{QC}$ y $\overline{AC}$, los cuales son diagonales de los cuadrados $APQB$, $QRCB$ y $ABCD$.

$\rightarrow$ $\triangle AQC$ es equilátero

$$d = (2)\sqrt{2}$$

$$d = 2\sqrt{2}$$

Por fórmula (región triangular equilátera)

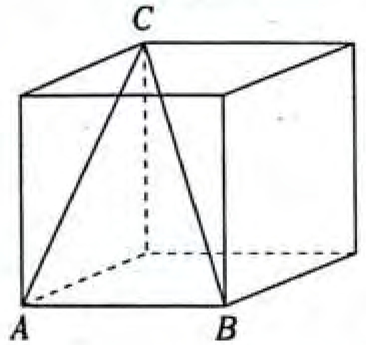
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AQC}=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AQC}=\frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\quad \mathbb{A}_{\blacktriangle AQC}=2\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

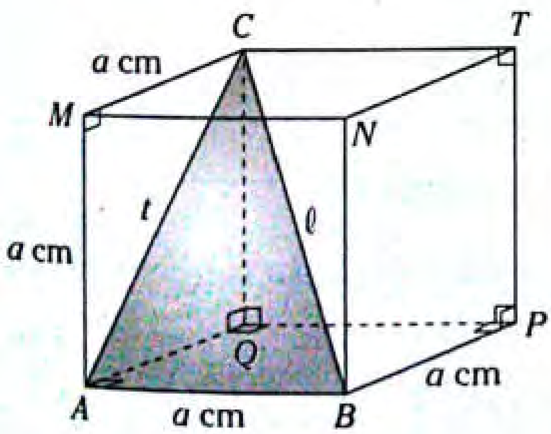
Problema N.° 3

En el gráfico, se tiene un cubo cuya arista mide a cm, donde $\overline{BC}$ es una diagonal y $\overline{AC}$ diagonal de una cara. Calcule el perímetro del triángulo ABC.



UNMSM 2011-II

Resolución



Nos piden $2p_{\blacktriangle ABC}=x$.

donde

$2p_{\blacktriangle ABC}$: perímetro de la región triangular ABC

Dato: $ABPQ$-$MNTC$ es un cubo

Observamos

$$x=t+\ell+a\ \text{cm} \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle AMC$ notable de 45°

$$t=a\sqrt{2}\ \text{cm} \qquad \text{(II)}$$

Por diagonal del cubo

$$\ell=(a\ \text{cm})\sqrt{3} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) y (II) en (I)

$$x=a\sqrt{2}\ \text{cm}+(a\ \text{cm})\sqrt{3}+a\ \text{cm}$$

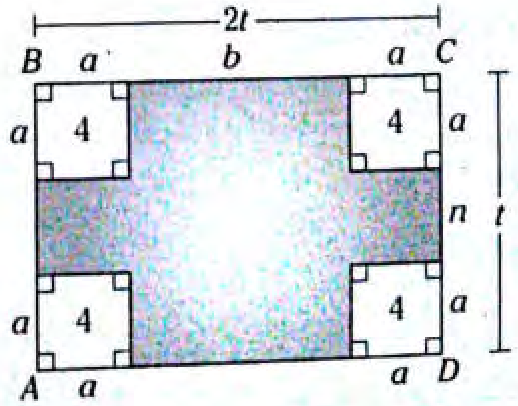
$$\therefore\quad x=a(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\ \text{cm}$$

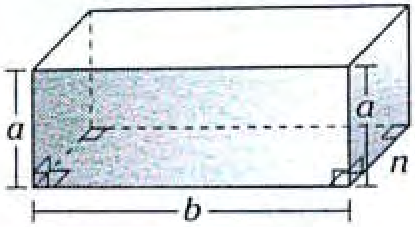
Problema N.° 4

Con una lámina rectangular se construye una caja sin tapa cortando regiones cuadradas de 4 cm^2 de área en cada esquina. Si el perímetro de la lámina es 36 cm y el largo es el doble del ancho, halle el volumen de la caja.

UNMSM 2012-I

Resolución





Nos piden $\mathbb{V}$.

$\mathbb{V}$: volumen de la caja

Dato: Las esquinas son regiones cuadradas de área igual a 4.

$BC=2(CD)$

El perímetro de la lámina es 36 cm.

En la caja

$\mathbb{V}=abn$ (I)

En la lámina (del perímetro)

$2t+t+t+2t=36$

$\rightarrow$ $t=6$

De la región cuadrada

$a^2=4$

$\rightarrow$ $a=2$ (II)

Observamos de la lámina

$BC=a+b+a$

$12=2+b+2$

$\rightarrow$ $b=8$ (III)

También

$CD=a+n+a$

$6=2+n+2$

$\rightarrow$ $n=2$ (IV)

Reemplazamos (IV), (III), (II) en (I)

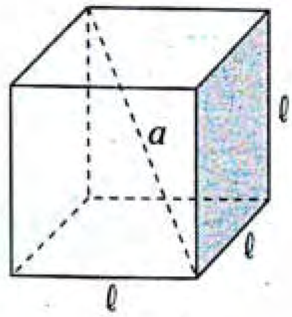
$\mathbb{V}=(2)(8)(2)$

$\therefore$ $\mathbb{V}=32\text{ cm}^3$

Problema N.º 5

En un cubo, cuya diagonal es a, calcule el volumen.

Resolución



Nos piden $\mathbb{V}$.

$\mathbb{V}$: volumen del cubo

Se sabe que

diag.=arista $\sqrt{3}$

$$a=\ell\sqrt{3} \rightarrow \ell=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbb{V}=\ell^3=\frac{a}{\sqrt{3}}\times\frac{a}{\sqrt{3}}\times\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \mathbb{V}=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$

NIVEL BÁSICO

1. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

   I. Si un poliedro tiene 8 vértices y 12 aristas, entonces es un hexaedro regular.

   II. Puede haber un poliedro que tenga 6 caras y 5 vértices.

   III. En todo poliedro convexo se cumple que la cantidad de caras disminuida en uno más la cantidad de vértices disminuida en uno es igual a la cantidad de aristas.

A) FVV
B) VFF
C) FFF
D) VVV
E) FVF

2. Un poliedro está limitado por dos regiones hexagonales, dos regiones triangulares y tres regiones cuadrangulares. Calcule el número de vértices.

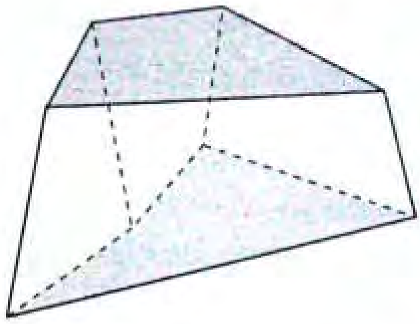
A) 10 B) 12 C) 14
D) 8 E) 16

3. Del gráfico se muestra un poliedro. Calcule $\frac{A+V}{C}$ donde

A: número de aristas

V: número de vértices

C: número de caras



A) $\frac{15}{13}$ B) 2 C) $\frac{10}{3}$
D) 4 E) $\frac{5}{2}$

4. Un poliedro convexo está limitado por 3 regiones triangulares, 4 regiones cuadriláteras y una región pentagonal. Calcule $\frac{A}{V}$ si se sabe que A es el número de aristas y V es el número de vértices de dicho poliedro.

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

5. Un poliedro convexo está limitado por 3 regiones triangulares, 5 regiones cuadriláteras, 1 región hexagonal y 1 región heptagonal. Calcule $A-C$ si A es el número de aristas y C es el número de caras.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

6. Un poliedro está limitado por regiones triangulares y tiene una sola diagonal. Calcule el número de aristas.

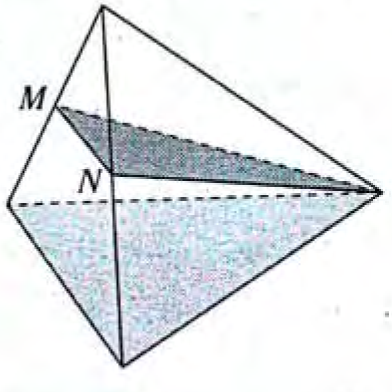
A) 12 B) 9 C) 6
D) 15 E) 18

7. Se tienen dos tetraedros regulares, en que en uno de ellos se cumple que el perímetro y el área de una cara son numéricamente iguales y, en el otro, el área de la superficie total y el volumen son numéricamente iguales. Calcule la razón de sus alturas.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

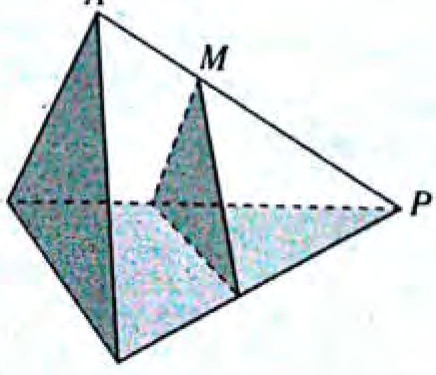
8. En el tetraedro regular mostrado, M y N son puntos medios de las aristas indicadas y el área de la región sombreada es $\sqrt{11}$. Calcule el área de la superficie total del sólido.



A) $9\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{3}$

D) $25\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

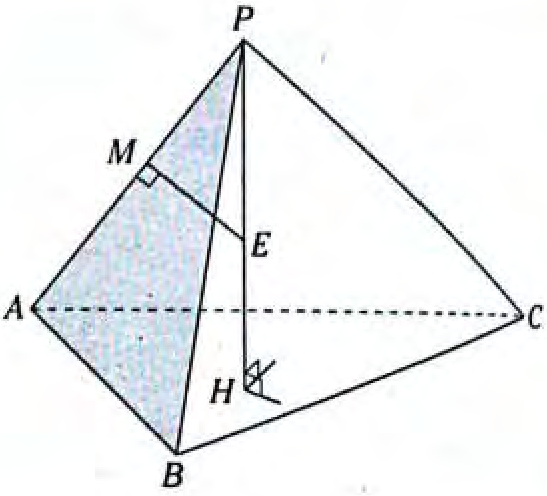
9. En el tetraedro regular mostrado, $MP=2(MA)$, las regiones sombreadas son paralelas y sus áreas se diferencian en $5\sqrt{3}$. Calcule el volumen de dicho tetraedro.



A) $6\sqrt{2}$ B) $9\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $15\sqrt{2}$

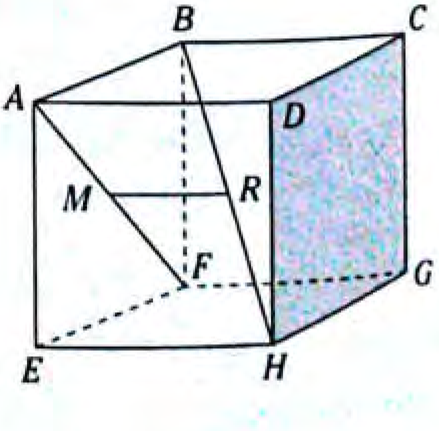
10. En el tetraedro regular P-ABC mostrado, $\overline{PH}$ es altura, $\overleftrightarrow{ME}$ es mediatriz de $\overline{AP}$ y $ME=\sqrt{2}$. Calcule PH.



A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ B) 2 C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

11. En el hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$ mostrado, $\overleftrightarrow{MR}$ es mediatriz de $\overline{AF}$, $MR=3$ y $BR=RH$. Calcule el volumen del hexaedro.



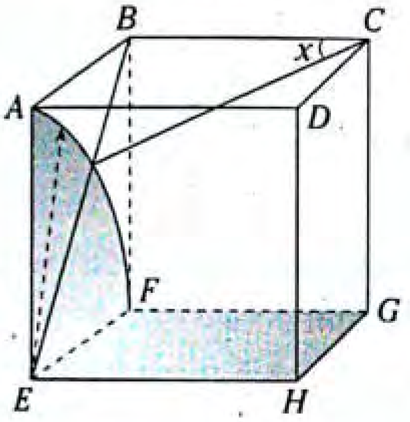
A) 27 B) $9\sqrt{3}$ C) 216

D) $3\sqrt{3}$ E) $27\sqrt{3}$

12. En un hexaedro regular $ABCD$-$PQRS$, O es el centro de la cara $ABCD$. Además se ubica el punto M en $\overline{OS}$, tal que $MS=2(MO)$ y $AM=\sqrt{6}$. Calcule PC.

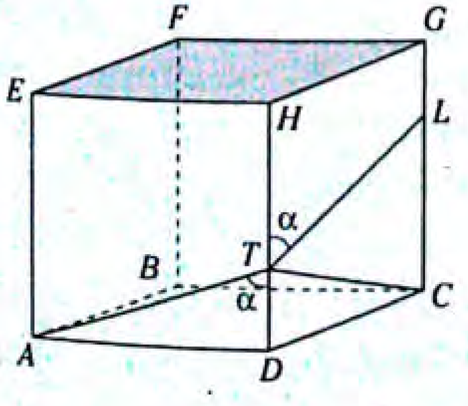
A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

13. En el hexaedro regular $ABCDEFGH$ mostrado, calcule x.



A) $30°$ B) $\frac{53°}{2}$ C) $\frac{37°}{2}$
D) $\frac{45°}{2}$ E) $15°$

14. En el hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$ mostrado, $TC=25$ y $GL=10$. Calcule EC.



A) $12\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{3}$ C) $20\sqrt{3}$
D) $12\sqrt{6}$ E) $24\sqrt{3}$

15. Se tiene el octaedro regular P-$ABCD$-Q, de centro O. En $\overline{PO}$ y en $\overline{CD}$ se ubican sus puntos medios M y R, respectivamente. Si $MR=\sqrt{3}$, calcule su volumen.

A) $6\sqrt{3}$ B) 12 C) $9\sqrt{3}$
D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{32}{3}$

16. En un octaedro regular se ubican los puntos medios M, N y S de las aristas BR, AD y BC, respectivamente. Calcule m$\sphericalangle MNS$.

A) $30°$ B) $45°$ C) $60°$
D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

17. En un octaedro regular R-$ABCD$-T se cumple que el perímetro de la región triangular RDC es numéricamente igual al área de la región $ABCD$. Calcule el área de su superficie.

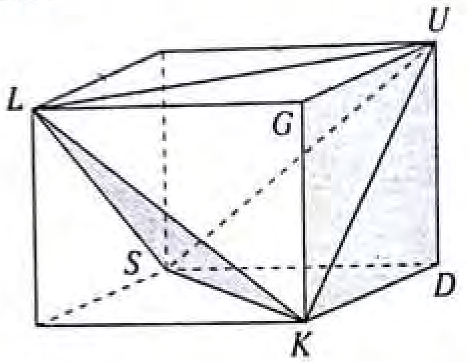
A) $6\sqrt{3}$ B) 27 C) 9
D) $18\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

NIVEL INTERMEDIO

18. Se tiene el octaedro regular M-$PQRS$-N, en la diagonal PR se ubica el punto T. Si la suma de las distancias de T hacia $\overline{MR}$ y $\overline{PS}$ es igual a 6, calcule MN.

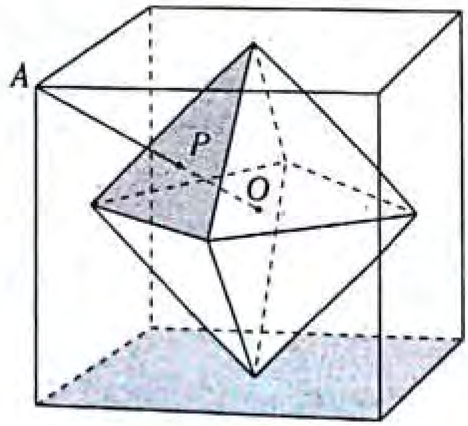
A) 6 B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{2}$

19. En el hexaedro regular mostrado, el perímetro de la región triangular *LSK* es numéricamente igual al área de la región cuadrangular *KDUG*. Calcule la diferencia de volúmenes entre el hexaedro y la pirámide *L-SKU*.



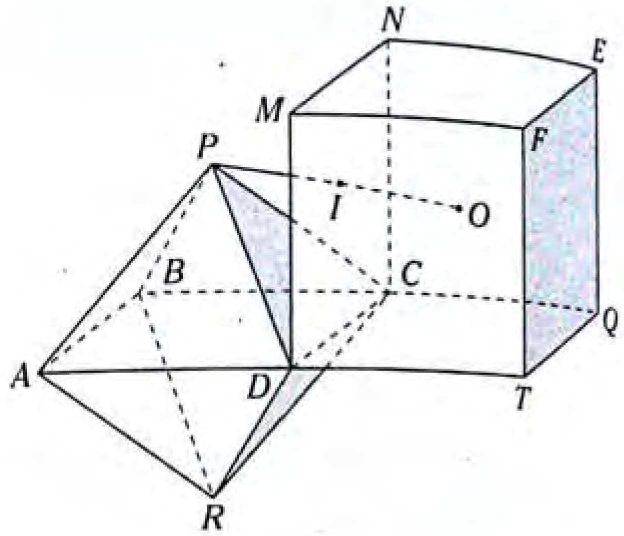
A) $36\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $54\sqrt{2}$
D) 36 E) 18

20. Del gráfico, los vértices del octaedro son los centros de las caras del hexaedro regular. Si *O* es el centro del octaedro y $AP=2\sqrt{2}$, calcule el volumen del hexaedro.



A) 216 B) 125 C) 64
D) $48\sqrt{6}$ E) $64\sqrt{3}$

21. Del gráfico, *O* es el centro del hexaedro regular *MNEF-DCQT* y la arista del octaedro regular mide 2. Calcule *OP*.



A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{7-2\sqrt{2}}$

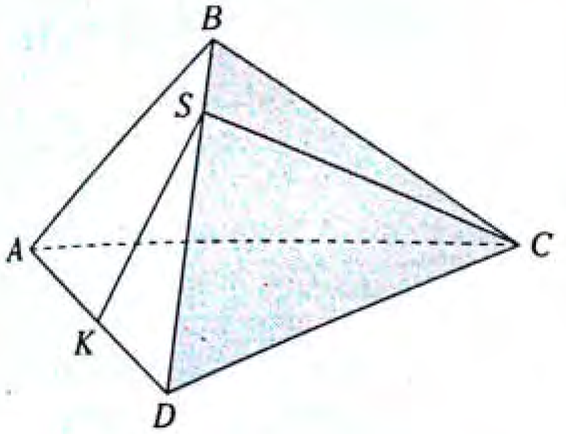
22. En un tetraedro regular *VABC* se traza la mediana *AL* de la cara *AVB*, luego se ubica el punto medio *S* de $\overline{AL}$. Si el área de la superficie total es $36\sqrt{3}$, calcule la distancia de *S* a la cara *ABC*.

A) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

23. En un tetraedro regular *DABC*, se ubican los puntos *L* y *K* en $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, respectivamente, tal que $AL=LC$, $BK=5(DK)$, además se ubica el punto medio *S* de $\overline{LO}$ (*O* es el centro de la cara *ABC*). Si $KS=10\sqrt{3}$, calcule el volumen del tetraedro.

A) $1512\sqrt{2}$ B) $1125\sqrt{2}$ C) $1152\sqrt{2}$
D) $1215\sqrt{2}$ E) $1152\sqrt{3}$

24. En el gráfico se muestra un tetraedro regular, $AK=KD=2$ y la línea KSC es la del menor recorrido. Calcule la longitud de dicha línea.



A) $3\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{5}$ C) 6
D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{6}$

25. En un tetraedro regular $ABCD$, donde una arista mide 16 cm, se ubica el punto medio K de $\overline{AD}$; luego se trazan $\overline{KS}\perp\overline{DC}$, $\overline{SL}\perp\overline{DB}$ ($S\in\overline{DC}$ y $L\in\overline{DB}$). Calcule el área de la región triangular KDL.

A) $4\sqrt{3}$ cm^2 B) $4\sqrt{2}$ cm^2 C) $6\sqrt{2}$ cm^2
D) $4\sqrt{5}$ cm^2 E) $6\sqrt{3}$ cm^2

26. En un hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$ se ubica el punto medio L de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}\cap\overline{LD}=\{K\}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{EK}$ y el plano $EFGH$.

A) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ B) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

C) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

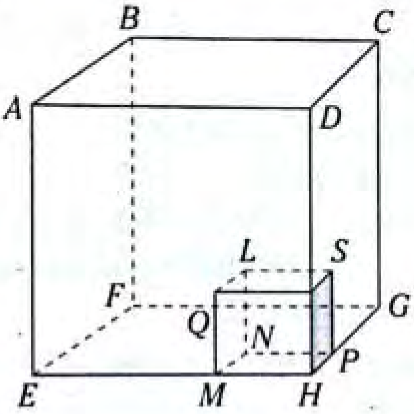
D) 75° E) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

27. En un hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$, se ubica el punto medio K de $\overline{HG}$. Si el área de la superficie total es 120 cm^2, calcule la distancia de G a la región triangular FCK.

A) $\frac{\sqrt{14}}{3}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm

D) $\sqrt{7}$ cm E) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ cm

28. Del gráfico se muestran dos cubos, tal que $EH=3(PH)=6$ cm. Calcule la distancia entre B y L.



A) $4\sqrt{2}$
B) $4\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{3}$ cm
D) $2\sqrt{6}$ cm
E) 9 cm

29. En un hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$ se ubican los puntos S y K en $\overline{AB}$, y en la cara $ABCD$ ($AS=SB$ y K es el centro de $ABCD$). Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{ES}$ y $\overleftrightarrow{GK}$.

A) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

C) 53°

D) 60° E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right)$

Prisma y cilindro

Capítulo XIV

OBJETIVOS

- Identificar las características fundamentales del prisma y del cilindro.
- Reconocer los elementos básicos para calcular la superficie lateral, la superficie total, el volumen del prisma y del cilindro.

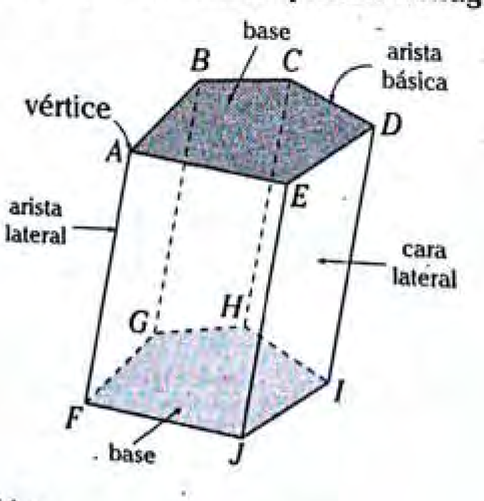
Prisma

Es un poliedro en el cual dos de sus caras son regiones poligonales congruentes paralelas (son las denominadas bases) y las demás caras son regiones paralelográmicas (son las denominadas caras laterales).

Arista lateral. Es el segmento común entre dos caras laterales.

Arista básica. Es el segmento común entre una cara lateral y una base.

Un prisma es nombrado según el número de lados que tenga una base. Por ejemplo, si la base tiene 6 lados, se denomina prisma hexagonal.



Notación:

Prisma pentagonal $ABCDE\text{-}FGHIJ$

Este prisma tiene C=7, V=10 y A=15. Como podemos ver, también cumple el teorema de Euler.

CLASIFICACIÓN

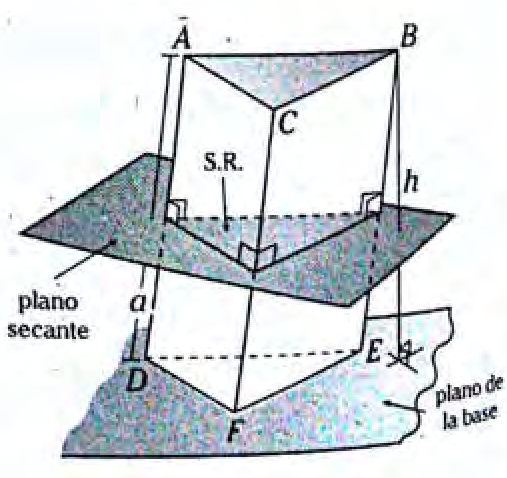
Los prismas se clasifican según la inclinación de su arista lateral con respecto al plano de su base.

Prisma oblicuo

Un prisma es oblicuo cuando sus aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

a. Sección recta (S. R.)

Es aquella sección plana que se determina en el prisma por un plano secante y perpendicular a todas las aristas laterales.



Notación:
Prisma triangular oblicuo $ABC\text{-}DEF$

A continuación se indicará los cálculos que debemos conocer.

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=(2p_{S.R.})\cdot a}$$

$2p_{S.R.}$: perímetro de la sección recta

a: longitud de la arista lateral

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+2(\mathbb{A}_{base})}$$

$\mathbb{A}_{base}$: área de la base

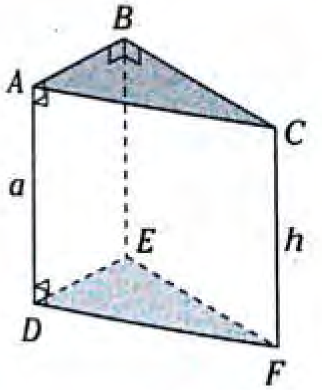
Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V}=(\mathbb{A}_{base})\cdot h}$$

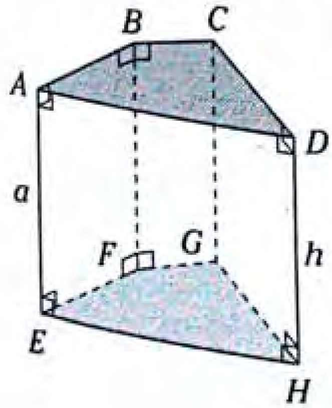
h: altura del prisma

Prisma recto

Un prisma es recto cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Notación: Prisma recto triangular *ABC-DEF*



Notación: Prisma recto cuadrangular *ABCD-EFGH*

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=(2p_{base})\cdot a}$$

$2p_{base}$: perímetro de la base

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+2(\mathbb{A}_{base})}$$

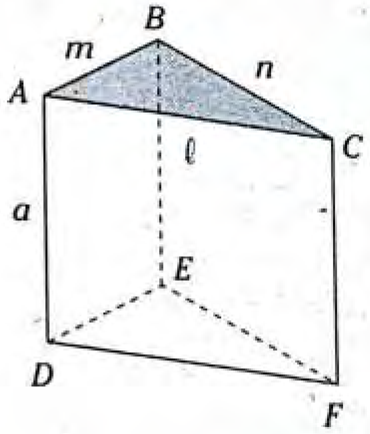
$\mathbb{A}_{base}$: área de la base

Volumen ($\mathbb{V}$)

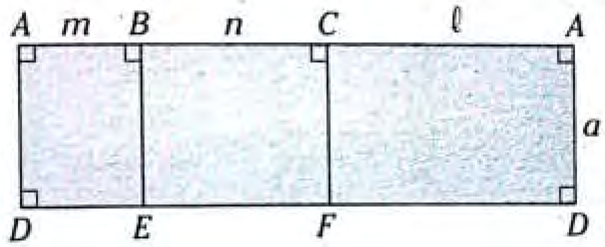
$$\boxed{\mathbb{V}=(\mathbb{A}_{base})\cdot h}$$

h: altura del prisma ($a=h$)

a. Desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto triangular



A continuación se muestra el desarrollo de la superficie lateral.

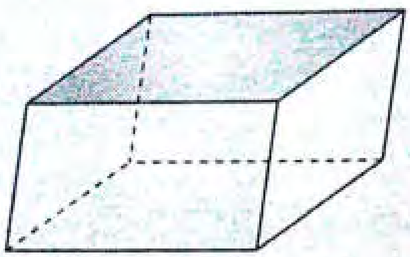


m, n y ℓ pueden ser iguales

NOTA

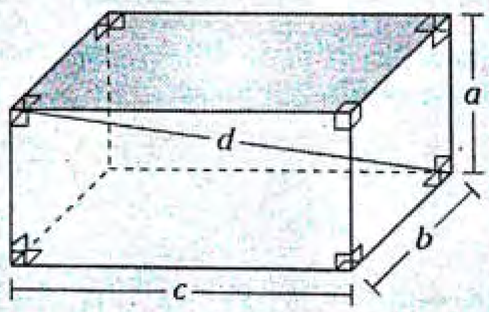
Paralelepípedo

Es aquel prisma cuyas bases son regiones paralelográmicas.



Paralelepípedo rectangular

Es aquel paralelepípedo cuyas caras son regiones rectangulares. También se le denomina rectoedro u ortoedro.



a, b y c son dimensiones del paralelepípedo rectangular; además tiene 4 diagonales, las cuales son congruentes y concurrentes.

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\mathbb{A}_{SL}=2(ab+ac)$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

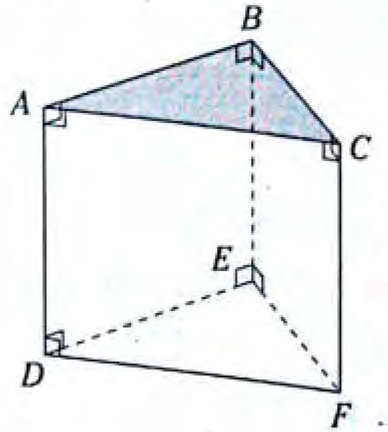
$$\mathbb{A}_{ST}=2(ab+bc+ac)$$

Volumen ($\mathbb{V}$)

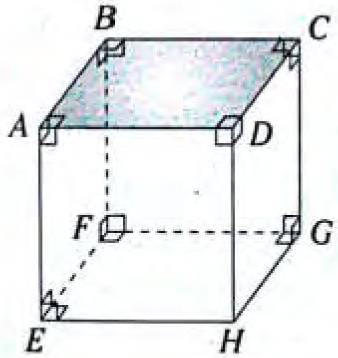
$$\mathbb{V}=abc$$

Prisma regular

Es aquel prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares.

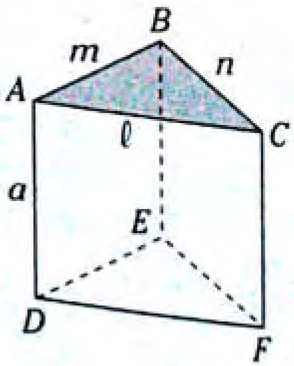


Notación:
Prisma triangular regular *ABC-DEF*

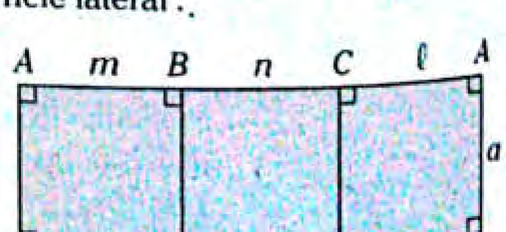


Notación:
Prisma cuadrangular regular *ABCD-EFGH*

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN PRISMA REGULAR TRIANGULAR



A continuación se muestra el desarrollo de la superficie lateral.

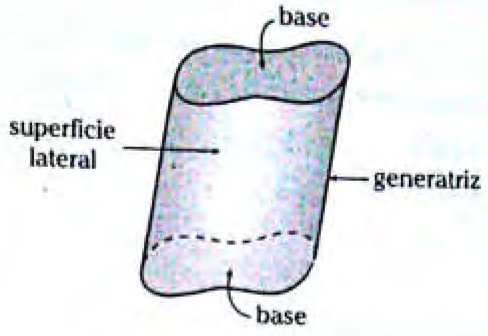


$m=n=\ell$

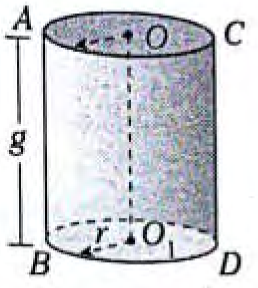
Cilindro

Es aquel sólido geométrico comprendido entre dos planos paralelos entre sí y secante a una superficie curva cerrada denominada superficie lateral y en dichos planos paralelos se determinan secciones planas congruentes, las cuales se denominan bases.

- Las bases son paralelas y congruentes.
- Las generatrices son paralelas y congruentes.



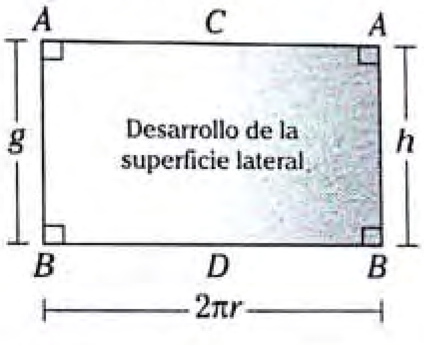
Cilindro circular recto o cilindro de revolución



Sección axial: Sección plana determinada en el cilindro por un plano que contiene a su eje ($\overleftrightarrow{OO_1}$)

Desarrollo de la superficie lateral del cilindro de revolución

Es una región plana limitada por un cuadrilátero equiángulo, cuyos dos lados tienen igual longitud que la circunferencia de una base y los otros dos tienen igual longitud que la generatriz del cilindro.



Área de la superficie lateral: $\boxed{(\mathbb{A}_{SL}): \mathbb{A}_{SL}=2\pi rg}$

Área de la superficie total: $\boxed{(\mathbb{A}_{ST}): \mathbb{A}_{ST}=2\pi r(g+r)}$

Volumen: $\boxed{(\mathbb{V}): \mathbb{V}=\pi r^2 h}$

Nota

El cilindro equilátero es aquel cilindro recto cuya sección axial es una región cuadrada.

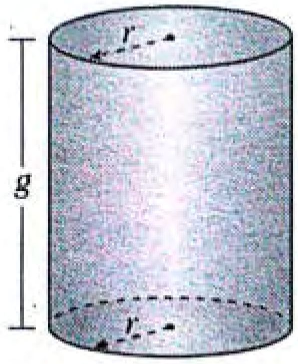
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Si r es el radio de la base de un cilindro, con tapa, de volumen 100 cm^3, el área del material usado en la construcción del envase, expresado en función de r, es

UNMSM 1997

Resolución



Nos piden $\mathbb{A}_{\text{mat}}$: área del material

$$\mathbb{A}_{\text{mat}}=2\pi rg+2\pi r^2 \qquad \text{(I)}$$

Del dato

$$100=\mathbb{V}_{\text{cil}}=\pi r^2 g$$

$$\rightarrow \quad g=\frac{100}{\pi r^2}$$

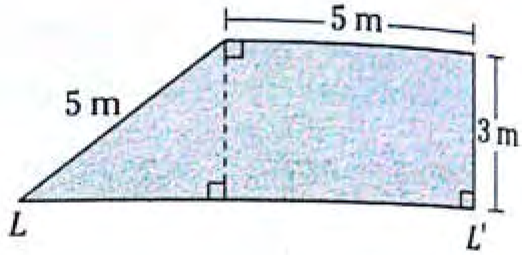
Reemplazando en (I)

$$\mathbb{A}_{\text{mat}}=2\pi r\times\left(\frac{100}{\pi r^2}\right)+2\pi r^2$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\text{mat}}=2\left(\pi r^2+\frac{100}{r}\right)\text{cm}^2$$

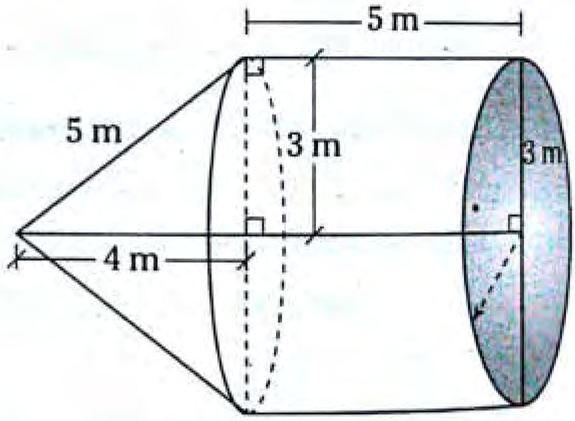
Problema N.º 2

Al rotar la región sombreada un ángulo de 360° alrededor de la recta LL' se obtiene un sólido cuyo volumen es



UNMSM 2000

Resolución



Nos piden $\mathbb{V}_{\substack{\text{sólido}\\ \text{generado}}}=\mathbb{V}_{\text{SG}}$

$$\mathbb{V}_{\text{SG}}=\mathbb{V}_{\text{cono}}+\mathbb{V}_{\text{cilindro}}$$

$$=\pi(3)^2\times\left(\frac{4}{3}\right)+\pi(3)^2\times(5)$$

$$=12\pi+45\pi$$

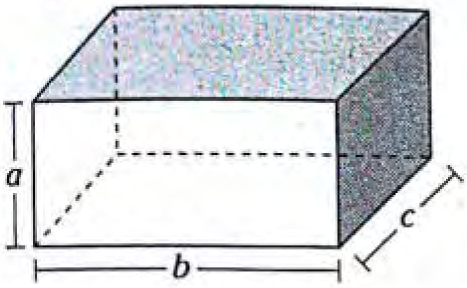
$$\therefore \quad \mathbb{V}_{\text{SG}}=57\pi \text{ m}^3$$

Problema N.° 3

Las dimensiones de un paralelepípedo están en progresión aritmética y suman 24 u. Si el volumen es 440 u^3, calcule la dimensión de mayor longitud.

UNMSM 2006-I

Resolución



Nos piden la dimensión de mayor longitud.

Dato: $a+b+c=24$

$a\cdot b\cdot c=440$

Como las dimensiones están en progresión aritmética

$a=\ell-r$

$b=\ell$

$c=\ell+r$

$\rightarrow\ \ell-r+\ell+\ell+r=24\ \rightarrow\ \ell=8$

Del segundo dato

$(8-r)(8)(8+r)=440$

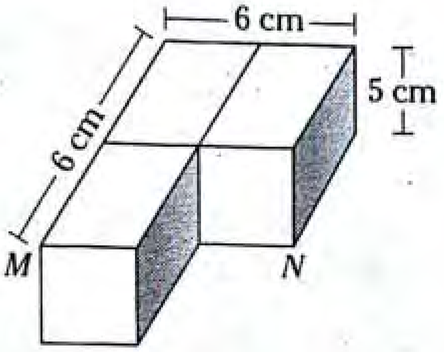
$(8-r)(8+r)=5\times 11\ \rightarrow\ r=3$

Ahora podemos decir que la dimensión de mayor longitud es c.

$\therefore\ c=8+3$

Problema N.° 4

El gráfico muestra un sólido formado por tres paralelepípedos rectos rectangulares idénticos. Si en el vértice M se encuentra una hormiga y en el vértice N su comida, ¿cuál es la longitud del camino más corto que debe recorrer la hormiga para llegar a N?

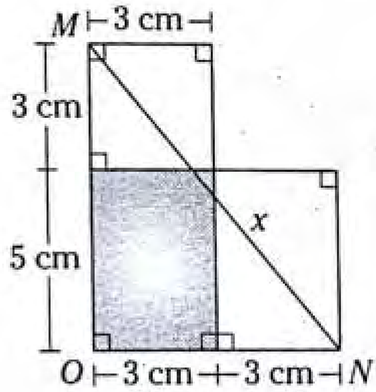


UNMSM 2009-II

Resolución

Nos piden la longitud mínima de M a N.

Para ello realizamos el desarrollo de la superficie (sobre todo la parte del recorrido de M a N).



Del ⊿MON: teorema de Pitágoras

$x^2=6^2+8^2$

$\therefore\ x=10$ cm

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En un prisma recto ABC-DEF, m$\measuredangle ABC=90°$, m$\measuredangle BAC=37°$, la cara $ACFD$ es una región cuadrada y el área de la base es numéricamente igual al triple de la arista lateral. Calcule el área de la superficie lateral.

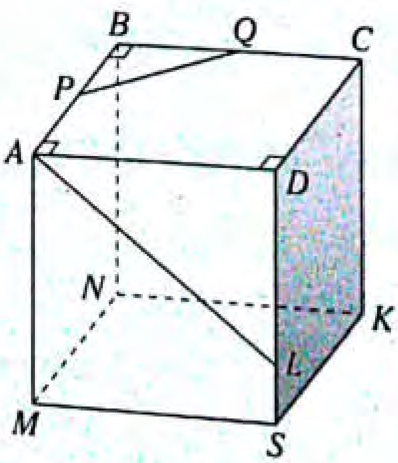
A) 395 B) 375 C) 365
D) 355 E) 345

2. En un prisma recto ABC-DEF se ubica L en $\overline{CF}$, K en $\overline{BE}$ ($EK=2(KB)$) y

$\frac{AB}{3}=\frac{BC}{4}=\frac{CA}{5}=\frac{DA}{6}=1$. Calcule la longitud del mínimo recorrido DLK que pasa por dos caras laterales.

A) $\sqrt{93}$ B) $7\sqrt{2}$ C) $\sqrt{95}$
D) $\sqrt{97}$ E) $3\sqrt{11}$

3. En el prisma recto mostrado, $AB=3$, $AD=4$, $AM=5$, $DL=4(LS)$, $AP=PB$, $BQ=QC$. Calcule la medida del ángulo determinado entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{AL}$.



A) $\arccos\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

B) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$

C) $\arccos\left(\frac{3}{7}\right)$

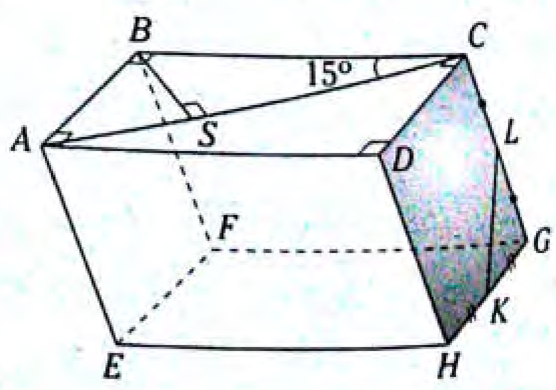
D) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

4. En un prisma recto $ABCDE$-$A'B'C'D'E'$, las bases son regiones pentagonales equiláteras, tal que el área de una cara lateral y el perímetro de una de las bases son numéricamente iguales. Si el área de la base es $\mathbb{A}$, calcule el volumen del prisma.

A) $3\mathbb{A}$ B) $4\mathbb{A}$ C) $5\mathbb{A}$
D) $6\mathbb{A}$ E) $7\mathbb{A}$

5. Se muestra un paralelepípedo, tal que $BS=2{,}5$, $LK=3$ y $AH=8$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{LK}$.



A) 31° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 53°

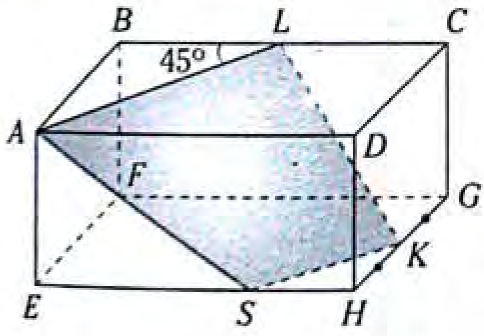
6. En el paralelepípedo $ABCD$-$EFGH$, la proyección ortogonal de A sobre la otra base es su centro O, $m\sphericalangle EAO=45°$, $m\sphericalangle BAD=60°$ y $AB=BC=4$. Calcule el volumen del sólido.

A) 46 B) 48 C) 52
D) 56 E) 60

7. En un paralelepípedo rectangular $ABCD$-$EFGH$ se ubica L en $\overline{EH}$, $AE=3$, $AB=4$, $EH=7$ y $CL=5\sqrt{2}$. Calcule el área de la región triangular LCO donde O es el centro del paralelepípedo.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

8. Se muestra un paralelepípedo rectangular. Si $BL=LC=4$ y $CG=3\sqrt{2}$, calcule el área de la región cuadrilátera $ALKS$.



A) $18\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}$ E) $14\sqrt{2}$

9. En un prisma regular $ABCD$-$EFGH$ se ubican los puntos medios K y L de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, y $3(AE)=\sqrt{23}(AD)$. Calcule la medida del ángulo determinado entre $\overleftrightarrow{KL}$ y $\overleftrightarrow{AH}$.

A) $\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)$

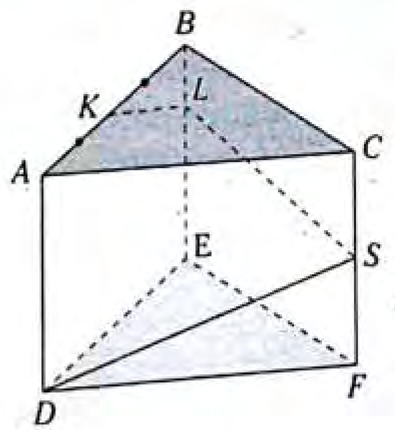
B) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$

C) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

D) $\arccos\left(\dfrac{3}{8}\right)$

E) $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

10. En el prisma regular mostrado, una cara lateral es una región cuadrada, además el área de la superficie lateral es 12 cm^2. Calcule la longitud del mínimo recorrido de la línea $KLSD$.



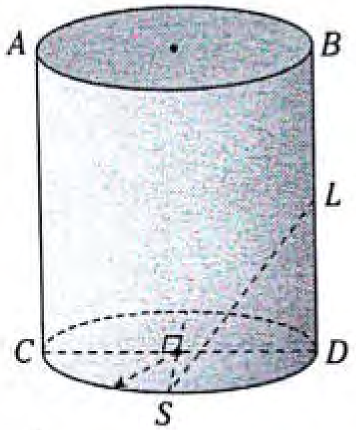
A) 5 B) $\sqrt{26}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{29}$

11. En un prisma regular hexagonal $ABCDEF$-$A'B'C'D'E'F'$, una cara lateral es una región cuadrada cuya área es 4 cm^2. Calcule la distancia entre $\overleftrightarrow{BF'}$ y $\overleftrightarrow{EC'}$.

A) $\sqrt{3}$ cm B) $\sqrt{2}$ cm C) 2 cm
D) 1,5 cm E) $\sqrt{5}$ cm

12. Se muestra un cilindro de revolución, en el que $BL=LD$, la medición del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{LS}$ es 53° y la generatriz mide 8 cm. Calcule el área de la superficie lateral del cilindro.

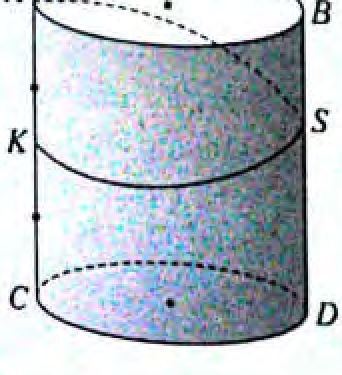
A) $20\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
B) $24\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
C) $24\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^2$
D) $20\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2$
E) $24\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2$



13. Se tienen dos cilindros circulares rectos, en que el radio de uno es igual a la generatriz del otro y la altura del primero es el radio del otro. Si el volumen del primero es el doble del volumen del segundo y los sólidos son equivalentes, calcule la razón entre el radio y la generatriz del primero.

A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 3 E) 3/2

14. Se muestra un cilindro equilátero, en el que $AC=4$. Calcule la longitud del mínimo recorrido de KSA.

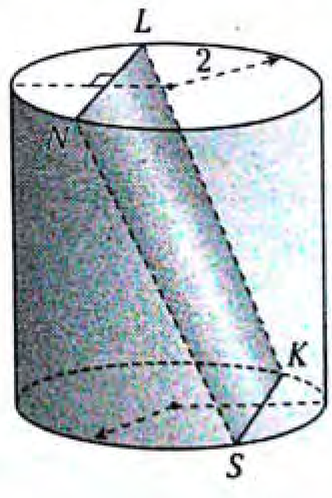


A) $\sqrt{1+4\pi}$
B) $2\sqrt{1+4\pi^2}$
C) $\sqrt{1+4\pi^2}$
D) $4\sqrt{1+2\pi^2}$
E) $2\sqrt{1+2\pi}$

15. Se tiene un cubo y un cilindro equilátero tal que son equivalentes. Calcule la razón de la arista y del radio de la base del cilindro.

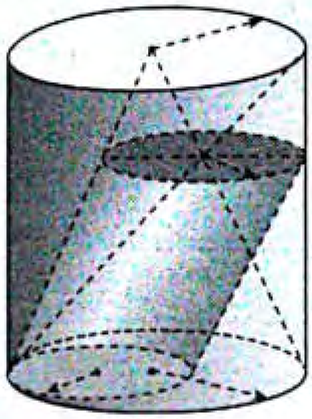
A) $\sqrt[3]{4\pi}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{\pi}$
D) $\sqrt{2\pi}$ E) $\sqrt[3]{2\pi}$

16. Se muestra un cilindro circular recto, en el que $m\overset{\frown}{NL}=120°$, $m\overset{\frown}{KS}=60°$ y la generatriz mide $2(1+\sqrt{3})$. Calcule el área de la región cuadrilátera $NLKS$.



A) $2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$
B) $4(1+\sqrt{3})$
C) $2\sqrt{2}(1+2\sqrt{3})$
D) $2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$
E) $4(3+\sqrt{2})$

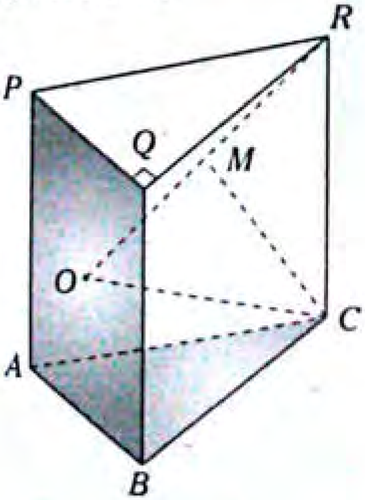
17. Se muestra un cilindro de revolución y un cilindro oblicuo. Calcule la razón de volúmenes de los dos cilindros.



A) 9
B) $\frac{27}{4}$
C) $\frac{27}{2}$
D) $\frac{9}{2}$
E) 6

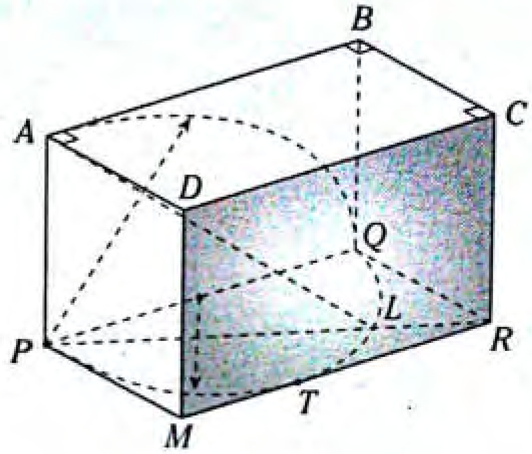
NIVEL INTERMEDIO

18. Del gráfico, $\overline{MC}$ es mediatriz de $\overline{OR}$ y O es el centro de la región cuadrada $PABQ$. Calcule el área de la superficie total del prisma recto ABC-PQR si $OC=4$.



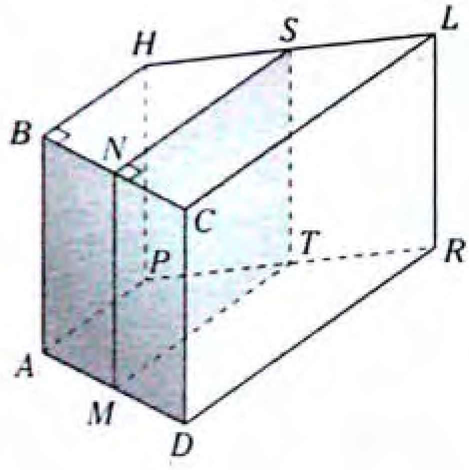
A) $4(2+2\sqrt{2}+3)$
B) $8(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$
C) $4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+8)$
D) $8(2+\sqrt{2}+\sqrt{6})$
E) 64

19. En el prisma cuadrangular recto $ABCD$-$PQRM$, T es punto de tangencia. Si $AL=6$, calcule el área de la superficie lateral de dicho prisma.



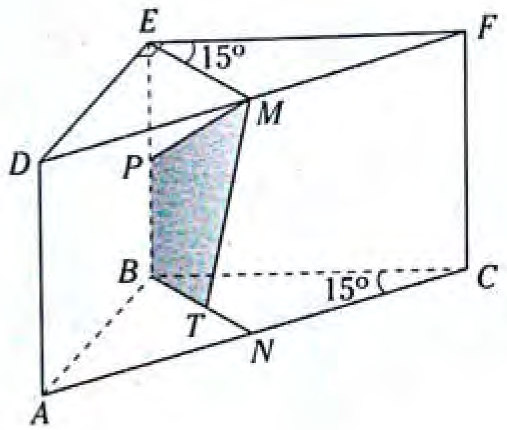
A) 36
B) 29
C) 50
D) 60
E) 40

20. Las regiones cuadradas $ABCD$ y $MNST$ son perpendiculares y de área igual a 36. Calcule el volumen del prisma recto $BHLC$-$APRD$ si $PT=TR$.



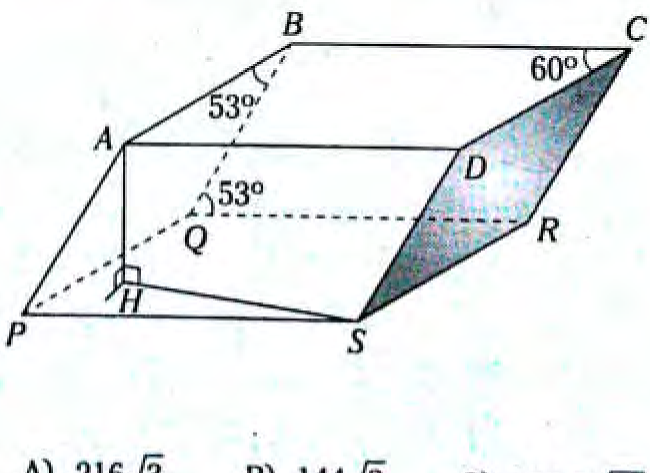
A) 72
B) 36
C) 125
D) 216
E) 108

21. En el prisma recto DEF-ABC mostrado M, N, T y P son puntos medios de $\overline{DF}$, $\overline{AC}$, $\overline{BN}$ y $\overline{EB}$, respectivamente. Si $MP=MT=5$, calcule el volumen del prisma.



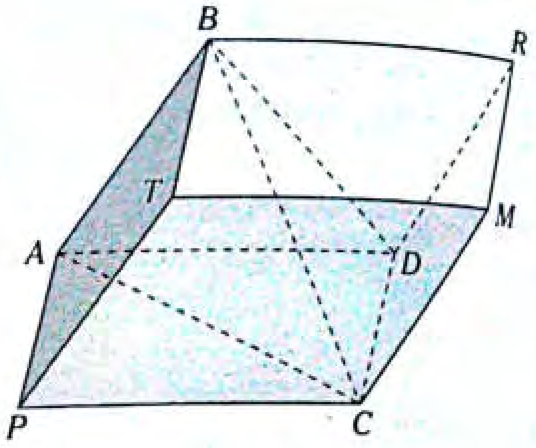
A) $20\sqrt{5}$ B) 40 C) 25
D) 75 E) 55

22. En el paralelepípedo $ABCD$-$PQRS$ mostrado, $AH=\sqrt{39}$, $HS=\sqrt{57}$. Calcule su volumen (H pertenece a la base).



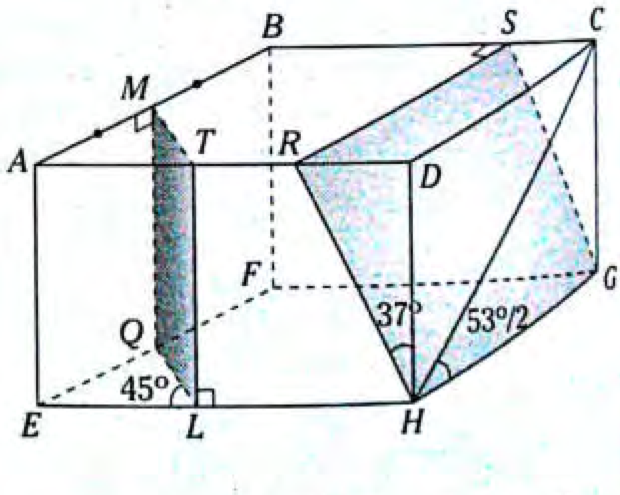
A) $216\sqrt{3}$ B) $144\sqrt{3}$ C) $120{,}5\sqrt{13}$
D) $220{,}5\sqrt{13}$ E) $343\sqrt{3}$

23. Se muestra el paralelepípedo $TBRM$-$PADC$. Si el volumen del tetraedro regular B-ACD es 4, calcule el volumen del paralelepípedo.



A) 8 B) 12 C) 10
D) $4\sqrt{3}$ E) 24

24. Sea el paralelepípedo rectangular $ABCD$-$EFGH$ cuyo volumen es 320 y $TR=RD$. Calcule el volumen del poliedro $MTRSB$-$QLHGF$ mostrado.

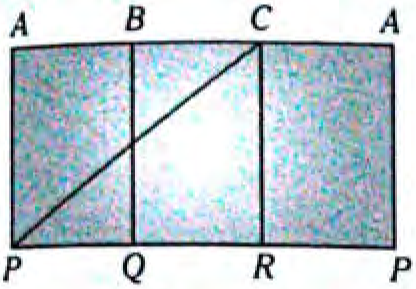


A) 240 B) 280 C) 144
D) 160 E) 204

25. En un paralelepípedo rectangular $ABCD$-$MNLR$, la distancia entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{NR}$ es el doble de la distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CL}$. La medida angular determinada por $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{MR}$ es 45° y $AL=2\sqrt{6}$. Calcule su volumen.

A) 125 B) 64 C) 16
D) $6\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{3}$

26. En un prisma regular ABC-PQR, $AP=6\sqrt{3}$. En el desarrollo de su superficie lateral mostrada $PC=6\sqrt{19}$. Calcule el área de dicha superficie.



A) $125\sqrt{3}$ B) $100\sqrt{3}$ C) $81\sqrt{3}$
D) $121\sqrt{3}$ E) $216\sqrt{3}$

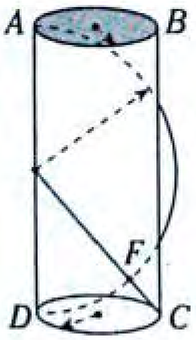
27. En un prisma regular $ABCD$-$EFGH$, la distancia de F hacia $\overleftrightarrow{BH}$ es 2,4 y $AG=5$. Calcule el volumen del prisma.

A) 18 B) 27 C) 32
D) 24 E) 28

28. En un prisma regular $ABCD$-$EFGH$, la distancia de E hacia los puntos medios de $\overline{AG}$ y $\overline{CG}$ son $2\sqrt{10}$ y $2\sqrt{13}$, respectivamente. Calcule su volumen.

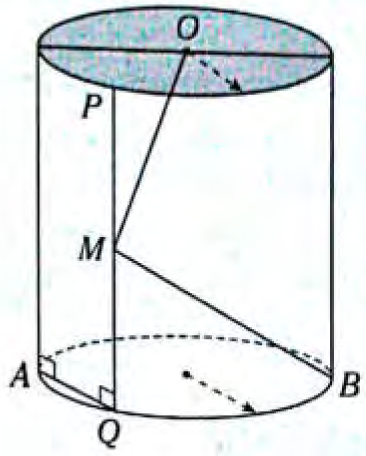
A) 144 B) 96 C) 125
D) 216 E) 104

29. En el cilindro circular mostrado, $DC=3$ y $BC-FC=7$. Calcule el área de la superficie lateral del cilindro.



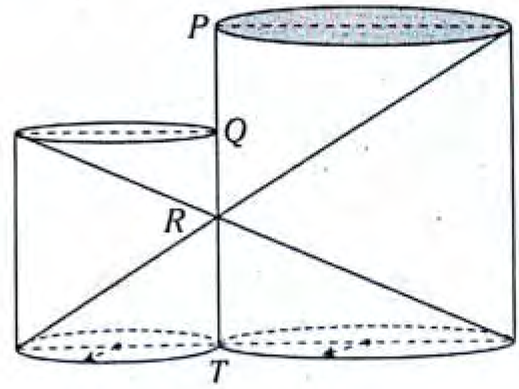
A) 7π B) 8π C) 6π
D) 12π E) 10π

30. En el cilindro equilátero mostrado, $PM=MQ$, $BM^2-OM^2=18$ y $m\widehat{AQ}=60°$. Calcule el área de la superficie total.



A) 54π B) 36π C) 16π
D) 48π E) 25π

31. Sean $PQ=5$ y $RT=6$. Calcule la razón de volúmenes de los cilindros de revolución mostrados.



A) $\dfrac{75}{216}$ B) $\dfrac{25}{36}$ C) $\dfrac{27}{125}$
D) $\dfrac{125}{216}$ E) $\dfrac{8}{27}$

Pirámide y cono

Capítulo XV

Objetivos

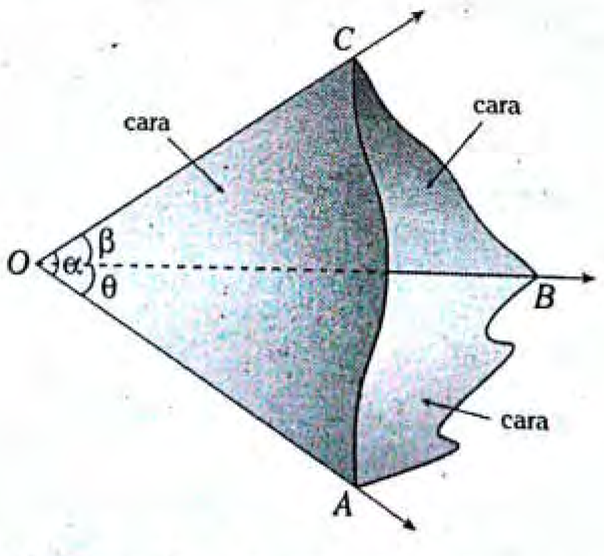
- Estudiar la construcción y forma de las pirámides y los conos.
- Reconocer los elementos y la relación entre ellos, así como también su clasificación según las características de estos elementos.
- Identificar la similitud entre estos dos sólidos geométricos, tanto para calcular su volumen como para calcular el área de la superficie que los limita.

Ángulo poliedro

Es aquella figura geométrica formada por tres o más regiones angulares (si tomamos dos regiones adyacentes no deben ser coplanares), que tienen el vértice en común y comparte un lado de dos en dos.

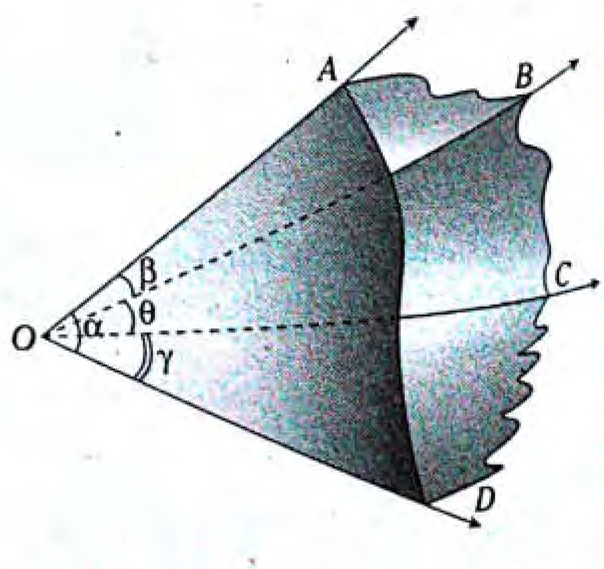
Los nombres de los ángulos poliedros se debe a las cantidades de regiones angulares, las cuales se denominan caras del ángulo poliedro.

Gráficamente



Notación: Ángulo triedro O-ABC

α, β y θ: medidas de las caras

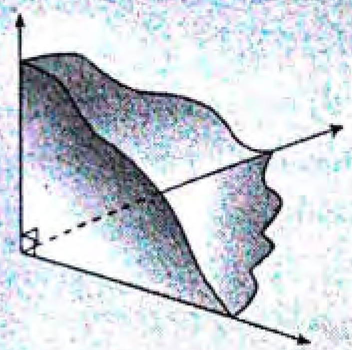


Notación: Ángulo tetraedro O-$ABCD$

α, β, θ y γ: medidas de las caras

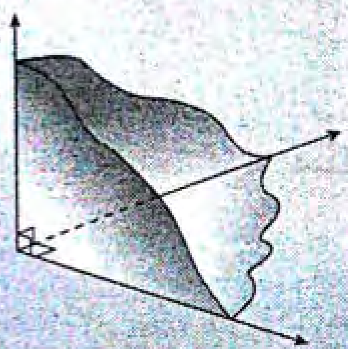
NOTA

- Triedro birrectángulo



Cuando solo dos caras miden 90°.

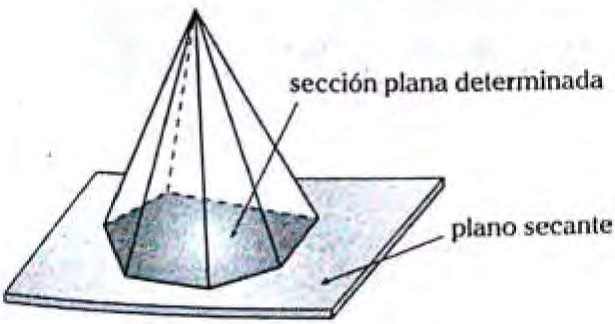
- Triedro trirrectángulo



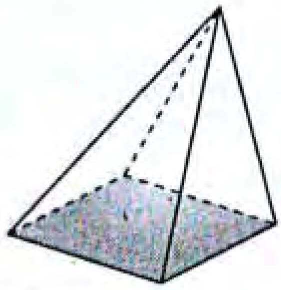
Cuando sus tres caras miden 90°.

Pirámide

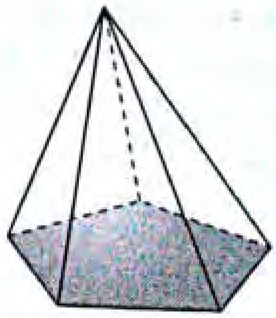
Es aquel poliedro que se determina cuando un ángulo poliedro es intersecado por un plano secante a sus aristas.



A una pirámide se le nombra de acuerdo a la sección plana determinada, a la cual se le llama base de la pirámide.

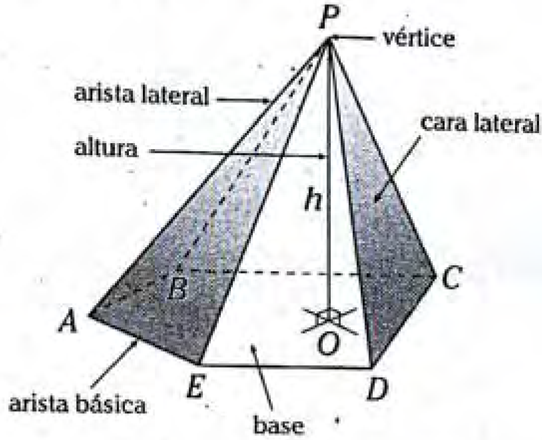


Pirámide cuadrangular



Pirámide pentagonal

Elementos de una pirámide



NOTA

Una de las características de las pirámides es que no tienen diagonales.

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\mathbb{A}_{SL} = \text{suma de las áreas de las caras laterales}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\mathbb{A}_{ST} = \mathbb{A}_{SL} + \mathbb{A}_{base}$$

$\mathbb{A}_{base}$: área de la base

Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V} = \frac{(\mathbb{A}_{base}) \cdot h}{3}$$

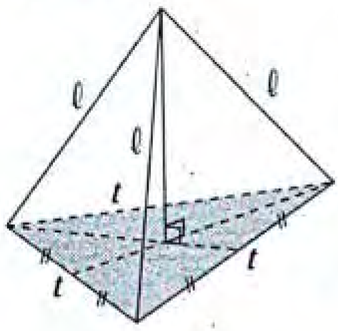
h: longitud de la altura

PIRÁMIDE REGULAR

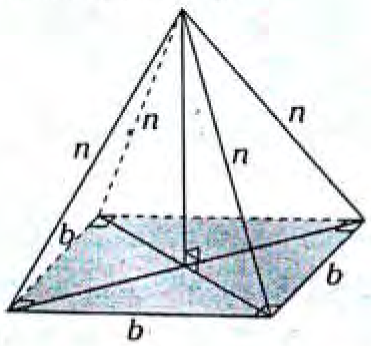
Es aquella pirámide cuya base está limitada por un polígono regular (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, etc.), además, todas sus aristas laterales son de igual longitud.

Ejemplos

Pirámide triangular regular

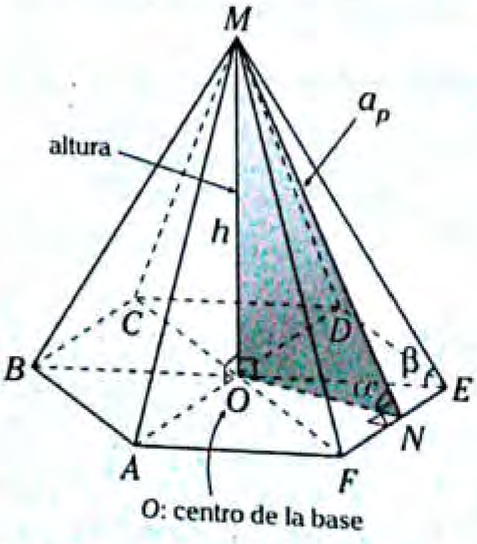


Pirámide cuadrangular regular



En la siguiente figura se muestra una pirámide hexagonal regular M-$ABCDEF$.

Por medio de ella reconoceremos los elementos de las pirámides regulares.



- a_p: longitud del apotema de la pirámide $(MN=a_p)$
- ON: longitud del apotema del polígono regular $ABCDEF$.
- O: centro de la base de la pirámide.
- $\overline{MO}$: altura de la pirámide, O es el pie de dicha altura.
- α: medida del diedro formado por una cara lateral con la base.
- β: medida del ángulo formado por una arista lateral con la base.

⊿MON: aplicando el teorema de Pitágoras

$$\boxed{(a_p)^2=(ON)^2+h^2}$$

h: longitud de la altura de la pirámide

> **NOTA**
>
> **Apotema de la pirámide regular (a_p)**
> Es la perpendicular trazada desde el vértice de la pirámide hacia una arista básica.

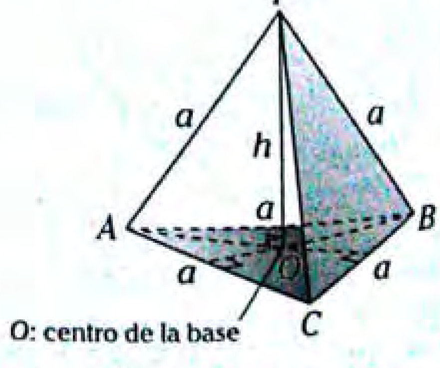
Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=p(a_p)}$$

p: semiperímetro de la base

TETRAEDRO REGULAR

Es aquella pirámide regular cuyas cuatro caras son regiones triangulares equiláteras.



Notación: Tetraedro regular P-ABC

Cálculo de la longitud de su altura

$$\boxed{h=\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=a\sqrt{3}}$$

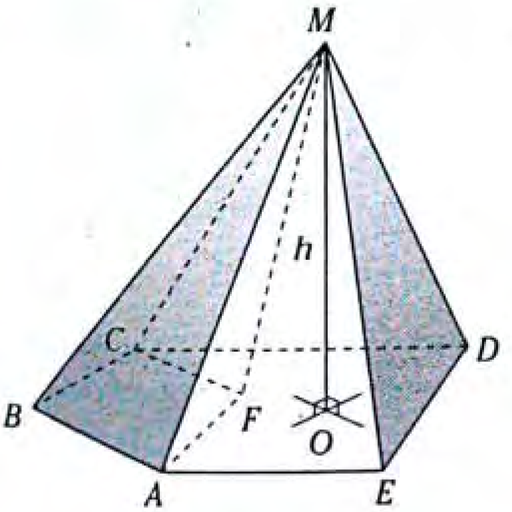
Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

a: longitud de la arista

Pirámide irregular

Es aquella pirámide que no tiene todas las características de una pirámide regular.

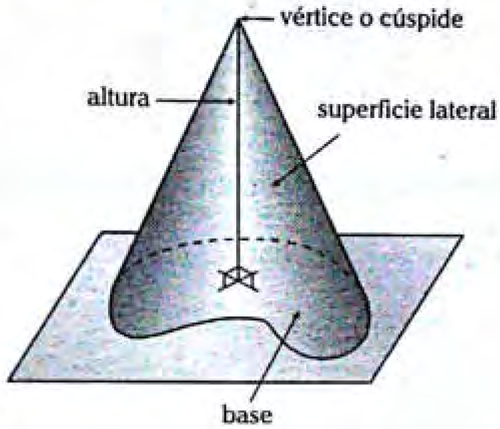


En el gráfico se muestran las siguientes pirámides irregulares:

- Pirámide pentagonal M-$ABCDE$
- Pirámide cuadrangular M-$ABCF$
- Pirámide pentagonal M-$AFCDE$

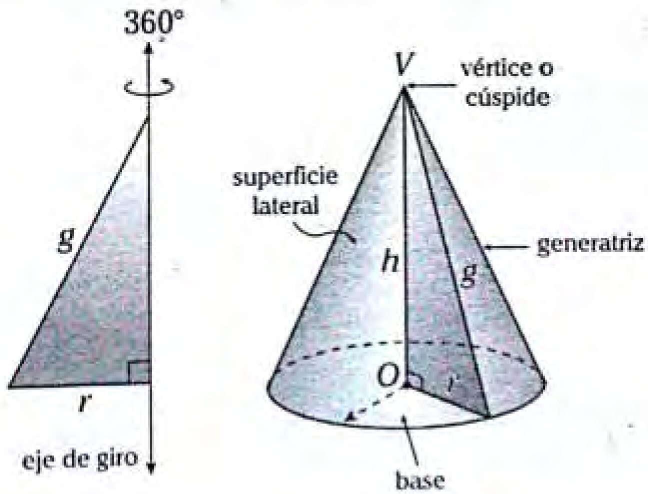
Cono

El estudio sistemático de las pirámides, el conocimiento de la circunferencia y algunas otras líneas curvas han conllevado a obtener y estudiar otras figuras, entre las cuales destaca el cono, el cual es muy parecido a una pirámide, con la diferencia de que su base es una región curva en lugar de una región poligonal.



Cono de revolución o cono circular recto

Es aquel sólido geométrico generado por una región triangular rectangular al girar 360° en torno a uno de sus catetos.

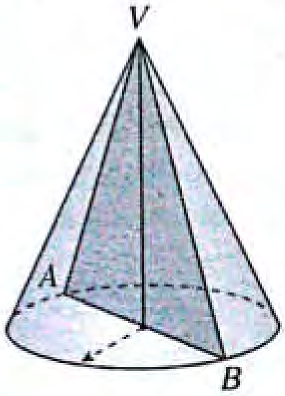


Elementos

- O: centro de la base del cono
- r: radio de la base
- $\overleftrightarrow{OV}$: eje

Sección axial

Es la región triangular que tiene como lados a dos generatrices diametralmente opuestas.



$\triangle AVB$: sección axial del cono de revolución

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=\pi rg}$$

g: longitud de la generatriz

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+\mathbb{A}_{base}}$$

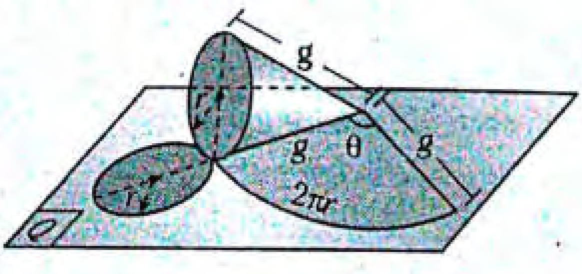
$\mathbb{A}_{base}$: área de la base

Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\boxed{\mathbb{V}=\left(\frac{\pi r^2}{3}\right)\cdot h}$$

h: longitud de la altura de la pirámide

Desarrollo de la superficie de un cono de revolución



La superficie lateral es equivalente con su respectivo desarrollo, el cual es un sector circular cuyo centro es el vértice del cono y tiene por radio a la generatriz.

$$\mathbb{A}_{SL}=\mathbb{A}_{sector}$$

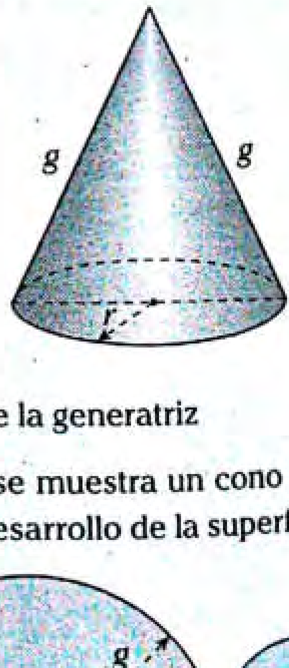
$$\rightarrow \quad \pi rg=\frac{\theta\pi g^2}{360°}$$

Ángulo de desarrollo de la superficie lateral

$$\boxed{\theta=\left(\frac{r}{g}\right)\cdot 360°}$$

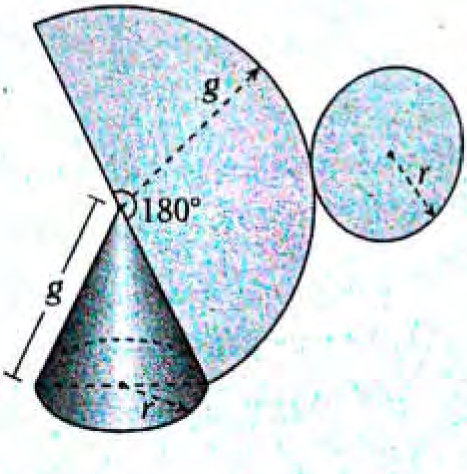
Cono equilátero

Es aquel cono de revolución cuyas generatrices tienen longitudes iguales a las del diámetro de la base ($g=2r$).



g: longitud de la generatriz

En la figura se muestra un cono equilátero y el respectivo desarrollo de la superficie.

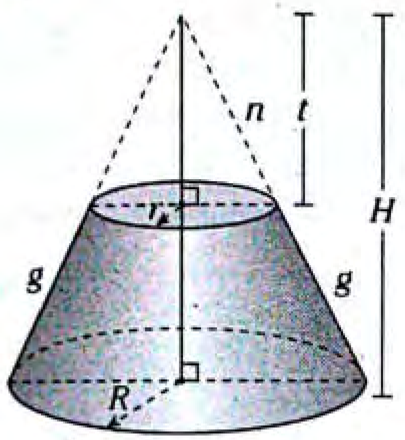


Tronco de cono de revolución

Es la porción de un cono de revolución determinada por dos planos paralelos y perpendiculares a su eje.

Todo tronco de cono de revolución tiene dos bases circulares.

El cálculo del área de la superficie lateral, total y el volumen depende del tipo de información que se tenga.



Área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{SL}=\pi R(g+n)-\pi rn$$

$$\mathbb{A}_{SL}=\pi Rg+\pi(R-r)n \qquad \text{(I)}$$

Por semejanza de triángulos (~△)

$$\frac{n}{n+g}=\frac{r}{R}$$

$\rightarrow$ $n(R-r)=gr$

En (I)

$$\mathbb{A}_{SL}=\pi Rg+\pi rg$$

Área de la superficie total

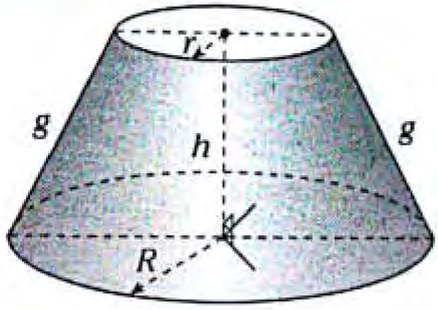
$$\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+\mathbb{A}_{\text{base }1}+\mathbb{A}_{\text{base }2}$$

Volumen

$$\mathbb{V}=\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi r^2 t$$

Por semejanza de triángulos (~△)

$$\frac{r}{R}=\frac{n}{n+g}=\frac{t}{H} \quad \text{y} \quad h=H-n$$



En resumen:

Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SL}=\pi(R+r)g}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{ST}=\mathbb{A}_{SL}+\pi r^2+\pi R^2}$$

Volumen ($\mathbb{V}$)

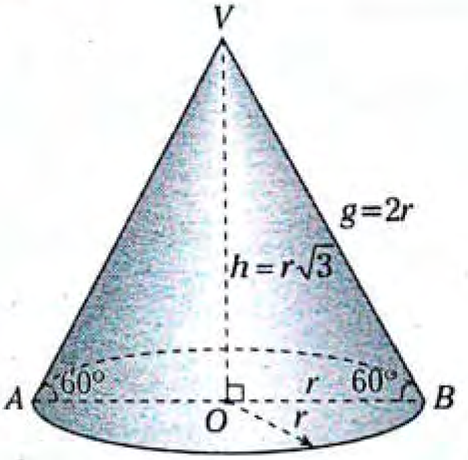
$$\boxed{\mathbb{V}=\frac{h}{3}\pi\left(r^2+R^2+Rr\right)}$$

Problema N.° 1

Calcule el volumen de un cono circular recto cuya área lateral es 96π cm^2, sabiendo que el ángulo que forma la generatriz con su base es 60°.

UNMSM 2003

Resolución



Nos piden $\mathbb{V}_{cono}$,

Donde: $\mathbb{V}_{cono}$ es el volumen del cono

Datos: m∢VBA=60° y $\mathbb{A}_{SL}=96\pi$ cm^2

De la fórmula del volumen del cono

$$\mathbb{V}_{cono}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Del dato

$$\mathbb{V}_{cono}=\frac{1}{3}\pi r^2(r\sqrt{3})=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^3 \qquad \text{(I)}$$

De la fórmula del área de la superficie lateral

$$\mathbb{A}_{SL}=\pi rg$$

$$\mathbb{A}_{SL}=\pi r(2r)$$

$$\mathbb{A}_{SL}=2\pi r^2$$

Pero del dato, $\mathbb{A}_{SL}=96\pi$

$$\rightarrow \quad 2\pi r^2=96\pi$$

$$r=4\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$\mathbb{V}_{cono}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}(4\sqrt{3})^3$$

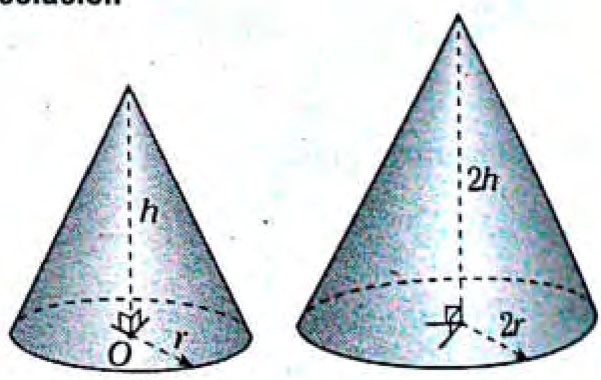
$$\therefore \quad \mathbb{V}_{cono}=192\pi \text{ cm}^3$$

Problema N.° 2

Si se duplica, simultáneamente, la medida del radio de la base y la altura de un cono de revolución de volumen $\mathbb{V}$, entonces el nuevo volumen es

UNMSM 2007-I

Resolución



Cono 1 Cono 2

Nos piden $\mathbb{V}_x$.

Donde: $\mathbb{V}_x$ es el es el volumen del cono 2.

Dato: $\mathbb{V}$ es el volumen del cono 1.

El cono 2 tiene el doble de radio y altura respecto al cono 1.

En el cono 2

$$\mathbb{V}_x=\frac{1}{3}\pi(2r)^2\,2h \qquad \text{(I)}$$

En el cono 1

$$\mathbb{V}=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{(II)}$$

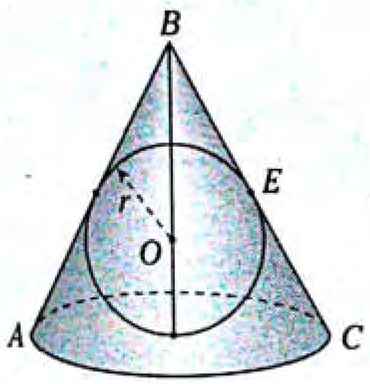
Reemplazamos (I) en (II)

$$\frac{\mathbb{V}_x}{\mathbb{V}}=\frac{\frac{1}{3}\pi(2r)^2\,2h}{\frac{1}{3}\pi r^2h} \rightarrow \frac{\mathbb{V}_x}{\mathbb{V}}=8$$

$\therefore\ \mathbb{V}_x=8\mathbb{V}$

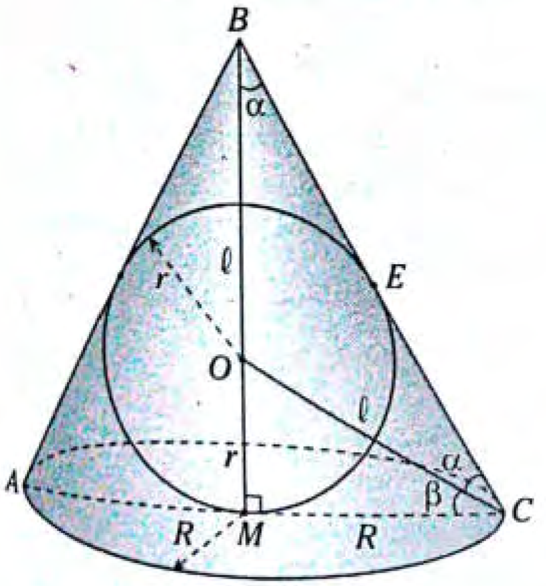
Problema N.° 3

En el gráfico se tiene una esfera inscrita en el cono de revolución cuyo volumen es 81π cm^3 y $BO=OC$. Halle el radio r de la esfera.



UNMSM 2010-I

Resolución



Nos piden r.

Dato: $BO=OC$

$$\mathbb{V}_{\text{cono}}=81\pi\ \text{cm}^3$$

De la fórmula del volumen del cono

$$\mathbb{V}_{\text{cono}}=\frac{1}{3}\pi R^2(\ell+r) \qquad \text{(I)}$$

En el $\triangle BMC$

$$\alpha+\alpha+\beta=90°$$

Por teorema, en la circunferencia

$$\alpha=\beta$$

$$3\alpha=90°$$

$$\rightarrow\ \alpha=30°$$

En el $\triangle OMC$: notable de 30° y 60°

$$MC=OM\sqrt{3}$$

$$\rightarrow\ R=r\sqrt{3}\ \text{ y }\ OC=2(OM)$$

$$\rightarrow\ \ell=2r \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I) y con el dato del volumen

$$81\cancel{\pi}=\frac{1}{3}\cancel{\pi}\left(r\sqrt{3}\right)^2(2r+r)$$

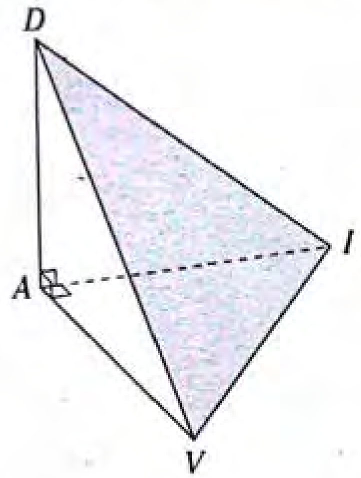
$$81=\frac{1}{3}(3)(r)^2(3r)$$

$\therefore\ r=3$ cm

Problemas Propuestos

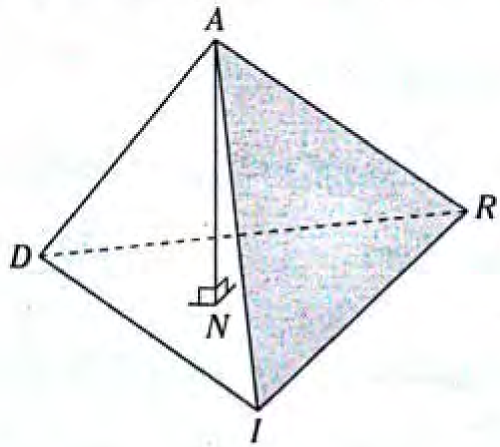
NIVEL BÁSICO

1. En la pirámide mostrada, $DI = 3\sqrt{2}$ y $DV = VI = 5$. Calcule su volumen.



A) 6 B) 9 C) 12
D) 10 E) 15

2. Del gráfico, en la pirámide A-DRI mostrada, $\overline{AN}$ es la altura, $NI=4$, $ND=NA=3$, $NR=5$ y N es baricentro de la base. Calcule el volumen de la pirámide.

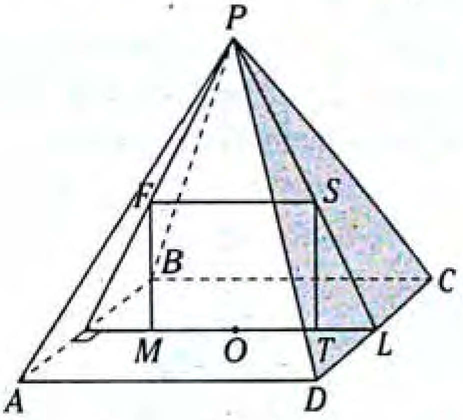


A) 15 B) 12 C) 18
D) 20 E) 24

3. En una pirámide A-NCR, la arista AR es perpendicular a la base, $m\sphericalangle ANR = 37°$, $m\sphericalangle ANC = 53°$ y $m\sphericalangle ACN = 45°$. Si $AN = 5$, calcule el volumen de dicha pirámide.

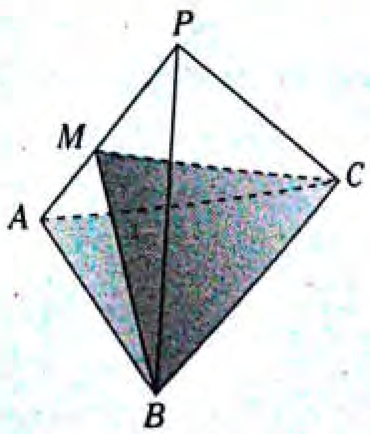
A) $6\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$
D) $\dfrac{7\sqrt{7}}{2}$ E) $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

4. Del gráfico, la pirámide regular P-$ABCD$, $MFST$ es un cuadrado, $FS=8$ y $LT=4$. Calcule el área de la superficie lateral de dicha pirámide. (O es centro de la base).



A) $132\sqrt{5}$ B) $265\sqrt{5}$ C) $256\sqrt{5}$
D) $216\sqrt{5}$ E) $128\sqrt{5}$

5. Del gráfico, P-ABC es una pirámide regular. Si la región triangular MBC es equivalente a la base, $AM=2$ y $MP=4$, calcule el apotema de dicha pirámide.



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\sqrt{33}$ E) $4\sqrt{3}$

6. En una pirámide regular P-$ABCD$ se traza una semicircunferencia de diámetro AC, la cual interseca a $\overline{BP}$ en el punto M. Si $BM=4$ y $PM=6$, calcule el área de la superficie lateral de dicha pirámide.

A) 144 B) 125 C) 140
D) $120\sqrt{2}$ E) 120

7. Se tiene una pirámide hexagonal regular P-$ABCDEF$, a la que se le traza la altura PH. En $\overline{PH}$ se ubica el punto R, tal que la distancia de R hacia el centro de la base y hacia el vértice de la base son 15 y 25, respectivamente. Calcule el área de la base.

A) $600\sqrt{3}$ B) 600 C) 200
D) $600\sqrt{2}$ E) $36\sqrt{3}$

8. En una pirámide regular P-ABC se traza la altura PH, con diámetro HC, luego se construye una semicircunferencia que interseca a $\overline{PC}$ en el punto T. Si $PT=5$ y $BC=6\sqrt{3}$, calcule el volumen de dicha pirámide.

A) $3\sqrt{10}$ B) $4\sqrt{10}$ C) 27
D) $27\sqrt{15}$ E) $27\sqrt{5}$

9. En una pirámide regular P-ABC, el área de la superficie lateral es $\mathbb{S}$, la distancia del centro de la base hacia una cara lateral es d. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $\dfrac{\mathbb{S}d}{6}$ B) $\dfrac{\mathbb{S}d}{3}$ C) $\mathbb{S}d$
D) $\dfrac{\mathbb{S}d}{2}$ E) $\dfrac{\mathbb{S}d}{9}$

10. Las aristas de una pirámide triangular regular miden 6 y 4. Calcule el menor volumen de dicha pirámide.

A) $\dfrac{8\sqrt{23}}{3}$ B) $\dfrac{40}{3}$ C) $6\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

11. Las aristas de una pirámide regular cuadrangular toman valores enteros y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 16 cm. Si la altura de la pirámide es mayor que 2 cm, calcule el área de la base de dicha pirámide.

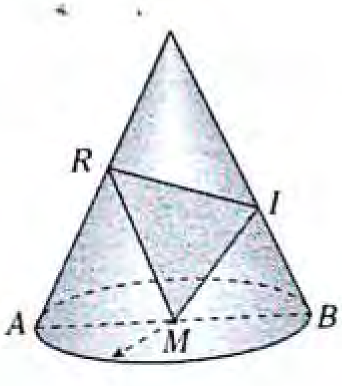
A) 4 cm^2 B) 5 cm^2 C) 1 cm^2
D) 3 cm^2 E) 2 cm^2

12. Se tienen dos pirámides regulares cuadrangulares donde la arista básica de una y la arista lateral de la otra miden 4 u; además, la arista lateral de la primera y la arista básica de la segunda miden 3 u. Calcule la razón de sus volúmenes.

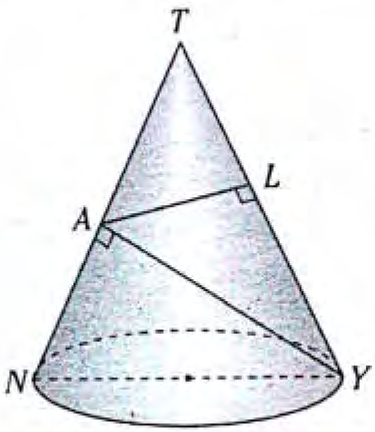
A) $\dfrac{9}{32}\sqrt{23}$ B) $\dfrac{\sqrt{46}}{4}$ C) $\dfrac{3\sqrt{46}}{16}$
D) $\dfrac{9\sqrt{46}}{32}$ E) $\dfrac{5}{16}\sqrt{46}$

13. En el cono de revolución mostrado, el triángulo MRI es equilátero. Si $AR=7$ y $MI=8$, calcule su volumen.

A) $125\sqrt{3}\pi$
B) $27\sqrt{3}\pi$
C) $56\sqrt{3}\pi$
D) $40\sqrt{3}\pi$
E) $\dfrac{500\sqrt{3}}{3}\pi$



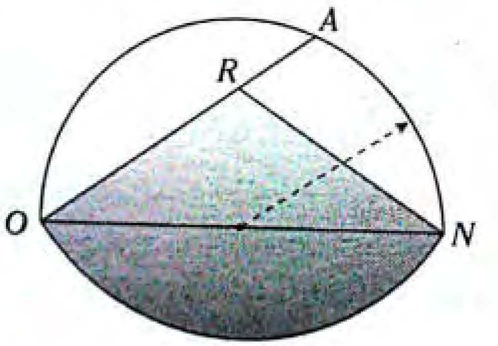
14. En el cono de revolución mostrado, $AN=5$ y $TL=16$. Calcule el área de la superficie lateral.



A) $\frac{125\sqrt{10}}{2}\pi$ B) $54\sqrt{10}\pi$ C) $60\sqrt{10}\pi$

D) $100\sqrt{5}\pi$ E) $\frac{100}{3}\sqrt{5}\pi$

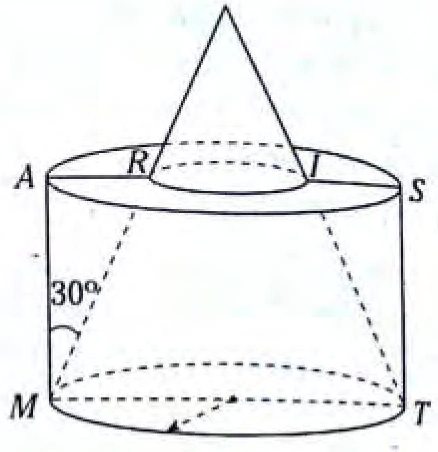
15. El sector circular sombreado es el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución. Si $OR=6$ y $RA=3$, calcule el volumen del cono correspondiente.



A) $\frac{16}{3}\pi\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}\pi$ C) $9\sqrt{2}\pi$

D) $\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$ E) $10\sqrt{3}\pi$

16. Del gráfico, $AI=2(IS)$. Calcule la razón de volúmenes entre el cono de revolución parcial determinado y el cilindro de revolución.



A) $\frac{2}{27}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{1}{54}$

D) $\frac{3}{20}$ E) $\frac{1}{20}$

17. En un cono de revolución, la distancia del centro de la base a una generatriz es la mitad de la distancia a un punto de la circunferencia que limita su base. Calcule la razón entre las áreas de las sección axial y la superficie total.

A) $\sqrt{3}$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) 2 E) $3-\sqrt{3}$

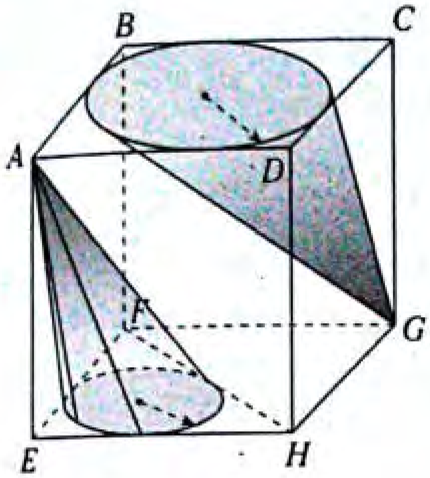
NIVEL INTERMEDIO

18. El área de la sección axial es numéricamente igual al volumen de un cono de revolución. Calcule el radio de su base.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3}{\pi}$

D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

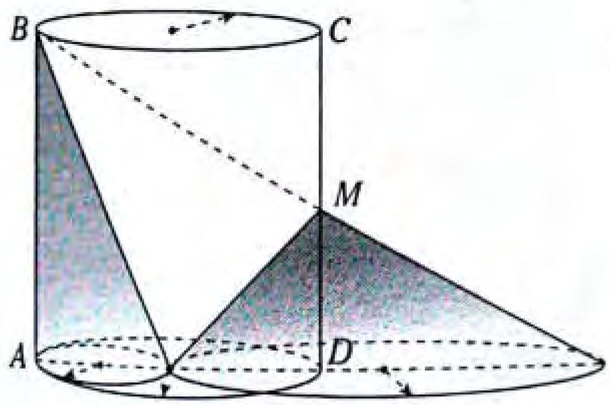
19. En el hexaedro regular $ABCD$-$EFGH$ mostrado, las circunferencias mostradas están inscritas. Calcule la razón de volúmenes de los conos.



A) $\sqrt{2}$ B) $6-4\sqrt{2}$ C) $2-\sqrt{2}$

D) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

20. Del gráfico, el volumen del cilindro de revolución es 16π. Calcule la suma de volúmenes de los conos mostrados si $CM=MD$.



A) 8π B) 4π C) 7π

D) $\dfrac{8\pi}{3}$ E) $\dfrac{22\pi}{3}$

21. En un tetraedro regular P-ABC, M es punto medio de $\overline{AP}$. Si $AB=2$, calcule el volumen de un cono de base circular, cuya base está inscrita en la región triangular MBC y su vértice es P.

A) $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{2}$

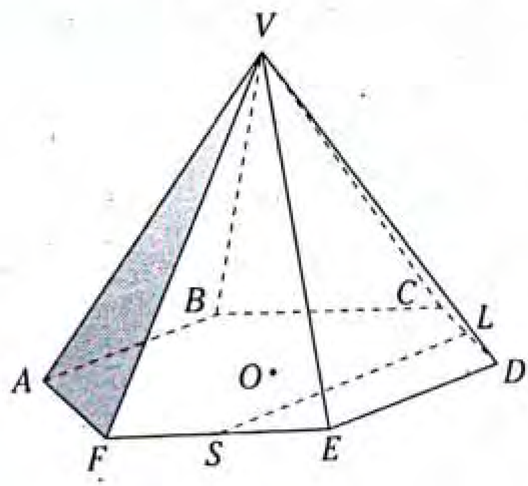
D) $\dfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{3})$ E) $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{3}$

22. En una pirámide regular cuadrangular V-$ABCD$, $AB=6$ y $AV=8$. Calcule la distancia del baricentro de la cara AVB a la base.

A) 7 B) $\dfrac{\sqrt{46}}{3}$ C) $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{23}}{3}$

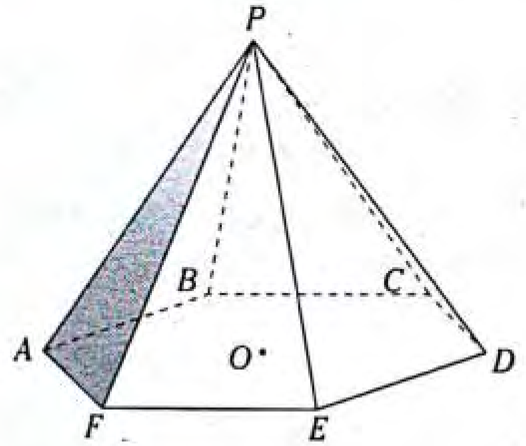
23. Del gráfico se muestra una pirámide regular V-$ABCDEF$, en la que $CL=LD$, $FS=SE=2$, O es centro de la base y $VO=3$. Calcule la distancia de V a $\overline{LS}$.



A) $\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{3}$

24. Del gráfico se muestra una pirámide regular P-$ABCDEF$, en la que O es centro de la base, $EF=3$ y la suma de las longitudes de las aristas laterales es 30. Calcule la longitud de la proyección ortogonal de PO sobre una arista lateral.



A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{8}{5}$ C) 3

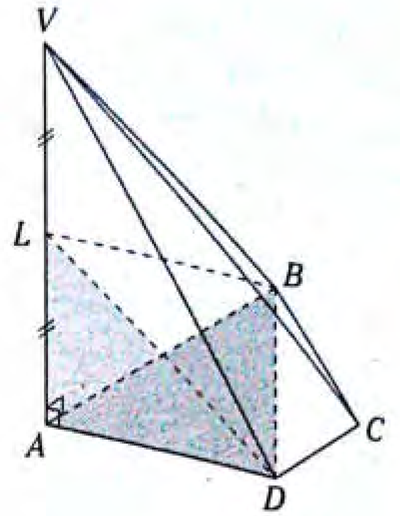
D) $\frac{9}{5}$ E) 4

25. En una pirámide V-ABC, VA es perpendicular a la cara ABC, $AB=BC=AC=2$ y el área de la cara VCB es 2. Calcule el volumen de la pirámide.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

26. Se muestran dos pirámides V-$ABCD$ y L-ABD, donde $ABCD$ es un trapecio isósceles y $\frac{AB}{2}=\frac{BC}{2}=DC$. Calcule la razón de volúmenes de las pirámides mencionadas.



A) 2 B) 3 C) $\frac{5}{2}$

D) 4 E) $\frac{3}{2}$

27. En una pirámide V-$ABCD$, en la que $\overline{VA}$ es perpendicular a la base, $ABCD$ es un rectángulo, $AD=2$, $DC=4$ y $AV=6$. Calcule el área de la superficie lateral.

A) $16+4\sqrt{10}+3\sqrt{13}$

B) $16+4\sqrt{10}+\sqrt{13}$

C) $2(10+2\sqrt{10}+\sqrt{13})$

D) $2(8+2\sqrt{10}+\sqrt{13})$

E) $2(9+2\sqrt{10}+\sqrt{13})$

28. En un cono circular recto, el área de la superficie lateral es el triple del área de la base, y el área de la sección axial es $8\sqrt{2}\text{ cm}^2$. Calcule el área de la superficie lateral del cono.

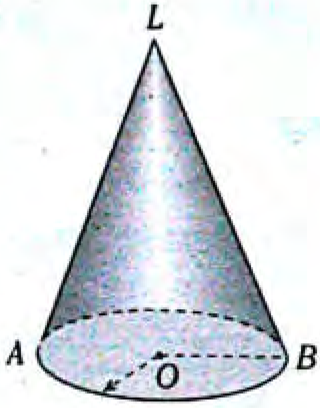
A) 4π B) 6π C) 8π

D) 10π E) 12π

29. En un cono de revolución, la medida del ángulo de desarrollo de la superficie lateral es 120° y el área de la superficie lateral es 27π. Calcule el volumen del cono.

A) $9\sqrt{3}\pi$ B) $8\sqrt{3}\pi$ C) $8\sqrt{2}\pi$
D) $9\sqrt{2}\pi$ E) 9π

30. Se muestra un cono de revolución. Si m∢ALB=30° y la distancia del punto medio de $\overline{OB}$ hacia VB en 2 cm, calcule la longitud de la generatriz del cono.

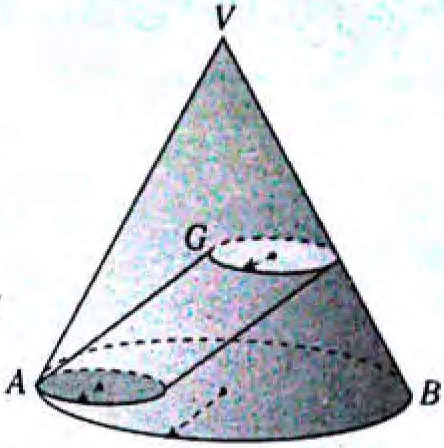


A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

31. En un paralelepípedo rectangular $ABCD$-$EFGH$ se encuentra un cono de revolución, cuya base está inscrita en la región triangular EFH y su vértice está en la base $ABCD$, EF=6, EH=8 y AE=EG. Calcule el volumen del cono.

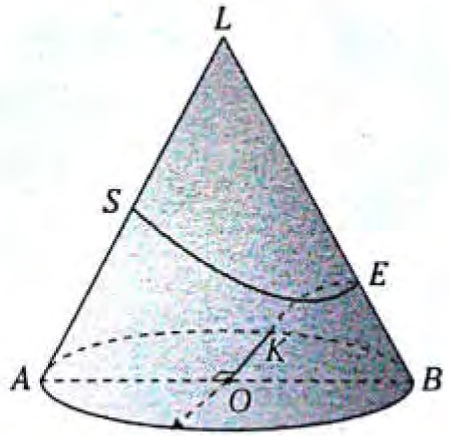
A) 10π B) $\dfrac{40\pi}{3}$ C) $\dfrac{50\pi}{3}$
D) 12π E) 13π

32. Se muestra un cono de revolución, en el que G es baricentro de la región AVB. Calcule la razón de volúmenes del cono y del cilindro circular.



A) 6 B) 8 C) 9
D) 12 E) 15

33. Se muestra un cono equilátero, en el que AS=SL=4. Calcule la longitud del mínimo recorrido de SEK.



A) $2\sqrt{5+\sqrt{2}}$
B) $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
C) $2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
D) $3\sqrt{5+2\sqrt{2}}$
E) $2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

Esfera y teorema de Pappus-Guldin

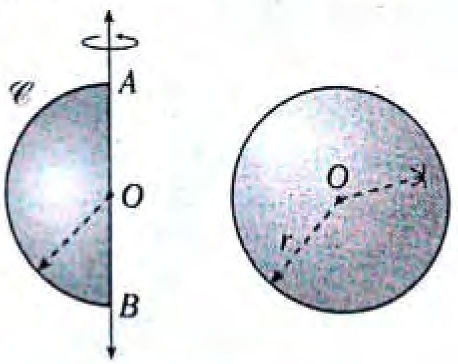
Capítulo XVI

OBJETIVOS

- Reconocer la esfera y su superficie esférica para determinar el volumen y el área de dicha superficie.
- Calcular el área de una superficie de revolución y el volumen de un sólido de revolución.

Superficie esférica

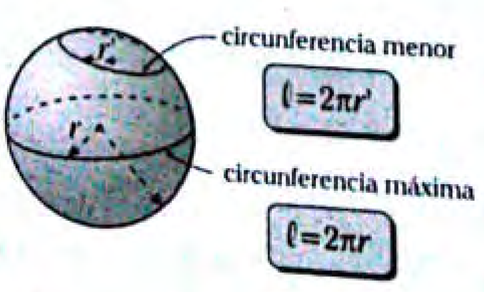
Es la que se genera cuando una semicircunferencia gira alrededor de la recta que contiene al diámetro.



$$\mathbb{A}_{SE}=4\pi r^2$$

O: centro de la superficie esférica

$\mathbb{A}_{SE}$: área de la superficie esférica



circunferencia menor $\ell=2\pi r'$

circunferencia máxima $\ell=2\pi r$

HUSO ESFÉRICO

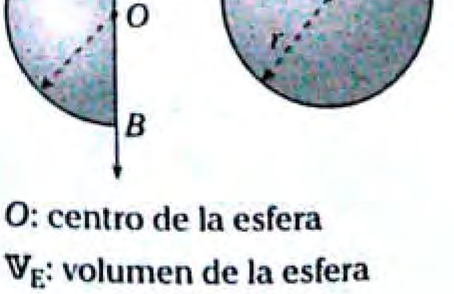
Sea $\alpha < 360°$

$$\mathbb{A}_{HE}=\pi r^2\frac{\alpha}{90°}$$

$\mathbb{A}_{HE}$: área del huso esférico

Esfera

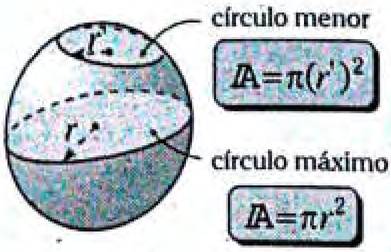
Es la que se genera cuando un semicírculo gira alrededor de la recta que contiene al diámetro.



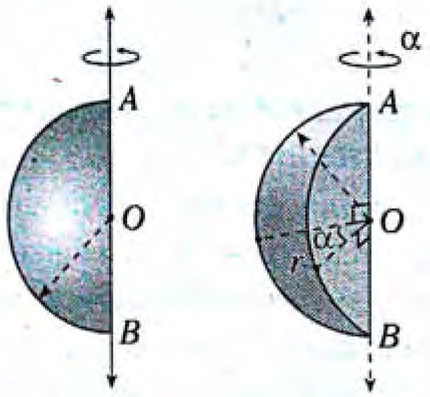
$$\mathbb{V}_E=\frac{4}{3}\pi r^3$$

O: centro de la esfera

$\mathbb{V}_E$: volumen de la esfera



CUÑA ESFÉRICA



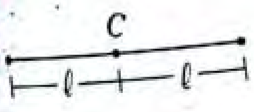
Sea $\alpha < 360°$

$$\mathbb{V}_{CE} = \pi r^3 \frac{\alpha}{270°}$$

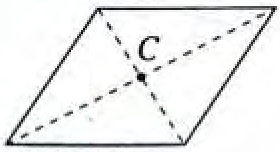
$\mathbb{V}_{CE}$: volumen de la cuña esférica

Centroide o centro geométrico

DE UNA LÍNEA PLANA

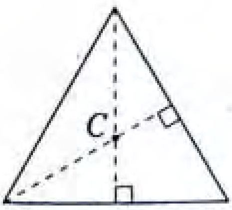


Segmento



Paralelogramo

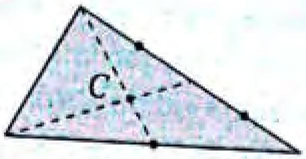
Circunferencia



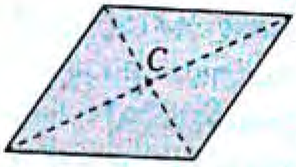
Triángulo equilátero

C: centroide

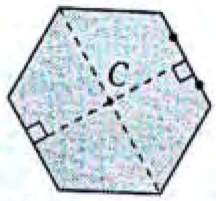
DE UNA REGIÓN PLANA



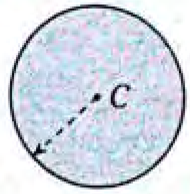
Región triangular



Región paralelográmica



Región hexagonal regular



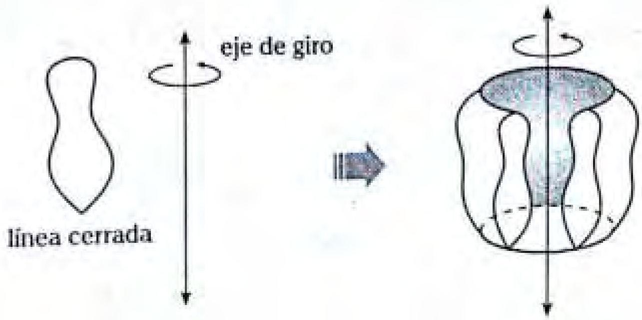
Círculo

C: centroide

Superficie de revolución

Es aquella superficie que se genera por la rotación de una línea abierta o cerrada que gira alrededor de una recta coplanar.

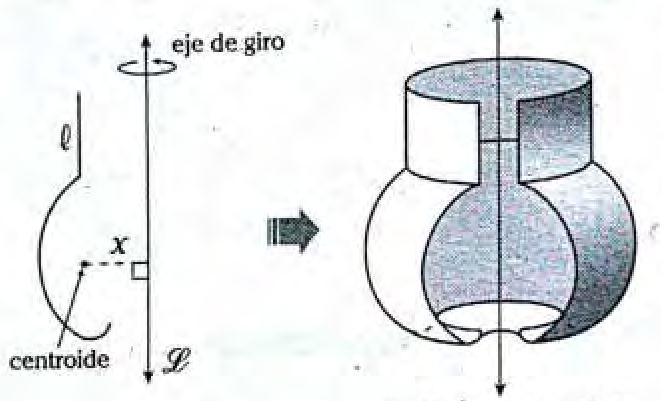
parte de una superficie de revolución



parte de una superficie de revolución

Teorema de Pappus-Guldin respecto a la superficie de revolución

Dadas una recta y una línea plana no secantes, contenidas en un plano, al hacer girar la línea plana a dicha recta (denominada eje de giro), se genera una superficie de revolución, cuya área se calcula multiplicando la longitud de la línea y la longitud de la circunferencia descrita por el centroide de dicha línea.



porción de la superficie de revolución

$$\boxed{\mathbb{A}_{\text{Sup. G}} = 2\pi\overline{x}(\ell)}$$

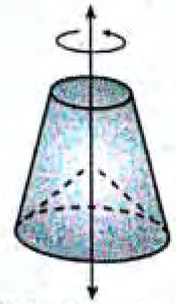
$\mathbb{A}_{\text{Sup. G}}$: área de la superficie generada

ℓ: longitud de la línea plana

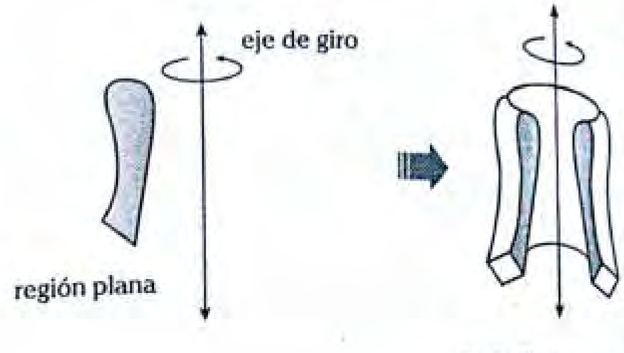
$\overline{x}$: distancia del centroide de la línea al eje de giro ($\mathscr{L}$)

Sólido de revolución

Es aquel sólido que se genera por la rotación de una región plana que gira alrededor de una recta coplanar.



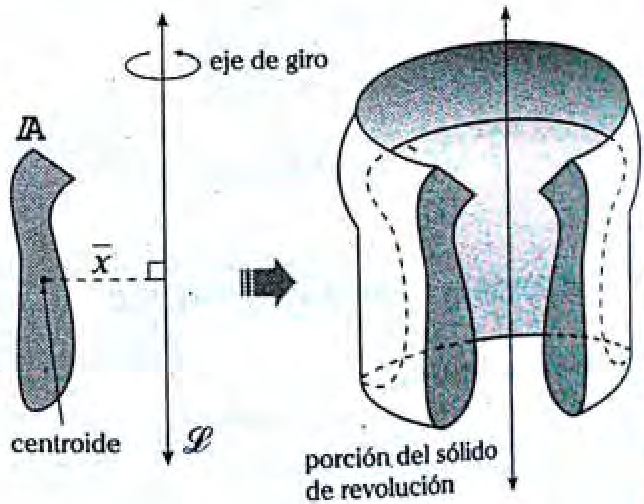
sólido de revolución



parte de un sólido de revolución

Teorema de Pappus-Guldin respecto al sólido de revolución

Dadas una recta y una región plana no secantes, contenidas en un plano, al hacer girar la región plana a dicha recta (denominada eje de giro), se genera un sólido de revolución, cuyo volumen se calcula multiplicando el área de la región y la longitud de la circunferencia descrita por el centroide de dicha región.



porción del sólido de revolución

$$\boxed{\mathbb{V}_{\text{Sól. G}} = 2\pi\overline{x}(\mathbb{A})}$$

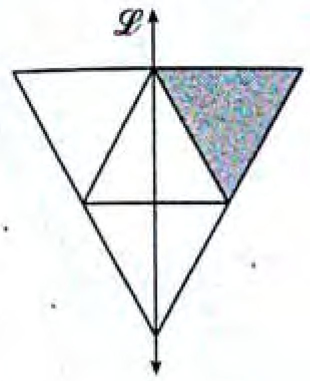
$\mathbb{V}_{\text{Sól. G}}$: volumen del sólido generado

$\mathbb{A}$: área de la región plana

$\overline{x}$: distancia del centroide de la línea al eje de giro ($\mathscr{L}$)

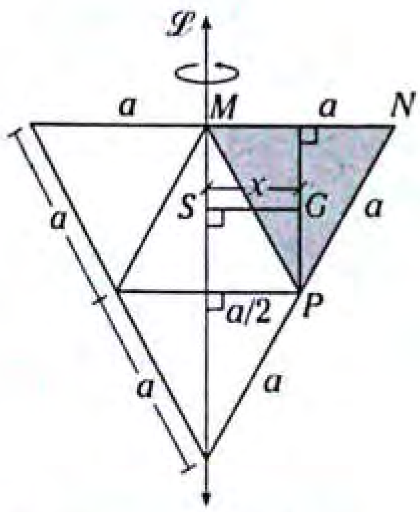
Problema N.° 1

En el gráfico, todos los triángulos son equiláteros. Los pequeños tienen lados de longitud a. Si tomamos como eje de revolución la recta $\mathscr{L}$, entonces el volumen del sólido generado por el triángulo sombreado es



UNMSM 1994

Resolución



Nos piden el volumen del sólido generado por la región MNP: $\mathbb{V}_x$

Aplicamos el teorema de Pappus-Guldin

$$\mathbb{V}_x = 2\pi\bar{x}\mathbb{A} \qquad \text{(I)}$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2}$$

(distancia del centroide G de la región triangular MNP a la recta $\mathscr{L}$)

$$\mathbb{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (área de la región triangular } MNP\text{)}$$

Reemplazamos en (I)

$$\mathbb{V}_x = 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

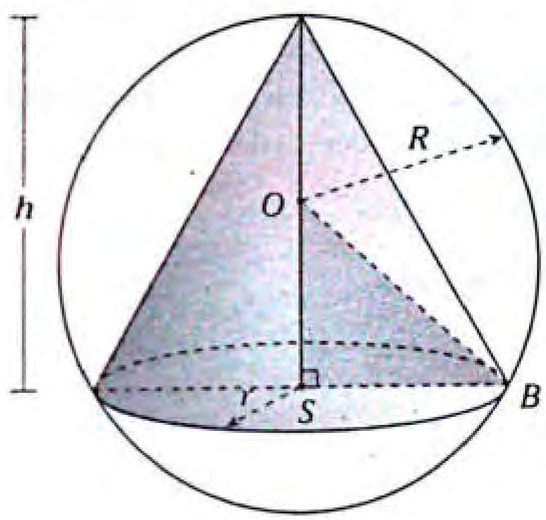
$$\therefore \quad \mathbb{V}_x = \pi a^3\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Problema N.° 2

En una esfera de radio R se inscribe un cono de altura h y base de radio r. La relación entre r, h y R es

UNMSM 1995

Resolución



Nos piden la relación entre r, h y R.

$\triangle OSB$: por teorema de Pitágoras

$$R^2=(h-R)^2+r^2$$

$$R^2=h^2+R^2-2hR+r^2$$

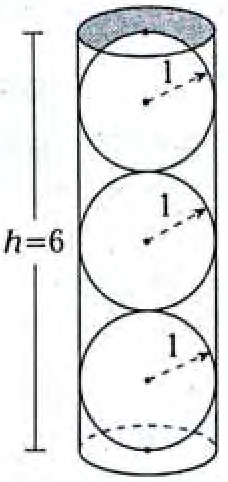
$$\therefore \quad r^2+h^2=2Rh$$

Problema N.° 3

En un estuche cilíndrico se guardan tres pelotas de radio $r=1$ que encajan exactamente. ¿Cuál es el volumen del aire dentro del estuche y circundante a las pelotas?

UNMSM 2004-I

Resolución



Nos piden el volumen del aire circundante a las pelotas (esferas) dentro del cilindro: $\mathbb{V}_x$.

Se puede plantear

$$\mathbb{V}_x=\mathbb{V}_{\text{cil.}}-3\mathbb{V}_{\text{esf.}}$$

$$\mathbb{V}_x=\pi(1)^2(6)-3\left(\frac{4\pi}{3}(1)^3\right)$$

$$\mathbb{V}_x=6\pi-4\pi$$

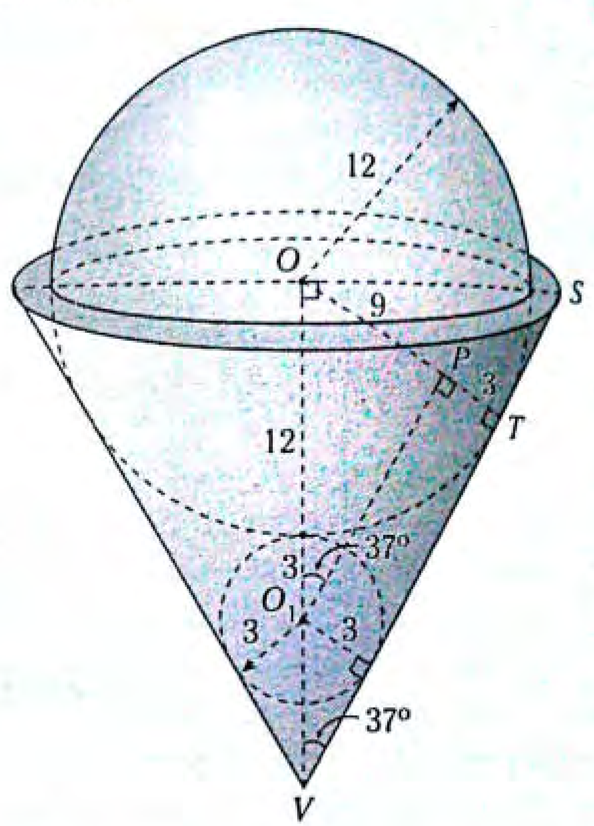
$$\therefore\quad \mathbb{V}_x=2\pi$$

Problema N.° 4

En un recipiente cónico (circular recto) lleno de agua, se introducen una esfera de radio 3 m y otra de diámetro 24 m quedando exactamente la mitad de esta fuera del cono. Las esferas son tangentes entre sí y quedan ajustadas a la superficie lateral del cono. Calcule el volumen de agua que aún queda en el recipiente.

UNMSM 2002

Resolución



Nos piden el volumen de agua que aún queda en el recipiente cónico: $\mathbb{V}_x$.

Se puede notar del gráfico que

$$\mathbb{V}_x=\mathbb{V}_{\text{cono}}-\left(\mathbb{V}_{\substack{\text{semiesfera}\\ \text{radio 12}}}+\mathbb{V}_{\substack{\text{esfera}\\ \text{radio 3}}}\right)\qquad \text{(I)}$$

$\triangle OPO_1$ es notable de 37° y 53°

$\rightarrow\quad O_1P=12$

$\triangle OTS$ es notable de 37° y 53°

$\rightarrow\quad OS=5\times3=15$

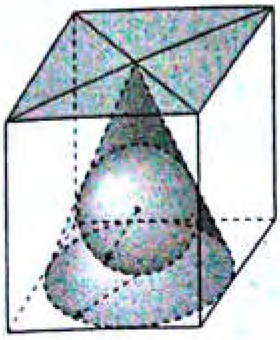
Ahora en (I)

$$\mathbb{V}_x=\pi(15)^2\times\frac{20}{3}-\left(\frac{2}{3}\pi(12)^3+\frac{4}{3}\pi(3)^3\right)$$

$$\therefore\quad \mathbb{V}_x=312\pi$$

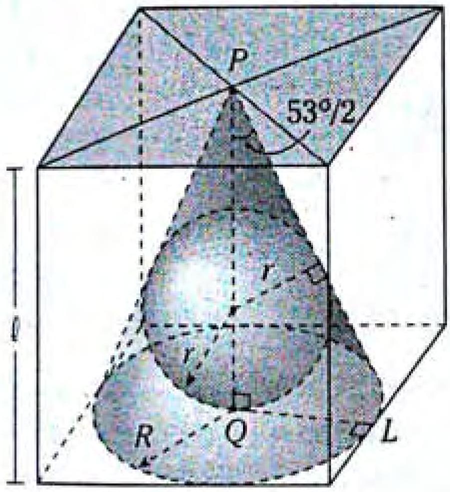
Problema N.° 5

En el gráfico, halle el volumen de la esfera si el volumen del cubo es $216(\sqrt{5}+1)^3$ cm^3.



UNMSM 2004-II

Resolución



Nos piden $\mathbb{V}_{esfera}$: ($\mathbb{V}$).

$$\mathbb{V}=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{(I)}$$

⊿ PQL: notable de 53°/2 y 127°/2

$$PQ=2(QL)$$

Luego

$$\ell=(r\sqrt{5}+r)$$

Del dato

$$\mathbb{V}_{cubo}=216(\sqrt{5}+1)^3=\ell^3$$

$$\rightarrow\ \ell=6(\sqrt{5}+1)$$

Luego igualando

$$\ell: r(\sqrt{5}+1)=6(\sqrt{5}+1)\ \rightarrow\ r=6$$

Ahora reemplazando en (I)

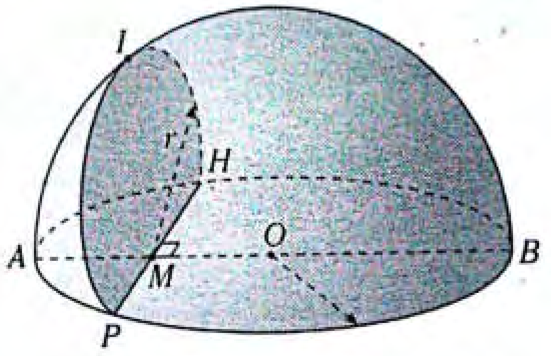
$$\mathbb{V}=\frac{4}{3}\pi 6^3$$

$$\therefore\ \ \mathbb{V}=288\pi\ \text{cm}^3$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, $AM=MO$, el área del semicírculo de radio r es 6π. Calcule el área de la superficie total de la semiesfera.

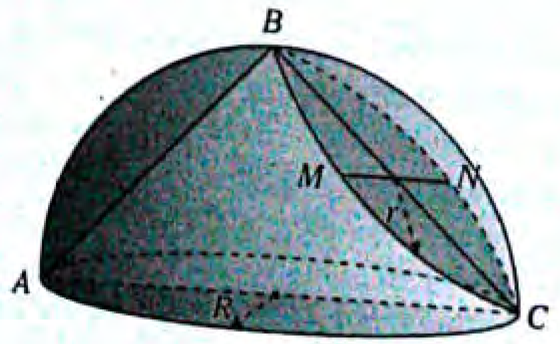


A) 32π B) 18π C) 24π
D) 48π E) 36π

2. Una superficie esférica está inscrita en un cono equilátero. Calcule la razón entre el área de la superficie lateral de dicho cono y el área de la superficie esférica.

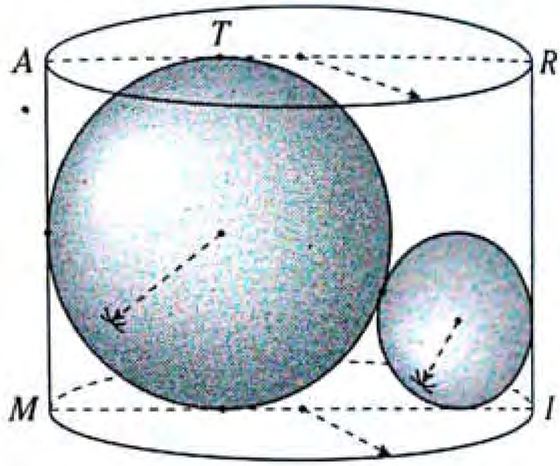
A) 1 B) 3/2 C) 2
D) 1/2 E) 2/3

3. Del gráfico, la $m\widehat{AB}=90^\circ$, $\overline{AB}\perp\overline{MN}$, el volumen del cono circular, cuyo vértice es A, es igual a 18π. Calcule el área de la superficie esférica correspondiente a la semiesfera.



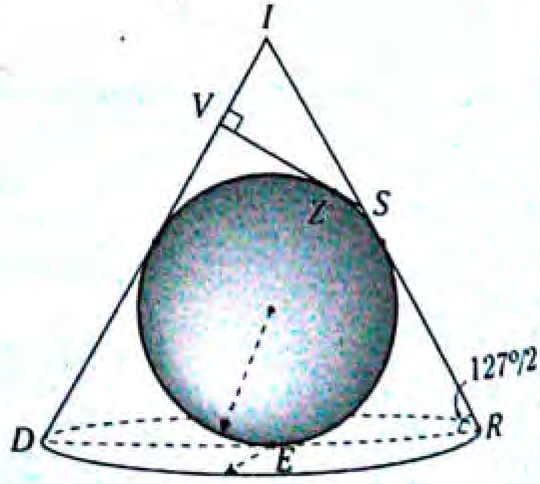
A) 18π B) 12π C) 24π
D) 27π E) 36π

4. Del gráfico, las superficies esféricas son tangentes entre sí y tangentes al cilindro de revolución. Si $5(AT)=4(TR)$, calcule la razón de áreas de las superficies esféricas.



A) 1/2 B) 1/16 C) 1/8
D) 1/4 E) 2/9

5. Del gráfico, la esfera está inscrita en el cono de revolución y es tangente a $\overline{VS}$. Si $ZS=1$, calcule el área de la superficie esférica.



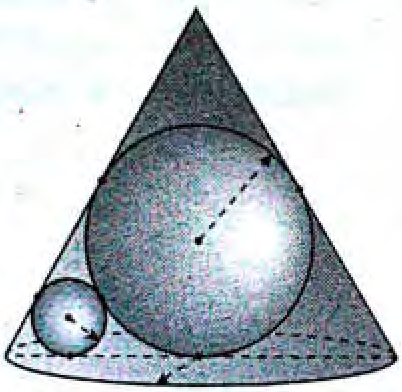
A) 25π B) 9π C) 12π
D) 24π E) 36π

6. Una esfera es tangente a una región cuadrada $ABCD$ en su centro O. En la esfera se traza el diámetro OP, y $\overline{PD}$ interseca a la superficie esférica en el punto E. Si $AD=6$ y $PE=3$, calcule el volumen de dicha esfera.

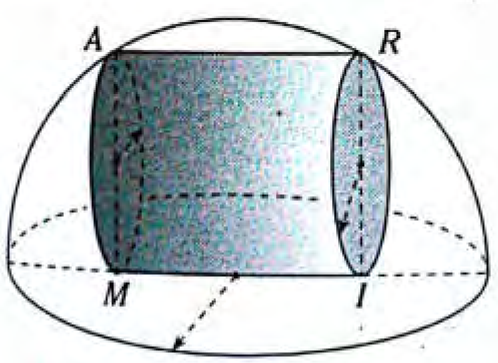
A) $6\sqrt{2}\pi$ B) $9\sqrt{3}\pi$ C) $3\sqrt{5}\pi$
D) $9\sqrt{2}\pi$ E) $2\sqrt{15}\pi$

7. Las esferas mostradas son tangentes, tal como se ven en el gráfico, y el cono es equilátero. Entonces la relación entre sus volúmenes son como

A) 3:8:18
B) 2:8:25
C) 8:27:125
D) 4:108:243
E) 2:50:150

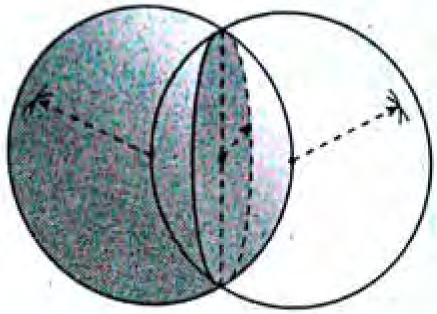


8. El cilindro equilátero está inscrito en la semiesfera. Indique la razón que hay entre sus volúmenes.



A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3\sqrt{5}}{25}$ C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$
D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ E) $\dfrac{3}{7}$

9. Del gráfico, la región determinada por la intersección entre las dos esferas tiene como área igual a 3π. Calcule el volumen de una de las esferas.

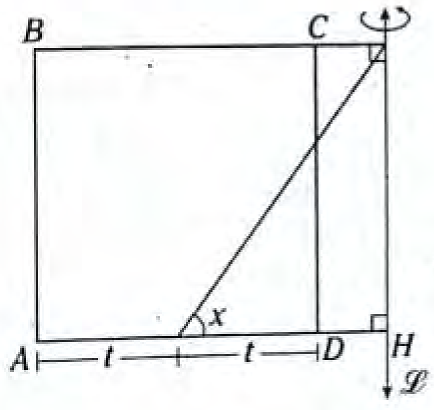


A) $\dfrac{32\pi}{3}$ B) 27π C) 6π
D) 25π E) 64π

10. En una pirámide regular triangular A-BCD se inscribe una esfera. Si $AC=CD=3\sqrt{3}$, calcule el volumen de dicha esfera.

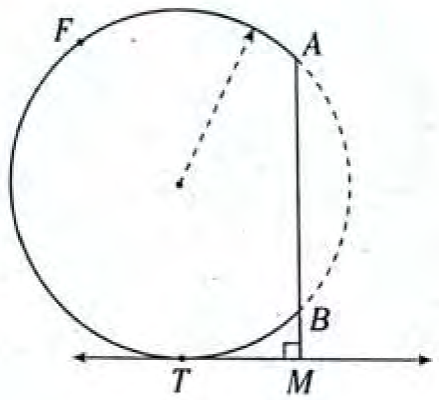
A) $9\sqrt{3}$ B) $27\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{2}/8$
D) $3\sqrt{10}$ E) $9\sqrt{2}/4$

11. El área de la superficie generada por el cuadrado $ABCD$, al girar en torno a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, es 6π veces el área de la región cuadrada que limita $ABCD$. Calcule x.



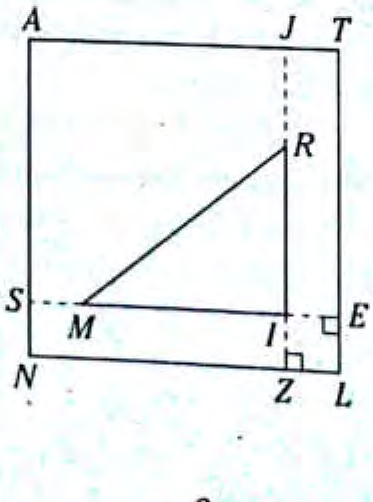
A) 30° B) 45° C) 37°
D) 31° E) 53°

12. Del gráfico, $AB=2(TM)=4$. Calcule el área de la superficie generada por el arco BFA al girar en torno a $\overleftrightarrow{TM}$. (T es punto de tangencia).



A) $16\pi^2$ B) $24\pi^2$ C) $12\pi^2$
D) $18\pi^2$ E) $33\pi^2$

13. Del gráfico, $ATLN$ es un cuadrado, $SM=IZ=IE=1$, $2(MR)=5(JR)=10$.
Calcule la razón entre las áreas de las superficies generadas por el triángulo MRI al girar en torno a $\overleftrightarrow{AN}$ y $\overleftrightarrow{AJ}$.

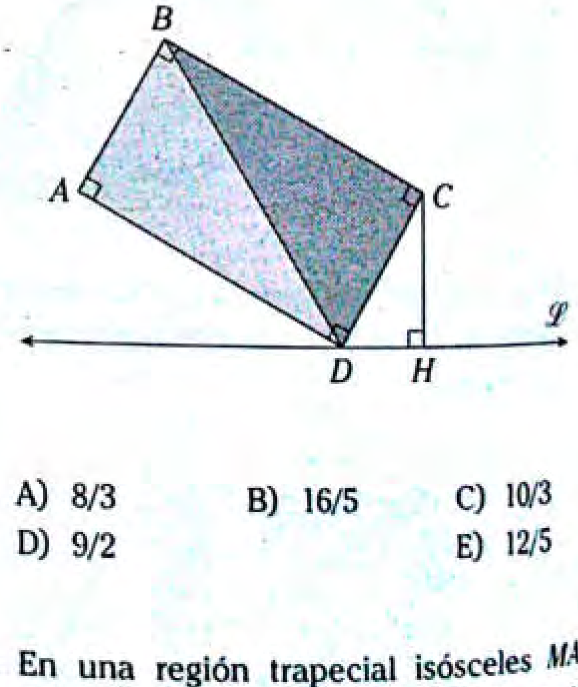


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{15}$
D) $\frac{14}{15}$ E) $\frac{12}{25}$

14. Se tiene el triángulo equilátero ABC. Por el vértice C se traza la recta $\mathscr{L}$, la cual es coplanar al plano que contiene al triángulo y es perpendicular a $\overline{AC}$. Calcule la razón de las áreas de las superficies generadas por el triángulo ABC al girar en torno a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3
D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $\sqrt{3}$

15. Del gráfico, $AB=3$, $BC=4$, además los sólidos de revolución generados por las regiones triangulares, al girar en torno a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tienen igual volumen. Calcule CH.

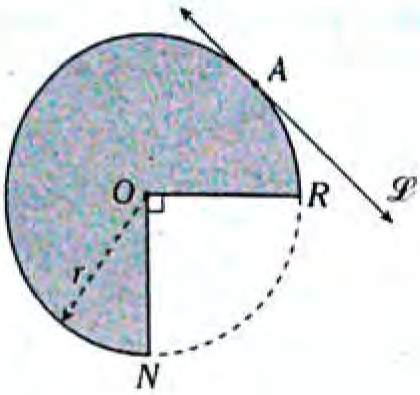


A) 8/3 B) 16/5 C) 10/3
D) 9/2 E) 12/5

16. En una región trapecial isósceles $MARI$, $MA=AR=4$ y $MI=8$. Se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$, la cual es perpendicular a $\overleftrightarrow{AR}$ y contiene a I. Calcule el volumen del sólido generado por la región trapecial al girar en torno a $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$.

A) $96\sqrt{3}\pi$ B) 25π C) 36π
D) 125π E) 64π

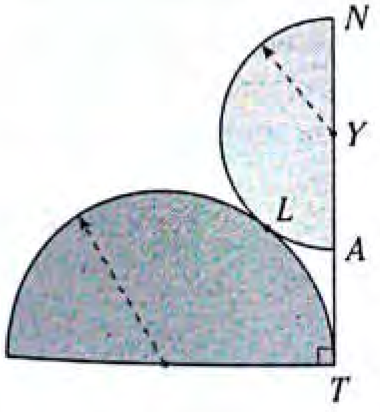
17. Del gráfico, A es punto de tangencia, $m\widehat{AR}=45°$ y $r=\sqrt{3}$. Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la región sombreada al girar en torno a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) $27\pi^2$ B) $\frac{27}{2}\pi^2$ C) $\frac{54}{5}\pi^2$

D) $\frac{9}{2}\sqrt{3}\pi^2$ E) $9\sqrt{3}\pi^2$

18. Del gráfico, $YA=AT$ y L es punto de tangencia. Calcule la razón de volúmenes de los sólidos generados por las regiones sombreadas al girar en torno a $\overleftrightarrow{NT}$.



A) $\frac{15}{2}\pi$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{11}{2}$

D) $\frac{9}{2}\pi$ E) $\frac{81}{32}\pi$

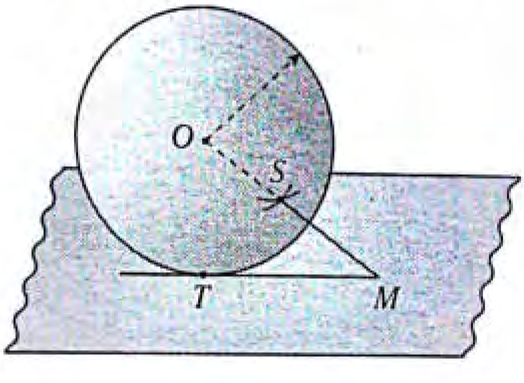
NIVEL INTERMEDIO

19. Se tiene un cilindro equilátero y una superficie esférica. La superficie lateral del cilindro y la superficie esférica son equivalentes, y el volumen del cilindro es 54π. Calcule el área de la superficie esférica.

A) 30π B) 32π C) 36π

D) 40π E) 42π

20. Del gráfico mostrado, T es punto de tangencia, $TM=2(MS)=4$, S es punto de la superficie esférica. Calcule el área de dicha superficie.



A) 30π B) 32π C) 34π

D) 36π E) 39π

21. Se muestra un prisma regular, en el que L pertenece a la base, y la superficie esférica es tangente a las caras laterales y a una base, además $2(LK)=3(OK)$. Si el volumen del prisma es $84\sqrt{3}$, calcule el área de la superficie esférica.

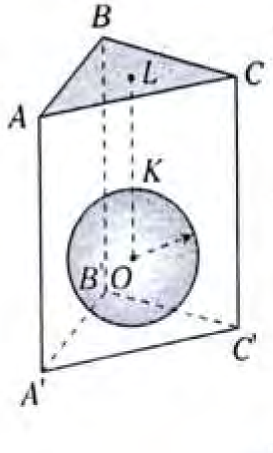
A) 10π

B) 12π

C) 14π

D) 16π

E) 18π

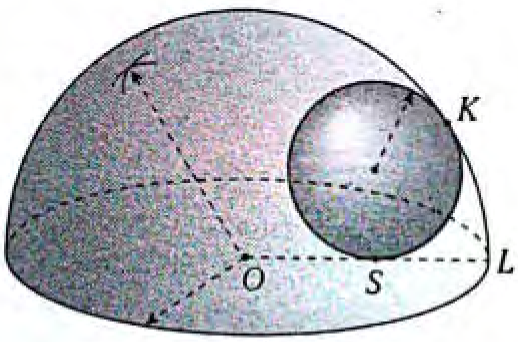


22. Se tiene un cono equilátero y una esfera que son equivalentes. Calcule $\left(\frac{R}{r}\right)^3$ si R es radio de la esfera y r es radio de la base del cono.

A) 1/2 B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) 1/3 E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

23. Se muestra una esfera inscrita es una semiesfera, además, $OS=SL=4$ cm. Calcule el volumen de dicha esfera.



A) $32\pi/3$ B) 18π C) 24π

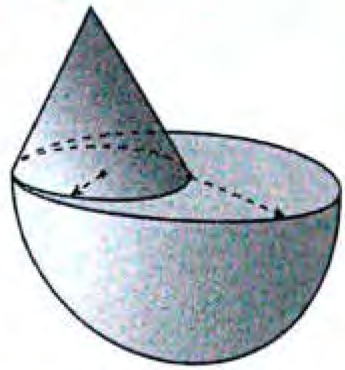
D) 36π E) 42π

24. Del gráfico se muestra un cono de revolución y una semiesfera que son equivalentes. Si el área de la superficie lateral del cono es $4\pi\sqrt{5}$, calcule el volumen de la semiesfera.

A) 5π
B) 8π
C) 12π
D) 9π
E) $16\pi/3$

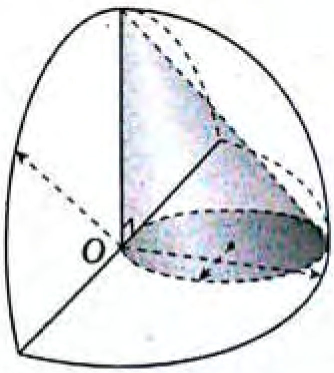
25. Se muestra un cono equilátero cuyo volumen es $9\sqrt{3}\pi$. Calcule el volumen de la semiesfera.

A) 144π
B) 121π
C) 128π
D) 132π
E) 136π

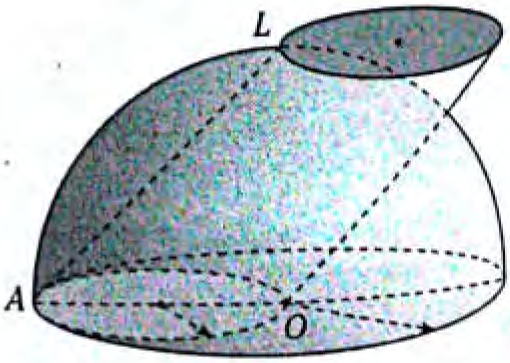


26. Del gráfico se muestra la cuarta parte de una esfera, en la cual está inscrito un cono circular. Si O es punto de tangencia, calcule la razón de volúmenes de los dos sólidos.

A) 2
B) 1
C) 3
D) 4
E) 6



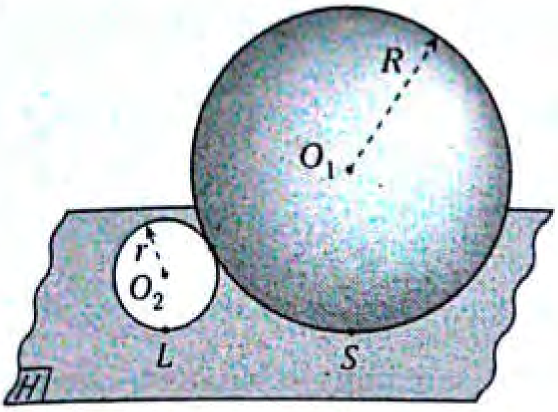
27. Se muestra un cilindro circular, cuyo volumen es 16π, en que la proyección ortogonal de L sobre el círculo máximo es O. Calcule el área de la superficie de la semiesfera.



A) 48π B) 28π C) 20π

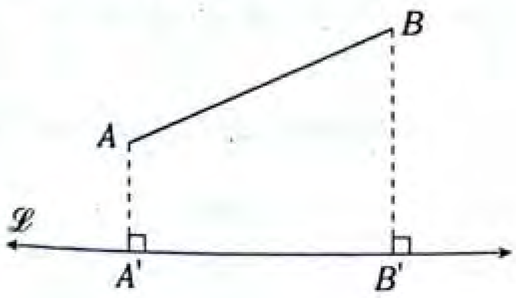
D) 32π E) 36π

28. Del gráfico se muestra que el ▱H, es tangente en L y S a dos esferas tangentes entre sí. Si $\dfrac{R}{r}=\dfrac{9}{4}$ y la proyección ortogonal de $\overline{O_1O_2}$ sobre el ▱H mide 12 cm, calcule el área de la superficie esférica menor.



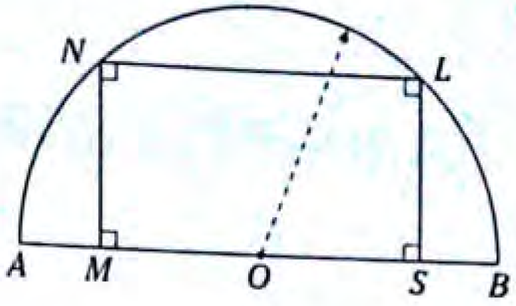
A) 108π B) 144π C) 100π
D) 16π E) 64π

29. Del gráfico, $AA'=\dfrac{BB'}{4}=\dfrac{AB}{5}$ y el área de la superficie generada por $\overline{AB}$, cuando gira alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, con la longitud de AB son numéricamente iguales. Calcule el área de la superficie generada.



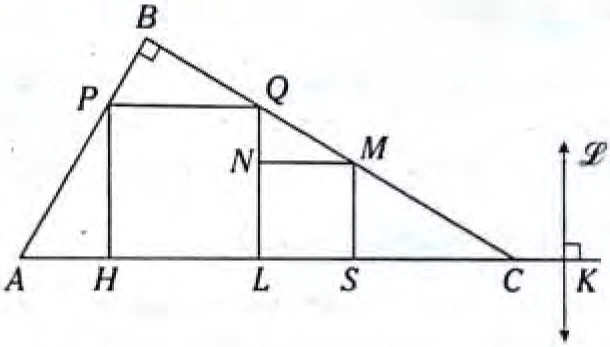
A) 1 B) 5 C) 5π
D) $5/\pi$ E) $1/\pi$

30. Del gráfico mostrado, el área del sector circular LOB es π y $\widehat{MNL}=90^{\circ}$. Calcule el área de la superficie generada por la línea $MNLS$ cuando gira alrededor de $\overleftrightarrow{AB}$.



A) 24 B) 12π C) 16π
D) 24π E) 30π

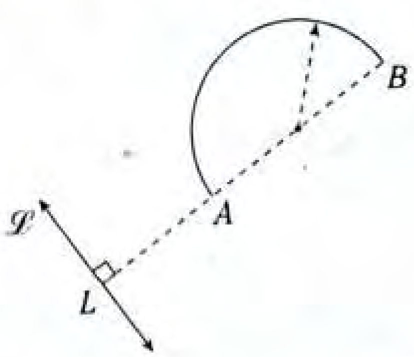
31. Del gráfico, $PQLH$ y $MNLS$ son cuadrados, $AH=4$, $LC=9$. Calcule el área de la superficie generada por el cuadrado menor cuando gira una revolución alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ si $LS=2(CK)$.



A) $239{,}2\pi$ B) $256{,}2\pi$ C) $259{,}2\pi$
D) $249{,}4\pi$ E) $229{,}2\pi$

32. Del gráfico, $AB=2(AL)$ y la semicircunferencia mide 6π. Calcule el área de la superficie que genera la semicircunferencia cuando gira una revolución alrededor de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

A) $96\pi^2$
B) $84\pi^2$
C) $72\pi^2$
D) $144\pi^2$
E) $180\pi^2$



Geometría analítica escalar

Capítulo XVII

Objetivos

- Definir el plano cartesiano, y en él ubicar y representar un punto a través de las coordeñadas cartesianas.
- Estudiar los métodos básicos para hallar las coordenadas de un punto según sus características.
- Encontrar la representación de la recta a través de una ecuación lineal utilizando para ello los elementos que la definen.

Definición

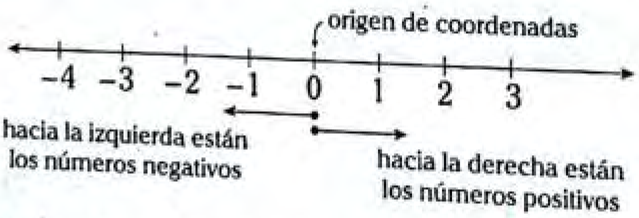
Es la combinación de la geometría con el álgebra que se encarga de estudiar las figuras en un sistema por ejemplo en un plano cartesiano.

Recta numérica real

Es aquella recta en que a cada punto se le asigna un número del conjunto de los números reales.

Al punto que se le asigna el número cero se le conoce como origen, y los números asignados a dichos puntos en la recta se llaman coordenadas.

Gráficamente

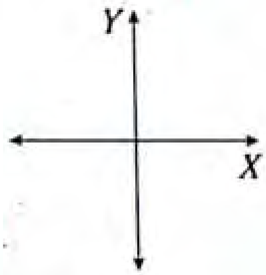


Plano cartesiano

Es el plano determinado por dos rectas numéricas secantes y perpendiculares entre sí.

Por convención, una de ellas es horizontal y, por ende, la otra será vertical.

Gráficamente



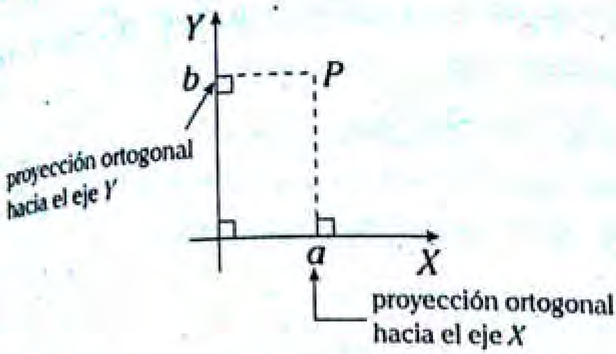
La recta horizontal es llamada eje de las X o ejes de las abscisas y la recta vertical es llamada eje de las Y o ejes de las ordenadas.

Ubicación del punto en el plano cartesiano

Coordenadas de un punto

Un punto en el plano cartesiano se representa mediante dos números reales: el primero es el número que representa la proyección ortogonal de dicho punto en el eje de las abscisas y el segundo es el número que representa la proyección ortogonal de dicho punto en el eje de las ordenadas.

Este par ordenado son las coordenadas del punto.



Entonces

$P=(a;b)$

donde

a es la abscisa de P y

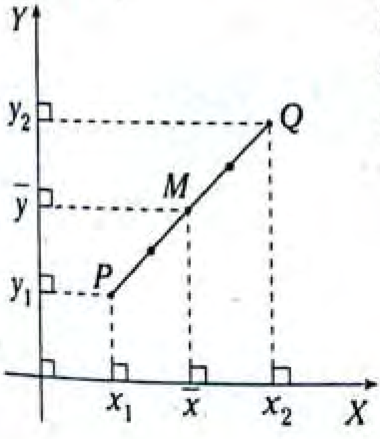
b es la ordenada de P.

Coordenadas de puntos especiales

a. Punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento se calculan promediando, respectivamente, las coordenadas de sus extremos.

En el gráfico mostrado, M es el punto medio del segmento PQ.



Se cumple que $M=(\bar{x};\bar{y})$.

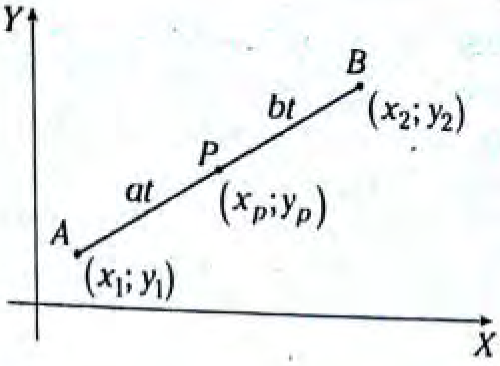
Donde

$$\boxed{\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}}$$

$$\boxed{\bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

b. Un punto ubicado en un segmento, dada la razón en que lo divide

Cuando se pide las coordenadas de un punto P que pertenece al segmento AB debemos conocer las coordenadas de A, B y la razón $\frac{AP}{BP}=\frac{a}{b}$.



Como

$$\frac{AP}{PB}=\frac{a}{b} \rightarrow AP=at;PB=bt$$

Se cumple que $P(x_p;y_p)$

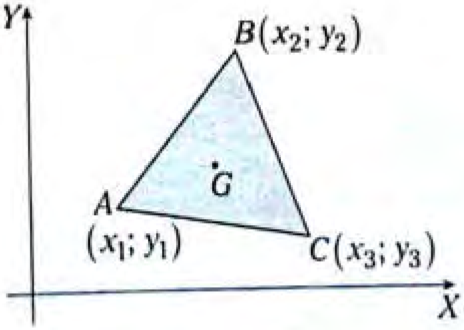
Donde

$$\boxed{x_p=\frac{bx_1+ax_2}{a+b}} \qquad \boxed{y_p=\frac{by_1+ay_2}{a+b}}$$

c. Baricentro de la región triangular

La abscisa y la ordenada del baricentro de una región triangular se calculan promediando, respectivamente, las abscisas y las ordenadas de los vértices de dicha región triangular.

Sea G el baricentro de la región triangular ABC.



Se cumple que $G=(\bar{x};\bar{y})$.

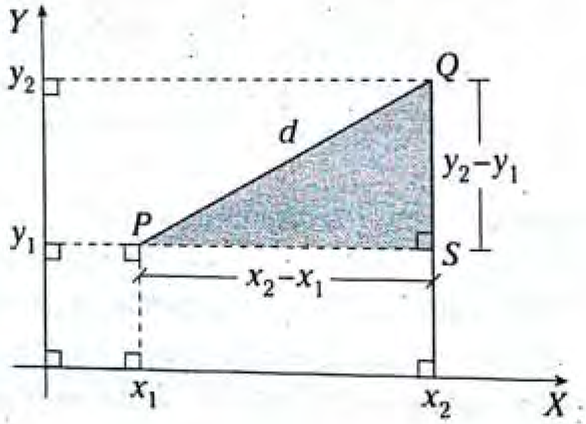
Donde

$$\boxed{\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}} \qquad \boxed{\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{2}}$$

> **NOTA**
> - Las coordenadas del origen es (0; 0).
> - Los puntos del eje de las abscisas tienen coordenadas (x; 0).
> - Los puntos del eje de las ordenadas tienen coordenadas (0; y).

Cálculo de la distancia entre dos puntos

Es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias, tanto de las abscisas como de las ordenadas de dos puntos.



Del triángulo rectángulo PSQ

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

La recta

En la geometría analítica, la recta se representa a través de una ecuación lineal de dos variables.

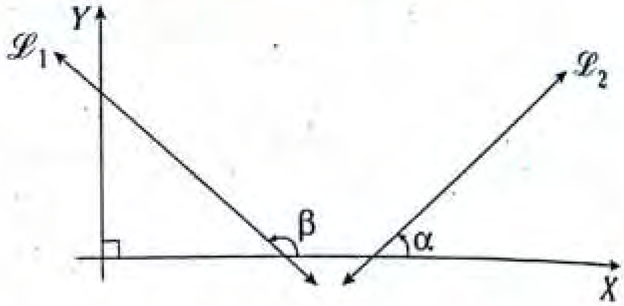
$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

Donde x e y representan la abscisa y la ordenada, respectivamente, de cada punto de la recta.

Una recta queda definida en el plano cartesiano si se conoce un punto de ella y su ángulo de inclinación.

Inclinación de una recta en el plano cartesiano

La inclinación de una recta es el ángulo que forma con el eje de las abscisas y se mide a partir del eje X en sentido antihorario.



β: medida del ángulo de inclinación de la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$

α: medida del ángulo de inclinación de la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación.

Del gráfico anterior:

- Pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$: $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}$

$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}=\tan\beta}$$

Como $\beta > 90°$ $\rightarrow$ $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}} < 0$

- Pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$: $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}}$

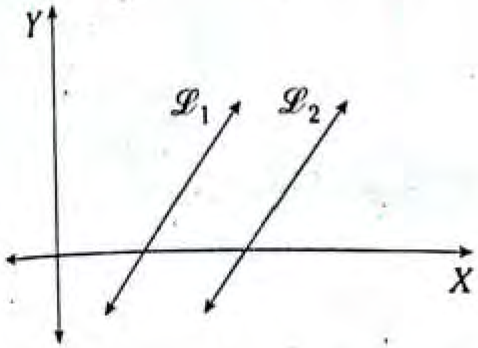
$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}}=\tan\alpha}$$

Como $\alpha < 90°$ $\rightarrow$ $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}} > 0$

> **NOTA**
> - Las rectas horizontales tienen una inclinación de 0° y su pendiente es cero.
> - Las rectas verticales tienen una inclinación de 90° y no poseen pendiente.

Rectas paralelas y perpendiculares

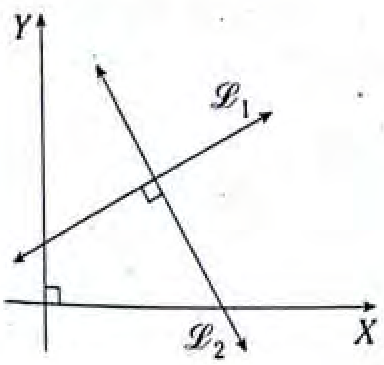
Si dos rectas tienen el mismo ángulo de inclinación y no son verticales, se puede decir que tienen la misma pendiente.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, entonces

$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1}=m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2}}$$

En el caso de que dos rectas sean perpendiculares (ninguna de ellas es vertical), se cumple que el producto de sus pendientes es –1.



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$, entonces

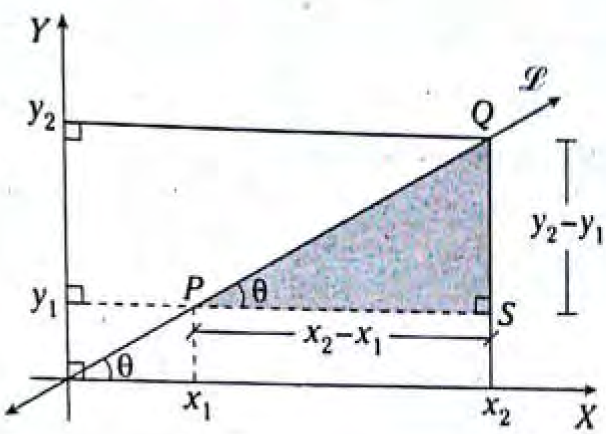
$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1}\cdot m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2}=-1}$$

Nota

Lo anterior se cumple si $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1}$ o $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2}$ son diferentes de cero.

Cálculo de la pendiente de una recta cuando se conocen las coordenadas de dos puntos

A continuación indicaremos cómo se calcula la pendiente de la recta que contiene a los puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$.



Se sabe

$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=\tan\theta}$$

Del triángulo rectángulo *PSQ*

$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Ecuación de la recta

A la ecuación lineal de dos variables, que se indicó al inicio de este tema, se le conoce como ecuación general de la recta.

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

Dependiendo de los valores que toman *A* y *B*, la recta adopta cierta posición en el plano cartesiano.

Nota

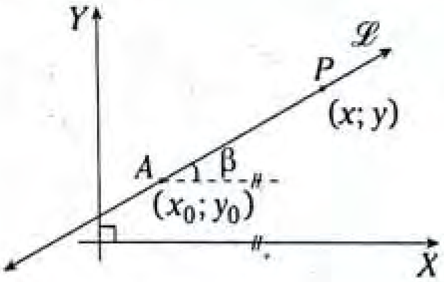
Si el ángulo de inclinación es diferente de 0° y 90° se tendrá que $(A)(B)\neq 0$.

Como sabemos, la recta queda definida en el plano cartesiano con su ángulo de inclinación y un punto de ella. Pero por las características que tiene la pendiente, esta última es la que permitirá hallar la ecuación general de la recta.

En los siguientes tres casos se muestran ecuaciones que darán la forma adecuada para conseguir la ecuación general.

Ecuación punto-pendiente

Si se conocen las coordenadas de un punto de una recta y su pendiente, se puede hallar su ecuación.



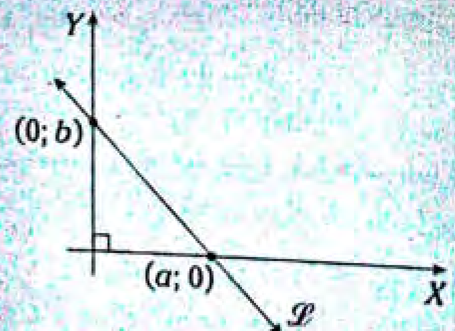
$m=\tan\beta$

Se sabe que $m=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$

$\rightarrow$ $\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$

Esta es la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ en la forma punto-pendiente, en que al punto $P=(x; y)$ se le conoce como punto genérico de la recta.

NOTA

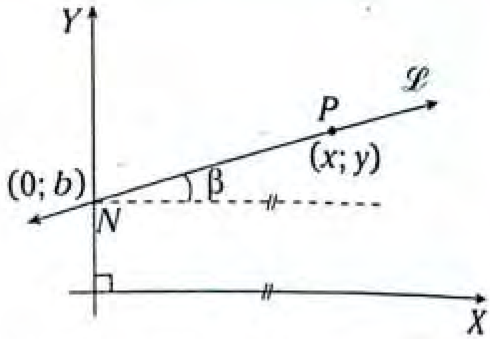


a: abscisa al origen de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

b: ordenada al origen de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Ecuación pendiente-ordenada desde el origen

Si se conoce la pendiente de una recta y su ordenada desde el origen, se podrá hallar su ecuación.



$m=\tan\beta$: pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Hallemos la ecuación punto-pendiente de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Como $y_0=b$ y $x_0=0$ $\rightarrow$ $y-b=m(x-0)$

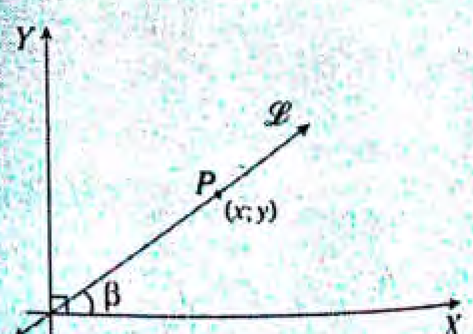
Operando tenemos

$$\boxed{y=mx+b}$$

Esta es la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada desde el origen.

NOTA

Si la recta pasa por el al origen de coordenadas, entonces la ordenada (b) es cero. Por lo tanto, la ecuación quedaría así:

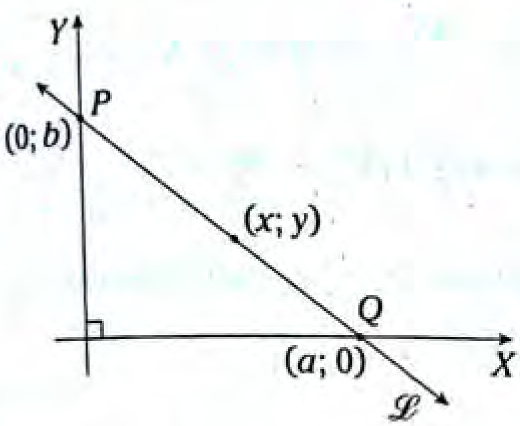


$m=\tan\beta$: pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\rightarrow$ $\boxed{y=mx}$

Ecuación con coordenadas desde el origen

Si se conoce la abscisa desde el origen y la ordenada desde el origen de una recta, se podrá hallar su ecuación.



Observamos

$P(0;b) \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $Q(a;0) \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Sea m la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$. Se sabe que

$$m=\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}$$

Hallemos la ecuación pendiente-ordenada desde el origen de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Como $y_0=b$, $x_0=0$ y $m=-\frac{b}{a}$

al reemplazar $y-b=-\frac{b}{a}(x-0)$.

Operando tenemos

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Esta es la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en la forma coordenadas desde el origen.

NOTA

De la ecuación de la recta, en su forma general $Ax+By+C=0$.

Si despejamos la variable y, tendríamos la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen.

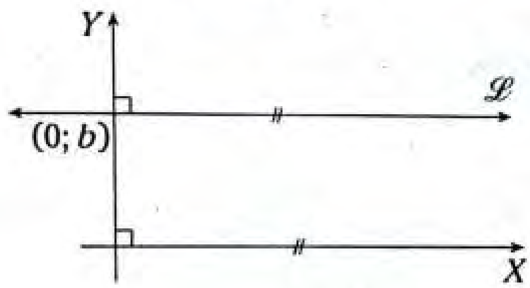
$$y=\left(-\frac{A}{B}\right)x+\left(-\frac{C}{B}\right)$$

De donde se deduce que la pendiente de la recta es $-\frac{A}{B}$ y $b=-\frac{A}{B}$.

RECTAS PARALELAS A LOS EJES DE COORDENADAS

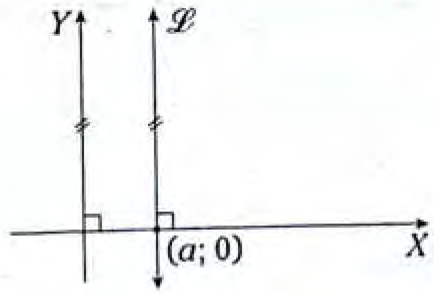
Recta paralela al eje de las abscisas

Ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $\boxed{y=b}$



Recta paralela al eje de las ordenadas

Ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $\boxed{x=a}$



NOTA

Ecuaciones de los ejes de coordenadas:

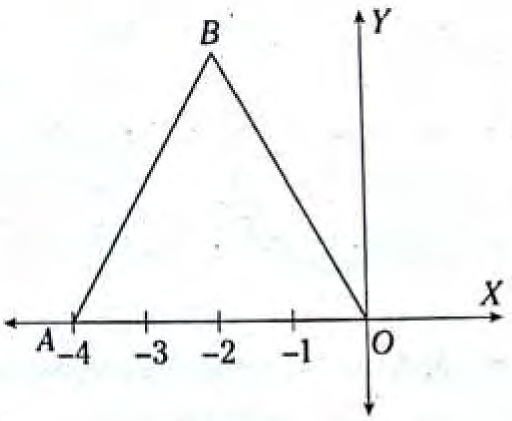
Eje X: $y=0$

Eje Y: $x=0$

PROBLEMAS RESUELTOS

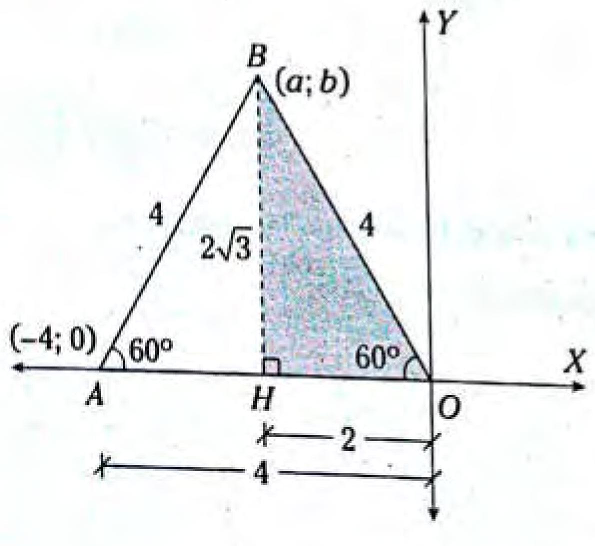
Problema N.º 1

Según el gráfico, calcule la suma de las coordenadas del vértice B si el triángulo ABO es equilátero.



UNMSM 2006-II

Resolución



Nos piden $a+b$.

Donde $B=(a; b)$

Dato: $\triangle ABO$ es equilátero

$A=(-4; 0)$

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AO}$

Como $AO=BO$

$\rightarrow \quad BO=4$

En el $\triangle BHO$: notable de 30° y 60°

$$HO=\frac{BO}{2} \rightarrow HO=\frac{4}{2}=2$$

$$BH=\frac{BO}{2}(\sqrt{3}) \rightarrow BH=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

Como B está en el segundo cuadrante

$$B=\left(-2;\ 2\sqrt{3}\right)$$

$\rightarrow \quad a=-2$

$\qquad b=2\sqrt{3}$

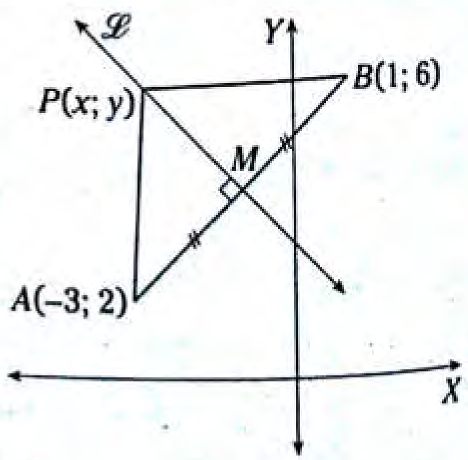
$\therefore \quad a+b=2\left(\sqrt{3}-1\right)$

Problema N.º 2

Los puntos A (–3; 2) y B (1; 6) son los extremos del segmento AB. Halle la ecuación de la mediatriz de $\overline{AB}$.

UNMSM 2007-I

Resolución



Nos piden la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$

$A=(-3; 2)$

$B=(1; 6)$

Sea $P\in\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Por teorema de la mediatriz en $\overline{AB}$

$AP=PB$

Por teorema de la distancia

$$\sqrt{(x-(-3))^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-6)^2}$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-6)^2$$

$$\cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-12y+36$$

$$6x-4y+13=-2x-12y+37$$

$$8x-8y-24=0$$

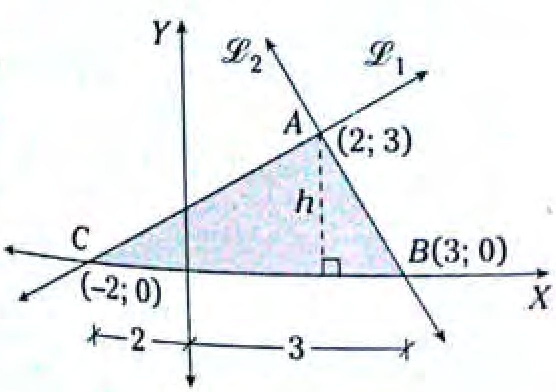
$$\therefore\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}: x-y-3=0$$

Problema N.° 3

Calcule el área de la región triangular determinada por las rectas $\mathscr{L}_1$: $3x-4y+6=0$, $\mathscr{L}_2$: $3x+y-9=0$ y el eje X.

UNMSM 2007-II

Resolución



Nos piden $\mathbb{A}_{\blacktriangle}$.

Donde $\mathbb{A}_{\blacktriangle}$ es el área de la región triangular determinada por $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ y el eje X.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$: $3x-4y+6=0$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$: $3x+y-9=0$

Graficamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$.

Para $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$

x	y
0	3/2
−2	0

$\rightarrow\ C=(-2; 0)$

Para $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

x	y
0	9
3	0

$\rightarrow\ B=(3; 0)$

Ubicación de A

(Igualamos las ecuaciones de las rectas)

$3x-4y+6=3x+y-9=0$

$5y=15$

$\rightarrow\ y=3$

Ahora se reemplaza en la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$

$\rightarrow\ x=2$

Por lo cual $A=(2; 3)$

Aplicando la fórmula básica

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle}=\frac{(BC)h}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle}=\frac{5(3)}{2}$$

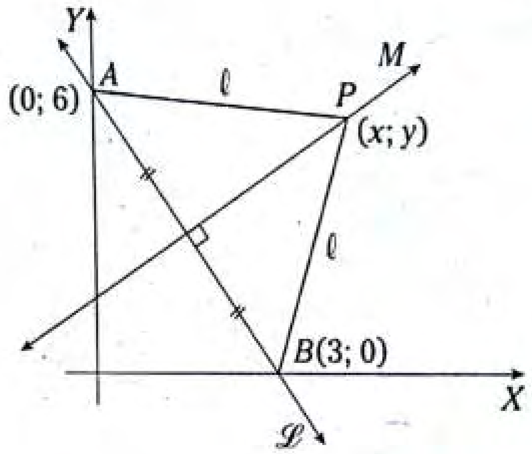
$$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacktriangle}=7{,}5\ \text{u}^2$$

Problema N.º 4

Halle la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por la intersección de la recta $2x+y-6=0$ con los ejes coordenados.

UNMSM 2010-I

Resolución



Nos piden la ecuación de $\overleftrightarrow{M}$.

Dato: $\overleftrightarrow{M}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: 2x+y-6=0$

Ahora tabulamos para poder graficar la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

x	y
0	6
3	0

$\rightarrow\ A=(0; 6)$ y $B=(3; 0)$

A continuación ubicamos el punto genérico P de $\overleftrightarrow{M}$.

$$P=(x; y)$$

Por teorema de la mediatriz en $\overline{AB}$

$$PA=PB$$

Por teorema de la distancia

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-12y+36=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}$$

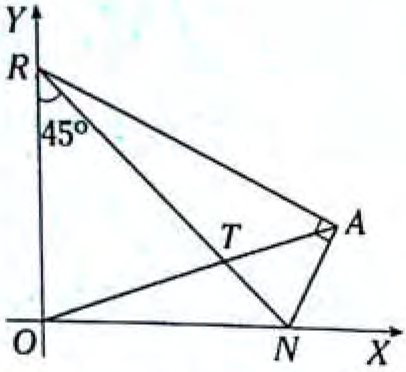
$$-12y+36=-6x+9 \rightarrow 6x-12y+27=0$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{M}: 2x-4y+9=0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

4. Del gráfico, $A=(12; 4)$. Halle las coordenadas de T.



A) $(3; 1)$

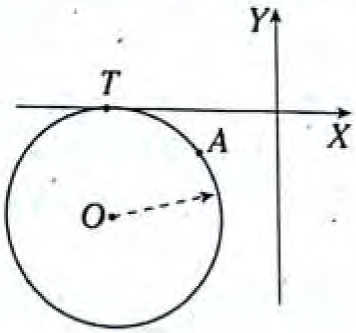
B) $(9; 3)$

C) $\left(\frac{15}{2}; \frac{5}{2}\right)$

D) $\left(7; \frac{7}{3}\right)$

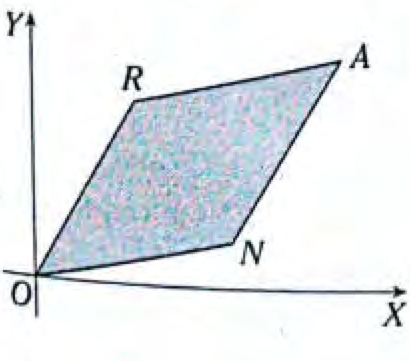
E) $(6; 2)$

5. Del gráfico, T es punto de tangencia, $A=(-3; -1)$ y $T=(-6; 0)$. Halle las coordenadas de O.



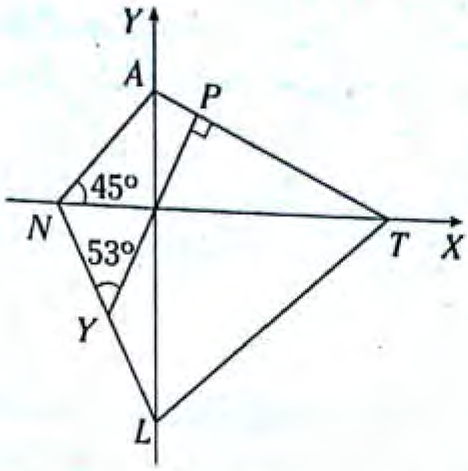
A) $(-6; -5)$
B) $(-6; -4)$
C) $(-6; -3)$
D) $(-6; -3{,}5)$
E) $(-6; -2)$

6. Del gráfico se tiene el rombo $ARON$, tal que $A=(39; 27)$; $R=(5k; n)$ y $N=(8k; \ell)$. Calcule el área de la región sombreada.



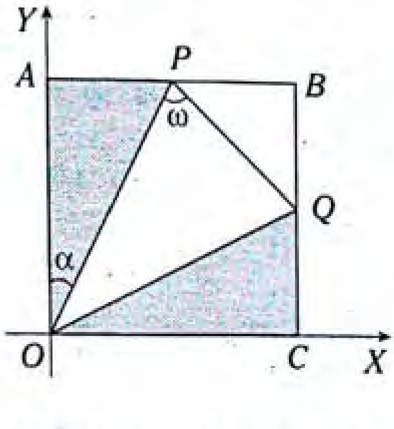
A) 375 B) 224 C) 450
D) 125 E) 150

7. Del gráfico, $N=(-5; 0)$ y $NY=YL$. Halle las coordenadas de P.



A) $(1; 3)$ B) $(2; 3)$ C) $(1; 2)$
D) $(1/2; 2)$ E) $(2; 4)$

8. Del gráfico, $ABCO$ es un cuadrado, $\omega-\alpha=45°$ y $Q=(9; 3)$. Calcule la distancia entre los baricentros de las regiones triangulares sombreadas.



A) $5\sqrt{5}$

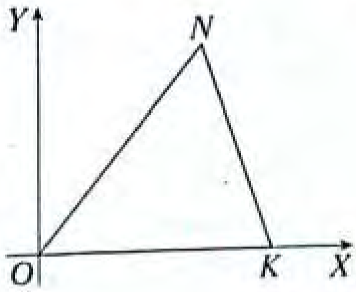
B) $\sqrt{10}$

C) $2\sqrt{5}$

D) $5\sqrt{2}$

E) $3\sqrt{5}$

9. Del gráfico, $K=(5; 0)$, $ON=8$ y $NK=7$. Halle las coordenadas del incentro del triángulo NOK.



A) $\left(\frac{5}{2}; 2\right)$

B) $(2; \sqrt{3})$

C) $(3; \sqrt{3})$

D) $(5; 2)$

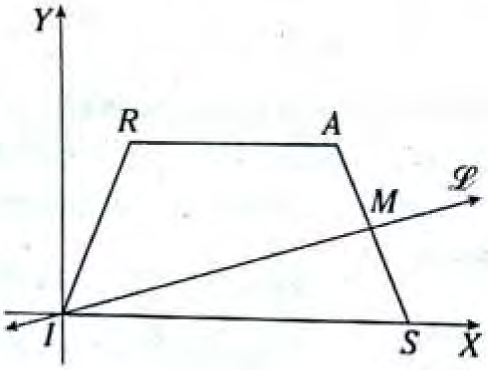
E) $(5; \sqrt{3})$

10. Sean las coordenadas de $A=(1;n)$ y $B=(3n;7)$. Luego se ubica el punto medio M de $\overline{AB}$ y O es el origen de coordenadas. Si la pendiente de $\overrightarrow{OM}$ es 0,75, calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

11. Del gráfico, el trapecio $IRAS$ es isósceles, $R=(4;6)$ y $S=(14;0)$. Si $AM=MS$, calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) 1/3 B) 1/2 C) 1/5

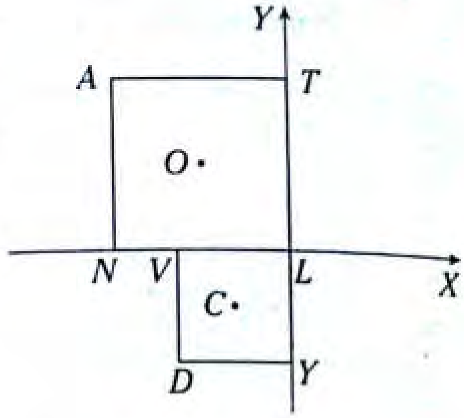
D) 1/4 E) 2/7

12. Sean las coordenadas de $A=(0;t)$, $D=(b;0)$ y $R=(\ell;0)$, tal que $23(b)=10(\ell)$; $(b>0)$. Si una circunferencia de centro I es tangente a $\overrightarrow{AD}$ en su punto medio N y tangente al eje de las abscisas en el punto R, calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{DI}$.

A) 3/4 B) 1/2 C) 1/3

D) 1/4 E) 3/2

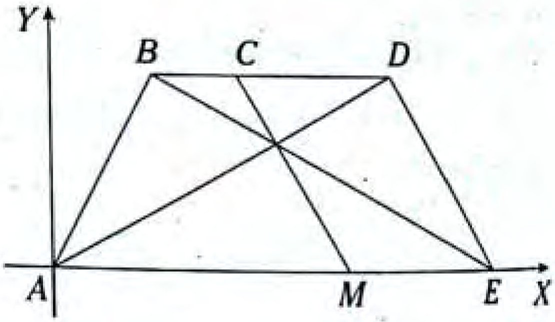
13. Del gráfico, O y C son los centros de los cuadrados $NATL$ y $VLYD$. Si $O=(-8;a)$ y $C=(-5;b)$, calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{ND}$.



A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $-\frac{5}{4}$ E) $-\frac{4}{5}$

14. Del gráfico, $B=(1;6)$, $C=(3;6)$ y $D=(7;6)$. Si $CDEM$ es un paralelogramo, halle la pendiente de $\overleftrightarrow{MC}$.



A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$

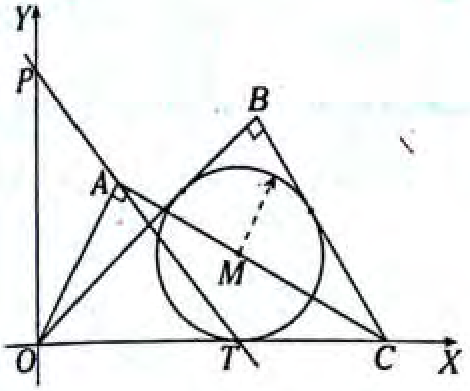
D) $-\frac{5}{4}$ E) $-\frac{6}{5}$

15. En un triángulo ABC, $A=(1;2)$, y las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que son perpendiculares, se intersecan en $M=(6;2)$. Si $B(a;3a)$ y $a>0$, halle la pendiente de $\overleftrightarrow{MB}$.

A) 2 B) -1 C) $-1/2$

D) $-2/3$ E) 3/2

16. Del gráfico, la circunferencia de centro M está inscrita en el triángulo OBC y $P=(0; 8)$. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{PT}$.

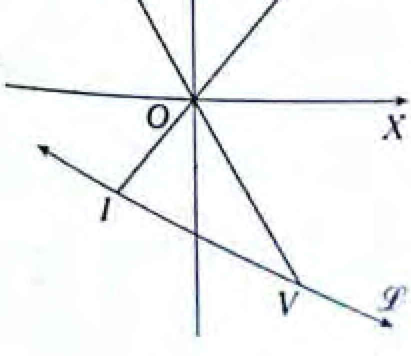


A) $x+y-8=0$ B) $x+y-4=0$
C) $x+2y-3=0$
D) $x+3y-6=0$ E) $x+2y-12=0$

17. En el plano cartesiano se tienen los puntos $A=(-4; 0)$, $D=(0; 8)$ y $R=(6; 0)$. Por el punto R se traza la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, la cual es perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ e interseca al eje de las ordenadas en I. Halle las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices de $\overline{IR}$ y $\overline{AD}$.

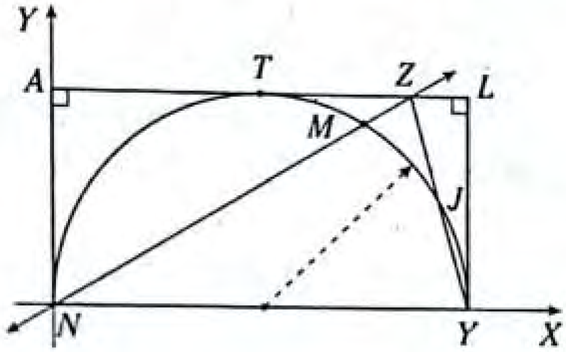
A) $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ B) $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ C) $(3; 2)$
D) $(4; 3)$ E) $(3; 1)$

18. Del gráfico, $D=(-4; 2)$, $A=(4; 6)$, $AO=2(OI)$ y $5(OD)=2(OV)$. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



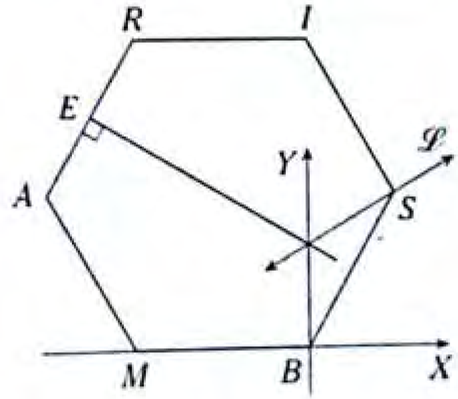
A) $x+6y+20=0$
B) $x+7y+23=0$
C) $x+8y+21=0$
D) $2x+7y+23=0$
E) $x+5y+20=0$

19. Del gráfico, T es punto de tangencia, $ZJ=JY$ y $M=(3; t)$. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{ZN}$.



A) $x-3y=0$ B) $x-2y=0$
C) $2x-\sqrt{3}y=0$
D) $x-\sqrt{3}y=0$ E) $x-4y=0$

20. Del gráfico, se tiene el hexágono regular $MARISB$, en que $A=(-6; t)$ y $AE=ER$. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) $x-\sqrt{3}y+4=0$
B) $2x-\sqrt{3}y+2=0$
C) $2x-\sqrt{3}y+8=0$
D) $x-3y+4=0$
E) $x-\sqrt{3}y+6=0$

NIVEL INTERMEDIO

21. Se tiene el paralelogramo $ABCD$, cuyos vértices son $A(3;0)$, $B(1;4)$, $C(-3;2)$ y $D(a;b)$. Calcule el área de la región triangular ALD si se sabe que L pertenece a $\overline{BC}$.

A) 8 B) 10 C) 20
D) 15 E) 12

22. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1$: $x+3y+8=0$ y $\mathscr{L}_2$: $2x+\ell y-8=0$, halle ℓ para que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ sea perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$.

A) −2 B) 2/3 C) −1
D) −2/3 E) 1

23. Una recta es paralela a otra recta que tiene por ecuación $5x+8y=12$ y dista $\sqrt{89}$ unidades del origen. Halle la ecuación de dicha recta.

A) $5x+8y-98=0$
B) $5x+8y-78=0$
C) $5x-8y-89=0$
D) $8x+5y-89=0$
E) $5x+8y-89=0$

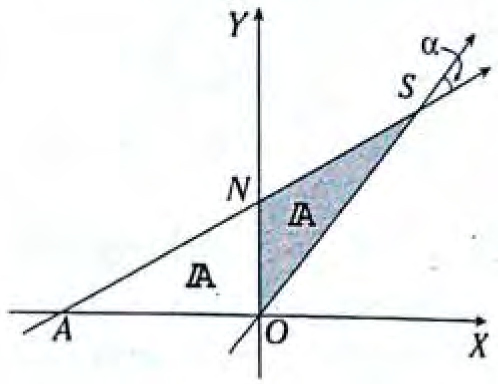
24. ¿Qué tipo de triángulo es aquel cuyos vértices son $A(4;-3)$, $B(3;0)$ y $C(0;1)$?

A) triángulo equilátero
B) triángulo escaleno
C) triángulo rectángulo
D) triángulo isósceles
E) triángulo acutángulo

25. Halle el punto simétrico A', del punto $A(3;2)$, respecto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $2x+y-12=0$.

A) $\left(\frac{31}{5};\frac{9}{5}\right)$ B) $\left(\frac{31}{5};\frac{16}{5}\right)$ C) $\left(\frac{33}{5};\frac{18}{5}\right)$
D) $(6;3)$ E) $\left(\frac{31}{5};\frac{18}{5}\right)$

26. Del gráfico, $AO=8$ y $AS=20$. Calcule $\tan\alpha$.



A) $\frac{5}{17}$ B) $\frac{6}{17}$ C) $\frac{6}{19}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

27. Dados los puntos $L(2a;a)$ y $S(-2a-1;2a+2)$, tal que la suma de la abscisa de L y de la ordenada de S es 10. Halle la distancia entre A y B.

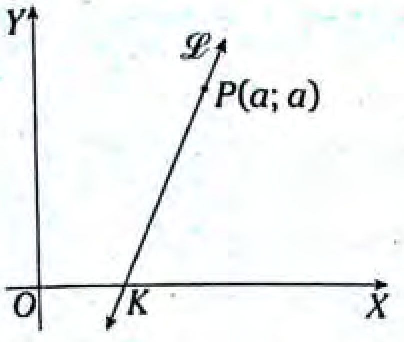
A) $\sqrt{107}$ B) $\sqrt{95}$ C) $4\sqrt{5}$
D) $\sqrt{106}$ E) $\sqrt{97}$

28. Los vértices de un triángulo son $A=(10;0)$, $B=(4;2)$ y $C=(-2;6)$. Halle la longitud de la base media respecto al lado BC del triángulo ABC.

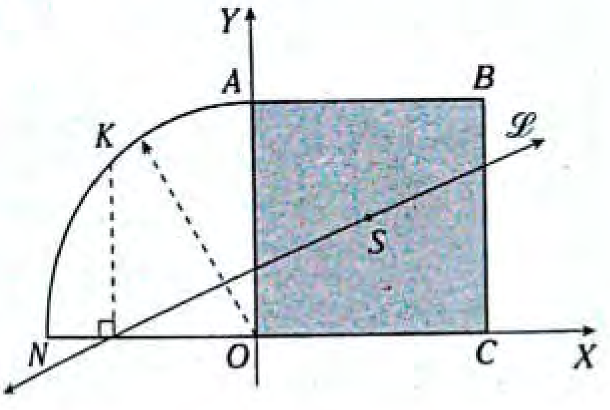
A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{13}$ C) 4
D) $\sqrt{15}$ E) $3\sqrt{2}$

29. Del gráfico, $OK=2$ y la suma de las coordenadas de P es 10. Calcule la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

A) 1
B) 4/3
C) 7/3
D) 5/3
E) 3/2



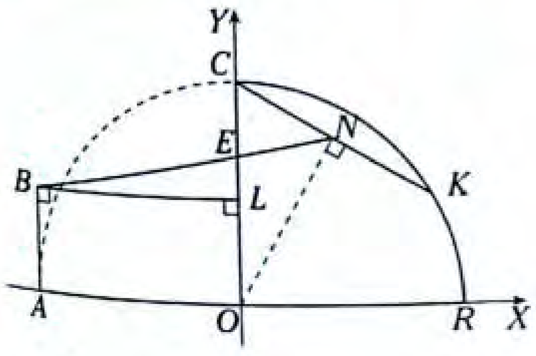
30. Del gráfico, el área de la región cuadrada $ABCO$ es 100 u^2, $m\widehat{KA}=37°$ y S es centro de $ABCO$. Halle la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{5}{11}$ E) $\frac{4}{11}$

31. Del gráfico, $m\widehat{KR}=30°$ y $CL=NK=2$. Halle las coordenadas de E.



A) $\left(0; \frac{4(2-\sqrt{3})}{3}\right)$

B) $\left(0; \frac{4(4-\sqrt{3})}{13}\right)$

C) $\left(0; \frac{(12-\sqrt{3})}{3}\right)$

D) $\left(0; \frac{2(12-\sqrt{3})}{13}\right)$

E) $\left(0; \frac{2(21-2\sqrt{3})}{13}\right)$

32. Halle la distancia del punto (0; –1) a otro punto sobre el eje Y, que sea equidistante de (4; –1) y (3; –5).

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{25}{8}$ C) $\frac{23}{8}$

D) $\frac{7}{8}$ E) 3

33. Calcule la medida del ángulo entre $\mathscr{L}_1$: $4x-3y-12=0$ y $\mathscr{L}_2$: $x-3y+6=0$

A) 31,5° B) 32,5° C) 34,5°
D) 36,5° E) 22,5°

34. Halle la ecuación de la recta que pasa por $A(4; 4/3)$ y por la intersección de las rectas $3x-4y-2=0$ y $9x-11y-6=0$.

A) $6x-15y-2=0$
B) $3x-15y-4=0$
C) $3x-15y-8=0$
D) $6x-15y-4=0$
E) $6x-15y-8=0$

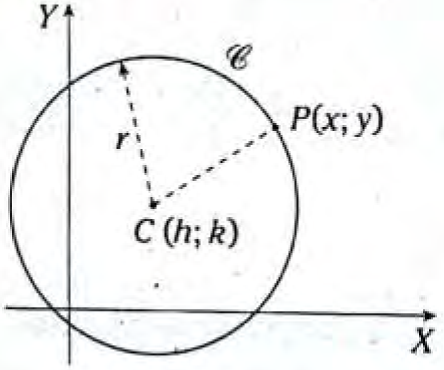
Circunferencia y parábola

Capítulo XVIII

OBJETIVOS

- Estudiar la circunferencia y la parábola en el plano cartesiano.
- Reconocer las propiedades de la circunferencia y la parábola para plantear sus ecuaciones respectivas.

La circunferencia



Del gráfico, $\mathscr{C}$ es una circunferencia de radio r, C es el centro de $\mathscr{C}$, cuya coordenada es $(h; k)$ y P es un punto cualquiera de $\mathscr{C}$, cuya coordenada es $(x; y)$.

Del gráfico, al aplicar la distancia entre dos puntos

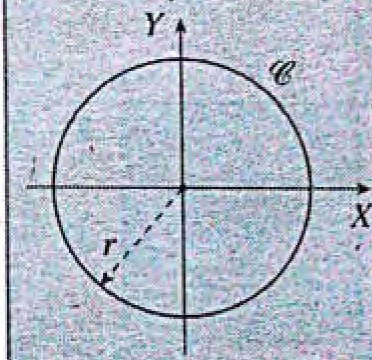
$$r = PC = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Ahora elevando al cuadrado y ordenando

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

A la ecuación anterior se le denomina ecuación ordinaria.

NOTA



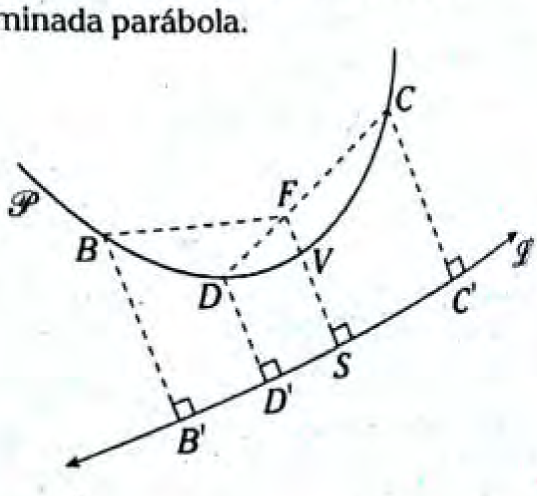
La ecuación de la $\mathscr{C}$ es

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Denominada ecuación canónica

La parábola

En un plano, si ubicamos el punto fijo F y luego trazamos una recta fija $\mathscr{L}$, entonces los puntos en dicho plano, que se encuentran igualmente distanciados del punto F y de la recta $\mathscr{L}$, formarán la denominada parábola.



F: punto fijo, $\mathscr{L}$: recta fija y $\mathscr{P}$: parábola

B, D, V, C: puntos de la $\mathscr{P}$ con foco F y directriz $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

- $BF=BB'$
- $DF=DD'$
- $FV=VS$
- $CF=CC'$

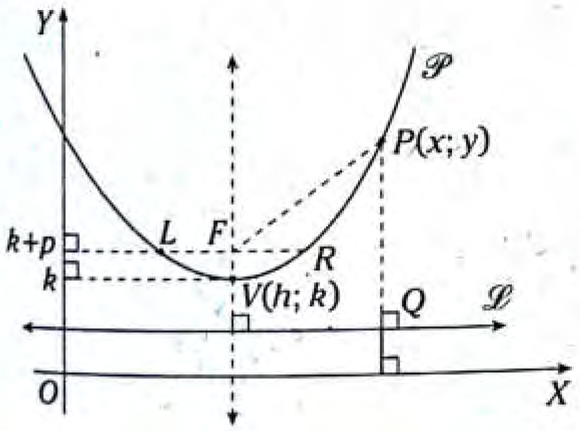
Eje focal: recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

p: parámetro (es un escalar)

$FV=VS$: módulo del parámetro

$\overline{CD}$: cuerda focal

Parábola cuando el eje focal es paralelo al eje Y o es el eje Y



En el gráfico $F(h; k+p)$: foco de la parábola $\mathscr{P}$

Lado recto: $LR=4p$

Como se cumple $PF=PQ$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}=y-(k-p)$$

Elevando al cuadrado

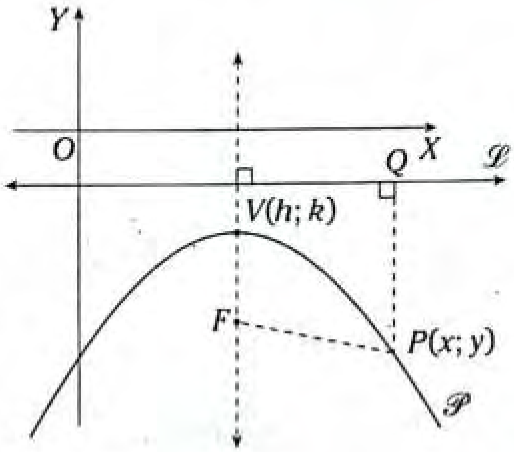
$$(x-h)^2+(y-(k+p))^2=(y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2=(y-(k-p))^2-(y-(k+p))^2$$

Aplicando la identidad de Legendre

$\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$ Ecuación ordinaria

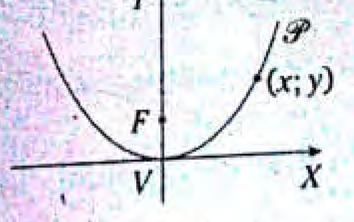
Vértice $V(h; k)$ $\quad p>0$



$\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$ Ecuación ordinaria

Vértice $V(h; k)$ $\quad p<0$

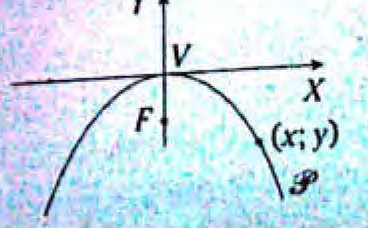
NOTA



$\boxed{x^2=4py}$

$p>0$

La parábola se abre hacia arriba.

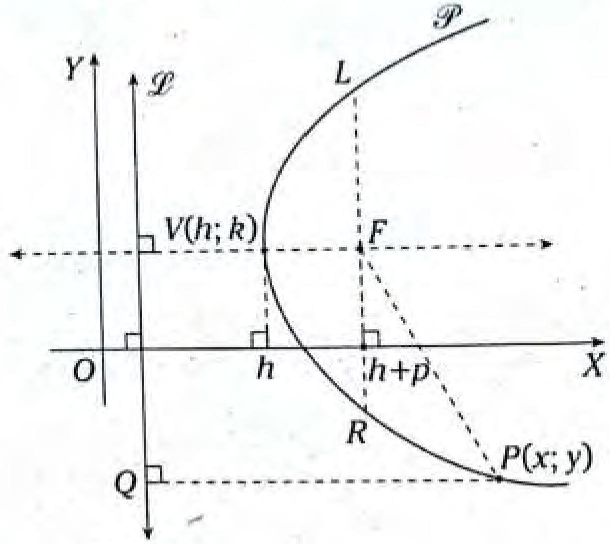


$\boxed{x^2=4py}$

$p<0$

La parábola se abre hacia abajo.

Parábola cuando el eje focal es paralelo al eje X o es el eje X



En el gráfico $F(h+p;\, k)$: foco de la parábola $\mathscr{P}$

Lado recto: $LR=4p$

Como se cumple $PF=PQ$

$$x-(h-p)=\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado

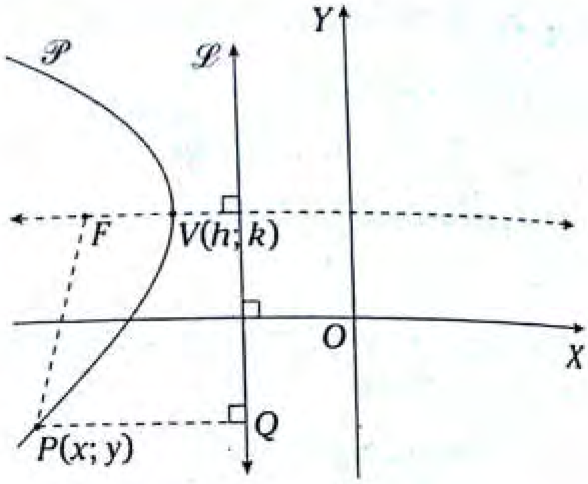
$$(x-(h-p))^2=(x-(h+p))^2+(y-k)^2$$

$$(x-(h-p))^2-(x-(h+p))^2=(y-k)^2$$

Aplicando la identidad de Legendre

$\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$ Ecuación ordinaria

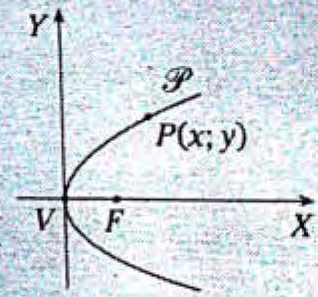
Vértice $V(h;\, k)$ $\quad p>0$



$\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$ Ecuación ordinaria

Vértice $V(h;\, k)$ $\quad p<0$

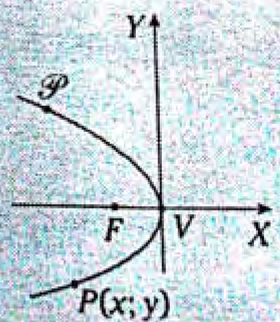
Nota



$\boxed{y^2=4px}$

$p>0$

La parábola se abre hacia la derecha.



$\boxed{y^2=4px}$

$p<0$

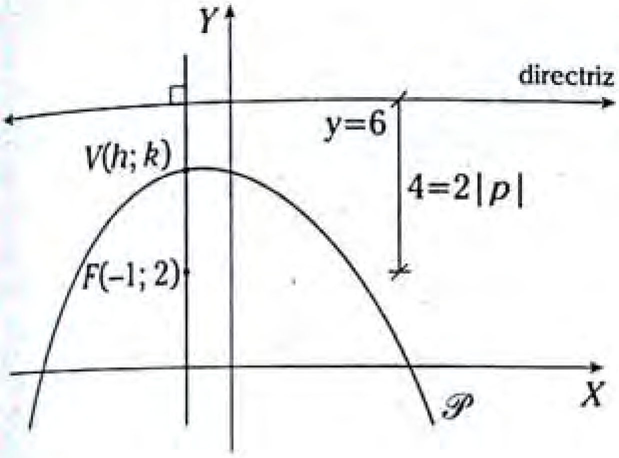
La parábola se abre hacia la izquierda.

Problema N.° 1

Una parábola tiene un foco en el punto $F(-1; 2)$ y su directriz es la recta $\mathscr{L}$: $y-6=0$. Determine su ecuación.

UNMSM 1996

Resolución



Nos piden la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$.

$(x-h)^2=4p(y-k)$ (I)

Del gráfico $2|p|=4 \rightarrow |p|=-2$

$p<0$ (abierta hacia abajo)

De lo cual $p=-2$

$\rightarrow V(-1; 4)$

Reemplazamos en (I)

$(x+1)^2=4(-2)(y-4)$

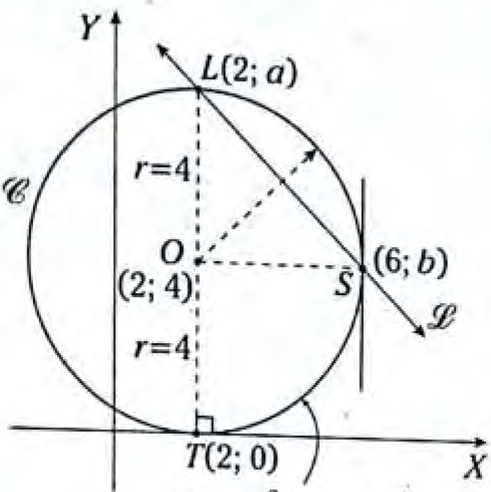
$\therefore x^2+2x+8y-31=0$

Problema N.° 2

Halle la ecuación de la recta que se interseca con la circunferencia $\mathscr{C}$: $(x-2)^2+(y-4)^2=16$ en los puntos $(2; a)$ y $(6; b)$, donde $a>0$, $b>0$.

UNMSM 2005-II

Resolución



$(x-2)^2+(y-4)^2=4^2$

Nos piden la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

De la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$, se tiene que las coordenadas de O son $(2; 4)$ y radio $r=4$.

$(2; a)$: este punto $\in \mathscr{C}$ y la distancia de L y T al eje Y es igual al doble de la distancia de O al eje Y.

$\rightarrow a=0 \wedge a=8$, pero por dato $a>0$

$\rightarrow a=8$

$(6; b)$: este punto $\in \mathscr{C}$ y la abscisa S es 6, y como $r=4 \rightarrow \overline{OS}$ // eje X ($m\measuredangle LSO=45°$)

Ahora calculamos la pendiente de

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $m_{\mathscr{L}}=\tan 135°=-1$

Por ecuación punto-pendiente

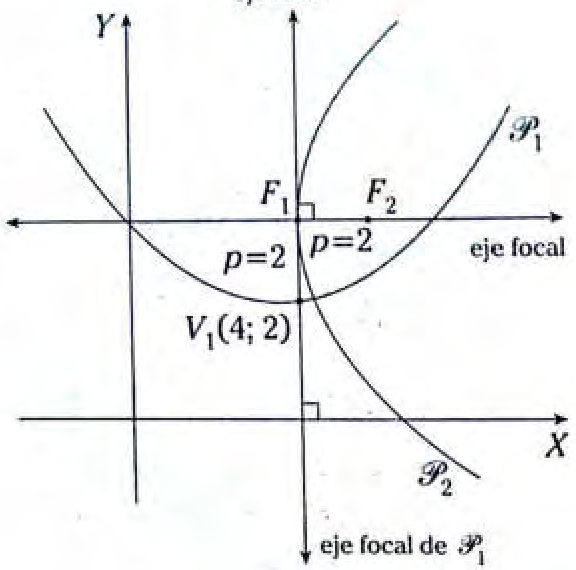
$y-8=-1(x-2)$

$\therefore x+y-10=0$

Problema N.° 3

Dada la ecuación de la parábola $\mathscr{P}_1$: $x^2-16x-8y+32=0$, halle la ecuación de la parábola $\mathscr{P}_2$ si su vértice es el foco de la parábola $\mathscr{P}_1$ y su eje focal es paralelo al eje X, además los parámetros son iguales y $\mathscr{P}_2$ se abre hacia la derecha.

Resolución



Nos piden la ecuación de la parábola $\mathscr{P}_2$.

De la ecuación de $\mathscr{P}_1$: $x^2-16x-8y+32=0$, le damos la forma ordinaria $(x-4)^2=8(y-2)$ $\rightarrow$ $p=2$ y el vértice V_1 es (4; 2).

Con estos elementos podemos decir que la parábola 1 se abre hacia arriba.

$F_1=(4; 4)$ es el vértice de $\mathscr{P}_2$

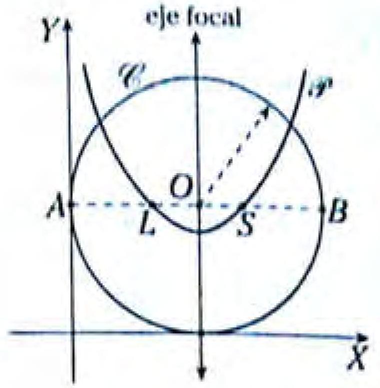
$V_2=F_1$ y $p=2$ (dato)

$\rightarrow$ $\mathscr{P}_2$: $(y-4)^2=4(2)(x-4)$

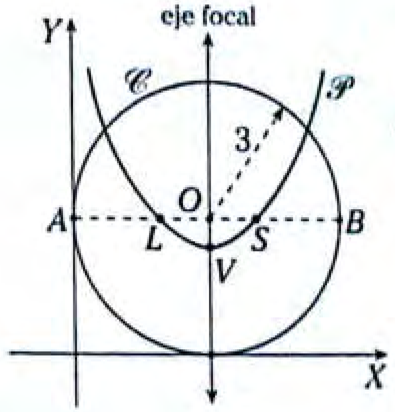
$\therefore$ $(y-4)^2=8(x-4)$

Problema N.° 4

Del gráfico, L y S trisecan a $\overline{BA}$ y el radio de $\mathscr{C}$ es 3. Halle la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$. (O es el foco de $\mathscr{P}$).



Resolución



Nos piden la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$.

Como por dato L y S trisecan a $\overline{BA}$

$\rightarrow$ $AL=LS=SB=\dfrac{AB}{3}$

es decir, $AL=LS=SB=2$.

Como O es el foco de la parábola $\mathscr{P}$ y sus coordenadas son (3; 3)

se sabe que $4p=2$ $\rightarrow$ $p=\dfrac{1}{2}$

por lo cual las coordenadas de V: $V\left(3; \dfrac{5}{2}\right)$

$\mathscr{P}$: $(x-h)^2=4p(y-k)$

$(x-3)^2=4\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{5}{2}\right)$

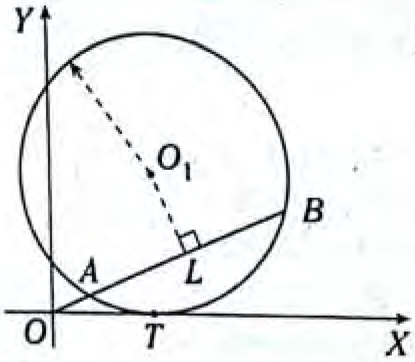
$\therefore$ $(x-3)^2=2(y-5)$

NIVEL BÁSICO

1. Halle el área de la región triangular cuyos vértices son el centro de $\mathscr{C}$, el simétrico de dicho centro respecto al eje Y y el origen de coordenadas ($\mathscr{C}$: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$).

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

2. Del gráfico, T es punto de tangencia, $AB=6$, $O_1L=2(AO)$ y $OT=LO_1$. Halle la ecuación de la circunferencia.

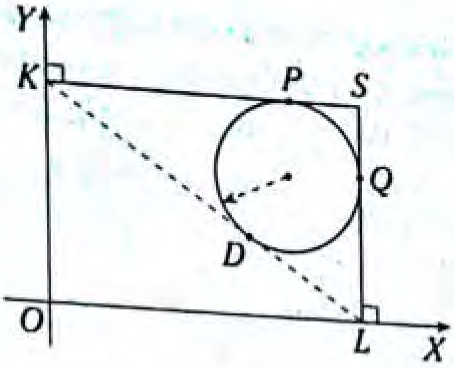


A) $x^2+y^2-10x-8y+16=0$
B) $x^2+y^2-4x-5y+9=0$
C) $x^2+y^2-8x-10y+18=0$
D) $x^2+y^2-6x-5y+15=0$
E) $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

3. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2; 1)$, $B(-2; 3)$ y tiene su centro sobre el eje X.

A) $x^2+y^2+2x-10=0$
B) $x^2+y^2+2x-9=0$
C) $x^2+y^2+4x-9=0$
D) $x^2+y^2+x-8=0$
E) $x^2+y^2+2x-8=0$

4. Del gráfico, $KS=8$ y $SO=10$. Halle la ecuación de la circunferencia.

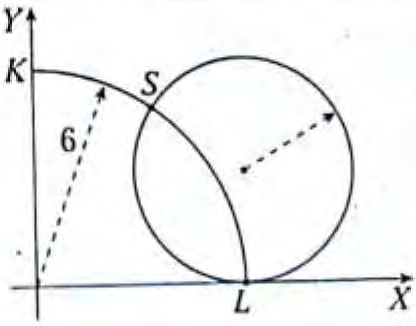


A) $x^2+y^2-12x-8y+48=0$
B) $x^2+y^2-8x-12y+48=0$
C) $x^2+y^2-12x-6y+42=0$
D) $x^2+y^2-12x-8y+42=0$
E) $x^2+y^2-12x-8y+52=0$

5. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(0; -3)$, por el simétrico de A respecto al eje X, y que su centro se encuentra a 4 unidades del origen de coordenadas.

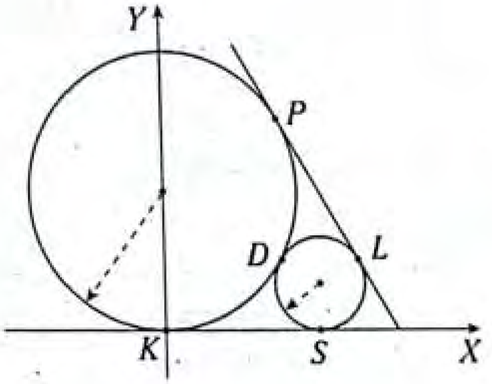
A) $x^2+y^2-6x-8=0$
B) $x^2+y^2-8x-9=0$
C) $x^2+y^2-8x-12=0$
D) $x^2+y^2-8x-10=0$
E) $x^2+y^2-6x-9=0$

6. Del gráfico, $m\widehat{SK}=30°$. Halle la ecuación de la circunferencia si L es punto de tangencia.



A) $x^2+y^2-12x-4\sqrt{3}y+18=0$
B) $x^2+y^2-12x-2\sqrt{3}y+18=0$
C) $x^2+y^2-12x-4\sqrt{3}y+36=0$
D) $x^2+y^2-8x-4\sqrt{3}y+36=0$
E) $x^2+y^2-12x-4\sqrt{3}y+32=0$

7. Del gráfico, N, P, L, S, K y D son puntos de tangencia, $m\widehat{PK}=120^{\circ}$ y el radio mayor mide 6. Halle la ecuación de la circunferencia menor.



A) $x^2+y^2-6\sqrt{3}x-4y+48=0$
B) $x^2+y^2-8\sqrt{3}x-4y+52=0$
C) $x^2+y^2-8\sqrt{3}x-4y+48=0$
D) $x^2+y^2-6\sqrt{3}x-4y+46=0$
E) $x^2+y^2-8\sqrt{3}x-4y+42=0$

8. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(0;-3)$, cuyo radio es $\sqrt{5}$ y cuyo centro está en la bisectriz del tercer cuadrante.

A) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$
B) $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
C) $(x+3)^2+(y+3)^2=5$
D) $(x+4)^2+(y+4)^2=5$
E) $(x+2)^2+(y-2)^2=5$

9. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $A(3;1)$ y es tangente a la recta $x-2y=0$.

A) $(x-3)^2+(y-1)^2=1/4$
B) $(x-3)^2+(y-1)^2=1/5$
C) $(x-3)^2+(y-1)^2=2$
D) $(x-3)^2+(y-1)^2=3$
E) $(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$

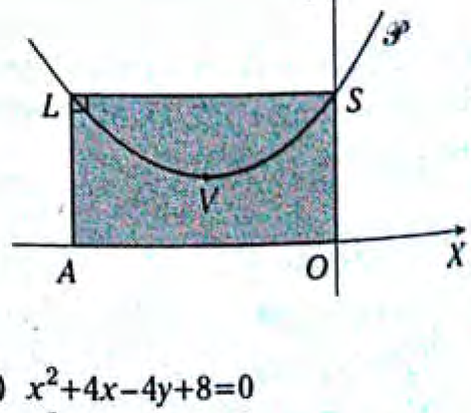
10. Dada la ecuación de la parábola $x^2-8x+8y=0$, halle la suma de la abscisa y la ordenada del vértice de dicha parábola.

A) 5 B) 6 C) 4
D) 7 E) 8

11. Halle la ecuación de la parábola de directriz $x=-6$ y de foco $(2;0)$.

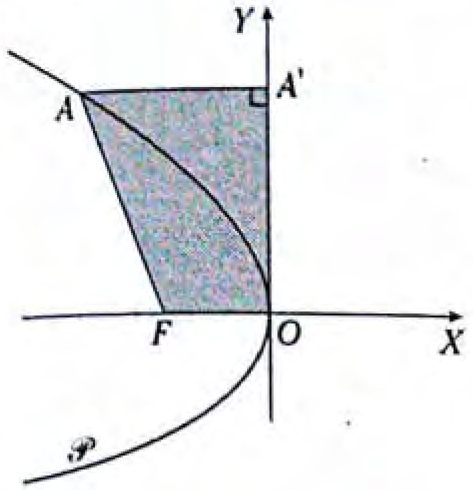
A) $y^2-24x+124=0$
B) $y^2-12x+72=0$
C) $y^2-24x+144=0$
D) $y^2-16x-32=0$
E) $y^2-12x+144=0$

12. Del gráfico, V es el vértice de $\mathcal{P}$ y el centro de $ALSO$, además el área de la región cuadrangular $ALSO$ es $8\ u^2$. Halle la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ si el eje X es la directriz.



A) $x^2+4x-4y+8=0$
B) $x^2+4x-4y-8=0$
C) $x^2+4x-8y-12=0$
D) $x^2+4x-2y-6=0$
E) $x^2+4x-4y=0$

13. Del gráfico, F y O son el foco y el vértice de la parábola $\mathscr{P}$, $A'O=4\sqrt{6}$ y el área de la región $AA'OF$ es $20\sqrt{6}$. Halle la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$.



A) $y^2+12x=0$
B) $y^2+16x=0$
C) $y^2+24x=0$
D) $y^2+8x=0$
E) $y^2+32x=0$

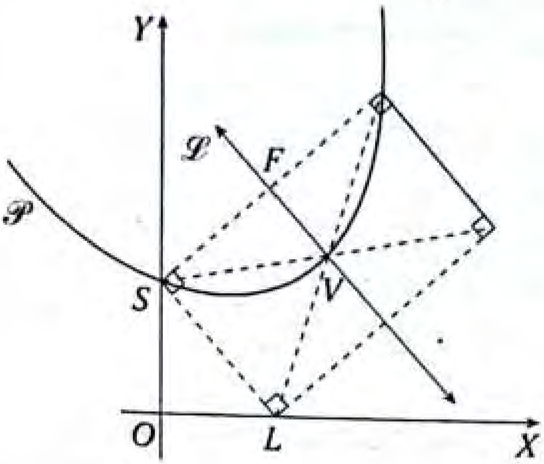
14. Halle la ecuación de la directriz de la parábola $y^2-6y-8x+17=0$.

A) $x+2=0$ B) $x+3=0$ C) $x+1=0$
D) $x-1=0$ E) $x-2=0$

15. Halle la ecuación de la recta que pasa por uno de los puntos comunes entre $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, y que es perpendicular a la cuerda común; además $\mathscr{P}_1$ es $x^2-2y=0$ y $\mathscr{P}_2$ es $y^2-2x=0$.

A) $x-y-2=0$
B) $x+y-2=0$
C) $x+y+4=0$
D) $x+y=0$
E) $x+y-4=0$

16. Del gráfico, F y V son el foco y el vértice de la parábola $\mathscr{P}$, $SO=4$ y $LO=3$. Halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.



A) $4x+3y-5=0$
B) $4x+3y+5=0$
C) $4x+3y-37=0$
D) $4x+3y-7=0$
E) $4x+3y-12=0$

17. Se tiene una parábola $y^2-16x=0$ y una recta $x+y-5=0$. Calcule la cuerda determinada por la recta en la parábola.

A) $24\sqrt{2}$ B) $20\sqrt{2}$ C) 20
D) $18\sqrt{2}$ E) $16\sqrt{2}$

18. Halle la ecuación de la parábola, cuyo eje es paralelo al eje Y, de vértice en el eje X y que pasa por los puntos $A(1; 25/8)$ y $B(8; 1/2)$.

A) $x^2-12x-8y+30=0$
B) $x^2-12x-8y+36=0$
C) $x^2-12x-8y+32=0$
D) $x^2+12x-8y+36=0$
E) $x^2-12x+8y+36=0$

NIVEL INTERMEDIO

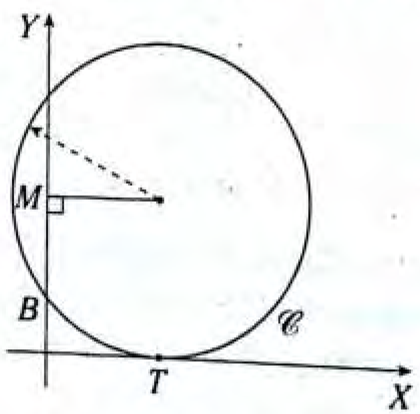
19. Una circunferencia tiene su centro en el eje de abscisas, y contiene al origen de coordenadas y al punto (–1; 5). Halle la ecuación de dicha circunferencia.

A) $(x+12)^2+y^2=144$
B) $(x-13)^2+y^2=169$
C) $(x+5)^2+y^2=25$
D) $(x+13)^2+y^2=169$
E) $x^2+(y+13)^2=169$

20. Sea una circunferencia, cuyo diámetro se ubica en uno de los ejes de coordenadas, y que contiene a los puntos (–18; 0) y (32; 0). Calcule la suma de la abscisa y ordenada de su centro más el radio de dicha circunferencia.

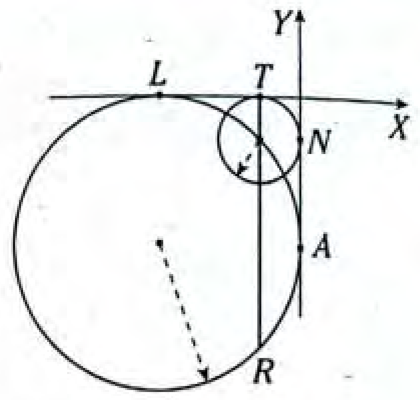
A) 24 B) 32 C) 25
D) 18 E) 50

21. Del gráfico, $B=(0; 1)$ y $MT=\sqrt{34}$. Halle la ecuación de $\mathscr{C}$. (T es punto de tangencia).



A) $(x-2)^2+(y-5)^2=20$
B) $(x+3)^2+(y-6)^2=16$
C) $(x-3)^2+(y-6)^2=25$
D) $(x-2)^2+(y-6)^2=29$
E) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

22. Del gráfico, N, A, T y L son puntos de tangencia, y $RT=4+2\sqrt{2}$. Halle la ecuación de la circunferencia de mayor radio.



A) $(x+4\sqrt{2})^2+(y+4\sqrt{2})^2=32$
B) $(x+2\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2=8$
C) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$
D) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$
E) $(x+6)^2+(y+6)^2=36$

23. Halle el área de un círculo cuya circunferencia correspondiente tiene por ecuación $x^2+y^2+8x-10y-4=0$.

A) 36π B) 45π C) 25π
D) 64π E) 16π

24. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias concéntricas. Si el punto $M(2; -2)$ pertenece a $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_1$ es $x^2+y^2+6x-4y+k=0$, halle la ecuación de $\mathscr{C}_2$.

A) $x^2+y^2+6x-4y-24=0$
B) $x^2+y^2+6x-4y-10=0$
C) $x^2+y^2+6x-4y+24=0$
D) $x^2+y^2+6x-4y-28=0$
E) $x^2+y^2+6x-4y+10=0$

25. Halle el radio de una circunferencia que pasa por los puntos $(-2; 7)$, $(-4; 3)$ y $(-8; 5)$.

A) $\sqrt{10}$ B) 4 C) 9
D) 5 E) 2

26. Una circunferencia contiene al origen de coordenadas y su diámetro está contenido en la $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, cuya pendiente es 0,75. Si las distancias del origen hacia dicha recta es 4,8, halle la ecuación de dicha circunferencia.

A) $(x+4)^2+(y+3)^2=25$
B) $(x+2)^2+(y-1)^2=5$
C) $(x-1)^2+(y)^2=1$
D) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$
E) $(x-4)^2+(y-3)^2=5$

27. Halle las coordenadas del centro de una circunferencia que contiene a los puntos $(-4; -4)$ y $(0; -2)$ y que dicho centro pertenece a la recta cuya ecuación es $x-y=0$.

A) $(-2; -2)$
B) $(-1; -1)$
C) $(-4/3; -4/3)$
D) $(-5/3; -5/3)$
E) $(-7/3; -7/3)$

28. Halle la ecuación de una parábola cuyo vértice es el punto $V(-2; 4)$, su eje es la recta $y=4$ y contiene al origen de coordenadas.

A) $(x+2)^2=-(y-4)$
B) $(y+2)^2=4(x-2)$
C) $(y+4)^2=8(x+2)$
D) $(y-4)^2=8(x+2)$
E) $(y-4)^2=8(x-2)$

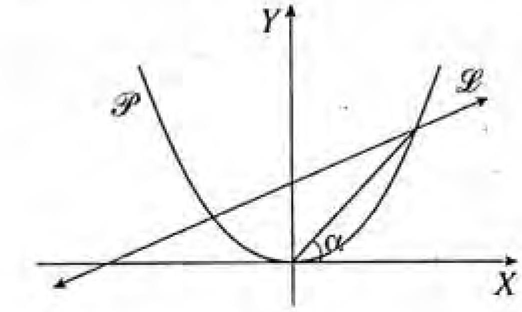
29. La ecuación de una parábola es
$x^2-10x-12y-23=0$.
Halle la distancia del foco a la directriz.

A) 3 B) 6 C) 5
D) 2 E) 4

30. En una parábola $\mathscr{P}$, el eje Y es la directriz y su vértice V se ubica en el semieje positivo de las abscisas. Si la distancia de un punto Q al vértice y al foco es 6, halle las coordenadas de Q.

A) $(6; 6)$ B) $(6; 4\sqrt{2})$ C) $(3; 3)$
D) $(4; 4)$ E) $(6; 3)$

31. La ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ es $x^2=9y$ y la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es $x-7y+4=0$. Calcule α.



A) 30° B) 15° C) 53°/2
D) 37°/2 E) 45°/2

32. Una parábola $\mathscr{P}$ tiene su vértice V en el semieje negativo del eje de ordenadas. Además $\mathscr{P}$ contiene a $A(-3; 0)$ y su simétrico respecto del origen de coordenadas. Halle la ecuación de $\mathscr{P}$ si $VA=5$.

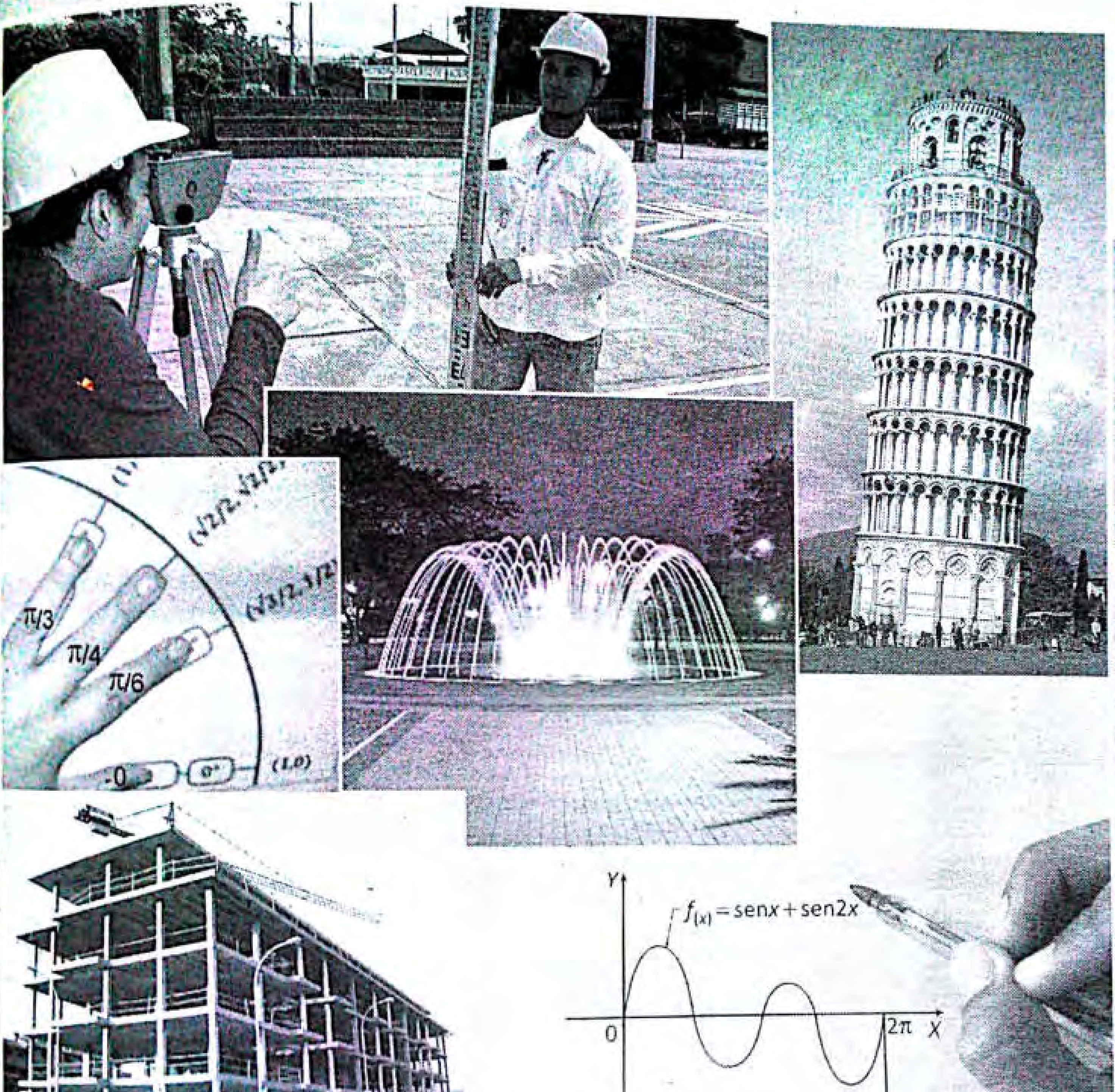
A) $(y+4)^2=-\dfrac{16}{3}x$ B) $y^2=16x$

C) $x^2=\dfrac{9}{4}(y+4)$

D) $(y-4)^2=\dfrac{16}{3}x$ E) $x^2=\dfrac{9}{4}(y-4)$

Bibliografía

- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Geometría: una visión de la planimetría.* Lima: Lumbreras Editores, 2005.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Geometría: una visión de la estereometría.* Lima: Lumbreras Editores, 2009.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Solucionario Admisión UNMSM 2000-2010-I. Aptitud académica.* Lima: Lumbreras Editores, 2010.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Solucionario Admisión UNMSM 2000-2010-I. Matemática y Ciencias Naturales.* Lima: Lumbreras Editores, 2010.
- ✓ BRUÑO, G. M. *Geometría: curso superior.* Madrid: Ediciones Bruño, 1967.
- ✓ HOWARD, E. *Estudio de las geometrías.* Volumen 1. México: Editorial Limusa S. A. de CV, 1996.
- ✓ POGORÉLOV, Aleksei. *Geometría elemental.* Moscú: Editorial Mir, 1964.
- ✓ REY PASTOR, Julio y Pedro PUIG ADAM. *Elementos de geometría*. En *colección elemental intuitiva.* Vol. 2. Madrid, 1931.
- ✓ RIBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas.* Moscú: Editorial Mir, 1991.
- ✓ THOMPSON, James. *Geometría.* En *colección matemáticas al alcance de todos*. México: Editorial Hispanoamericana, 1967.



TRIGONOMETRÍA

Javier Revatta Romero / Alder Casio Romero

Sistemas de medición angular, longitud de un arco de circunferencia y área de la región de un sector circular

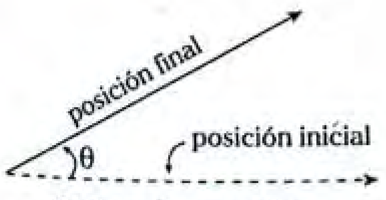
Capítulo I

Objetivos

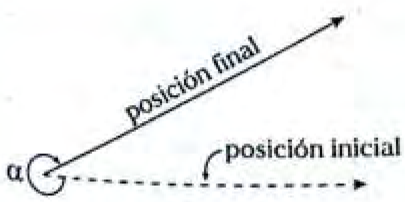
- Transformar la medida de un ángulo trigonométrico en los diversos sistemas de medición angular.
- Reconocer, determinar y calcular la longitud de un arco de circunferencia, así como el área de la región de un sector circular.

Ángulo trigonométrico

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice (la rotación se realiza en un mismo plano). Si la rotación se realiza en sentido antihorario, el ángulo generado se considera positivo; en cambio, si la rotación se realiza en sentido horario, el ángulo generado se considera negativo. El ángulo trigonométrico puede tomar cualquier valor.



θ: ángulo positivo



α: ángulo negativo

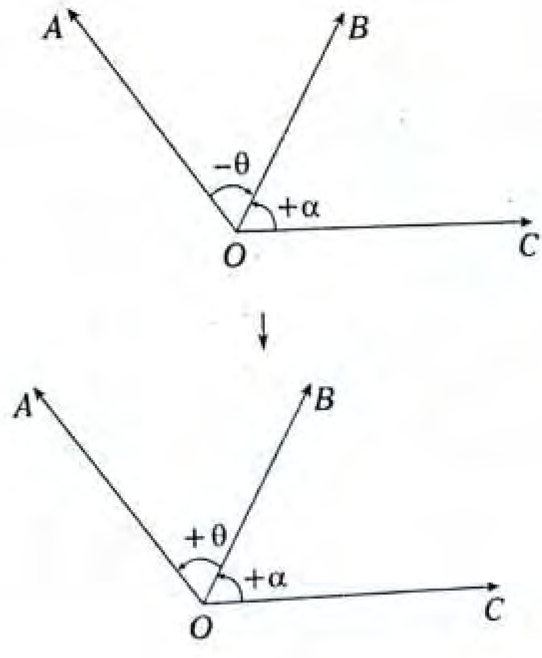
Nota

I. Cuando a un ángulo trigonométrico se le invierte su sentido, su signo cambia.

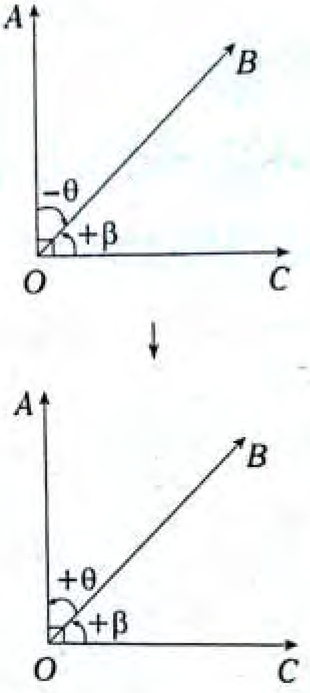
II. Para sumar ángulos trigonométricos en un gráfico, estos deben tener el mismo sentido.

Ejemplos

1.



2.



$\therefore \quad \theta+\beta=90^\circ$

Sistema de medidas angulares

Ángulo de una vuelta

Se genera por la rotación completa de un rayo, es decir, su posición final coincide con su posición inicial por primera vez.

1 v

Sistema sexagesimal o inglés

Su unidad angular es el grado sexagesimal (1°), el cual es equivalente a la 360.ª parte del ángulo de una vuelta.

$$1^\circ=\frac{m\sphericalangle 1\,v}{360} \rightarrow m\sphericalangle 1\,v=360^\circ$$

Subunidades

- Minuto sexagesimal ($1'$)
- Segundo sexagesimal ($1''$)

Equivalencias

$$\boxed{1^\circ=60'} \quad \boxed{1^\circ=60''}$$

$$\boxed{1^\circ=3600''}$$

Sistema centesimal o francés

Su unidad angular es el grado centesimal o gradián (1^g), el cual es equivalente a la 400.ª parte del ángulo de una vuelta.

$$1^g=\frac{m\sphericalangle 1\,v}{400} \rightarrow m\sphericalangle 1\,v=400^g$$

Subunidades

- Minuto centesimal (1^m)
- Segundo centesimal (1^s)

Equivalencias

$$\boxed{1^g=100^m} \quad \boxed{1^m=100^s}$$

$$\boxed{1^g=10\,000^s}$$

Observación

- $A^\circ B'C'' <> A^\circ+B'+C''$

  $B<60 \;\wedge\; C<60$
- $A^g B^m C^s <> A^g+B^m+C^s$

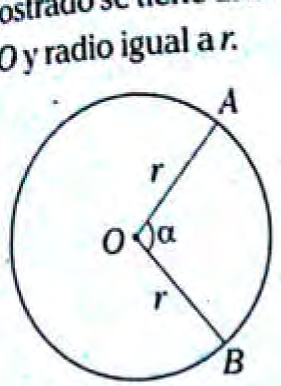
  $B<100 \;\wedge\; C<100$

Sistema radial o circular (internacional)

Unidad angular

Un radián (1 rad) se define como la medida del ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

En el gráfico mostrado se tiene una circunferencia con centro en O y radio igual a r.



Si $\ell_{\widehat{AB}} = r \rightarrow \alpha = 1 \text{ rad}$

Observación

- $\pi \approx 3{,}1416 \approx \dfrac{22}{7} \approx \sqrt{3}+\sqrt{2}$
- $1 \text{ rad} \approx 57^\circ 17' 45''$

Ejemplo

$84^\circ 45' 36'' <> A^\circ$

$84^\circ + 45' + 36'' <> A^\circ$

$84^\circ + 45'\left(\dfrac{1^\circ}{60'}\right) + 36''\left(\dfrac{1^\circ}{3600''}\right) <> A^\circ$

$84^\circ + 0{,}75^\circ + 0{,}01^\circ <> A^\circ$

$\therefore \; A^\circ = 84{,}76^\circ$

Conversión de un sistema de medición angular a otro

$360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad}$

$180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$

$9^\circ = 10^g$

$27' = 50^m$
$81'' = 250^s$
$27' = 5000^s$
$162'' = 5^m$

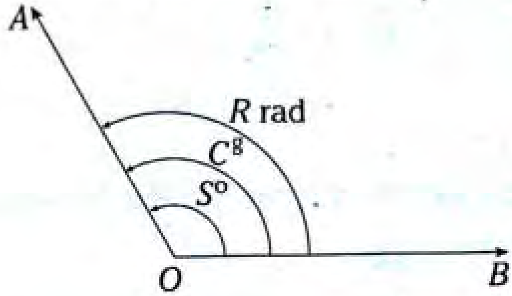
$1 \text{ rad} > 1^\circ > 1^g > 1' > 1^m > 1'' > 1^s$

Ejemplos

- $120^\circ = 120^\circ\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \dfrac{2\pi}{3} \text{ rad}$
- $54^\circ = 54^\circ\left(\dfrac{10^g}{9^\circ}\right) = 60^g$
- $\dfrac{\pi}{20} \text{ rad} = \dfrac{\pi \text{ rad}}{20}\left(\dfrac{200^g}{\pi \text{ rad}}\right) = 10^g$

Relación numérica entre sistemas

Consideramos un ángulo trigonométrico positivo tal como se muestra en el gráfico



donde

S: número de grados sexagesimales
C: número de grados centesimales
R: número de radianes

$S^\circ <> C^g <> R \text{ rad}$

$$\frac{S^\circ}{360^\circ} = \frac{C^g}{400^g} = \frac{R \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\frac{\pi}{20}}$$

$S = 180K$
$C = 200K$
$R = \pi K$

$S = 9n$
$C = 10n$
$R = \dfrac{\pi n}{20}$

Ejemplos

- Si $S=36 \rightarrow C=?$

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10} \rightarrow C=40$$

- Si $R=\frac{\pi}{4} \rightarrow S=?$

$$R=\frac{\pi \cdot n}{20}=\frac{\pi}{4} \rightarrow n=5 \rightarrow S=45$$

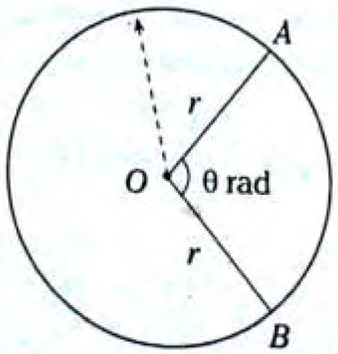
- Si $2S+C=14 \rightarrow R=?$

$$2(9n)+10n=14$$

$$n=\frac{1}{2} \rightarrow R=\frac{\pi}{40}$$

Cálculo de la longitud de un arco de circunferencia

Se establece que la longitud del arco AB se calcula mediante la fórmula



$$\boxed{\ell=\theta r}$$

donde $0<\theta\leq 2\pi$

además

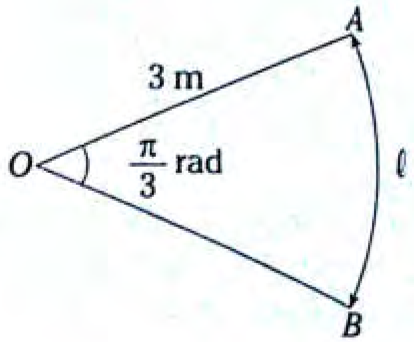
ℓ: longitud del arco AB

θ: número de radianes del ángulo central AOB

r: longitud del radio de la circunferencia

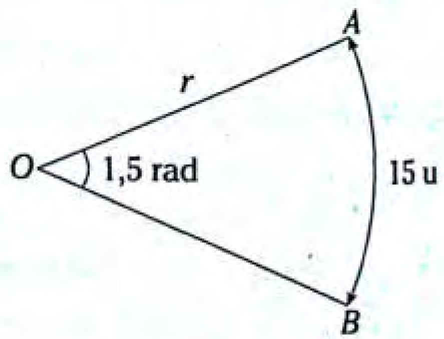
Ejemplos

1. Siendo AOB sector circular



$$\ell=\frac{\pi}{3}\cdot(3\,\text{m}) \rightarrow \ell=\pi\,\text{m}$$

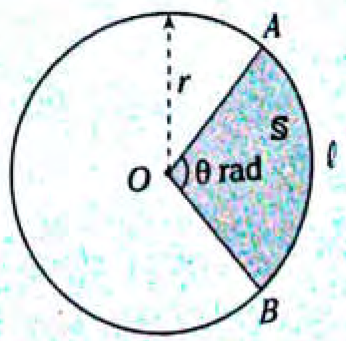
2. Siendo AOB sector circular



$$15\,\text{u}=(1{,}5)\cdot r \rightarrow r=10\,\text{u}$$

Cálculo del área de la región de un sector circular

Del gráfico que se muestra, AOB es un sector circular, donde el área de dicho sector se denota por $\mathbb{S}$.



Y se calcula por las siguientes fórmulas

$$\boxed{\mathbb{S}=\frac{\theta r^2}{2}} \qquad \text{(I)}$$

donde $(0<\theta\leq 2\pi)$

De (I) se deduce también que

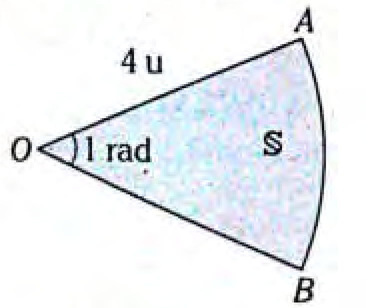
$$\boxed{\mathbb{S}=\frac{\ell r}{2}} \quad \text{y} \quad \boxed{\mathbb{S}=\frac{\ell^2}{2\theta}}$$

Observación

En (I) si hacemos $\theta=2\pi$ tenemos que el área del círculo es πr^2.

Ejemplos

1. Siendo AOB sector circular

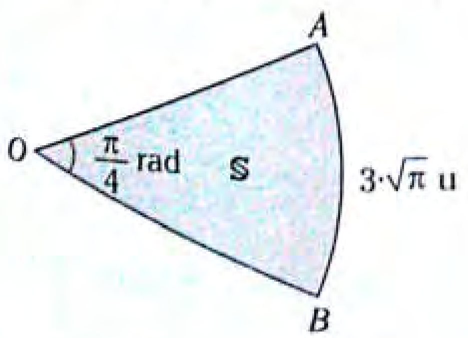


$\mathbb{S}$: área del $\sphericalangle AOB$

$$\mathbb{S}=\frac{(1)(4\text{ u})^2}{2}$$

$\therefore\ \mathbb{S}=8\text{ u}^2$

2. Siendo AOB sector circular



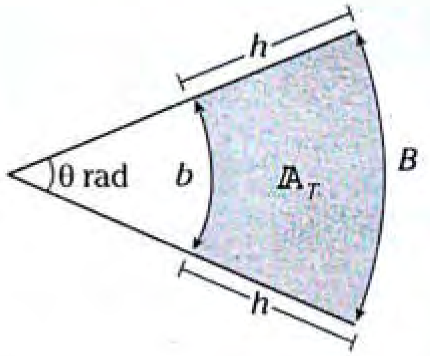
$\mathbb{S}$: área del $\sphericalangle AOB$

$$\mathbb{S}=\frac{(3\sqrt{\pi}\text{ u})^2}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$\therefore\ \mathbb{S}=18\text{ u}^2$

Cálculo del área de un trapecio circular

Se llama trapecio circular aquella región circular formada por la diferencia de dos sectores circulares concéntricos.



Se calcula

$$\boxed{\mathbb{A}_T=\left(\frac{B+b}{2}\right)h}$$

$\mathbb{A}_T$: área del trapecio circular

También

$$\boxed{\theta=\frac{B-b}{h}}$$

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Sean R, C y S los números que indican la medida de un ángulo positivo en los sistemas conocidos, calcule la medida de dicho ángulo si α y θ son complementarios.

$$\alpha=\frac{RC}{4}+\frac{R^2}{\pi} \quad \text{y} \quad \theta=\frac{2R^2}{\pi}+\frac{RS}{4}$$

Resolución

Sabemos

$$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{RC}{4}+\frac{R^2}{\pi}+\frac{2R^2}{\pi}+\frac{RS}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Si $R=\frac{\pi k}{20}$, $C=10k$, $R=9k$

$$\left(\frac{\pi k}{20}\right)\frac{(10k)}{4}+\left(\frac{\pi k}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi k}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{20}\right)\frac{9k}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi k^2}{8}+\frac{\pi k^2}{400}+\frac{2\pi k^2}{400}+\frac{9\pi k^2}{80}=\frac{\pi}{2}$$

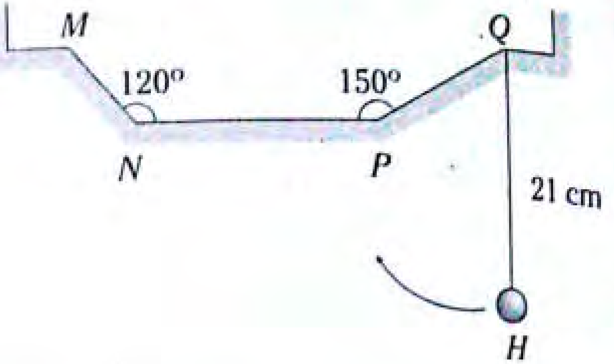
$$k^2=\frac{100}{49} \rightarrow k=\frac{10}{7}$$

$$R=\frac{\pi}{20}\left(\frac{10}{7}\right)$$

Por lo tanto, el ángulo mide $\frac{\pi}{14}$ rad.

Problema N.° 2

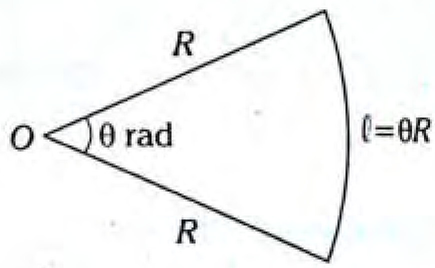
El gráfico muestra una esferita de acero suspendida por la cuerda flexible $\overline{QH}$. Se impulsa la esferita en el sentido indicado de tal forma que manteniéndose siempre tensa la cuerda, la esferita llega a $\overline{MN}$. Calcule la longitud recorrida por la esferita si $MN=NP=PQ=9$ cm.



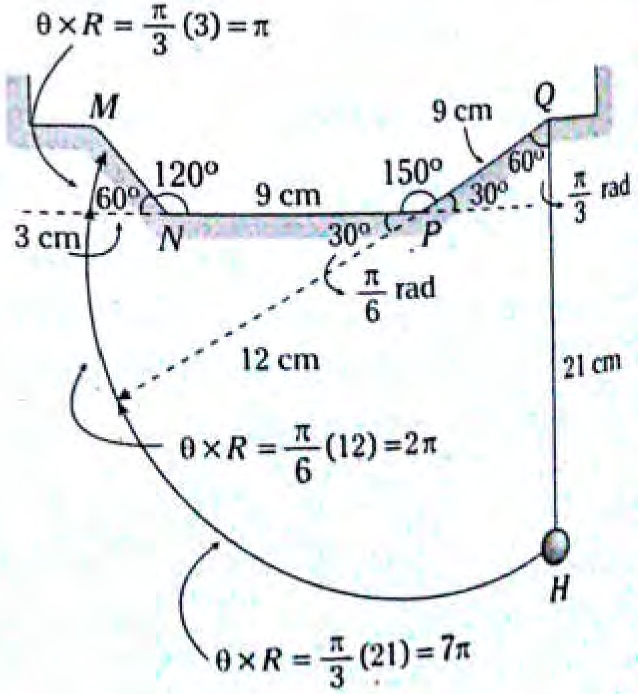
UNMSM 2011-II

Resolución

Recordemos



Del gráfico, nos piden la longitud que recorre la esferita.



Por lo tanto, la longitud que recorre la esferita es $7\pi+2\pi+\pi=10\pi$.

Problema N.° 3

El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 72° es de 45π cm^2. Se sabe que si duplicamos el radio de dicho sector y disminuimos α radianes a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuirá en 1/3. ¿Cuál es el valor de α?

UNFV 2011-I

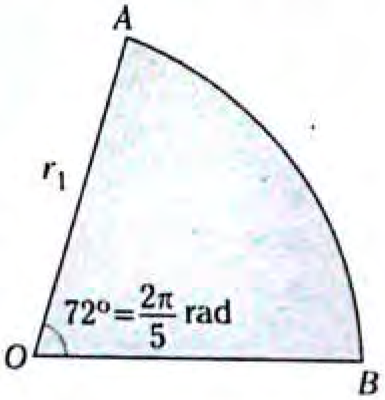
Resolución

Sea el sector circular de ángulo central 72° y área 45π cm^2.

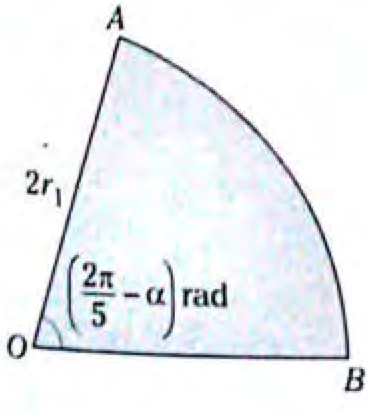
$\mathbb{A}_{\sphericalangle AOB}=45\pi\text{ cm}^2$

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{5}\right)(r_1)^2}{2}=45\pi\text{ cm}^2$$

$r_1=15$ cm



Duplicando su radio $2r_1$ y reduciendo el ángulo central en α rad, su área disminuirá en 1/3.



$$\mathbb{A}_{\sphericalangle AOB}=45\pi\text{ cm}^2-\frac{1}{3}(45\pi\text{ cm}^2)$$

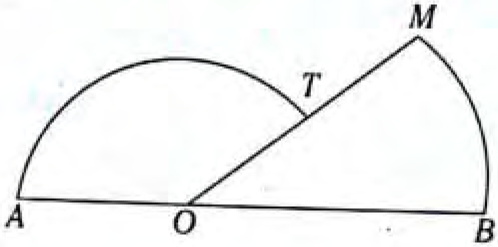
$$\frac{[2(15)]^2\left(\frac{2\pi}{5}-\alpha\right)}{2}=30\pi\text{ cm}^2$$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$

Problema N.° 4

En el gráfico, el área del sector circular AOT es igual al área del sector circular MOB.

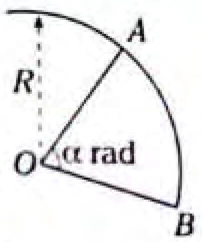
Si $OA=\frac{OB}{2}$, halle la medida del ángulo $B\hat{O}T$.



UNMSM 2012-II

Resolución

Se cumple

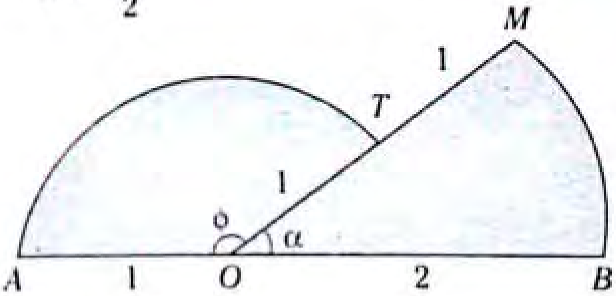


$$\boxed{\mathbb{A}_{\sphericalangle AOB}=\frac{\alpha\cdot R^2}{2}}$$

Nos piden m$\sphericalangle BOT=\alpha$ rad.

Dato $\mathbb{A}_{\sphericalangle AOT}=\mathbb{A}_{\sphericalangle MOB}$ (I)

$$OA=\frac{OB}{2}$$



Sea $OA=1\ \rightarrow\ OB=2$

m$\sphericalangle BOT=\alpha$; m$\sphericalangle AOT=\phi$

De (I) tenemos

$$\frac{\phi(1)^2}{2}=\frac{\alpha(2)^2}{2}\ \rightarrow\ \phi=4\alpha$$

Sabemos $(\phi+\alpha)$ rad$=\pi$ rad$=180^\circ$

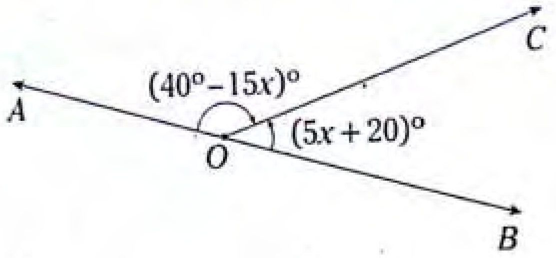
$(4\alpha+\alpha)$ rad$=180^\circ$

$\therefore\ \alpha$ rad$=36^\circ$

PROBLEMAS PROPUESTOS

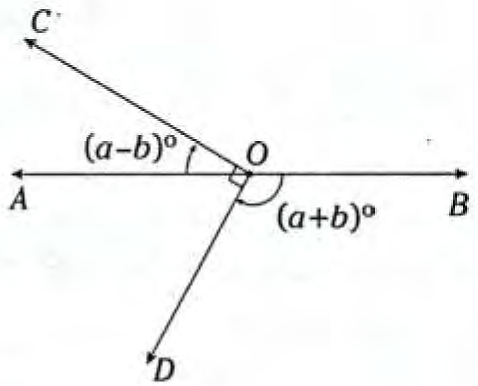
NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico, calcule el valor de x.



A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

2. Del gráfico, determine el valor de b.



A) −42 B) −43 C) −44
D) −45 E) −41

3. Determine el equivalente en grados, minutos y segundos sexagesimales de la expresión

$$\left(\frac{27}{5}\right)^\circ+\left(\frac{37}{2}\right)'$$

A) $5^\circ 42'30''$
B) $5^\circ 32'30''$
C) $23^\circ 54'$
D) $5^\circ 24'21''$
E) $5^\circ 42'3''$

4. Calcule el valor de la expresión

$$\frac{(0{,}5)^g 5^m}{5^m}+\frac{(0{,}6)'6''}{6''}.$$

A) 1,1 B) 11 C) 18
D) 30 E) 96

5. Calcule el valor de la expresión

$$\sqrt{\frac{55^g+\frac{\pi}{360}\text{rad}}{2^\circ}}.$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

6. Si $(x+16)^\circ <> (x+74)^g$, determine el valor de x.

A) 450 B) 500 C) 252
D) 506 E) 666

7. Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo, calcule

$$\frac{5S^2+4SC}{3SC-C^2}.$$

A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 5 E) 4,5

8. Determine el número de grados sexagesimales que cumple

$$\sqrt{\frac{SC}{360}}+\sqrt{\frac{SR}{20\pi}}+\sqrt{\frac{CR}{8\pi}}=1$$

siendo S, C y R lo conocido para un mismo ángulo.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 1/2 E) 5

9. Siendo S, C y R los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes de un ángulo que cumplen la igualdad

$1799+\frac{1}{S}-\frac{1}{C}=\frac{\pi}{R}$, calcule $20R$.

A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{90}$ C) $\frac{\pi}{9}$

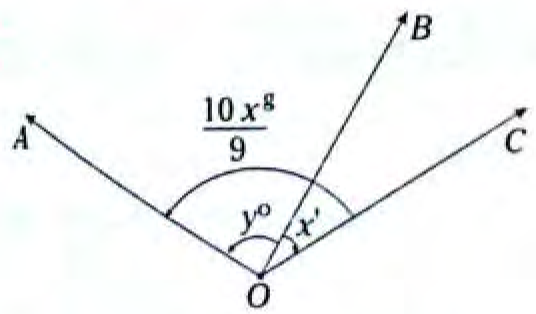
D) $\frac{\pi}{45}$ E) $\frac{\pi}{18}$

10. Si $S^2+C^2+2SC=25$, calcule $S-C$, siendo S y C los números de grados sexagesimal y centesimal de un mismo ángulo.

A) -25 B) $-\frac{5}{9}$ C) $-\frac{9}{25}$

D) -5 E) $-\frac{5}{19}$

11. Del gráfico, determine el valor de $\frac{y}{x}$.



A) $\frac{60}{61}$ B) $\frac{59}{58}$ C) $\frac{61}{60}$

D) $\frac{58}{59}$ E) $\frac{59}{60}$

12. Si $\left(\frac{55}{9}\right)^o <> a^o b' c''$,

calcule el valor de $a \cdot b - c$.

A) 36 B) -40 C) 4

D) 0 E) -4

13. Calcule el valor de la expresión

$\frac{a^g a^m}{a^m a^s}+\frac{b^o b'}{b' b''}$.

A) 160 B) 13 600 C) 2

D) 162 E) 161

14. Si $3^g 40^m <> a^o b' c''$, determine el valor de $a-b+c$.

A) 30 B) 32 C) 27

D) 36 E) 39

15. Si $a^o b' <> \frac{\pi}{72}$ rad,

determine el ángulo $b^o(ab+1)'$.

A) $30^o 1'$ B) $31^o 1'$ C) $29^o 59'$

D) $30^o 59'$ E) 31^o

16. Se crea un nuevo sistema de medición angular, cuya unidad de medida es el grado $K(1^K)$. Si se sabe que 3^K equivale a la quinceava parte de un ángulo $\frac{\pi}{2}$rad, exprese 1^K en minutos sexagesimales.

A) 110' B) 115' C) 130'

D) 145' E) 120'

17. Determine el número de radianes de un ángulo si se sabe que su número de segundos sexagesimales excede en 4800 a 30 veces su número de minutos centesimales.

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{10}$

D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{25}$

18. Siendo S y C conocidos para un mismo ángulo, tal que cumple $(C-S)^{(C-S)}=(\sqrt{2})^{-1}$, determine el número de minutos centesimales del ángulo.

A) 250 B) 5000 C) 550
D) 900 E) 400

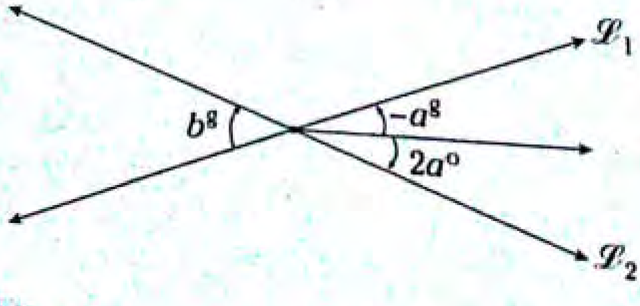
19. Siendo S y C los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo que cumplen
$C^o+10S^g=\pi$ rad$+2^o$,
calcule su número de radianes.

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{15}$ C) $\frac{\pi}{8}$
D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{6}$

20. Siendo S el número de grados sexagesimales de un determinado ángulo, que cumple
$\frac{15}{\sqrt[4]{S}}-\sqrt[4]{S}=2,$
determine la medida de dicho ángulo en radianes.

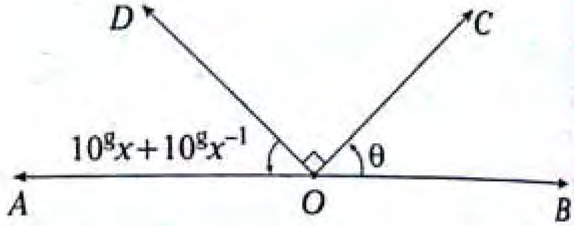
A) $\frac{9\pi}{20}$ rad B) $\frac{7\pi}{15}$ rad C) $\frac{5\pi}{18}$ rad
D) $\frac{65\pi}{137}$ rad E) $\frac{8\pi}{15}$ rad

21. Del gráfico, determine la relación que existe entre a y b.



A) $\frac{9}{20}$ B) $\frac{9}{29}$ C) $-\frac{20}{9}$
D) $-\frac{9}{29}$ E) $-\frac{1}{3}$

22. Calcule el mayor valor que toma el ángulo θ en el siguiente gráfico.



A) 81° B) 80° C) 74°
D) 72° E) 70°

23. Un ángulo es expresado como $a^g <> b^o c'$; a, b y $c \in \mathbb{Z}_0^+$. Si $b-c=3$ y $a-b=5$, determine el ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{50}$ rad B) $\frac{11\pi}{25}$ rad C) $\frac{11\pi}{50}$ rad
D) $\frac{50\pi}{23}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

24. Convierta
$\left(\frac{9^o}{9^g}+\frac{9'}{9^m}\right)$rad al sistema sexagesimal.

A) $\frac{1600^o}{\pi}$ B) $\frac{900^o}{7\pi}$ C) $\frac{800^o}{3\pi}$
D) $\frac{450^o}{7\pi}$ E) $\frac{1600^o}{3\pi}$

25. Calcule la suma de los ángulos expresados.
$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{24}+...\right)$rad

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad B) 2π rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{5\pi}{3}$ rad E) $\frac{4\pi}{3}$ rad

26. Siendo S y R lo convencional para un mismo ángulo que cumple

$$\sqrt{\frac{\pi}{R}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{R}{\pi}}=\sqrt{2},$$

determine el valor de S.

A) 60 B) 50 C) 40
D) 30 E) 20

27. El número de grados sexagesimales que mide un ángulo más el número de grados centesimales que mide otro ángulo es 194. Calcule la medida del menor ángulo en radianes si se sabe que son suplementarios.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{3\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{10}$ rad
D) $\frac{3\pi}{5}$ rad E) $\frac{7\pi}{10}$ rad

28. Siendo S el número de grados sexagesimales y C el número de grados centesimales de un mismo ángulo, calcule el menor valor que asume

$$\left(\frac{9}{S}+\frac{C}{10}\right)^{\circ}+\frac{\pi}{3}\text{ rad}.$$

A) 59° B) 60° C) 61°
D) 62° E) 63°

29. Siendo S y C los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo que cumple

$$\sqrt{S+\sqrt{S+\sqrt{S+\sqrt{S+\dots}}}} <> 2C,$$

determine el número de minutos centesimales de dicho ángulo.

A) 70,5 B) 71,5 C) 72
D) 71 E) 72,5

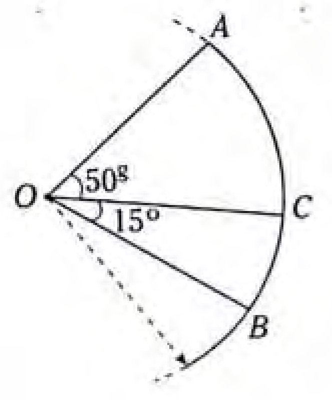
30. Los números que expresan las medidas de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal cumplen
$S=3^{a}-4^{b}$ y $C=2^{-2b}+3^{a}$.
Determine la menor medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{10}$ rad B) $\frac{\pi}{20}$ rad C) $\frac{\pi}{30}$ rad
D) $\frac{\pi}{40}$ rad E) $\frac{\pi}{50}$ rad

31. Determine la longitud de arco de un sector circular si su ángulo central mide 22°30' y tiene un radio de 56 u.
Considere $\pi=\frac{22}{7}$.

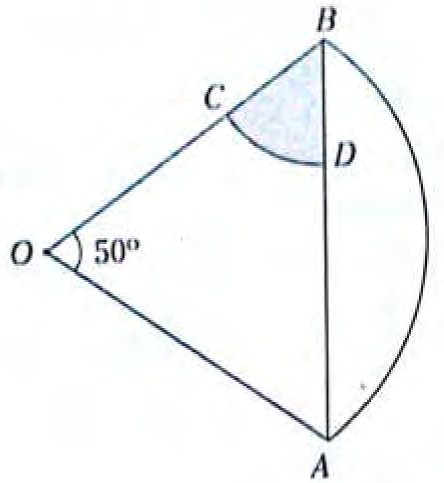
A) 11 u B) 20 u C) 22 u
D) 14 u E) 77 u

32. Del gráfico, calcule $\frac{L_{\widehat{AB}}}{L_{\widehat{BC}}}$.



A) 3 B) 2 C) 10/3
D) 4/3 E) 4

33. Del gráfico, AOB y CBD son sectores circulares. Indique la relación entre las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ cuando $OC=CB$.

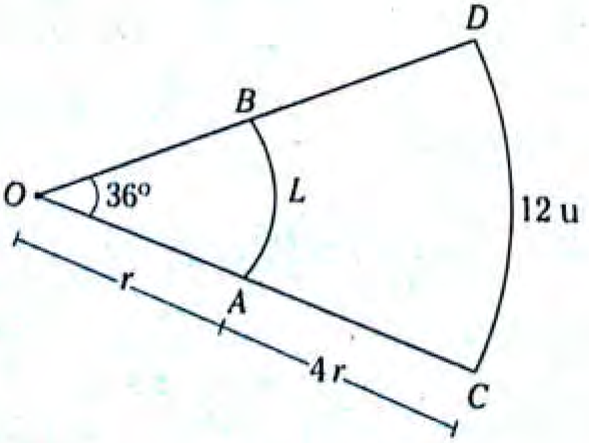


A) $\frac{20}{13}$ B) $\frac{15}{13}$

C) $\frac{50}{13}$

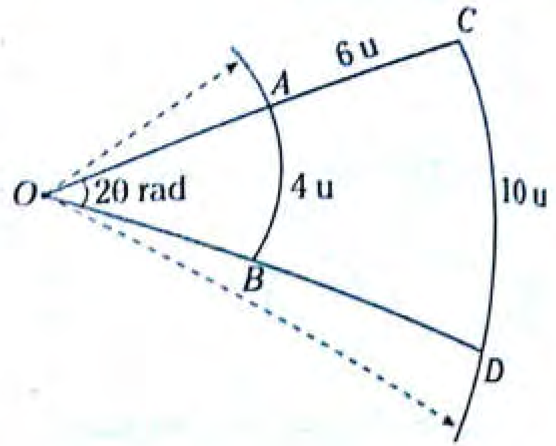
D) $\frac{10}{13}$ E) $\frac{26}{15}$

34. Si AOB y COD son sectores circulares, calcule L.



A) 2 B) 2,4 C) 3
D) 3,4 E) 4

35. Del gráfico, determine el valor que toma θ.



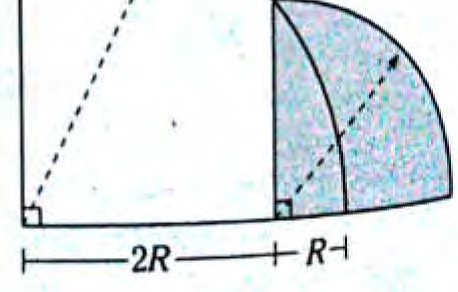
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

36. El parabrisas de un automóvil tiene una longitud de 30 u y barre un ángulo de 120°. Calcule el área de la superficie limpiada por el parabrisas.

A) $100\pi\ u^2$ B) $200\pi\ u^2$ C) $300\pi\ u^2$
D) $400\pi\ u^2$ E) $500\pi\ u^2$

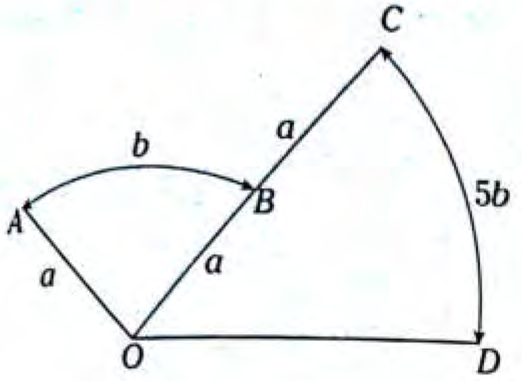
37. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{4}R^2$ B) $\frac{3\pi}{4}R^2$ C) $\frac{5\pi}{4}R^2$

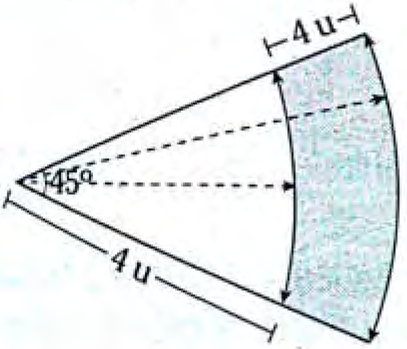
D) $\frac{7\pi}{4}R^2$ E) $\frac{9\pi}{4}R^2$

38. Del gráfico, calcule $\dfrac{\mathbb{A}_{\sphericalangle AOB}}{\mathbb{A}_{\sphericalangle COD}}$.



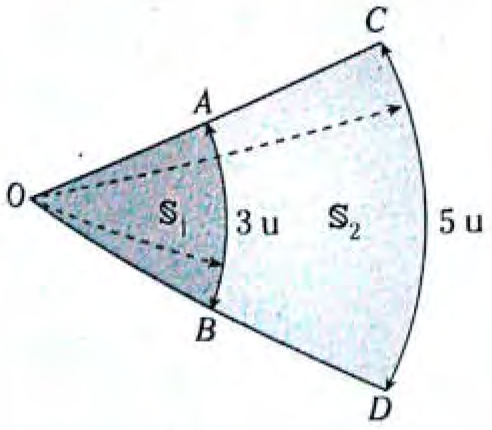
A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

39. Del gráfico, determine el área de la región sombreada. (π=3,1).



A) 62 u^2 B) 18,6 u^2 C) 15,5 u^2
D) 27,9 u^2 E) 34,1 u^2

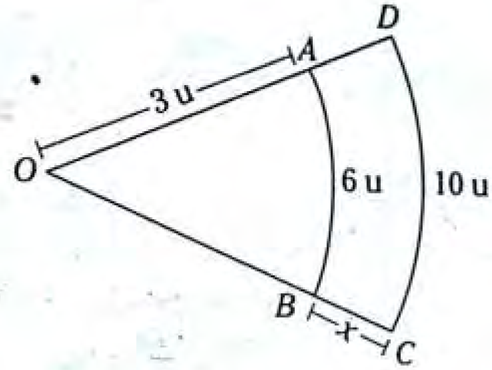
40. Del gráfico, determine el valor de $\sqrt{\dfrac{\mathbb{S}_2}{\mathbb{S}_1}+1}$. ($\mathbb{S}$: representa el área).



A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{4}{5}$
D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{3}{5}$

NIVEL INTERMEDIO

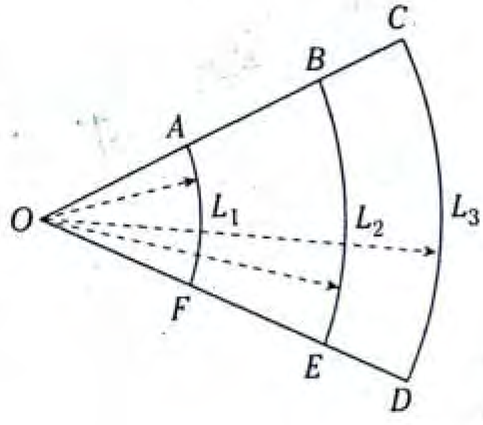
41. Del gráfico, determine el valor de x si AOB es un sector circular.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

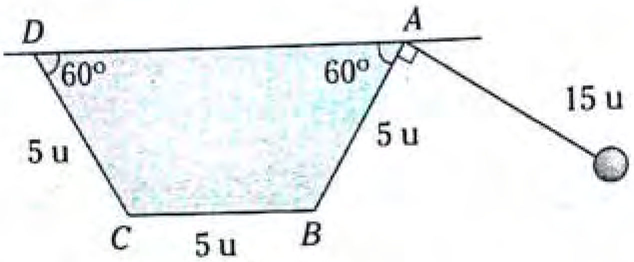
42. Del gráfico, $3(OA)=4(AB)=6(BC)$.

Calcule $\dfrac{L_3+L_2}{L_3-2L_1}$.



A) 4 B) 8 C) 16
D) 9 E) 7

43. Indique la longitud de la trayectoria descrita por la esfera de radio despreciable hasta impactar en la superficie *CD*.

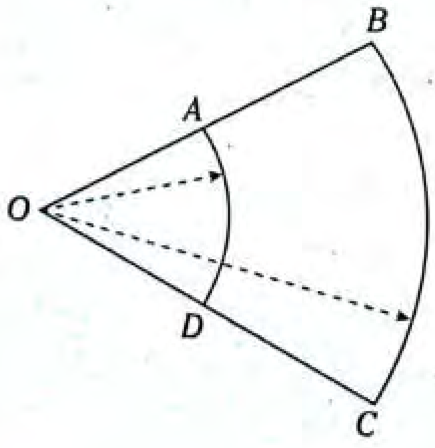


A) 12π u
B) $\frac{23\pi}{2}$u
C) $\frac{25\pi}{2}$u
D) $\frac{27\pi}{2}$u
E) 13π u

44. Del gráfico, se cumple que

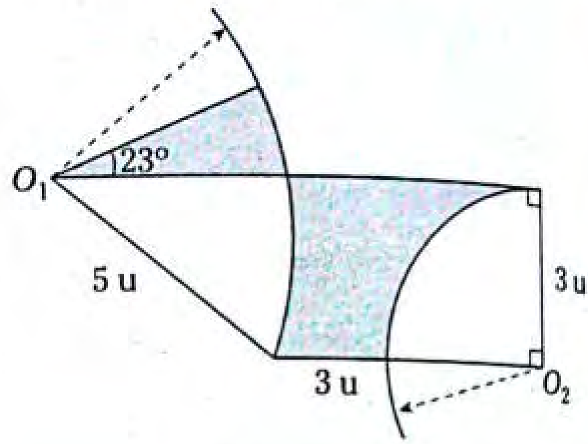
$3(AO)=2(L_{\widehat{BC}})$ y $2(AB)=L_{\widehat{AD}}$.

Calcule el número de radianes del ángulo *AOD*.



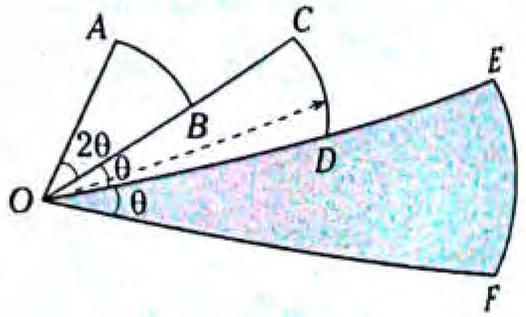
A) 1
B) 2
C) 0,5
D) 0,3
E) 0,6

45. Determine el valor aproximado del perímetro de la región sombreada.



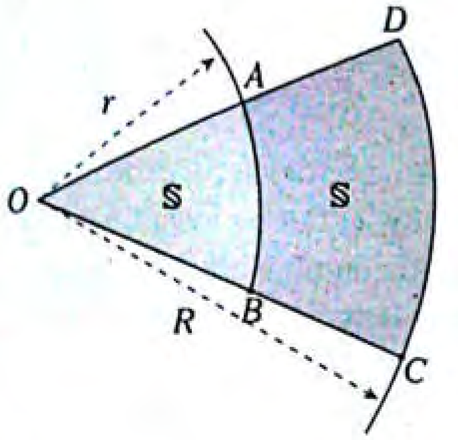
A) $\left(17+\frac{3\pi}{2}\right)$u
B) $\left(19+\frac{18\pi}{5}\right)$u
C) $\left(18+\frac{17\pi}{6}\right)$u
D) $\left(19+\frac{19\pi}{6}\right)$u
E) $\left(17+\frac{19\pi}{6}\right)$u

46. Del gráfico, *B* y *D* son puntos medios de los segmentos *OC* y *OE*, respectivamente, además el área del sector circular *EOF* es 96 u^2. Determine el valor del área del sector circular *AOB*.



A) 3 u^2
B) 4 u^2
C) 6 u^2
D) 8 u^2
E) 12 u^2

47. Del gráfico, determine $\dfrac{R}{r}$.
($\mathbb{S}$: representa las áreas de las regiones sombreadas)



A) $2\sqrt{2}$

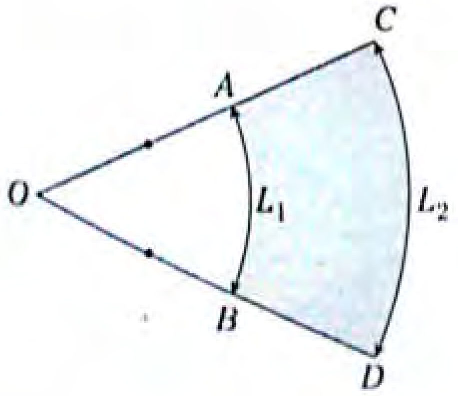
B) $\sqrt{7}$

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{2}$

E) $\sqrt{3}$

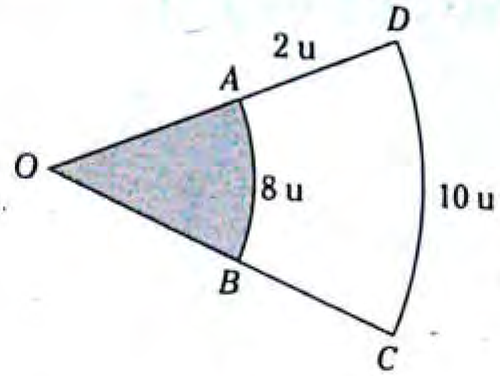
48. Las áreas de los sectores circulares *AOB* y *COD* son proporcionales a 2 y 5, respectivamente. Calcule L_2/L_1.



A) $\sqrt{5}$ B) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

D) $\sqrt{10}$ E) 5

49. Calcule el área de la región sombreada.



A) $18\ u^2$ B) $9\ u^2$ C) $32\ u^2$

D) $16\ u^2$ E) $64\ u^2$

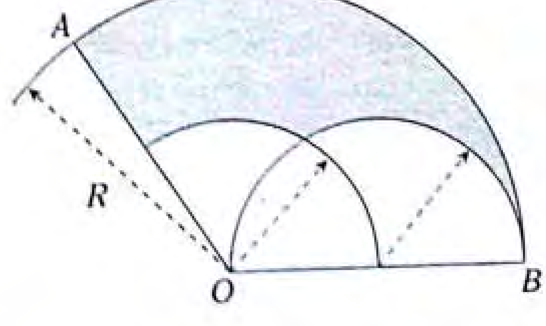
50. Sea un sector circular de longitud de arco L, radio r, ángulo central θ rad y área $\mathbb{S}$. Calcule el valor de θ que verifique la igualdad

$$\frac{3L^2}{\pi} + 4\pi r^2 = 19\mathbb{S};\ 0 < \theta < 2\pi$$

A) $\dfrac{8\pi}{3}$ B) π C) $\dfrac{2\pi}{3}$

D) 2π E) $\dfrac{\pi}{2}$

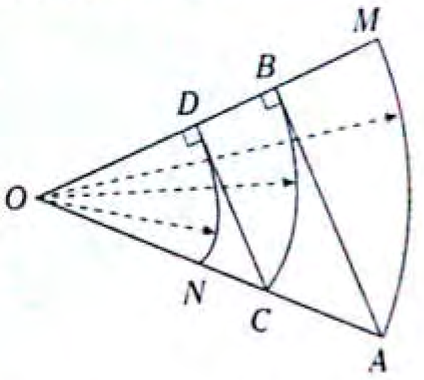
51. Calcule el perímetro de la región sombreada si $m\sphericalangle AOB = 100^\circ$.



A) $(\pi+1)R$ B) $(2\pi+1)R$ C) $(\pi-2)R$

D) $(2\pi+1)\dfrac{R}{2}$ E) $(\pi+2)\dfrac{R}{2}$

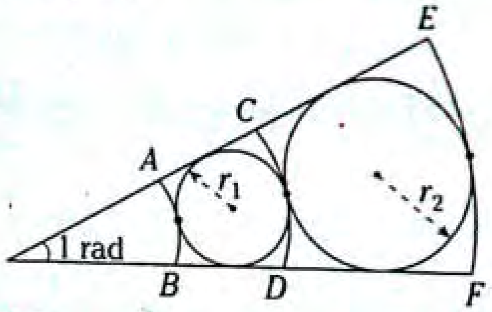
52. En el gráfico, se cumple $2(AB)=3(CD)=6$ y $OC=4$. Calcule la relación entre las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{DN}$ y $\overset{\frown}{AM}$.



A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

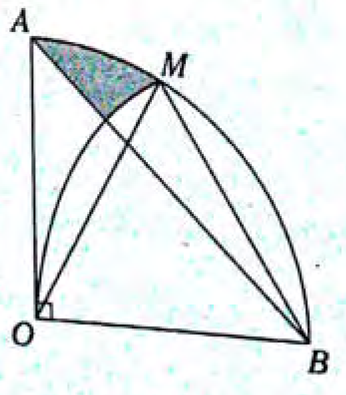
53. Del gráfico, $L_{\overset{\frown}{AB}}=2\text{ u}$, $L_{\overset{\frown}{CD}}=4\text{ u}$ y $L_{\overset{\frown}{EF}}=8\text{ u}$. Calcule r_1+r_2.



A) 5 u B) 4 u C) 3 u

D) 2 u E) 1 u

54. Si AOB es un cuadrante de radio 1 y MBO es un sector circular, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{2}-1$ B) $\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}-1$

C) $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{2}+1$

D) $\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}-1$ E) $\frac{\pi}{8}+\sqrt{2}+1$

55. En un sector circular de radio R y ángulo central 2θ rad, se inscribe un triángulo equilátero con un vértice en el punto medio del arco. Determine el lado del triángulo.

A) $\dfrac{2R}{\sqrt{3}+\tan\theta}$

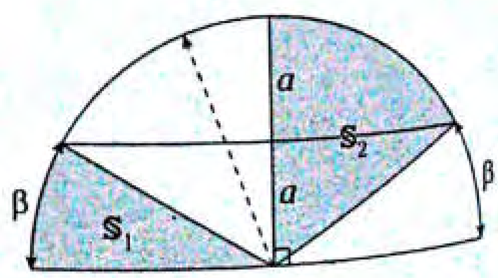
B) $\dfrac{2R}{2\sqrt{3}+\cot\theta}$

C) $\dfrac{2R}{2\sqrt{3}+\tan\theta}$

D) $\dfrac{2R}{\tan\theta-\sqrt{3}}$

E) $\dfrac{2R}{\cot\theta+\sqrt{3}}$

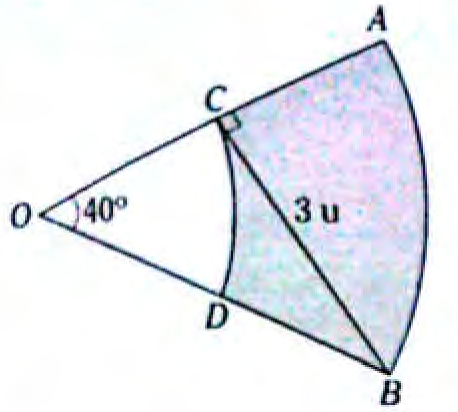
56. Determine la relación de las áreas representadas por $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

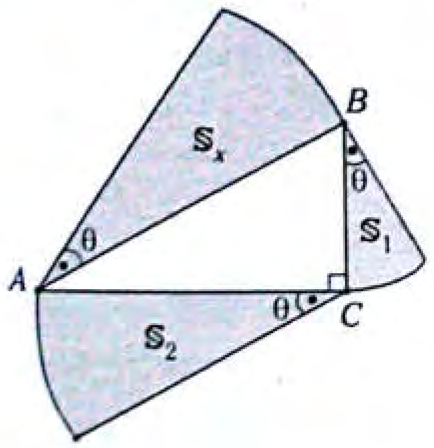
57. Del gráfico, calcule el área del trapecio circular.



A) $3\pi\,u^2$ B) $2\pi\,u^2$ C) $\pi\,u^2$

D) $\frac{\pi}{2}u^2$ E) $\frac{3\pi}{2}u^2$

58. Del gráfico, determine la relación de $\mathbb{S}_x$; $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$. ($\mathbb{S}$: representa el área de los sectores circulares indicados).



A) $\mathbb{S}_x+\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2$

B) $\mathbb{S}_x=\sqrt{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$

C) $\mathbb{S}_x=2(\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2)$

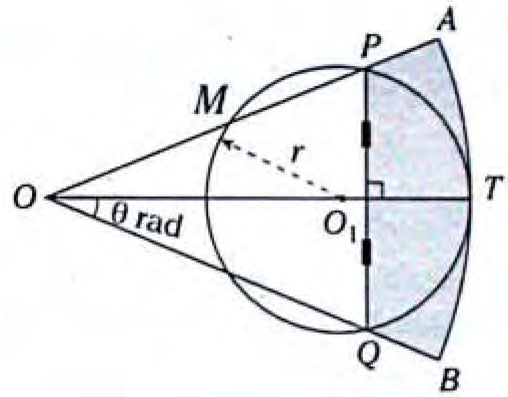
D) $\mathbb{S}_x=\sqrt{\mathbb{S}_1}+\sqrt{\mathbb{S}_2}$

E) $\mathbb{S}_x-\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2$

59. En un trapecio circular de perímetro 100 u, calcule la longitud del lado igual de dicho trapecio para que el área sea máxima.

A) 10 u
B) 20 u
C) 15 u
D) 25 u
E) 14 u

60. Del gráfico, calcule el área de la región sombreada si AOB es un sector circular, $OM=O_1Q$ y $\theta=\frac{\pi}{6}$.



A) $r^2\left[\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\right]$

B) $r^2\left[\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right]$

C) $r^2\left[\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-2\right)\right]$

D) $r^2\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right]$

E) $r^2\left[\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

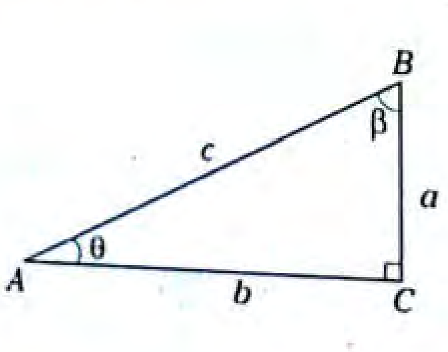
Capítulo II

OBJETIVOS

- Conocer los elementos del triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Determinar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables (30°; 45°; 60°; 37° y 53°) y aplicarlos a situaciones prácticas.
- Resolver triángulos rectángulos relacionando las longitudes de dos lados de un triángulo mediante una razón trigonométrica y aplicarlos a situaciones cotidianas.

Triángulo rectángulo

Un triángulo tal que uno de sus ángulos sea recto (90°) se llama triángulo rectángulo. Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los lados restantes se llaman catetos.



Elementos

a : cateto opuesto al ángulo θ

b : cateto adyacente al ángulo θ

c : hipotenusa

θ ; β : ángulos agudos

OBSERVACIÓN

$$0° < \theta < 90° \ ; \ 0° < \beta < 90°$$

$$0 < a < c \ ; \ 0 < b < c$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Llamamos razón trigonométrica de un ángulo agudo a cualquiera de los cocientes entre las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo que contiene a este ángulo. Con los datos del gráfico anterior definimos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto al } \sphericalangle\theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente al } \sphericalangle\theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto al } \sphericalangle\theta}{\text{cateto adyacente al } \sphericalangle\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente al } \sphericalangle\theta}{\text{cateto opuesto al } \sphericalangle\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al } \sphericalangle\theta} = \frac{c}{b}$$

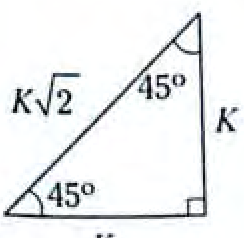
$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \sphericalangle\theta} = \frac{c}{a}$$

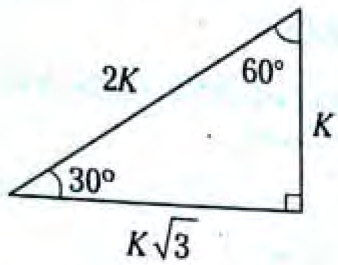
NOTA

- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo dependerán de la medida de dicho ángulo y no de los lados del triángulo rectángulo en el que se ubiquen.
- Conociendo el valor de la razón trigonométrica de un ángulo agudo, es posible calcular el valor de las demás razones trigonométricas.

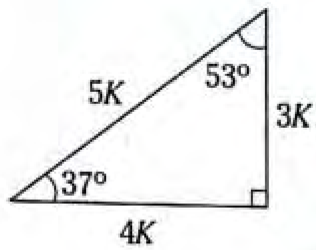
Triángulos rectángulos notables

Las razones trigonométricas de ángulos notables se calculan a partir de los siguientes triángulos rectángulos.





Triángulo aproximado



De los triángulos rectángulos anteriores se obtiene:

RT \ $\sphericalangle$	30°	60°	37°	53°	45°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1
cot	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$
csc	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$

Propiedades

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Si θ y β son ángulos agudos, tales que $\theta+\beta=90^o$, entonces se cumple

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sen}\theta=\cos\beta\\ \tan\theta=\cot\beta\\ \sec\theta=\csc\beta\end{array}}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}40^o=\cos50^o$
- $\tan25^o=\cot65^o$
- $\sec42^o=\csc48^o$
- $\cos(90^o-\theta)=\operatorname{sen}\theta$
- Si α: agudo y $\operatorname{sen}10^o=\cos\alpha$

  $\rightarrow\ 10^o+\alpha=90^o$

  $\therefore\ \alpha=80^o$

Razones trigonométricas recíprocas

Si θ es un ángulo agudo, entonces se cumple

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sen}\theta\cdot\csc\theta=1\\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\\ \tan\theta\cdot\cot\theta=1\end{array}}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}40^o\cdot\csc40^o=1$
- $\cos50^o\cdot\sec50^o=1$
- $\tan10^o\cdot\cot10^o=1$
- $\csc42^o\cdot\operatorname{sen}42^o=1$
- Si β: agudo y $\operatorname{sen}\beta\csc32^o=1$

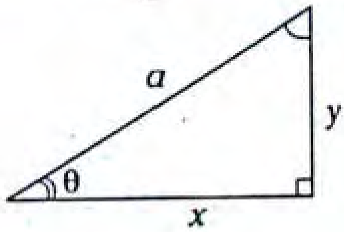
  $\rightarrow\ \beta=32^o$

Resolución de triángulos rectángulos

Cuando en un triángulo rectángulo se conoce uno de sus lados y uno de sus ángulos agudos, es posible determinar sus otros lados así como también su otro ángulo agudo. Tenga presente que para resolver un triángulo cualquiera es necesario conocer sus tres lados y sus tres ángulos.

Caso 1

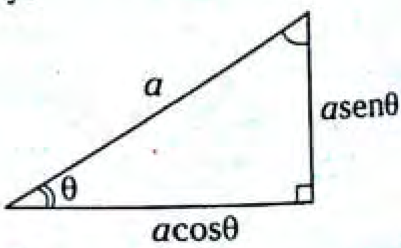
Conocida la hipotenusa (a) y un ángulo agudo (θ), determine x e y del gráfico adjunto.



Del gráfico, por definición

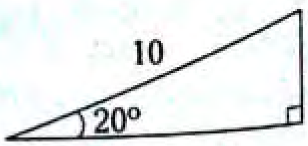
- $\dfrac{x}{a}=\cos\theta\ \rightarrow\ x=a\cos\theta$
- $\dfrac{y}{a}=\operatorname{sen}\theta\ \rightarrow\ x=a\operatorname{sen}\theta$

Se concluye

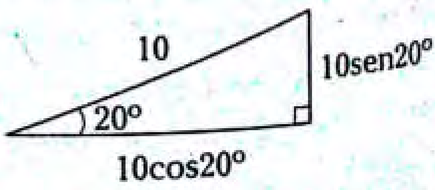


Ejemplos

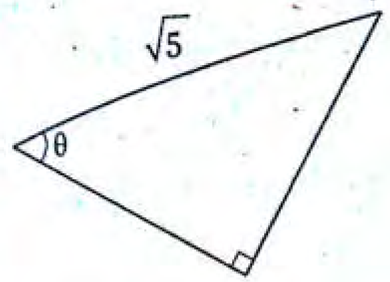
1.



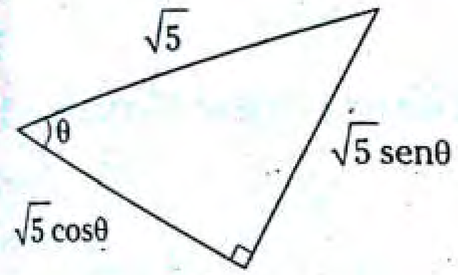
entonces



2.

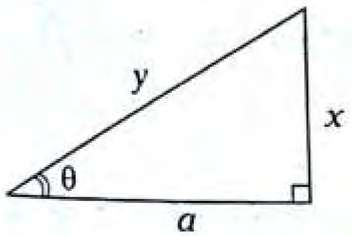


entonces



Caso 2

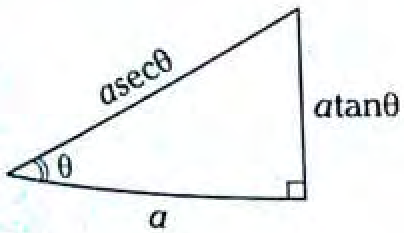
Conocido un ángulo agudo (θ) y su cateto adyacente (a), determine x e y del gráfico mostrado.



Del gráfico, por definición

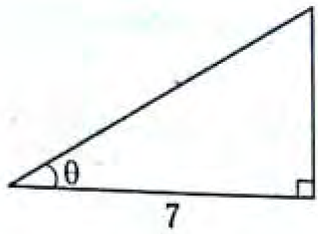
- $\dfrac{x}{a}=\tan\theta \;\rightarrow\; x=a\tan\theta$
- $\dfrac{y}{a}=\sec\theta \;\rightarrow\; y=a\sec\theta$

Se concluye

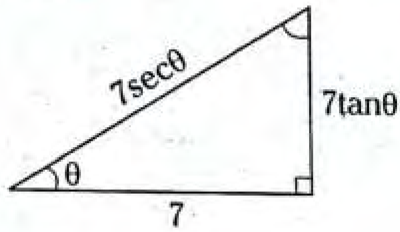


Ejemplos

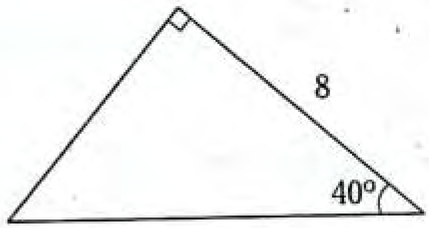
1.



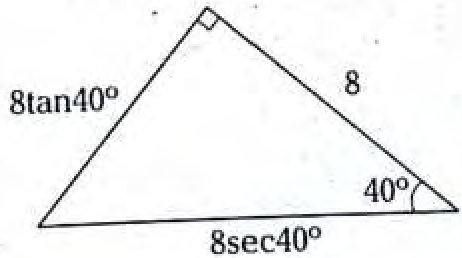
entonces



2.

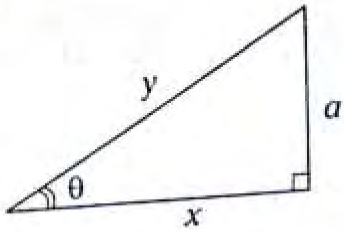


entonces



Caso 3

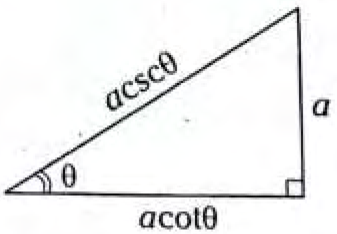
Conocido un ángulo agudo (θ) y su cateto opuesto (a), determine x e y del gráfico adjunto.



Del gráfico, por definición

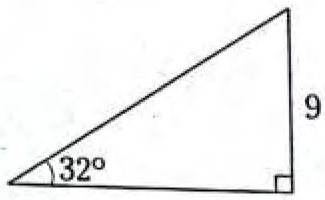
- $\dfrac{x}{a}=\cot\theta \rightarrow x=a\cot\theta$
- $\dfrac{y}{a}=\csc\theta \rightarrow x=a\csc\theta$

Se concluye

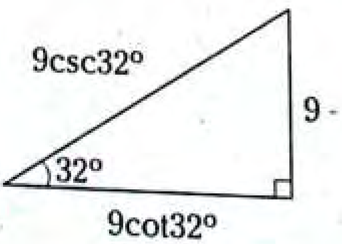


Ejemplos

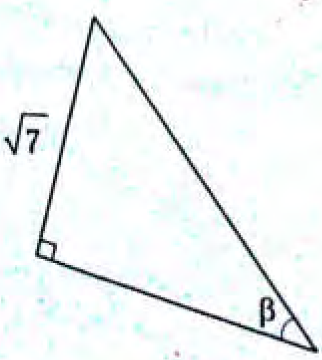
1.



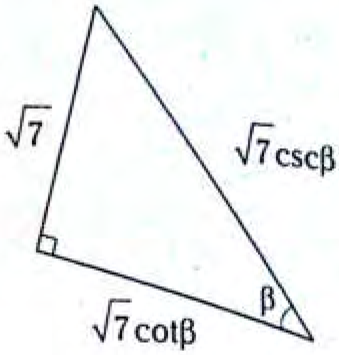
entonces



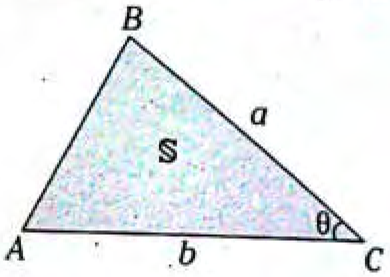
2.



entonces



Área de una región triangular ($\mathbb{S}$)

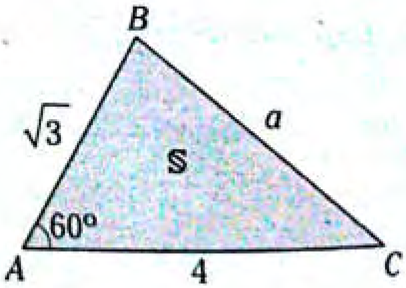


$\mathbb{S}$: área de la región triangular

Del gráfico anterior, se cumple $\boxed{\mathbb{S}=\dfrac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta}$

Ejemplo

Del gráfico mostrado, determine el área de la región sombreada.



Resolución

$\mathbb{S}$: área de la región triangular ABC

Por teoría se tiene

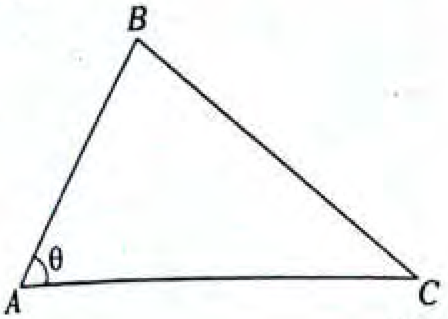
$$\mathbb{S}=\frac{\sqrt{3}\cdot 4}{2}\operatorname{sen}60^{\circ} \rightarrow \mathbb{S}=\frac{\sqrt{3}\cdot 4}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\therefore\ \mathbb{S}=3\ u^2$

Problema N.° 1

En el gráfico, $AB=12$ cm, $AC=14$ cm y $\tan\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Calcule BC.

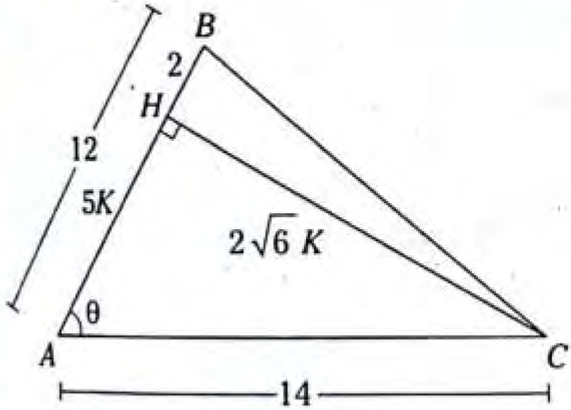


UNMSM 2008 - II

Resolución

Datos

$AB=12$ cm; $AC=14$ cm



En el triángulo ABC se traza $\overline{CH}\perp\overline{AB}$

Por dato

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}\ \rightarrow\ HC=2\sqrt{6}K\ \ \text{y}\ \ AH=5K$$

Por el teorema de Pitágoras, en el $\triangle AHC$

$$(2\sqrt{6}K)^2+(5K)^2=14^2\ \rightarrow\ K=2$$

Donde

$$BH=12-5K=2$$

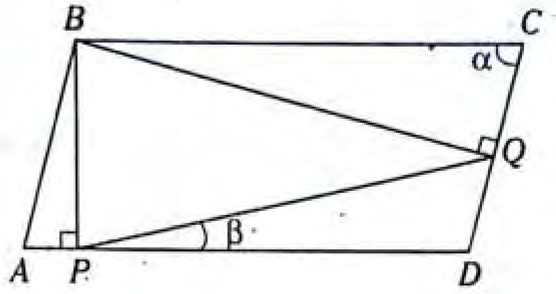
Luego, por el teorema de Pitágoras, en el $\triangle BHC$

$$(BC)^2=2^2+(4\sqrt{6})^2$$

$\therefore\ BC=10$ cm

Problema N.° 2

En el gráfico, $ABCD$ es un paralelogramo, $AB=b$ y $BC=a$, calcule PQ.



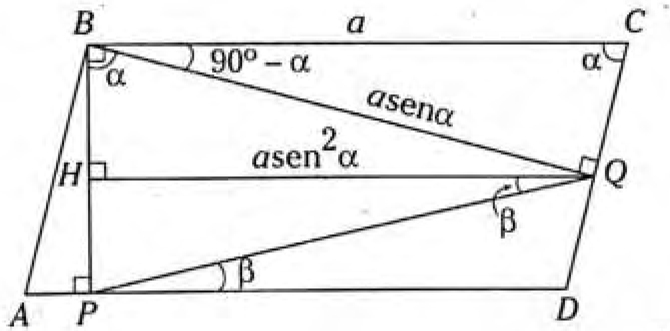
UNMSM 2009 - II

Resolución

Nos piden PQ.

Datos:

- $BC=a$
- $ABCD$ es un paralelogramo



Del gráfico

$\triangle BQC$: $BQ=a\operatorname{sen}\alpha$

$\triangle BHQ$: $HQ=a\operatorname{sen}^2\alpha$

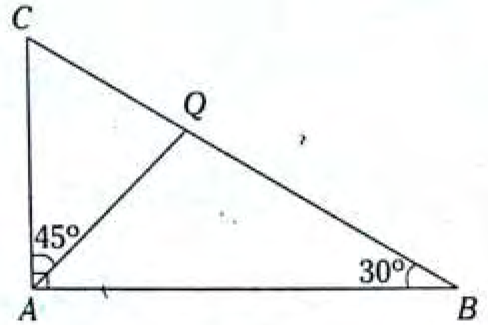
$\triangle PHQ$: $PQ=HQ\sec\beta$

$\rightarrow\ PQ=(a\operatorname{sen}^2\alpha)\sec\beta$

$$\therefore\ PQ=\frac{a\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\beta}$$

Problema N.º 3

En el gráfico, se tiene el triángulo rectángulo BAC que es recto en A. Si $CQ=a$ cm, $AB=b$ cm; halle el valor de $\frac{a}{b}$.

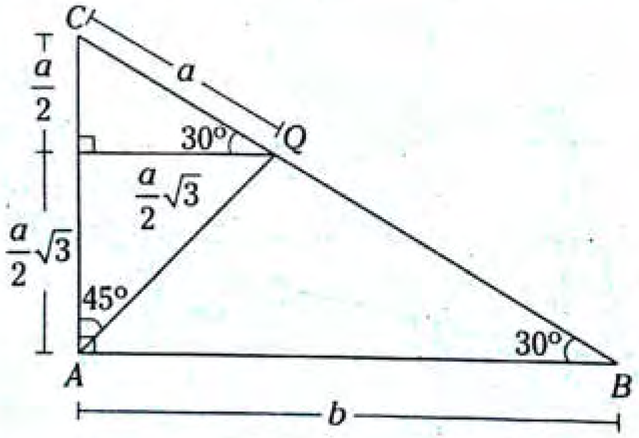


UNMSM 2012 - I

Resolución

Nos piden $\frac{a}{b}$.

Datos



Del gráfico

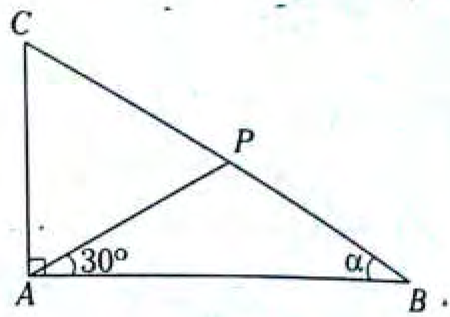
$\triangle CAB$

$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{3}}{b} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

Problema N.º 4

En el gráfico, el triángulo ABC es rectángulo, recto en A, $CP=2$ cm, $PB=3$ cm. Halle $\tan\alpha$.

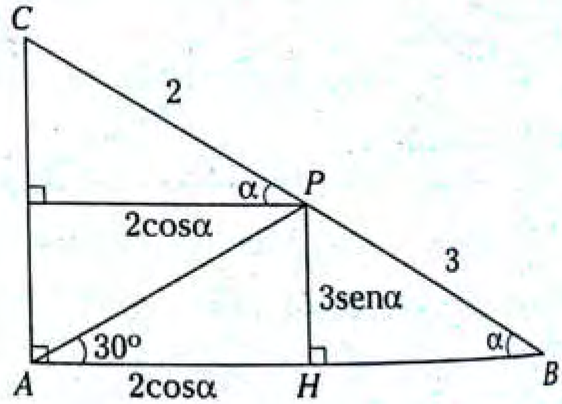


UNMSM 2011 - I

Resolución

Nos piden $\tan\alpha$.

Datos



Del gráfico

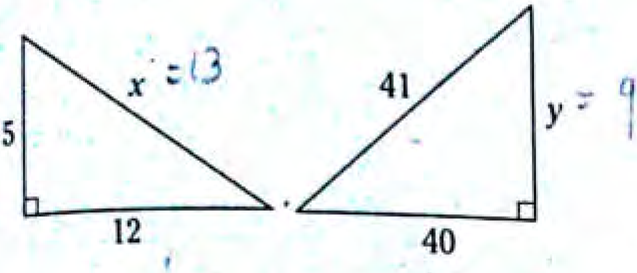
$\triangle AHP$

$$\tan 30° = \frac{3\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}\tan\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

NIVEL BÁSICO

1. Del gráfico mostrado, calcule $x+y$.



A) 24 B) 20 C) 19
D) 31 E) 22

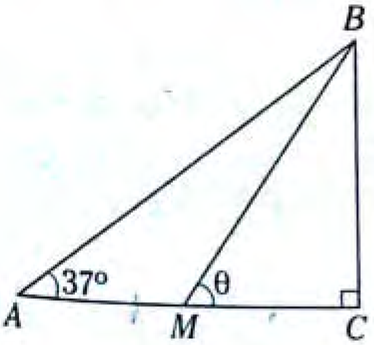
2. Si θ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta=\frac{2}{3}$, calcule $\sqrt{5}(\sec\theta+\tan\theta)$.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

3. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, calcule $\tan A+\tan B$ si $\operatorname{sen}A=2\operatorname{sen}B$.

A) $\frac{2}{5}$ B) 5 C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

4. Del gráfico dado, calcule $3\csc\theta$ si $AM=MC$.



A) 4 B) $2\sqrt{3}$ C) 2
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{13}$

5. Siendo x e y ángulos agudos, tales que $\operatorname{sen}x=\cos y$ y $\tan x\cdot\cot y-1=0$, calcule $\sec(x+15^\circ)+\tan^2(15^\circ+y)$.

A) 1 B) 2 C) 5
D) 4 E) -3

6. Si β es un ángulo agudo y $\tan\beta=\frac{5}{12}$, calcule $\tan\frac{\beta}{2}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{1}{5}$ E) 5

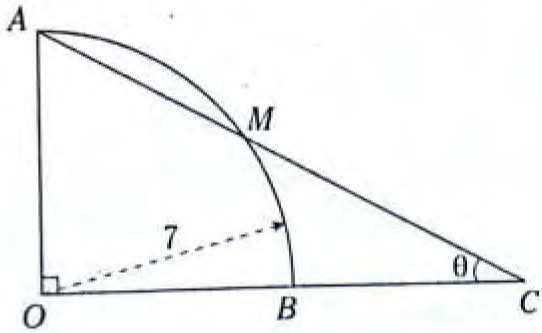
7. Si θ es un ángulo agudo y $3\operatorname{sen}^2\theta-1=0$, calcule $4\tan^2\theta+3\cos^2\theta$.

A) 1 B) 3 C) 2
D) 5 E) 4

8. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, calcule el valor de $\csc A\csc C$ si $\tan A+\tan C=2$.

A) 2 B) 1 C) 1/2
D) 3 E) 2/3

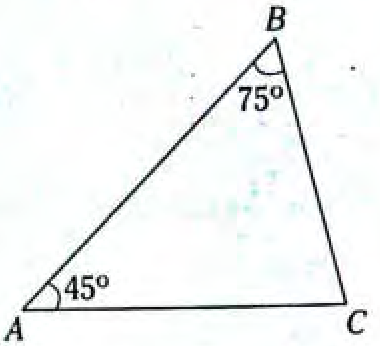
9. Del gráfico mostrado, calcule $7\operatorname{sen}\theta$ si $AM=4$.



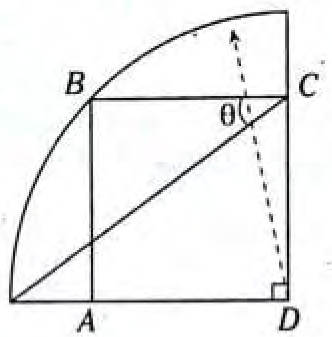
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Del gráfico, calcule BC si $AC=(2+2\sqrt{3})$ cm.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 1



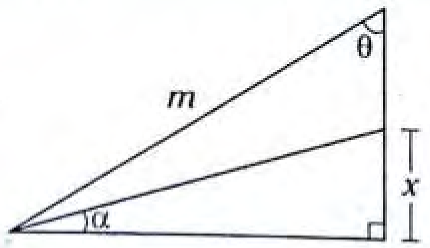
11. Si $ABCD$ es un cuadrado, calcule $\cot\theta$.



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 2   C) $2\sqrt{2}$

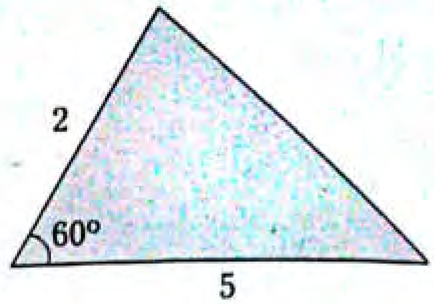
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

12. Del gráfico, calcule x en términos de θ, α y m.



A) $m\,\text{sen}\theta\tan\alpha$
B) $m\,\text{sen}\theta\cot\alpha$
C) $m\cos\theta\tan\alpha$
D) $m\tan\theta\cot\alpha$
E) $m\,\text{sen}\theta\csc\alpha$

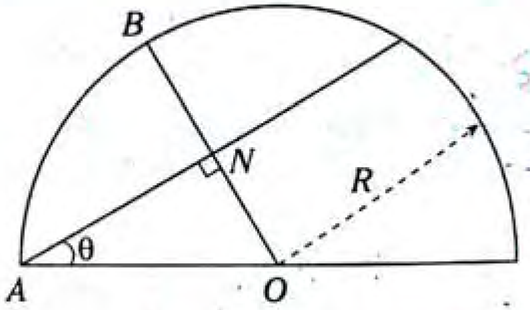
13. En el gráfico, calcule el área de la región triangular.



A) $\frac{5}{4}\sqrt{3}\ \text{u}^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{u}^2$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{u}^2$

D) $2\sqrt{3}\ \text{u}^2$ E) $5\sqrt{3}\ \text{u}^2$

14. Del gráfico, calcule BN en términos de θ y R.



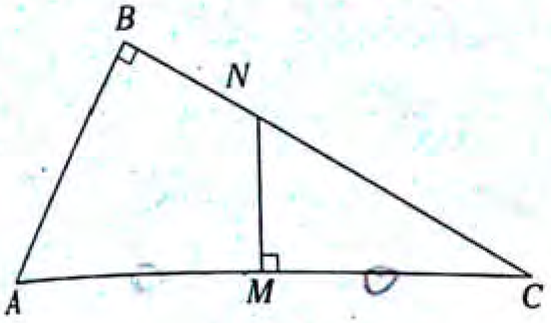
A) $R(1+\cos\theta)$
B) $R\,\text{sen}\theta$
C) $R(1-\cos\theta)$
D) $R(1-\text{sen}\theta)$
E) $R(1+\text{sen}\theta)$

15. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$E=\frac{\tan 45^\circ \sec 60^\circ + 2\,\text{sen}^2 45^\circ}{4\tan 37^\circ + 5\,\text{sen}\,53^\circ}$$

A) 7
B) 1/4
C) 3/7
D) 3/5
E) 2

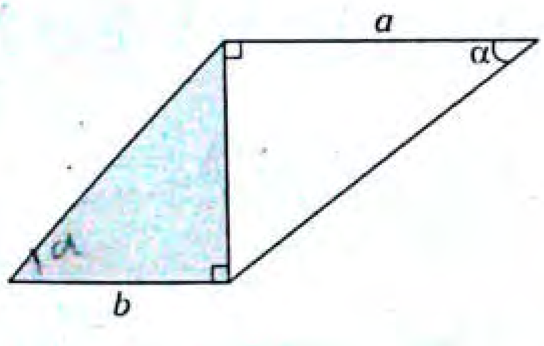
16. Del gráfico adjunto, calcule AB si $AM=MC$, $BN=2$ y $NC=3$.



A) 2 B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{13}$

D) $\sqrt{5}$ E) 1

17. Si el área de la región sombreada es $\mathbb{S}$, calcule $a \cdot b$ en términos de $\mathbb{S}$ y α.



A) $\mathbb{S}\cos\alpha$ B) $2\mathbb{S}\cos\alpha$ C) $2\mathbb{S}\operatorname{sen}\alpha$

D) $\mathbb{S}\cot\alpha$ E) $2\mathbb{S}\cot\alpha$

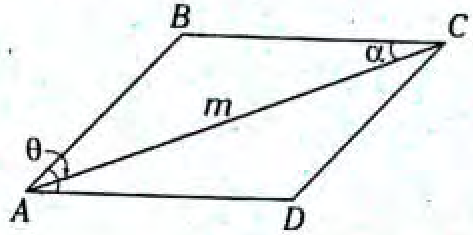
18. Si θ es un ángulo agudo y

$\tan\theta=2\operatorname{sen}10°\tan20°\tan70°\sec80°$,

calcule $\sqrt{5}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

19. Si $ABCD$ es un paralelogramo, halle CD en términos de m, θ y α.



A) $m\operatorname{sen}\alpha\csc\theta$
B) $m\operatorname{sen}\theta\csc\alpha$
C) $m\tan\alpha\tan\theta$
D) $m\operatorname{sen}\theta\cos\alpha$
E) $m\operatorname{sen}\theta\sec\alpha$

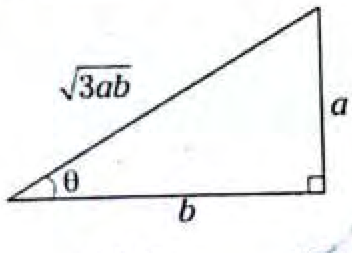
20. Si θ es un ángulo agudo y $\cot\theta=\dfrac{40}{9}$, calcule $\tan\left(45°-\dfrac{\theta}{2}\right)$

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{3}{2}$

D) $\dfrac{5}{4}$ E) $\dfrac{4}{5}$

NIVEL INTERMEDIO

21. Del gráfico, calcule $\tan^2\theta+\cot^2\theta$.



A) 3 B) 5 C) 7

D) 9 E) 11

22. Si θ y α son ángulos agudos, tales que $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{2}{3}$ y $\tan\alpha\tan\theta-\cos\theta=0$,

calcule $\sqrt{61}(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)$.

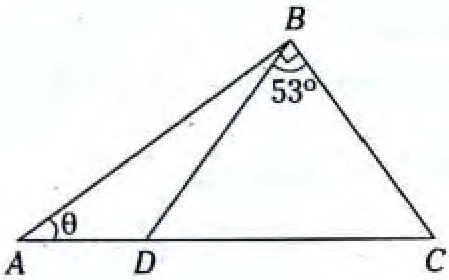
A) 9 B) 11 C) 7

D) 25 E) 13

23. En un triángulo rectángulo ABC, recto en A, si $\csc B+\tan C=2$, calcule sen$C$.

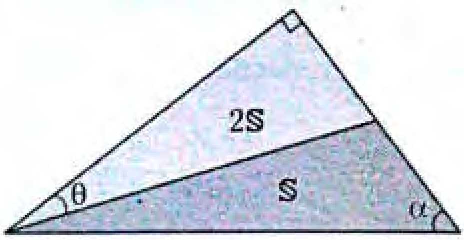
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

24. Del gráfico mostrado, calcule $\tan\theta$ si $DC=2AD$.



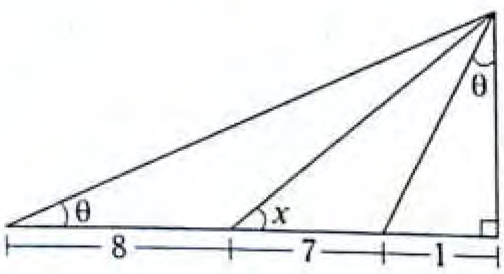
A) 3 B) 2 C) 3/2
D) 5/4 E) 2/3

25. Según el gráfico, calcule $\tan\alpha\tan\theta$.



A) 2 B) 5/2 C) 3/2
D) 4/3 E) 2/3

26. En el gráfico, calcule $\tan x+\cot x$.

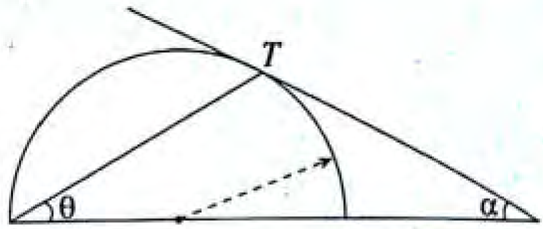


A) 1,25 B) 3,75 C) 0,25
D) 2,5 E) 1,5

27. Del gráfico dado, calcule

$$\frac{\text{sen}(\theta+\alpha)}{\cos\theta}+\tan 2\theta\tan\alpha$$

si T es punto de tangencia.

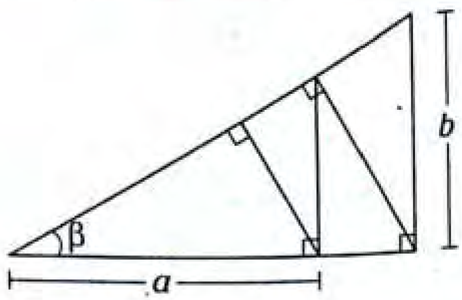


A) 1/2 B) 1 C) 2
D) 3 E) 0

28. Si $\tan 2x=0,\widehat{6}$ y $x\in\langle 0°; 45°\rangle$, calcule el valor de $2\cot x-3$.

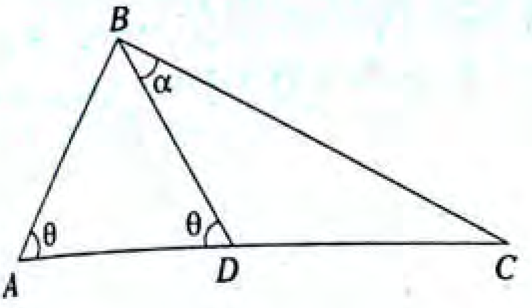
A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{7}$

29. Del gráfico adjunto, calcule $\frac{a}{b}$ en términos de β.



A) $\text{sen}^3\beta$
B) $\tan^3\beta$
C) $\text{sen}\beta\csc^3 2\beta$
D) $\cos^3\beta\csc\beta$
E) $\text{sen}^3\beta\cos\beta$

30. Si $AB=1$ y $CD=2$, calcule $\tan\alpha$ en términos de θ.



A) $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$

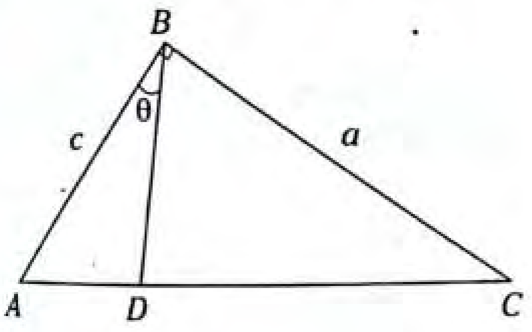
B) $\dfrac{\cos\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta}$

C) $\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{1+2\cos\theta}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+2\cos\theta}$

E) $\dfrac{2\cos\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta}$

31. Calcule BD en términos de a, c y θ.



A) $ac\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

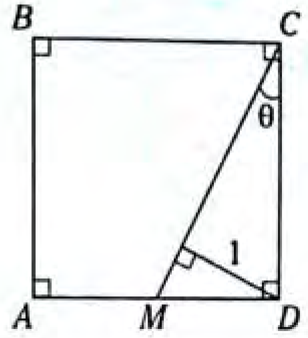
B) $a\operatorname{sen}\theta+c\cos\theta$

C) $\dfrac{ac}{a\operatorname{sen}\theta+c\cos\theta}$

D) $\dfrac{ac}{c\operatorname{sen}\theta+a\cos\theta}$

E) $\dfrac{a+c}{c\operatorname{sen}\theta+a\cos\theta}$

32. Si $ABCD$ es un cuadrado, calcule la distancia de A al segmento CM en términos de θ.

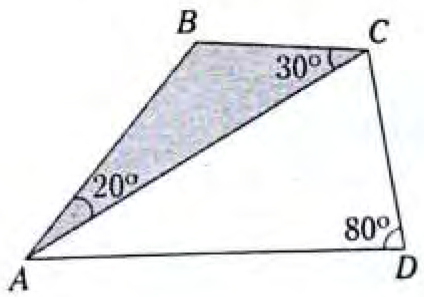


A) $\tan\theta+1$ B) $\cot\theta+1$ C) $\cot\theta-1$
D) $\cot\theta-2$ E) $\tan\theta-1$

33. En un triángulo ABC, recto en C, se cumple que $2\cos A+\cot B\cos B=4$.
Calcule $\operatorname{sen}B+\sec A$.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 6 E) 8

34. Calcule el área de la región sombreada en términos de m si $AC=AD=2m$.



A) $m^2\operatorname{sen}20°\sec70°$

B) $m^2\operatorname{sen}20°$

C) $m^2\csc50°$

D) $m^2\operatorname{sen}20°\csc^2 50°$

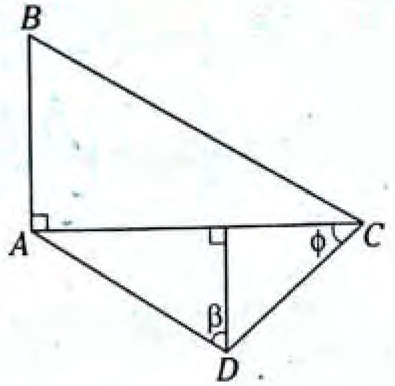
E) $m^2\operatorname{sen}20°\csc50°$

35. El perímetro del cuadrilátero $ABCD$ es 17.

Calcule $\dfrac{4\sqrt{3}-2\cos\phi}{\text{sen}\beta}$

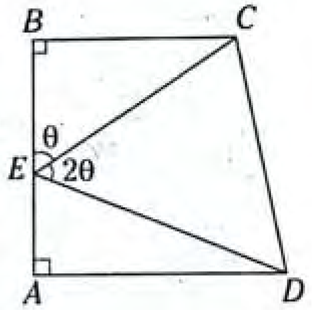
si $AB=4$; $AD=3$ y $DC=2$.

A) 1
B) 2
C) 5
D) 3
E) 4



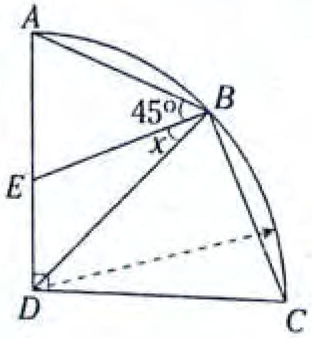
36. Determine AB en términos de θ

si $EC=ED=a$.



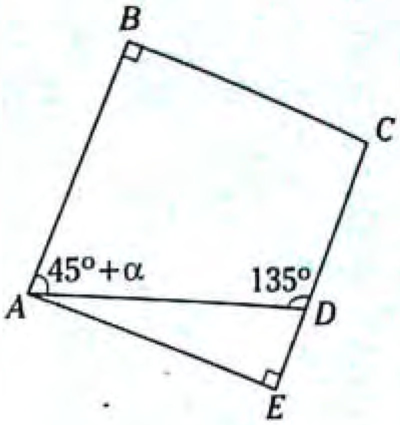
A) $2a\text{sen}\theta\text{sen}2\theta$
B) $2a\text{sen}\theta\cos2\theta$
C) $2a\text{sen}\theta\tan2\theta$
D) $2a\text{sen}\theta\text{sen}4\theta$
E) $2a\text{sen}\theta\sec2\theta$

37. Del gráfico, calcule $\tan x$ si $AB=BC$.



A) $2\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$
D) $2\sqrt{2}-1$ E) $2\sqrt{2}$

38. Determine el valor de $4\cot\alpha+7$ si $AB=BC$, $AE=7\sqrt{2}$ y $DC=8\sqrt{2}$.



A) 12 B) 16 C) 18
D) 22 E) 14

39. En un triángulo isósceles se inscribe una circunferencia. Calcule su radio en términos de m y α, siendo m y 2α la longitud de su lado y la medida de su ángulo desigual, respectivamente.

A) $m\cot\alpha$
B) $m\tan\alpha$
C) $m\tan(45°-\alpha)$
D) $m^2\tan\alpha$
E) $\dfrac{m}{2}\tan(45°-\alpha)$

40. En un cuadrado $ABCD$ de área $P\,\text{m}^2$, se construye el triángulo equilátero AED en el cual se inscribe una circunferencia. Calcule el área del círculo en términos de P.

A) πP B) $\dfrac{\pi P}{12}$ C) $\dfrac{\pi P}{6}$
D) $\dfrac{\pi P}{4}$ E) $\dfrac{\pi P}{8}$

Ángulos verticales

Capítulo III

Objetivos

- Reconocer los elementos que definen un ángulo de elevación, un ángulo de depresión y un ángulo de observación.
- Graficar correctamente el enunciado de un problema que relaciona a los lados y ángulos para luego plantear la solución empleando adecuadamente las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

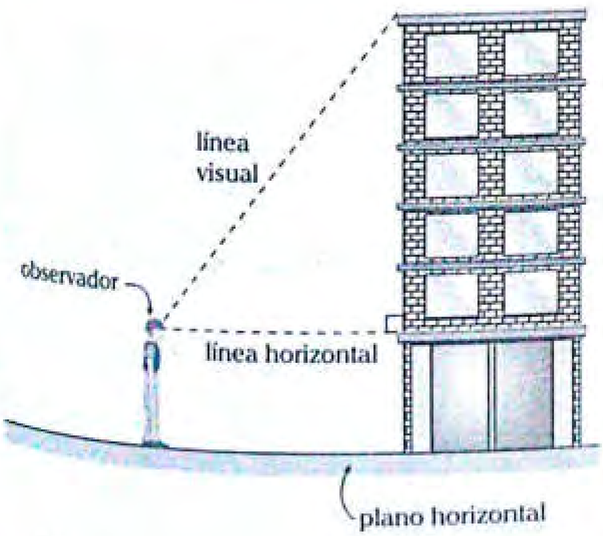
Nociones previas

Línea visual

Es aquella línea recta imaginaria que une el punto de observación con el objeto observado.

Línea horizontal

Es aquella línea recta imaginaria paralela al plano horizontal.



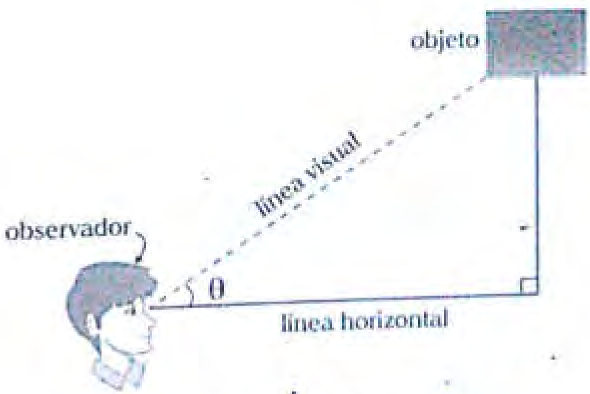
Definición

Los ángulos verticales son aquellos ángulos agudos contenidos en un plano vertical que están formados por dos líneas imaginarias llamadas horizontal y visual.

Clasificación

Ángulo de elevación

Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

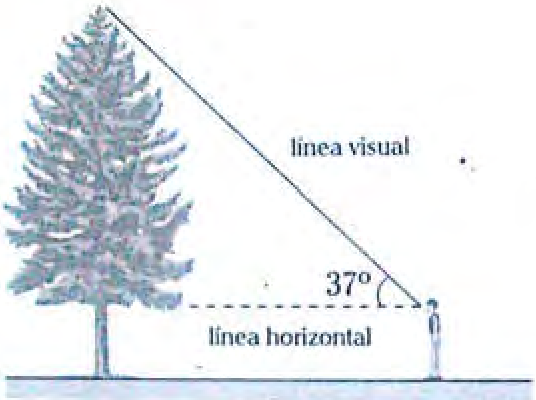


θ: ángulo de elevación

$$\boxed{0 < \theta < 90^\circ}$$

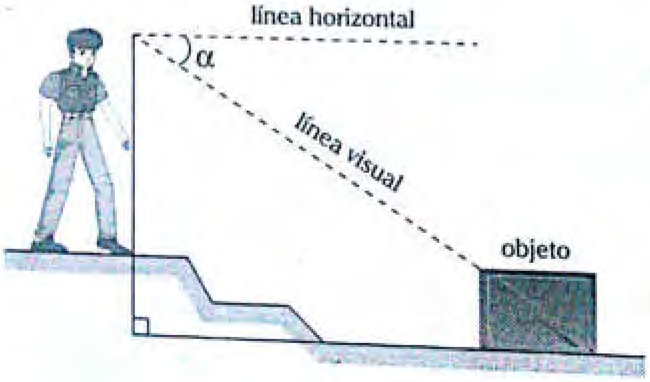
Ejemplo

Una persona de 1 m de estatura observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación de 37°.



ÁNGULO DE DEPRESIÓN

Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.

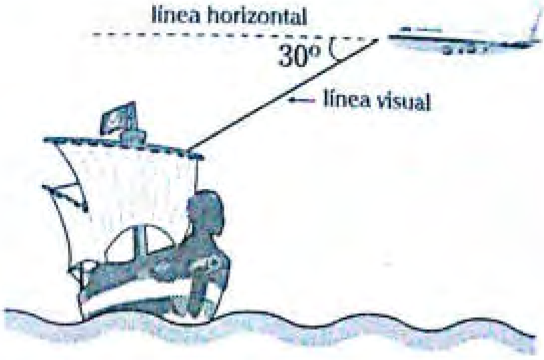


α: ángulo de depresión

$$\boxed{0° < \alpha < 90°}$$

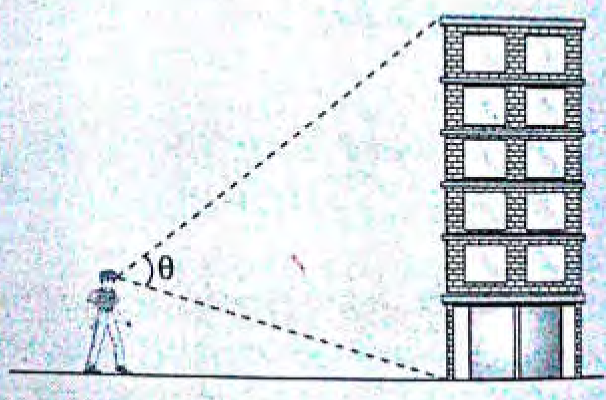
Ejemplo

El piloto de un avión observa una carabela con un ángulo de depresión de 30°.



OBSERVACIÓN

El ángulo de observación es aquel formado por dos líneas visuales.



θ: ángulo de observación (no necesariamente está en el plano vertical)

NOTA

El instrumento que nos ayuda a medir los ángulos verticales es el teodolito, que es importante en la industria de la construcción.

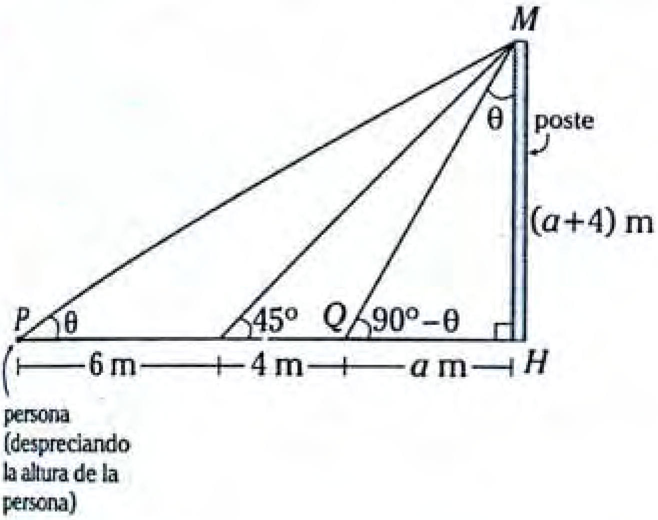
Problema N.º 1

Una persona observa un poste con un ángulo de elevación θ, si avanza 6 m hacia el poste su ángulo de elevación es de 45° y acercándose 4 m más, su ángulo de elevación es de 90°−θ, calcule la altura del poste.

UNFV 2012-I

Resolución

Graficamos



Del ⊿PMH

$$\tan\theta=\frac{a+4}{10+a} \qquad \text{(I)}$$

Del ⊿QMH

$$\tan\theta=\frac{a}{a+4} \qquad \text{(II)}$$

Igualamos (I) y (II)

$$\frac{a+4}{10+a}=\frac{a}{a+4} \;\rightarrow\; a=8$$

Por lo tanto, la altura del poste es 12 m.

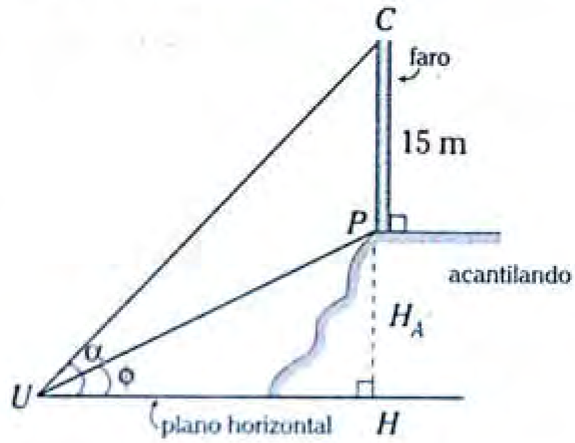
Problema N.º 2

Un faro de 15 m de altura está en el borde de un acantilado desde un punto del plano horizontal que pasa por la base del acantilado, los ángulos de elevación de las partes superior e inferior del faro son α y ϕ, respectivamente. Determine la altura del acantilado.

Resolución

Graficamos

H_A: altura del acantilado



Del ⊿UPH

$$\tan\phi=\frac{H_A}{UH} \;\rightarrow\; UH=\frac{H_A}{\tan\phi} \qquad \text{(I)}$$

Del ⊿UCH

$$\tan\alpha=\frac{15+H_A}{UH} \;\rightarrow\; UH=\frac{15+H_A}{\tan\alpha} \qquad \text{(II)}$$

Igualamos (I) y (II)

$$\frac{H_A}{\tan\phi}=\frac{15+H_A}{\tan\alpha}$$

$$H_A\cdot\tan\alpha=15\cdot\tan\phi+H_A\cdot\tan\phi$$

$$\therefore \quad H_A=\frac{15\cdot\tan\phi}{\tan\alpha-\tan\phi}$$

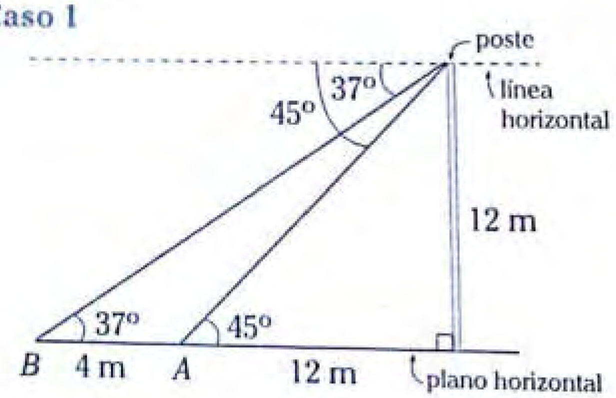
Problema N.° 3

Desde la parte superior de un poste se observan los puntos A y B, ubicados en un plano horizontal con ángulos de depresión de 45° y 37°, respectivamente. Halle la mayor distancia entre A y B si la altura del poste es 12 m.

Resolución

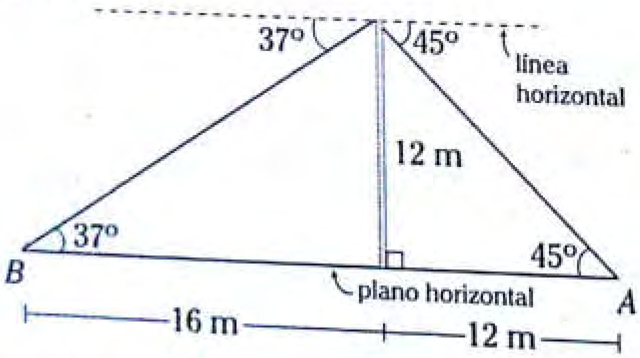
Graficamos

Caso 1



$\therefore \quad d_{AB}=4$ m

Caso 2



$\therefore \quad d_{AB}=28$ m

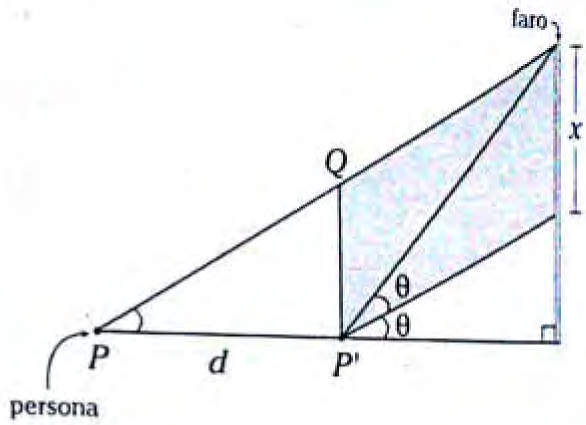
Por lo tanto, la máxima distancia entre A y B es 28 m.

Problema N.° 4

Una persona observa la parte más alta de un faro con elevación θ. Si camina d metros hacia el faro, observaría al punto anterior con elevación 2θ y a otro que está x metros más abajo que el primero con ángulo de elevación θ. Determine una expresión para x.

Resolución

Graficamos



Trazamos QP' y formamos el paralelogramo que está sombreado.

De lo cual $QP' \perp PP'$

En el ⊿ PQP'

$$\frac{QP'}{d}=\tan\theta$$

$\therefore \quad x=d\tan\theta$

NIVEL BÁSICO

1. Desde un punto en el suelo, el ángulo de elevación para observar la parte más elevada de una torre es de 30°; avanzando 150 m en dirección a la torre, se observa nuevamente la parte más elevada con un ángulo de elevación de 60°. Calcule la distancia del primer punto al pie de la torre.

A) 200 m B) 230 m C) 235 m
D) 225 m E) 215 m

2. La longitud de la cuerda que sostiene un cometa en vuelo es de $20\sqrt{3}$ m y el ángulo de elevación de la cometa es de 60°. Determine a qué altura del suelo se halla la cometa si la cuerda se mantiene tensa.

A) 10 m B) 15 m C) 20 m
D) 25 m E) 30 m

3. A 20 m de la base de un faro, una persona observa su punto más alto con un ángulo de elevación θ; además, si se aleja 20 m en línea recta, ahora el punto más alto se ve con un ángulo de elevación α. Si $\tan\theta+\tan\alpha=0,75$ y la persona mide 1,70 m, determine la altura del faro.

A) 12,7 m B) 11,7 m C) 11 m
D) 10,7 m E) 10 m

4. Dos personas de 1,60 m de estatura están situadas en lados opuestos de una montaña de 41,60 m de altura, observan la cima de la misma con ángulos de elevación de 30° y 45°, respectivamente. Calcule la distancia que separa a las personas. Considere $\sqrt{3}=1,7$.

A) 108 m B) 107 m C) 105 m
D) 106 m E) 109 m

5. Una persona observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación. Cuando la distancia entre la persona y el árbol se ha reducido a su tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. Calcule la cotangente del ángulo de elevación inicial.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) 2

6. Dos personas de alturas h y $2h$ separadas una distancia d, observan un globo con igual ángulo de elevación. Calcule la cotangente de dicho ángulo si sabemos que la longitud de sus líneas visuales están en la relación de 2 a 1, respectivamente.

A) $\dfrac{2h}{3d}$ B) $\dfrac{d}{3h}$ C) $\dfrac{d}{2h}$
D) $\dfrac{d}{h}$ E) $\dfrac{d}{5h}$

7. Una gaviota observa un pez en el mar, con un ángulo de depresión de 60°. Si en ese instante la gaviota volaba a $250\sqrt{3}$ m de altura, ¿cuál es la distancia entre la gaviota y el pez?

A) 500 m B) 400 m C) $500\sqrt{3}$ m
D) 750 m E) $400\sqrt{3}$ m

8. Un helicóptero viaja en línea recta y horizontalmente divisa en tierra un punto A, con un ángulo de depresión igual a 53°. Si luego de recorrer 900 m se encuentra exactamente por encima del punto A, calcule la longitud de la primera visual.

A) 1800 m B) 1700 m C) 1600 m
D) 1500 m E) 1400 m

9. Desde lo alto de un acantilado de 54 m de altura, se observa en la misma dirección dos boyas en el mar, con ángulos de depresión de 60° y 45°, respectivamente. Calcule la distancia que hay entre las boyas.

A) $20\sqrt{3}$ m
B) $18(3-\sqrt{3})$ m
C) $19(3+\sqrt{3})$ m
D) $19(3-\sqrt{3})$ m
E) $18(3+\sqrt{3})$ m

10. Dos botes son observados desde lo alto de un faro en la misma dirección. El bote más cercano se observa con un ángulo de depresión θ y el otro con un ángulo de depresión de 37°. Si la altura del faro es de 50 m, ambos botes están separados por 40 m y el faro está a 22 m sobre el nivel del mar, calcule el valor de $\tan\theta$.

A) 7/6 B) 6/7 C) 9/7
D) 7/9 E) 5/7

11. Desde la parte más elevada de un faro de 12 m sobre el nivel del mar, se observa un barco que se aleja con un ángulo de depresión θ; 0,4 segundos más tarde se observa al barco en la misma dirección, ahora con un ángulo de depresión α. Si la $\tan\theta=0,5$ y $\tan\alpha=0,\widehat{3}$, calcule la velocidad del barco.

A) 106 km/h B) 105 km/h C) 103 km/h
D) 107 km/h E) 108 km/h

12. Desde un hidroavión que está por aterrizar, se observa en su misma trayectoria el largo de un río, al extremo más cercano con un ángulo de depresión de 60° y al extremo más alejado con un ángulo de depresión de 30°. Determine la longitud que recorrerá el hidroavión si se encuentra a $600\sqrt{3}$ m de altura.

A) 1300 m B) 1200 m C) 1000 m
D) 900 m E) 800 m

13. Un avión de guerra que vuela a una altura de 120 m observa un tanque enemigo con un ángulo de depresión de 37°. Si el cañón del tanque apunta con un ángulo de elevación de 53°, ¿qué distancia deberá recorrer el avión para que el enemigo dé en el blanco?

A) 40 m B) 60 m C) 70 m
D) 80 m E) 90 m

14. Dos personas de alturas H y h ($H > h$) se encuentran frente a frente separadas una cierta distancia. La persona de altura h observa la cabeza de la otra con un ángulo de elevación α y los pies con un ángulo de depresión θ. Si $\tan\theta=0,17$ y $\tan\alpha=0,3$, determine el valor de $\frac{h}{H}$.

A) 0,5 B) 0,6 C) 0,36
D) 0,81 E) 0,9

15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante; antes de pasar sobre dos puntos en tierra: M y N, los observa con ángulos de depresión de 45° y 37°, respectivamente. Cuando está sobre N es visto desde M con un ángulo de elevación θ. ¿Cuál es el valor de $\tan\theta$?

A) 1 B) 2 C) 5
D) 4 E) 3

16. Una hormiga observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación. Si la hormiga se acerca hacia el árbol una distancia igual al doble de la altura del árbol, el nuevo ángulo de elevación para el mismo punto es igual al complemento del anterior. Calcule la cotangente del ángulo de elevación inicial.

A) $\sqrt{2}-1$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+2$ E) $2-\sqrt{2}$

17. Desde un punto en el suelo se observa un pedestal de 12 m de altura, este sostiene una estatua de 13 m de altura. ¿A qué distancia del pedestal estará el punto para ver el pedestal y la estatua con ángulos de observación iguales?

A) 60 m B) 50 m C) 40 m
D) 20 m E) 30 m

18. Dos edificios separados por una calle de 30 m de ancho son observados desde el punto medio de la calle con ángulos cuyos valores son complementarios. Determine el producto de sus respectivas alturas.

A) 300 m B) 150 m C) 215 m
D) 225 m E) 175 m

19. Para calcular la altura de una montaña un topógrafo observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación α, luego se aleja una distancia d y observa el mismo punto con un ángulo de elevación β. Calcule la altura de la montaña.

A) $\dfrac{d}{\tan\alpha-\cot\beta}$

B) $\dfrac{d}{\tan\beta-\tan\alpha}$

C) $\dfrac{d}{\cot\alpha-\cot\beta}$

D) $\dfrac{d}{\cot\beta-\cot\alpha}$

E) $(\cot\alpha+\cot\beta)\cdot d$

20. Una persona se dirige a un edificio y observa lo alto del mismo bajo un ángulo de elevación α, después de caminar 10 m observa la misma altura con un ángulo de elevación θ. Si la altura del edificio es 30 m, calcule el valor de $\tan\alpha\cdot\left(\cot\theta+\dfrac{1}{3}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

NIVEL INTERMEDIO

21. Desde lo alto de una torre se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión α y a otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y la torre con un ángulo de depresión $90°-\alpha$. Calcule $\tan\alpha$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ E) 1

22. Desde un punto en tierra se observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación. Si después de avanzar las 2/3 partes de la distancia original que separaba al observador del pie del edificio, el ángulo de elevación es el complemento del anterior. Calcule el ángulo de elevación inicial.

A) $22°30'$ B) $15°$ C) $45°$
D) $60°$ E) $30°$

23. Un alpinista está descendiendo por una montaña inclinada con respecto al plano horizontal un ángulo θ, y observa un objeto en el suelo alejado de la montaña con un ángulo de depresión β. Avanzando la mitad del recorrido observa el mismo objeto con un ángulo de depresión α. Determine el valor de $(2\cdot\cot\beta-\cot\alpha)\tan\theta$.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 1/2 E) 1/4

24. Dos personas observan la parte superior de un edificio de altura H con ángulos de elevación α y β. Determine la máxima distancia que separa a las personas.

A) $H(\tan\alpha+\tan\beta)$
B) $H(\cot\alpha+\cot\beta)$
C) $H(\tan\alpha-\tan\beta)$
D) $H(\cot\alpha-\cot\beta)$
E) $H(\cot\beta-\cot\alpha)$

25. De la parte superior de una torre se observa un punto M en el suelo con un ángulo de depresión x. De otro punto N ubicado en el punto medio, entre la base de la torre y el punto M, se observa la parte alta de una antena, que se encuentra en el extremo superior de la torre con un ángulo de elevación y. Si la torre tiene una altura de 20 m, calcule la longitud de la antena.

A) $\dfrac{10(\tan y-2\tan x)}{\tan x}$

B) $\dfrac{10(\cot y-2\cot x)}{\cot x}$

C) $\dfrac{10(\cot y-2\tan x)}{\tan x}$

D) $\dfrac{10(\cot y-2\cot x)}{\tan x}$

E) $\dfrac{10(2\tan y-\tan x)}{\cot y}$

26. Desde un punto del suelo se observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación θ. Si en la misma dirección nos acercamos al edificio una distancia igual al triple de su altura, el ángulo de elevación es el complemento del anterior. Calcule $\tan\theta+\cot\theta$.

A) 3 B) 11 C) $\sqrt{6}$
D) 7 E) $\sqrt{13}$

27. Desde la orilla de un río el ángulo de elevación de un árbol en la ribera opuesta es de θ y desde un punto 2 u más atrás y en línea recta, el ángulo de elevación es de β. Determine el ancho del río.

A) $\dfrac{2\tan\beta}{\tan\theta+\tan\beta}$ B) $\dfrac{2\tan\theta}{\cot\beta-\cot\theta}$

C) $\dfrac{2\tan\beta}{\tan\theta-\tan\beta}$

D) $\dfrac{2\cot\beta}{\cot\beta-\tan\theta}$ E) $\dfrac{2\cot\theta}{\cot\beta-\cot\theta}$

28. Una persona que se desplaza por una colina inclinada un ángulo θ con respecto a la horizontal se dirige hacia un castillo y observa la parte más alta con un ángulo de elevación igual a $\frac{3}{2}\theta$; luego de subir una distancia de 4 m hacia el castillo, el nuevo ángulo de elevación mide 2θ. Calcule la altura del castillo.

A) $4\cot\theta$ m
B) $4\tan\theta$ m
C) $2\cot\theta$ m
D) $2\tan\theta$ m
E) $2(\tan\theta+\cot\theta)$ m

29. Desde los extremos del diámetro de una plaza que tiene forma circular, los ángulos de elevación para ver el asta de una bandera levantada en un punto del contorno de la plaza son α y β. Si el diámetro tiene una longitud de 10 m, calcule la altura del asta de la bandera.

A) $\dfrac{10}{\sqrt{\cot^2\alpha-\cot^2\beta}}$

B) $\dfrac{10}{\sqrt{\tan^2\beta-\tan^2\alpha}}$

C) $\dfrac{10}{\sqrt{\cot\alpha\cdot\cot\beta}}$

D) $\dfrac{10}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}}$

E) $\dfrac{10}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}$

30. Un árbol, en posición vertical, es visto desde un punto en tierra con un ángulo de elevación x. Debido a los años del árbol, este se desvía desde su base un ángulo Y respecto a la vertical y hacia el lado del punto de observación. Desde este mismo punto se observa el árbol, que no ha perdido su longitud, bajo un ángulo de observación Z. Calcule $\cot x$.

A) $\cos(Z-Y)\cdot\sec(Z)$
B) $\text{sen}(Z+Y)\cdot\sec(Z)$
C) $\cos(Z-Y)\cdot\csc(Z)$
D) $\text{sen}(Z-Y)\cdot\csc(Z)$
E) $\tan(Z-Y)\cdot\csc(Z)$

31. Un hombre que mide 1,70 m de estatura, observa su sombra a las 4 p.m. Asumiendo que amanece a las 6: 00 a.m. y que el sol hace un círculo sobre el hombre, calcule cuánto mide su sombra.

A) 1,54 m B) 1,67 m C) 2 m
D) 2,55 m E) 2,94 m

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en posición normal

Capítulo IV

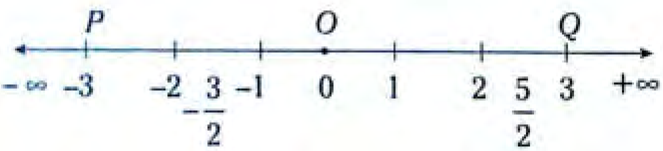
OBJETIVOS

- Reconocer a los ángulos en posición normal.
- Calcular los valores de las razones trigonométricas de los ángulos en posición normal utilizando la definición.
- Identificar el signo de las razones trigonométricas de los ángulos en posición normal según el cuadrante.

Nociones previas

RECTA NUMÉRICA

Es la representación geométrica de los números reales, donde a cada punto le corresponde un número real y viceversa.



Donde

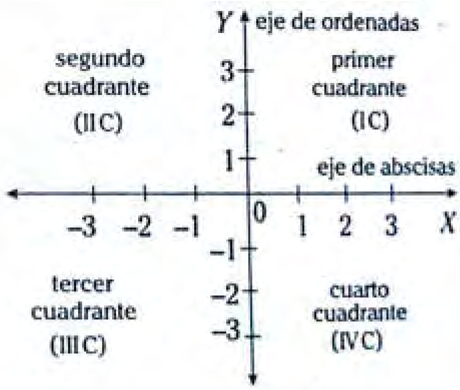
O: origen de la recta numérica

-3: coordenada de P

$\frac{5}{2}$: coordenada de Q

PLANO CARTESIANO

Es aquel plano que se forma por la intersección de dos rectas numéricas perpendiculares entre sí en sus orígenes.



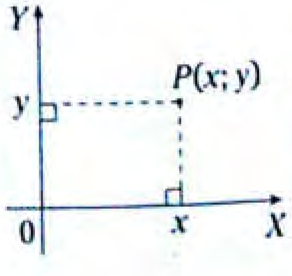
Donde

O: origen de coordenadas

$\overrightarrow{OX}$: semieje positivo de las abscisas

COORDENADA DE UN PUNTO

A todo punto del plano cartesiano se le asocia un par ordenado y viceversa. Se le denota por $P(x; y)$.



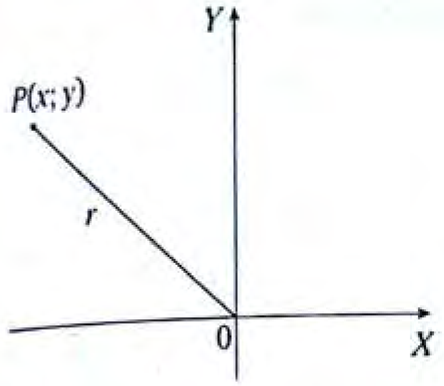
Donde

x: abscisa del punto P

y: ordenada del punto P

Radio vector (r)

Es la distancia del origen de coordenadas a un punto cualquiera del plano cartesiano.



Se cumple

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2};\ r>0}$$

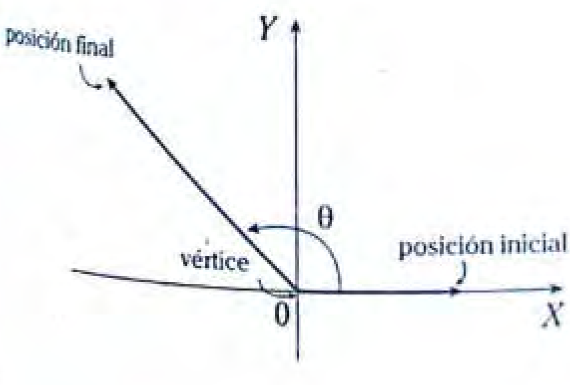
Ángulo en posición normal, canónica o estándar

Es un ángulo trigonométrico representado en el plano cartesiano y que cumple las siguientes características:

I. El vértice coincide con el origen de coordenadas.

II. La posición inicial está sobre el eje positivo de las abscisas.

III. La posición final posee cualquier ubicación en el plano cartesiano.



Donde

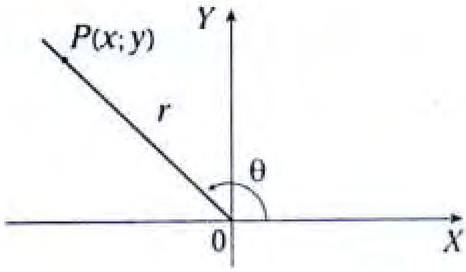
θ: medida del ángulo en posición normal

$\theta \in$ IIC: la posición final del ángulo nos indica el cuadrante

$\theta > 0$: sentido antihorario

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

Sea θ un ángulo en posición normal y $P(x; y)$ un punto que pertenece a su posición final



donde

x: abscisa de P

y: ordenada de P

r: radio vector de P

se define

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\text{ordenada del punto } P}{\text{radio vector}}=\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{abscisa del punto } P}{\text{radio vector}}=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{ordenada del punto } P}{\text{abscisa del punto } P}=\frac{y}{x}$$

$$\cot\theta=\frac{\text{abscisa del punto } P}{\text{ordenada del punto } P}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa del punto } P}=\frac{r}{x}$$

$$\csc\theta=\frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada del punto } P}=\frac{r}{y}$$

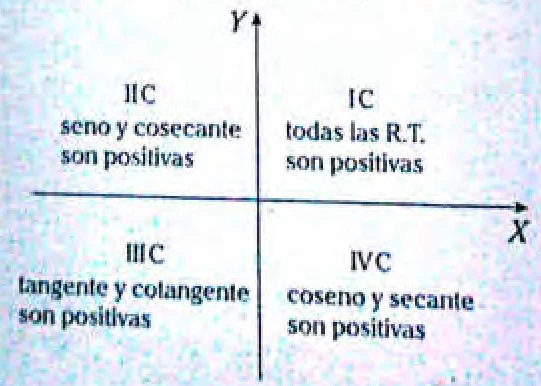
> **NOTA**
>
> Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal, es necesario conocer las coordenadas de un punto de su posición final de dicho ángulo.

Signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes

El signo de una razón trigonométrica depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo en posición normal.

	IC	IIC	IIIC	IVC
seno	+	+	–	–
coseno	+	–	–	+
tangente	+	–	+	–
cotangente	+	–	+	–
secante	+	–	–	+
cosecante	+	+	–	–

> **OBSERVACIÓN**
>
> Una forma práctica de recordar la regla de signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes es a partir del esquema mostrado

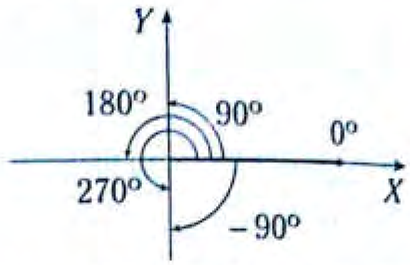


Ejemplos

- Si $\text{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0 \rightarrow \theta \in$ IIIC
- Si $\cos\alpha > 0$ y $\cot\alpha < 0 \rightarrow \alpha \in$ IVC
- Si $\tan\beta < 0$ y $\csc\beta > 0 \rightarrow \beta \in$ IIC

Ángulo cuadrantal

Es aquel ángulo en posición normal cuya posición final coincide con cualquiera de los semiejes cartesianos. Estos ángulos no pertenecen a cuadrante alguno.



Del gráfico, se observa que 0°; 90°; 180°; 270°; –90° son ángulos cuadrantales.

> **NOTA**
>
> Todo ángulo cuadrantal es múltiplo de 90°, es decir, si θ es un ángulo cuadrantal, entonces $\theta = 90°n$ o $\frac{\pi}{2}n; n \in \mathbb{Z}$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Se calculan del siguiente cuadro.

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

ND: no definido

> **OBSERVACIÓN**
>
> - Si θ es cuadrantal y $\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$, entonces
>
> $$\theta \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$$
>
> - $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$: son ángulos cuadrantales positivos menores a una vuelta.

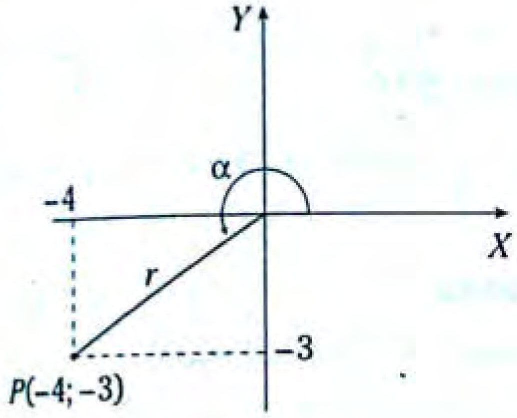
Problema N.° 1

Se tiene un ángulo α en posición normal, si su lado final contiene al punto $(-4;-3)$, calcule $\sec\alpha\cdot\cot\alpha$.

UNMSM 2006-II

Resolución

Del enunciado, tenemos



Del gráfico

$$r=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$$

Por definición (respecto de P)

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4};$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

Luego

$$\sec\alpha\cot\alpha=\left(\frac{-5}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{3}\right)$$

$$\therefore\quad \sec\alpha\cot\alpha=\frac{-5}{3}$$

Problema N.° 2

Si α, ϕ, θ son ángulos agudos tales que

$\frac{\alpha}{4}=\frac{\phi}{5}=\frac{\theta}{6}$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\phi+\theta)=1$,

halle $\tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$.

UNMSM 2009-II

Resolución

Nos piden $\tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$.

Datos

- α, ϕ, θ: ángulos agudos (I)
- $\frac{\alpha}{4}=\frac{\phi}{5}=\frac{\theta}{6}$ (II)
- $\operatorname{sen}(\alpha+\phi+\theta)=1$ (III)

De (II)

$$\alpha=4K,\ \phi=5K;\ \theta=6K$$

De (I) y (III)

Como $\operatorname{sen}(\alpha+\phi+\theta)=1 \rightarrow \alpha+\phi+\theta=90°$
pues α; ϕ; θ: ángulos agudos

Reemplazamos

$$4K+5K+6K=90° \rightarrow 15K=90° \rightarrow K=6°$$

Donde

$$\alpha=4(6°)=24°;\ \theta=6(6°)=36°$$

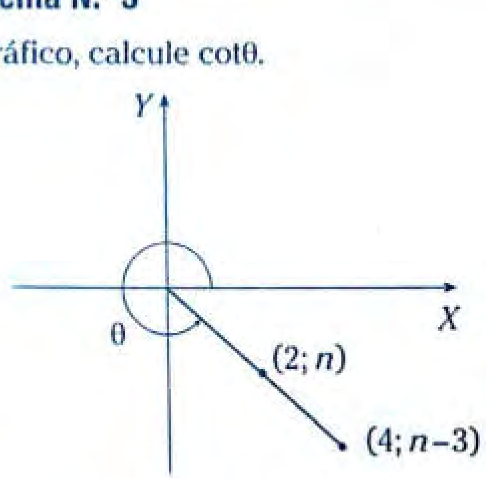
Luego

$$\tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)=\tan\left(\frac{24°+36°}{2}\right)=\tan 30°$$

$$\therefore\quad \tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problema N.º 3

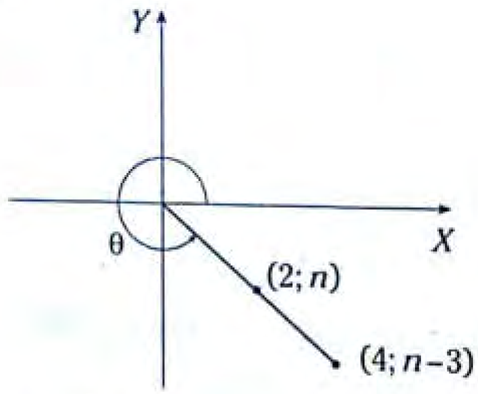
Del gráfico, calcule $\cot\theta$.



Resolución

Nos piden $\cot\theta$.

Datos



Por definición

$$\tan\theta=\frac{n}{2}=\frac{n-3}{4}$$

$\rightarrow\ 4n=2(n-3)$

$\rightarrow\ n=-3$

$\therefore\ \cot\theta=\frac{2}{n}=-\frac{2}{3}$

Problema N.º 4

Si $\sqrt{\tan\alpha}\csc\alpha\sec^2\theta<0$, ¿en qué cuadrante se encuentra α?

Resolución

Como $\sec^2\theta>0\ \rightarrow\ \sqrt{\tan\alpha}\operatorname{sen}\alpha<0$

Como $\sqrt{\tan\alpha}>0\ \rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha<0$

$\rightarrow\ \alpha\in \text{IIIC}\ \vee\ \alpha\in\text{IVC}$ (I)

Como $\sqrt{\tan\alpha}>0\ \rightarrow\ \tan\alpha>0$

$\rightarrow\ \alpha\in \text{IC}\ \vee\ \alpha\in\text{IIIC}$ (II)

De (I) y (II)

$\therefore\ \alpha\in\text{IIIC}$

Problema N.º 5

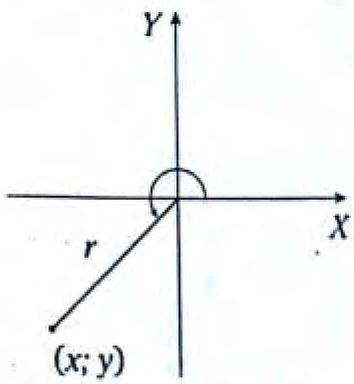
Si $\tan\theta=\frac{2}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta<0$, calcule $\sqrt{13}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$.

Resolución

Nos piden $L=\sqrt{13}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$.

Como $\tan\theta=\frac{2}{3}>0$ y $\operatorname{sen}\theta<0\ \rightarrow\ \theta\in\text{IIIC}$

Consideremos a θ como un ángulo en posición normal.



Por dato y definición

$$\tan\theta=\frac{2}{3}=\frac{y}{x}\ \rightarrow\ y=-2;\ x=-3$$

pues $x<0;\ y<0$

Además

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13}$$

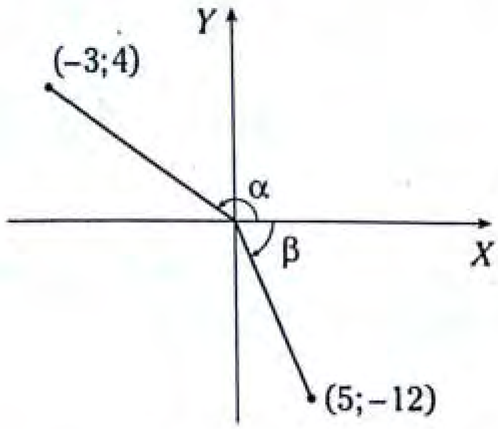
$$\therefore\ L=\sqrt{13}\left(\frac{y}{r}+\frac{x}{r}\right)=\sqrt{13}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}+-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=-5$$

NIVEL BÁSICO

1. Si $P(-2;3)$ es un punto que pertenece al lado final de un ángulo en posición normal θ, calcule $\sqrt{13}(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$.

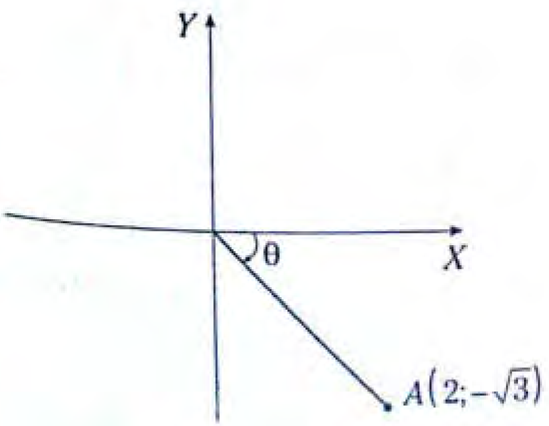
A) 5 B) 3 C) 1
D) 2 E) 7

2. Del gráfico, calcule $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$.



A) $\frac{16}{13}$ B) $\frac{4}{13}$ C) $\frac{13}{4}$
D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

3. Del gráfico dado

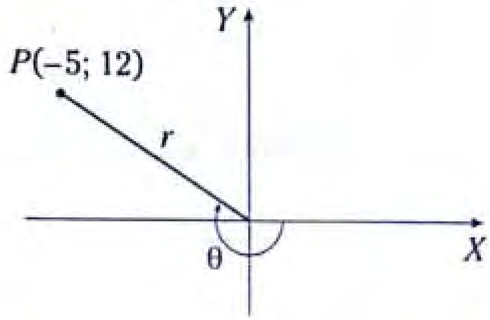


determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones.

I. El radio vector es $\sqrt{7}$.
II. La ordenada del punto A es 2.
III. $\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

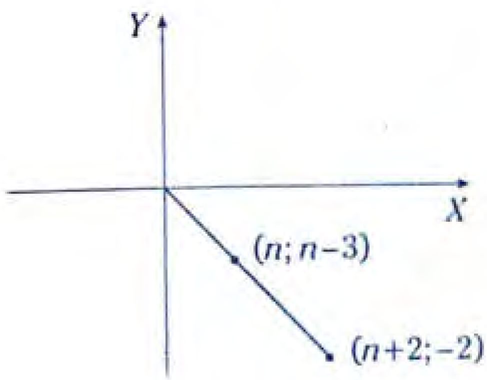
A) FVV B) VVV C) VFV
D) FVF E) FFF

4. Del gráfico dado, calcule $r\cot\theta$.



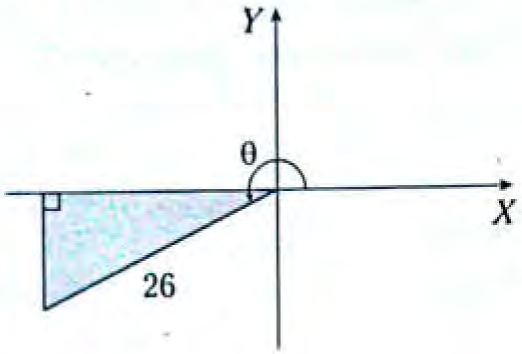
A) $-\frac{73}{12}$ B) $-\frac{5}{13}$ C) $-\frac{85}{12}$
D) $-\frac{65}{12}$ E) $-\frac{156}{5}$

5. Calcule n.



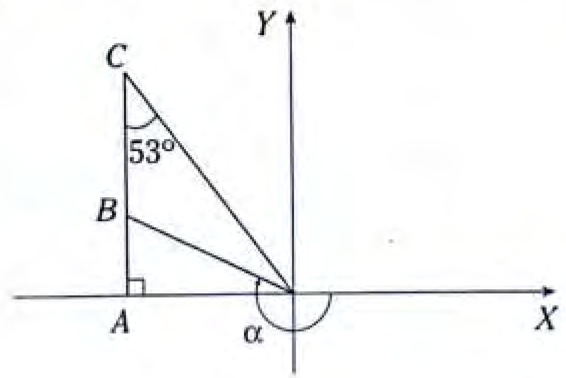
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. Si $\tan\theta=\frac{5}{12}$, calcule el área de la región sombreada.



A) $100\ u^2$ B) $140\ u^2$ C) $135\ u^2$
D) $200\ u^2$ E) $120\ u^2$

7. Del gráfico dado, calcule $8\tan\alpha$ si $AB=BC$.



A) -1 B) -2 C) -3
D) -4 E) -5

8. Si $\theta\in$ IIC y $\beta\in$ IIIC, determine el signo de las siguientes expresiones.

I. $\text{sen}\theta+\tan\beta$

II. $\csc\theta-\sec\beta$

III. $\text{sen}\theta\cos\theta\sec\beta\csc\beta$

A) +; –; + B) –; –; – C) +; +; +
D) –; +; – E) +; +; –

9. Si $\text{sen}\theta<0$ y $\tan\theta=2$, calcule $\sqrt{5}(\text{sen}\theta+\cos\theta)$.

A) -1 B) -2 C) -3
D) -4 E) -5

10. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones.

I. Si $\theta\in$ IIC $\rightarrow$ $\tan\theta+\cot\theta>0$

II. Si $\text{sen}\theta<0$ $\rightarrow$ $\theta\in$ IIIC $\vee$ IVC

III. Si $\tan\theta>0$ y $\sec\theta<0$ $\rightarrow$ $\theta\in$ IIIC

A) FFV B) VVV C) FFF
D) FVF E) VFV

11. Si $\cos^2\theta\,\text{sen}\theta>0$ y $\sqrt{\tan\theta}>0$, determine el cuadrante al cual pertenece θ.

A) IIIC B) IIC C) IC
D) IVC E) IC ∨ IIC

12. Calcule $\dfrac{\text{sen}^2 90°+2\cos 180°}{\tan^4 360°-\csc 270°}$.

A) 1 B) 0 C) -1
D) 2 E) -2

13. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{a^2\,\text{sen}\,90°+b^2\cos 180°+ab\tan 360°}{a\,\text{sen}\,270°+b\cos 0°+a^3\cos 270°}$$

A) 1 B) $b-a$ C) $a-b$
D) $a+b$ E) $-a-b$

14. Calcule el número de ángulos cuadrantales comprendidos entre 80° y 800°.

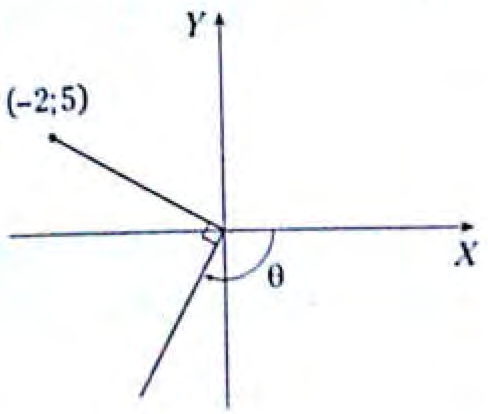
A) 4 B) 6 C) 10
D) 2 E) 8

15. Si θ es la medida de un ángulo cuadrantal positivo y menor a una vuelta, tal que $\cos\theta=-1$, calcule $\tan\frac{\theta}{4}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{6}$.

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) 1 E) $\frac{7}{2}$

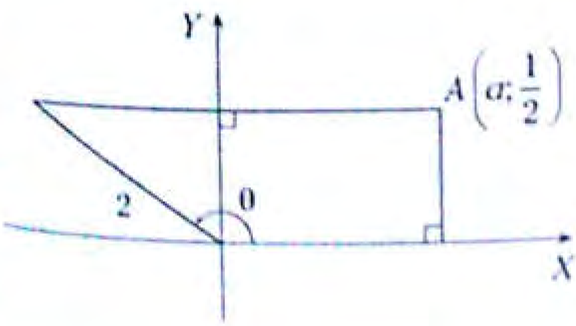
16. Del gráfico, calcule $\tan\theta$.



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

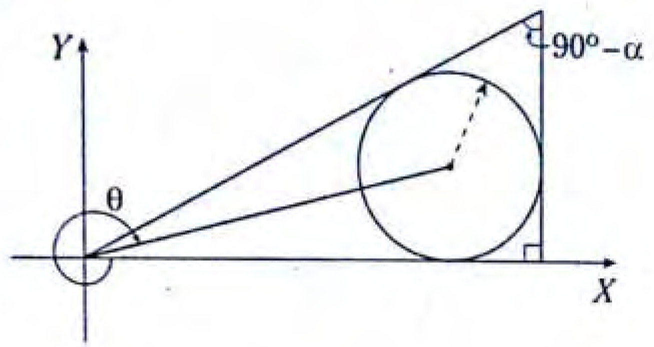
17. Calcule $\csc\theta$.



A) 8 B) 1/2 C) 3

D) 2 E) 4

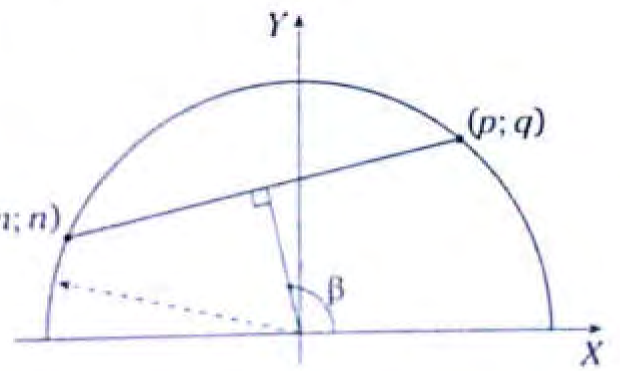
18. Si $\tan\alpha=\frac{5}{12}$, calcule $\tan\theta$.



A) $\frac{11}{3}$ B) 11 C) $\frac{2}{11}$

D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{1}{5}$

19. Del gráfico, calcule $\cot\beta$.



A) $\frac{m+p}{n-q}$ B) $\frac{n+q}{m+p}$ C) $\frac{m+p}{n+q}$

D) $\frac{m-p}{n+q}$ E) $\frac{m-p}{n-q}$

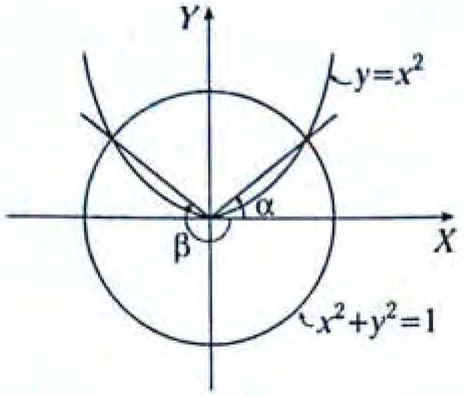
20. Si $P\left(-\sqrt{2-\sqrt{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ es un punto que pertenece al lado final de un ángulo en posición normal θ, calcule $\sec^2\theta+\csc^2\theta$.

A) 12 B) 8 C) 14

D) 16 E) 10

NIVEL INTERMEDIO

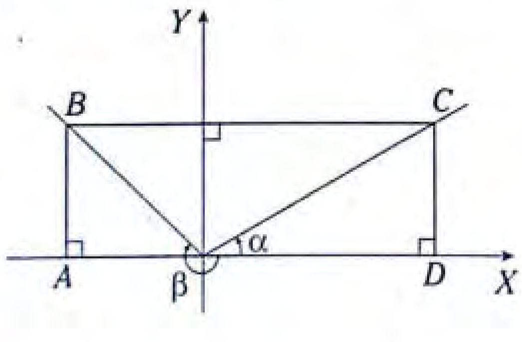
21. Del gráfico adjunto, calcule $\tan\alpha\cot\beta$.



A) $-\sqrt{2}$ B) -2 C) $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) -1

22. Si $AB=3$ y $BC=15$, calcule $\cot\alpha-\cot\beta$.



A) 3 B) 5 C) 1

D) 2 E) 4

23. Si $x\in\langle 0;\,2\pi]$ y $\cos^2 x=2\cos x-1$, calcule

$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{x}{8}\right)$

A) 1 B) 0 C) -1

D) $-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

24. Si $x,\,y\in\langle 0;\,2\pi\rangle$ y

$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y-2(\operatorname{sen}x-\cos y)+2=0$,

calcule $\cos x+\operatorname{sen}y$.

A) $-1/2$ B) -1 C) 1

D) -2 E) 0

25. Si θ y α son ángulos cuadrantales positivos y menores a una vuelta, tal que $\tan^2\theta=1+\operatorname{sen}\alpha$, calcule $\alpha-\theta$.

A) π B) $3\frac{\pi}{2}$ C) 2π

D) $\frac{\pi}{2}$ E) 0

26. Al resolver la ecuación

$x\operatorname{sen}270°+2x^2\cos 180°=\cot 90°-\cos 0°$,

indique el mayor valor de x.

A) $-0{,}5$ B) -1 C) $0{,}5$

D) $-1{,}5$ E) $1{,}5$

27. Si $\theta\in\langle 90°;\,180°\rangle$ y $\alpha\in\langle 0°;\,90°\rangle$, determine el signo de las siguientes expresiones.

I. $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos^2(2\alpha)$

II. $\cos(\theta+\alpha)$

III. $(1-\cos\alpha)\cdot\tan\theta$

A) $-;\,-;\,-$ B) $+;\,-;\,-$ C) $+;\,+;\,+$

D) $+;\,+;\,-$ E) $-;\,+;\,-$

28. Si $4\tan^2\theta+11\tan\theta-3=0$ y $\theta\in$ IIIC, calcule $\sec\theta+\csc\theta$.

A) $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ B) $-\sqrt{17}$ C) $-\frac{5\sqrt{17}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ E) $-5\sqrt{17}$

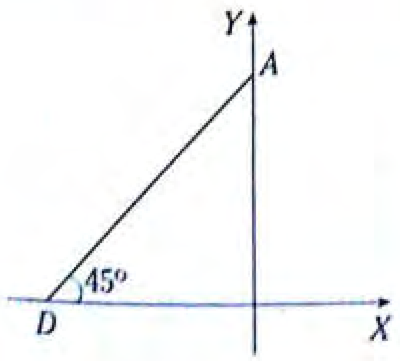
29. Si $\sqrt{\cos x-\sqrt{-\operatorname{sen} x}}\geq 0$ y $\tan^2 x=\frac{2}{3}$, calcule $\sqrt{5}(\operatorname{sen} x+\cos x)$.

A) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
B) 2
C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
D) 1
E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

30. Si la ecuación $x^2+\tan\theta x+1=0$ tiene raíces iguales y $\theta\in$ IIC, calcule $\sec\theta$.

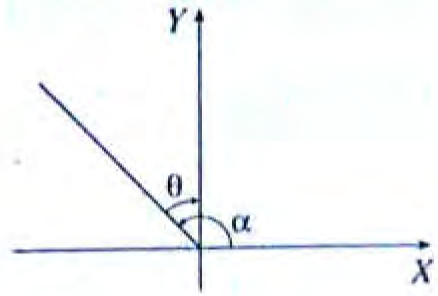
A) -3
B) -2
C) $\sqrt{5}$
D) 2
E) $-\sqrt{5}$

31. Del gráfico mostrado, determine $\tan\theta$ si sobre AD se construye un cuadrado $ABCD$ que pertenece al segundo cuadrante en donde N es punto medio de BC y θ es un ángulo en posición normal cuyo lado final pasa por M. (M punto medio de AN).



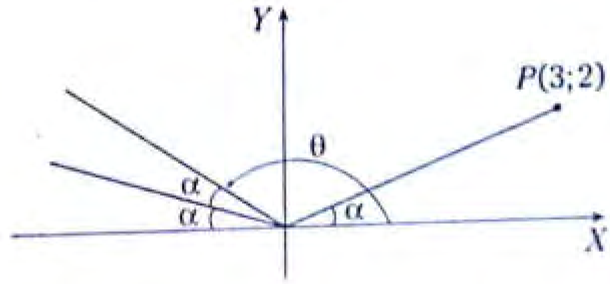
A) $-\frac{5}{4}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{4}{5}$
D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{5}{3}$

32. Del gráfico, determine $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$ si $\tan\alpha=\frac{-5}{12}$.



A) $-\frac{17}{13}$ B) $\frac{17}{13}$ C) $-\frac{7}{13}$
D) $\frac{16}{13}$ E) $\frac{7}{13}$

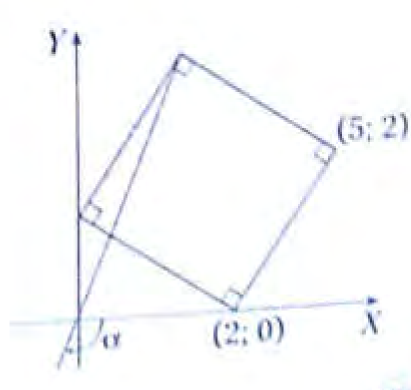
33. Del gráfico adjunto, determine $(\cos\theta+1)\csc^2\alpha$.



A) $2\sqrt{13}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 4
D) $4\frac{\sqrt{13}}{13}$ E) 2

34. Del gráfico dado, calcule $\sqrt{34}\cos\alpha+3\tan\alpha$.

A) 2
B) -2
C) -4
D) 1
E) 5



35. Si $\alpha \in$ IIC y $\theta \in$ IIIC, además, se cumple $5^{2\sec\alpha+3}=3^{3\tan\theta-2}$, determine $2\sqrt{5}\tan\alpha+3\sqrt{13}\sec\theta$.

A) -10 B) -14 C) -16
D) -18 E) -12

36. Si se cumple que $\operatorname{sen}x=\csc y$, determine $\operatorname{sen}^2x+\cos x+\csc^2 y$.

A) 1 B) 2 C) 0
D) -1 E) -2

37. Si $(\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha-1)\operatorname{sen}\alpha > 0$, además, $\cos\alpha+\sec\alpha < 0$, determine el signo de las siguientes expresiones.

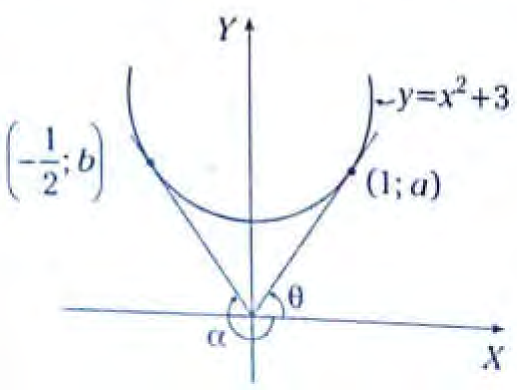
I. $\sec\alpha\tan\alpha$

II. $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$

III. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

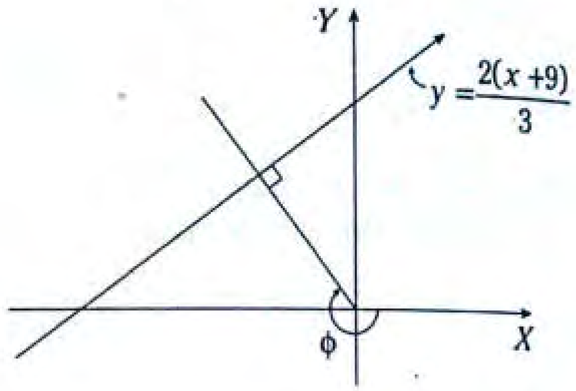
A) +; −; −
B) +; −; +
C) +; ±; −
D) +; +; −
E) +; ±; +

38. Del gráfico mostrado, determine $\tan\alpha+\cot\theta$.



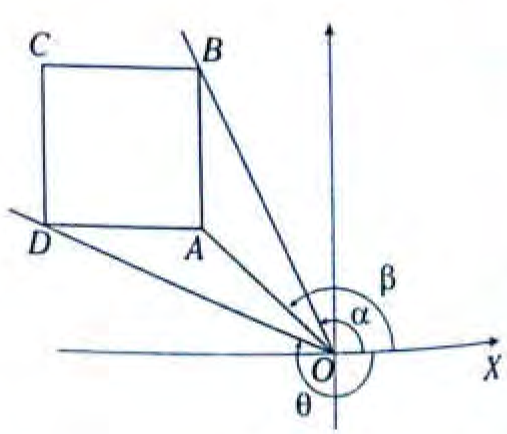
A) $-\frac{25}{4}$ B) $-\frac{13}{2}$ C) $-\frac{13}{4}$
D) $-\frac{17}{4}$ E) $-\frac{17}{8}$

39. Del gráfico mostrado, calcule $\sec\phi\csc\phi$.



A) $-\frac{5}{6}$ B) $-\frac{13}{6}$ C) $-\frac{19}{6}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

40. En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado de lados paralelos a los ejes coordenadas. Si las coordenadas de A son $(-a; a)$, calcule $\tan\alpha\tan\theta-\tan\beta$.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) -2

Circunferencia trigonométrica

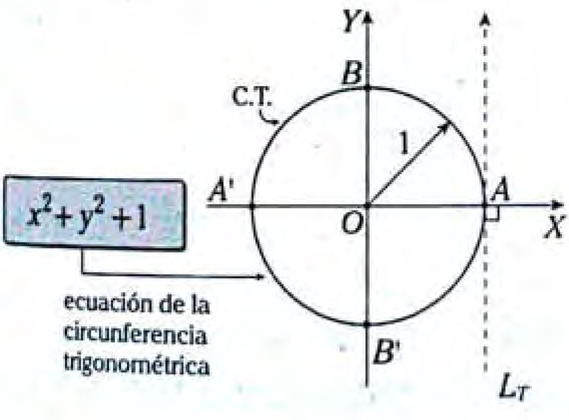
Capítulo V

Objetivos

- Realizar el estudio de expresiones trigonométricas de arcos dirigidos (números reales).
- Analizar las variaciones que se dan para el seno, coseno y tangente de un arco.

Definición

Es aquella circunferencia inscrita en el plano cartesiano con centro en el origen de coordenadas y radio igual a la unidad.



Donde

$A(1; 0)$: origen de arcos

$B(0; 1)$: origen de complementos

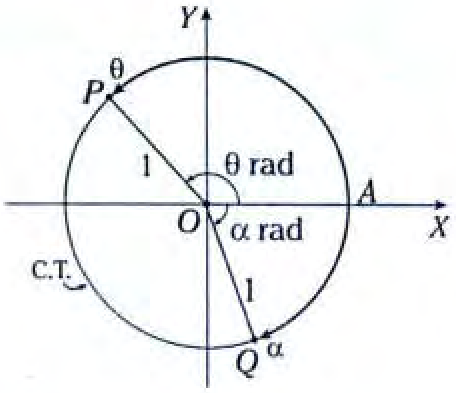
$A'(-1; 0)$: origen de suplementos

$B'(0; -1)$: sin nombre especial

L_T: eje de tangentes

Arcos dirigidos en posición normal

Son aquellos arcos que se generan a partir del origen de arcos (A), siendo el extremo la posición final de dicho arco.



Del gráfico anterior

α y θ: son arcos dirigidos en posición normal

P: extremo del arco θ

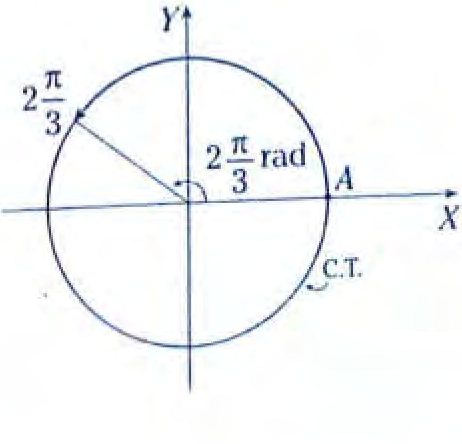
Q: extremo del arco α

θ: es un arco positivo (sentido antihorario)

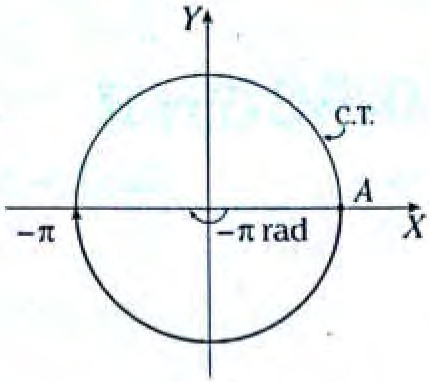
α: es un arco negativo (sentido horario)

Ejemplos

1.



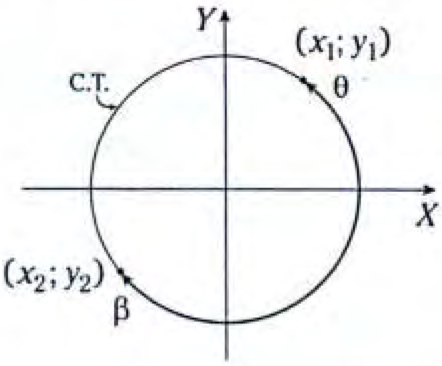
2.



Representación del seno de un arco en la circunferencia trigonométrica

Definición

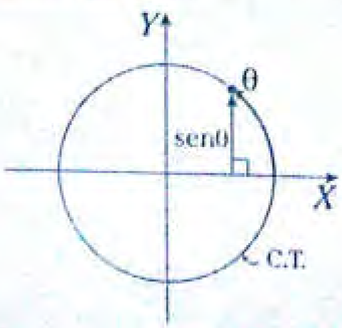
El seno de un arco en la C. T. es la ordenada del extremo de dicho arco.



Del gráfico, tenemos

$\boxed{y_1=\operatorname{sen}\theta}$ $\boxed{y_2=\operatorname{sen}\beta}$

> **Observación**
>
> El seno de un arco dirigido en la C. T. se representa geométricamente mediante un segmento dirigido.

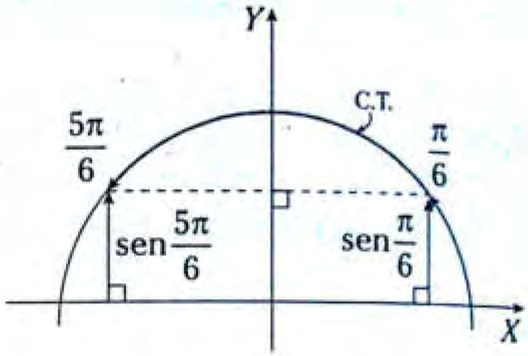


Variación del seno

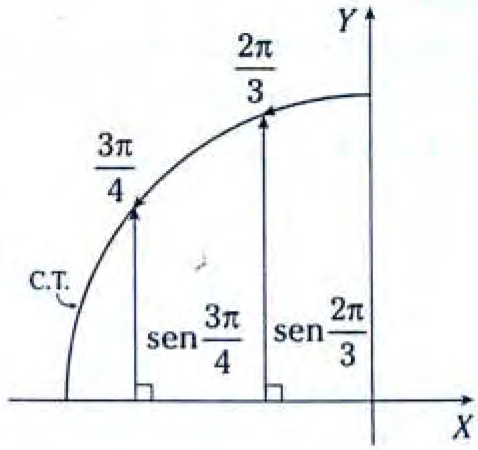
$\boxed{\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \text{ se cumple } -1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1}$

Ejemplos

1.



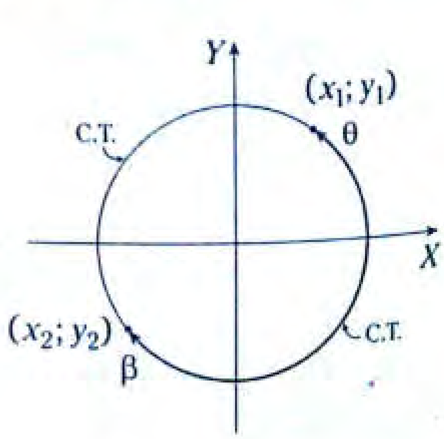
2.



Representación del coseno de un arco en la circunferencia trigonométrica

Definición

El coseno de un arco en la C. T. es la abscisa del extremo de dicho arco.



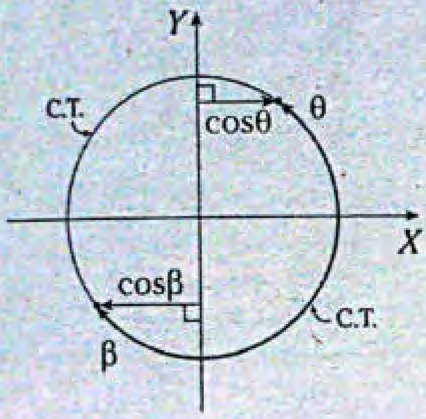
Del gráfico, tenemos

$$\boxed{x_1=\cos\theta}$$

$$\boxed{x_2=\cos\beta}$$

Observación

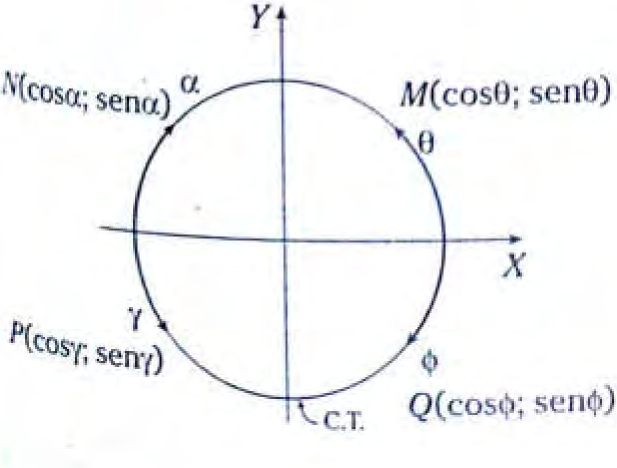
El coseno de un arco dirigido en la C.T. se representa geométricamente mediante un segmento dirigido.



Variación del coseno

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \text{ se cumple}\\ -1 \leq \cos\theta \leq 1\end{array}}$$

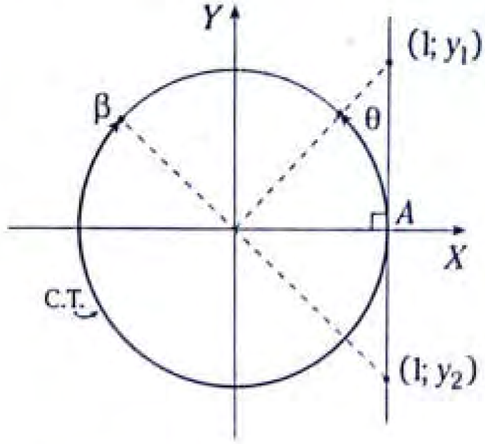
Ejemplo



Representación de la tangente de un arco en la circunferencia trigonométrica

Definición

La tangente de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la prolongación del radio que pasa por su extremo y la recta tangente a la C.T. en el punto A.



Del gráfico, tenemos

$$\boxed{y_1=\tan\theta} \quad \boxed{y_2=\tan\beta}$$

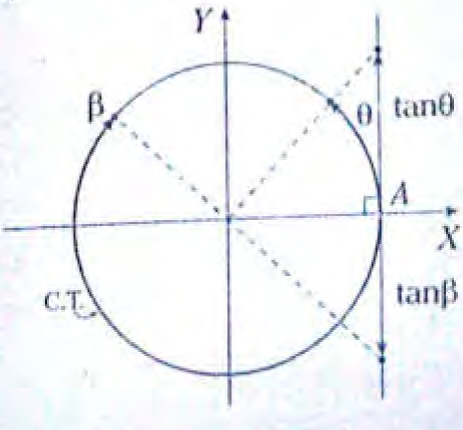
donde

$\tan\theta > 0$ pues $\theta \in$ IC

$\tan\beta < 0$ pues $\beta \in$ IIC

Observación

La tangente de un arco en la C.T. se representa geométricamente mediante un segmento dirigido.

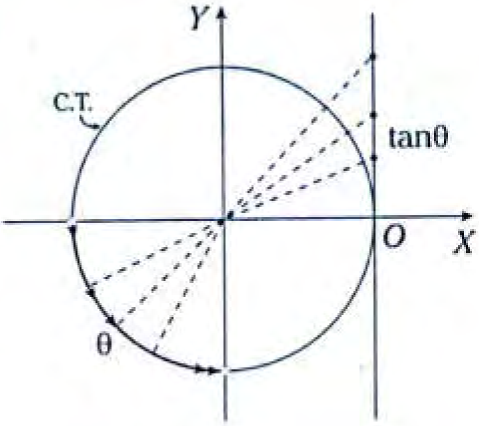


VARIACIÓN DE LA TANGENTE

$\forall\ \theta \neq (2n+1)\pi/2;\ n \in \mathbb{Z}$,
se cumple que
$\tan\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\infty < \tan\theta < +\infty$

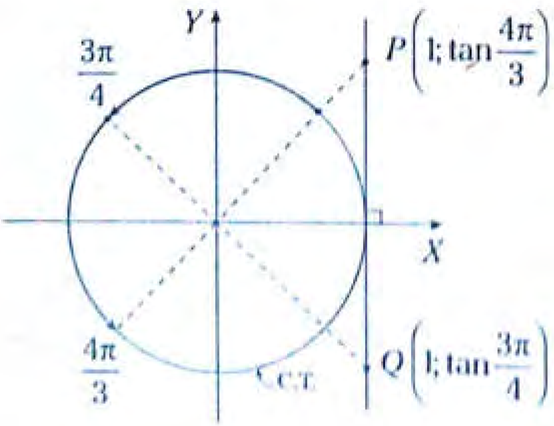
Ejemplos

1. Representación de la tangente para el arco θ.



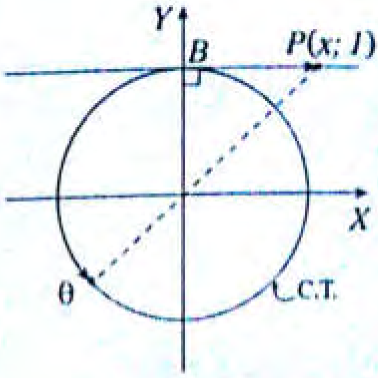
Si $\theta \in$ IIIC entonces $0 < \tan\theta < +\infty$.

2. En el gráfico, se determinan las coordenadas de P y Q



NOTA

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la prolongación del radio que pasa por su extremo y la recta tangente a la circunferencia en el punto $B(0;\ 1)$.

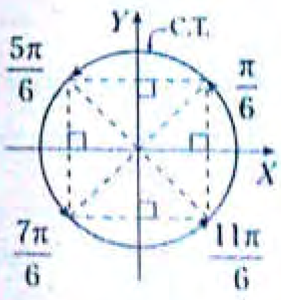


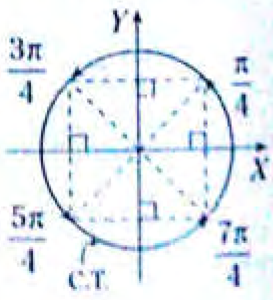
En el gráfico mostrado, se cumple

$$\boxed{x = \cot\theta}$$

OBSERVACIÓN

Arcos relacionados con $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$

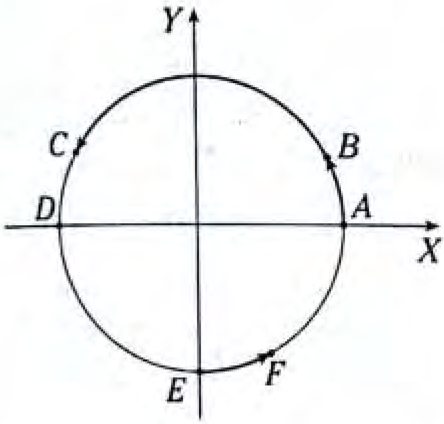




Problema N.º 1

El gráfico representa la circunferencia trigonométrica. Las medidas de los arcos menores AB, CD y EF son todos iguales a $\frac{\pi}{6}$. Si x, y, z son respectivamente, las medidas de los arcos trigonométricos AB, AC y AF, entonces

$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}z+\cos x+\cos y+\cos z$ es igual a



UNAC 2011-II

Resolución

Nos piden

$$P=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}z+\cos x+\cos y+\cos z$$

Del gráfico

$$x=\frac{\pi}{6};\ y=\pi-\frac{\pi}{6};\ z=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

De lo cual

$$x=\frac{\pi}{6};\ y=\frac{5\pi}{6};\ z=\frac{5\pi}{3}$$

Luego

$$P=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}+$$

$$+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{3}$$

Entonces

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad P=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema N.º 2

De las proposiciones

I. $\operatorname{sen}40^\circ<\operatorname{sen}50^\circ$

II. $\cos190^\circ>\cos200^\circ$

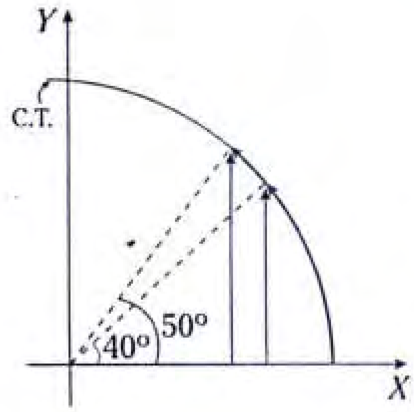
III. $\tan60^\circ=\tan240^\circ$

es correcto afirmar

UNAC 2011-I

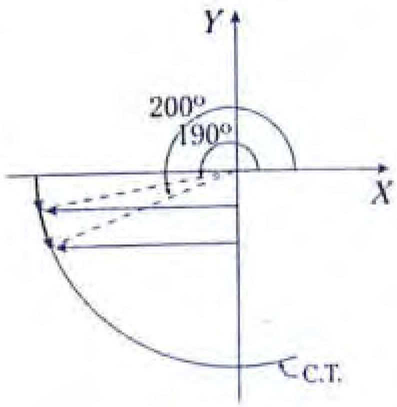
Resolución

I.



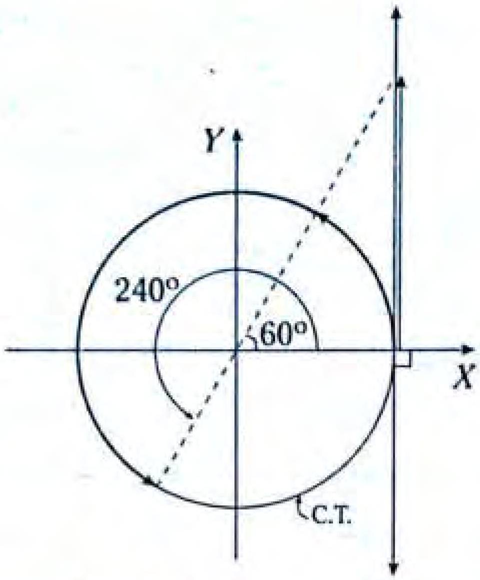
$\operatorname{sen}50^\circ>\operatorname{sen}40^\circ$

II.



$\cos200^\circ>\cos290^\circ$

III.



$$\tan 60° = \tan 240°$$

Por lo tanto, son correctas I y III.

Problema N.º 3

El número de cuadrantes en los cuales la desigualdad $2\cos x < \sqrt{3}$ presenta solución es

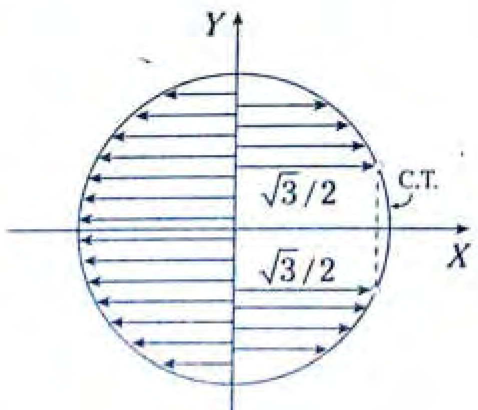
UNAC 2011-II

Resolución

Despejamos el $\cos x$

$$2\cos x < \sqrt{3} \rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(I)}$$

Graficamos en la C. T.



Por lo tanto, la desigualdad (I) presenta solución en los cuatro cuadrantes.

Problema N.º 4

Calcule la variación de la siguiente expresión.

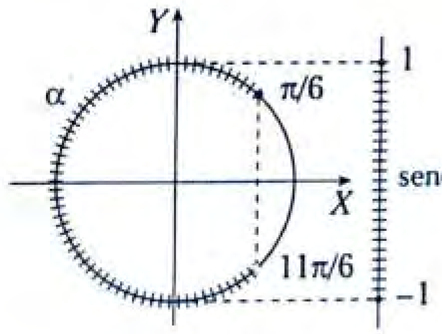
$$\text{sen}^2\alpha - \text{sen}\,\alpha + 1;\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; 11\frac{\pi}{6}\right\rangle$$

Resolución

$$M = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}\alpha + 1$$

$$M = \left(\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Representamos $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; 11\frac{\pi}{6}\right\rangle$ en una circunferencia trigonométrica.



Del gráfico, obtenemos

$$-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$$

$$-\frac{3}{2} \leq \text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \left(\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{4} \leq \left(\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \leq M \leq 3$$

$$\therefore \quad M \in \left[\frac{3}{4}; 3\right]$$

NIVEL BÁSICO

1. Calcule el valor de y_1 si $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; y_1\right)$ pertenece a una circunferencia trigonométrica.

A) $\frac{1}{2}$
B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\pm\frac{1}{2}$
E) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. ¿Cuál de los siguientes puntos que se presentan en las alternativas pertenecen a una circunferencia trigonométrica?

A) $P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{13}}{4}\right)$

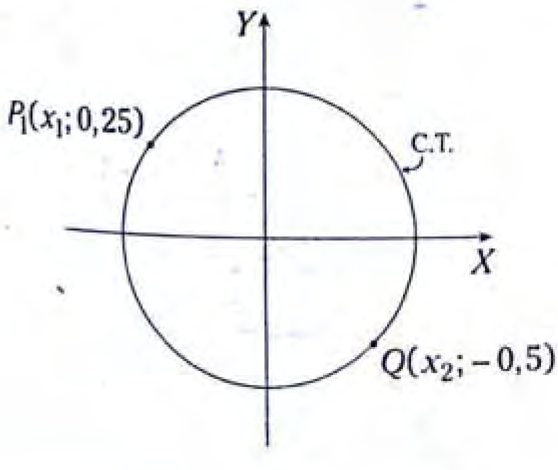
B) $Q\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C) $R\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{12}\right)$

D) $M\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$

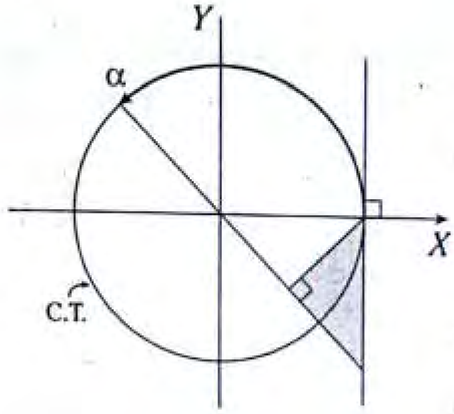
E) $N\left(\frac{-5}{13}; \frac{-12}{13}\right)$

3. Del gráfico, calcule $x_1 \cdot x_2$.



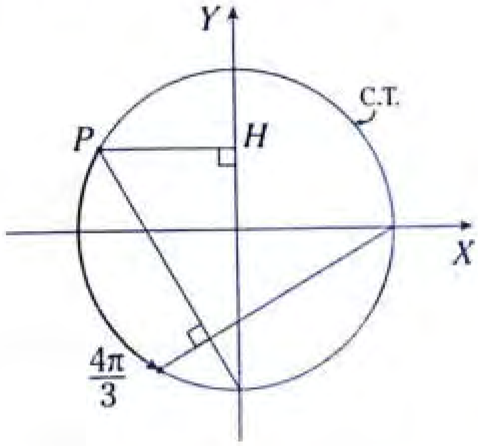
A) $-\frac{3\sqrt{5}}{8}$
B) $-\frac{3}{4}\sqrt{5}$
C) $-\frac{\sqrt{5}}{8}$
D) $-\frac{3\sqrt{5}}{2}$
E) $-\frac{\sqrt{15}}{8}$

4. Determine el área de la región sombreada si $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.



A) $\frac{\sqrt{2}}{4}u^2$
B) $\frac{1}{4}u^2$
C) $\frac{1}{8}u^2$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}u^2$
E) $\frac{3}{4}u^2$

5. Del gráfico, calcule el valor de PH.

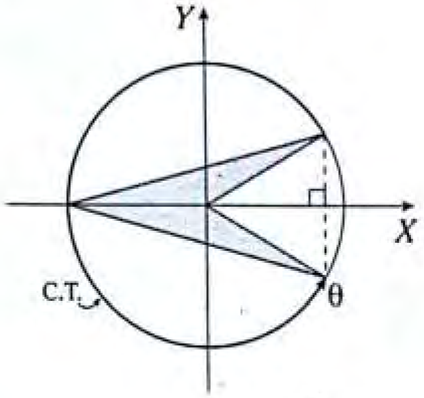


A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Ordene en forma decreciente los valores de sen210°; sen100°; sen10°; sen340°.

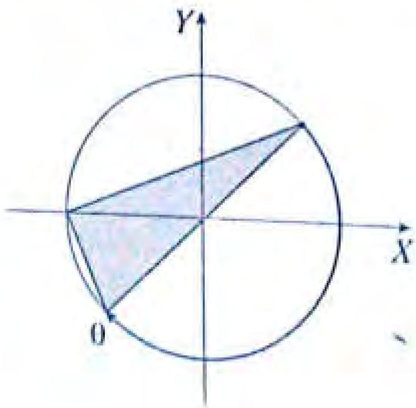
A) sen10°; sen210°; sen100°; sen340°
B) sen210°; sen100°; sen10°; sen340°
C) sen100°; sen10°; sen340°; sen210°
D) sen340°; sen210°; sen100°; sen10°
E) sen210°; sen340°; sen210°; sen10°

7. Determine la expresión que represente el área de la región sombreada en términos de θ.



A) $\frac{\cos\theta}{2}$ B) $-\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$ C) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$
D) $-\frac{\cos\theta}{2}$ E) $-\operatorname{sen}\theta$

8. En la circunferencia trigonométrica del gráfico, determine el área de la región sombreada.



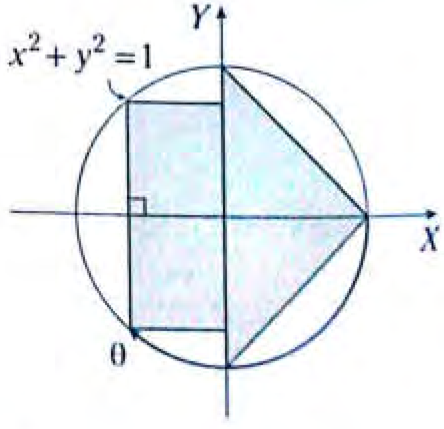
A) $-\operatorname{sen}\theta$
B) $-\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$
C) $-\frac{\operatorname{sen}\theta}{4}$
D) $-\frac{\operatorname{sen}\theta}{3}$
E) $-\frac{\tan\theta\cdot\operatorname{sen}\theta}{2}$

9. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. cos357° < cos2°
II. cos100° < cos260°
III. cos271° > cos269°
IV. cos350° < sen170°

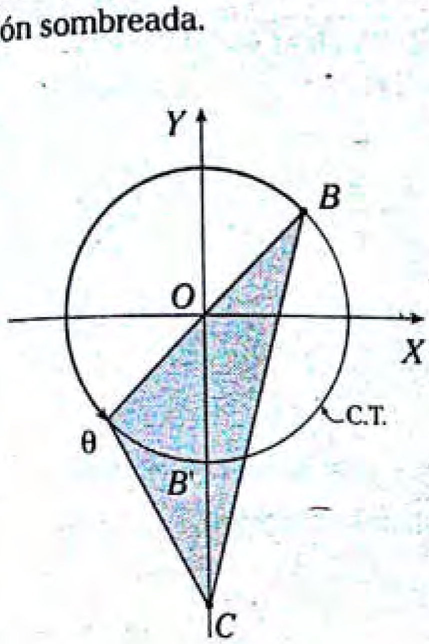
A) FVFV   B) VVVV   C) FFVV
D) VFVF   E) VVFF

10. Determine el perímetro de la región sombreada.



A) $2(\sqrt{2}+1+\cos\theta)$
B) $2(\sqrt{2}+1-\cos\theta)$
C) $2(\sqrt{2}-1+\cos\theta)$
D) $4(\sqrt{2}-1-\cos\theta)$
E) $4(\sqrt{2}-1+\operatorname{sen}\theta)$

11. Del gráfico, $OB'=B'C$. Determine el área de la región sombreada.



A) $-\text{sen}\theta+\cos\theta$

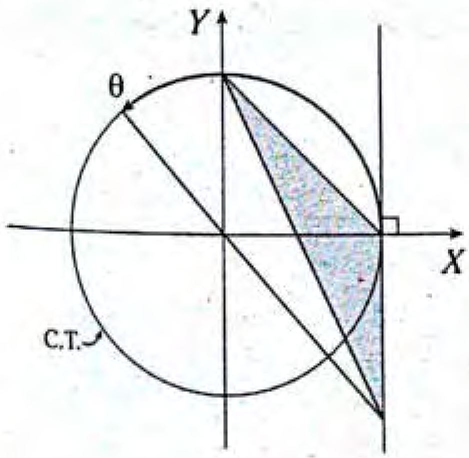
B) $-2\text{sen}\theta$

C) $-2\cos\theta$

D) $-\cos\theta$

E) $1+\cos\theta$

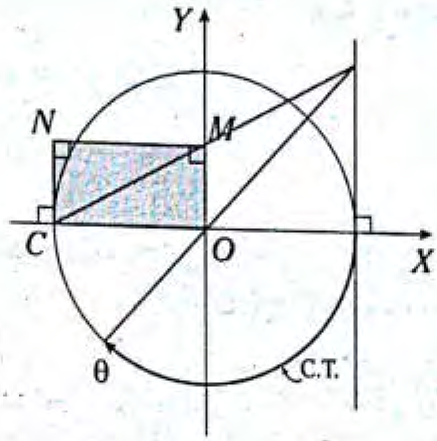
12. En la circunferencia trigonométrica, determine el área de la región sombreada.



A) $-\dfrac{\tan\theta}{2}$ B) $-\dfrac{\cot\theta}{2}$ C) $\dfrac{\tan\theta+1}{2}$

D) $2\tan\theta$ E) $-2\tan\theta$

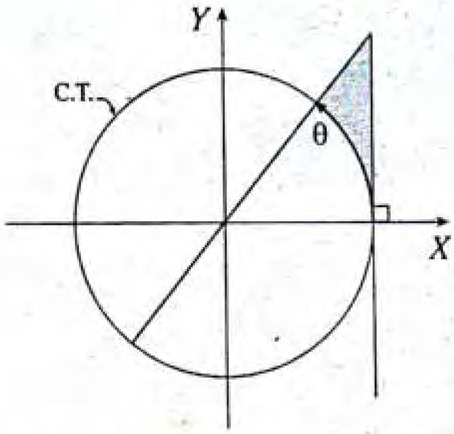
13. Determine el perímetro de la región cuadrangular *COMN*.



A) $2(\tan\theta+1)$ B) $\tan\theta-2$ C) $2(\tan\theta-1)$

D) $\tan\theta+2$ E) $2-\tan\theta$

14. Del gráfico, determine el área de la región sombreada.



A) $\left(\dfrac{2\tan\theta+\theta}{2}\right)u^2$

B) $\left(\dfrac{\tan\theta-\theta}{2}\right)u^2$

C) $(\tan\theta-\theta)\,u^2$

D) $\left(\dfrac{\tan\theta+2}{2}\right)u^2$

E) $\left(\dfrac{\tan\theta-\theta}{4}\right)u^2$

15. Determine el máximo valor que toma m en la siguiente igualdad.

$$\operatorname{sen}(\theta+10°)=\frac{3m-1}{5}$$

A) $-1/3$ B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

16. Si $\theta\in$ IIIC, calcule el intervalo de variación de la siguiente expresión.

$$\frac{3\cdot\operatorname{sen}\theta-2}{4}$$

A) $\left\langle-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right\rangle$ B) $\left[-\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right]$ C) $\left\langle-\frac{1}{2};0\right\rangle$ D) $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ E) $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right\rangle$

17. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

II. $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

III. $\cos\beta=\frac{\pi}{2}$

A) VVV B) VFV C) FVF D) FVV E) FFF

18. Si $\beta\in$ IVC y $\cos\beta=\frac{1-3x}{7}$, determine la variación de x.

A) $\left\langle\frac{1}{3};2\right\rangle$ B) $\left\langle-2;\frac{1}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle-\frac{1}{3};2\right\rangle$ D) $\left[-\frac{1}{3};2\right]$ E) $\left[-2;\frac{1}{3}\right]$

19. Determine para qué valores de a la siguiente igualdad se verifica.

$$\tan^2(2\beta)=\frac{5a-4}{3}$$

A) $\left\langle0;\frac{4}{5}\right\rangle$ B) $\left[\frac{5}{4};+\infty\right\rangle$ C) $[0;+\infty\rangle$ D) $\left[\frac{4}{5};+\infty\right\rangle$ E) $\left[0;\frac{4}{5}\right]$

20. Si $\alpha\in$ IIC, determine la variación de b que verifica la igualdad

$$\tan\alpha=\frac{2b-1}{4}$$

A) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right\rangle$ C) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right]$ D) $\left\langle-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

21. Si los puntos

$$A\left(-\frac{1}{4};a\right)\text{ y }B\left(\frac{2}{5};b\right)$$

pertenecen a la circunferencia trigonométrica y están ubicados en el IIC y IVC, respectivamente, determine el valor de $a\cdot b^{-1}$.

A) $\frac{-7\sqrt{35}}{25}$

B) $\frac{-3\sqrt{35}}{28}$

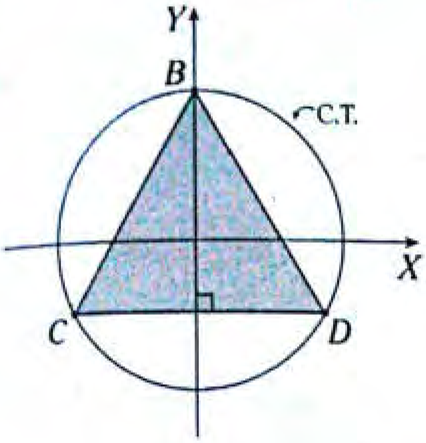
C) $\frac{-25\sqrt{28}}{28}$

D) $\frac{-7\sqrt{35}}{35}$

E) $\frac{-5\sqrt{35}}{28}$

NIVEL INTERMEDIO

22. Del gráfico, calcule el área de la región poligonal regular sombreada.



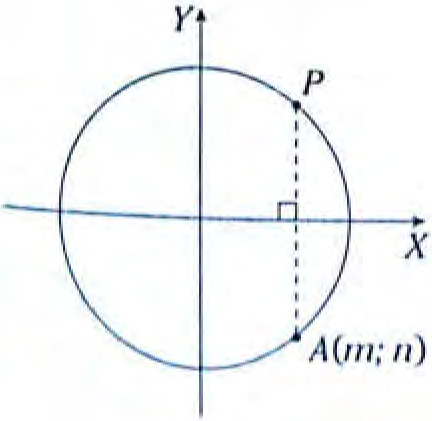
A) $\frac{3\sqrt{2}}{4}u^2$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}u^2$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{5}u^2$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}u^2$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}u^2$

23. En la circunferencia trigonométrica del gráfico, se cumple que

$m+n=-\frac{1}{5}$

Calcule la suma de las coordenadas del punto P.



A) $\frac{7}{5}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{4}{5}$

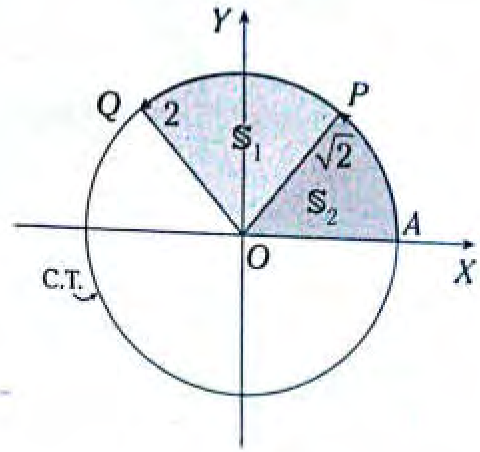
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{13}{5}$

24. Del gráfico

$\mathbb{S}_1$: área del sector circular QOP

$\mathbb{S}_2$: área del sector circular POA

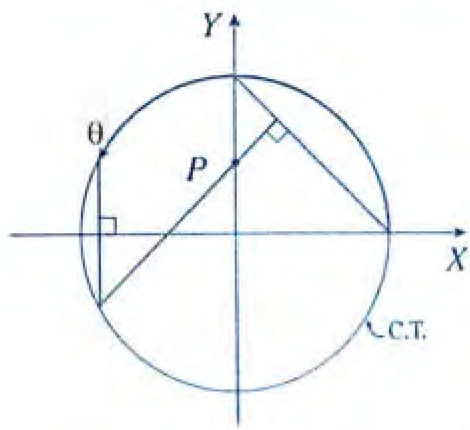
calcule el valor de $\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2}$.



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $\sqrt{2}+1$ E) $\frac{\sqrt{2}+4}{4}$

25. Del gráfico, calcule la ordenada del punto P.



A) $-\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta$

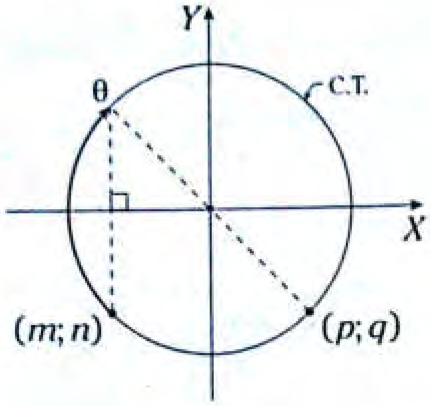
B) $\operatorname{sen}\theta-\cos\theta$

C) $\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

D) $-\operatorname{sen}\theta+\cos^2\theta$

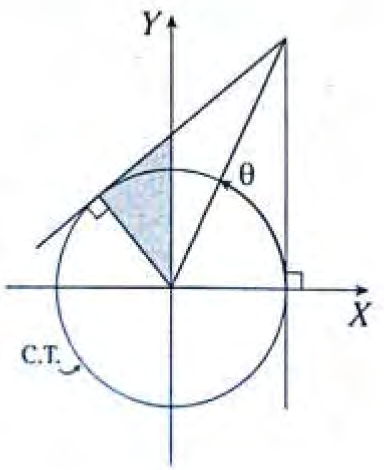
E) $-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta$

26. Del gráfico, calcule $(m+n)-(p+q)$.



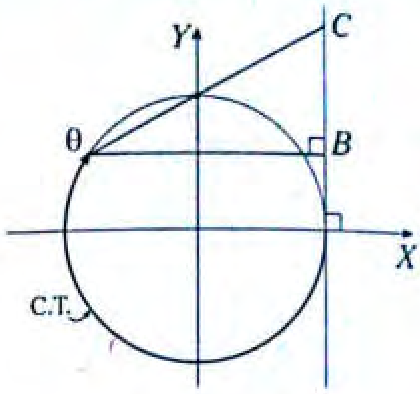
A) $-2\cos\theta$
B) $-2\operatorname{sen}\theta$
C) $2\operatorname{sen}\theta$
D) $2\tan\theta$
E) $2\cos\theta$

27. Si $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, determine la expresión que representa el área de la región sombreada.



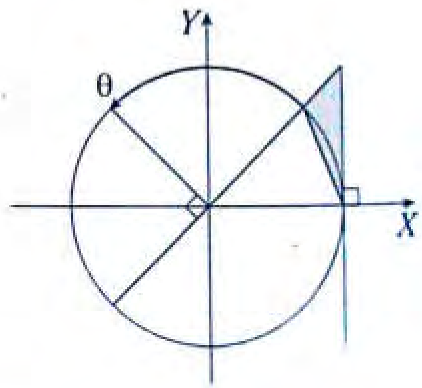
A) $-0{,}5 \cdot \cot 2\theta$
B) $0{,}5 \cdot \cot\theta$
C) $-0{,}5 \cdot \cot^2\theta$
D) $-0{,}5 \cdot \tan\theta$
E) $0{,}5(\tan\theta + \cot\theta)$

28. Determine la expresión que representa la longitud $(BC) \cdot \cos\theta$.



A) $(1-\operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
B) $(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
C) $(\operatorname{sen}\theta-1)(1-\cos\theta)$
D) $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$
E) $(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)$

29. En la circunferencia trigonométrica del gráfico, determine el área de la región sombreada en términos de θ.



A) $\dfrac{-(1-\cos\theta)\tan\theta}{2}$

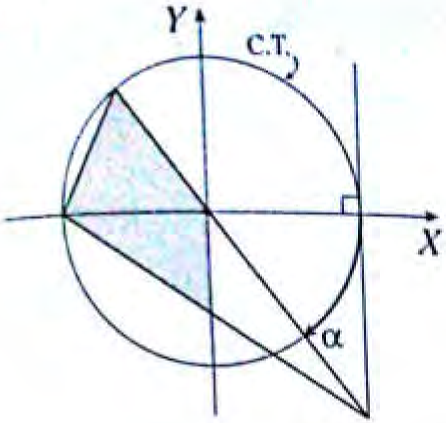
B) $\dfrac{-(1-\operatorname{sen}\theta)\cdot\cot\theta}{2}$

C) $\dfrac{(1-\cos\theta)\tan\theta}{2}$

D) $\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)\cdot\cot\theta}{2}$

E) $\dfrac{(1-\cos\theta)\cot\theta}{2}$

30. Determine el área de la región cuadrangular sombreada.



A) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha+\tan\alpha)$

B) $\frac{1}{4}(\tan\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$

C) $-\frac{1}{4}(\tan\alpha+2\operatorname{sen}\alpha)$

D) $\frac{1}{4}(2\operatorname{sen}\alpha-\tan\alpha)$

E) $-\frac{1}{2}(\tan\alpha+2\operatorname{sen}\alpha)$

31. Si $x\cdot\operatorname{sen}\theta=x+\operatorname{sen}\theta+1$ y $\theta\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\rangle$, determine la variación de x.

A) $\left\langle-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right]$ B) $\langle-\infty;0]$ C) $\left[-\frac{1}{3};0\right]$

D) $\left\langle-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ E) $\left\langle-\infty;-\frac{4}{3}\right]$

32. Determine la variación de la expresión

$$\frac{9\operatorname{sen}^2\alpha+24\operatorname{sen}\alpha+7}{9};\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

A) $\left[-\frac{7}{9};-\frac{6}{9}\right]$ B) $\left[-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right]$ C) $\left[-\frac{8}{9};\frac{40}{9}\right]$

D) $\left[-1;\frac{40}{9}\right]$ E) $[-1;1]$

33. Si α es un arco que pertenece al segundo cuadrante, además, es positivo y menor a 2π, determine la variación de

$$\operatorname{sen}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}.$$

A) $\left[\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right]$ C) $\left\langle\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\rangle$

D) $\left[-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right]$

34. Determine el máximo valor que toma la expresión

$$2\cdot\operatorname{sen}2\theta+1;\theta\in\left[\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4}\right].$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) 1 E) 2

35. Determine el número de valores enteros que puede asumir la expresión

$$\frac{1-\cos\theta}{2+\cos\theta}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

36. Calcule la suma del máximo y mínimo valor que toma la expresión

$$\frac{\cos^2\theta+3}{2};\theta\in\left\langle-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right].$$

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

37. Si $|\theta| \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$, determine el intervalo de variación del $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

A) $\left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right\rangle$

D) $\left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right\rangle$

E) $\langle 0; 1 \rangle$

38. Si $-\frac{1}{2} < \cos 2\phi < \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine los valores que toma $\phi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ para que cumpla con la desigualdad.

A) $\left\langle \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12} \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{11\pi}{12} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{12} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle$

39. Si $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; 0 \right\rangle$, determine los valores que puede asumir a para que se cumpla la igualdad $\tan\theta = \frac{a}{a+1}$.

A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $\mathbb{R} - \{1\}$ C) $\langle 0; +\infty \rangle$

D) $\langle -\infty; 1 \rangle$ E) $\left\langle -\frac{1}{2}; 0 \right\rangle$

40. Determine la variación aproximada de la expresión

$\left(\tan\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$; $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{37\pi}{180} \right]$.

A) $\left[\frac{3}{4}; \frac{37}{16} \right]$ B) $\left\langle \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right]$ C) $[0; 1]$

D) $\left\langle 0; \frac{37}{16} \right\rangle$ E) $\left[0; \frac{3}{4} \right]$

41. Determine la variación de la expresión

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \tan\theta\right)$; $\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

A) $\left[1; \frac{3}{2} \right]$

B) $\left[0; \frac{3}{4} \right]$

C) $[0; 1]$

D) $\left[0; \frac{1}{2} \right]$

E) $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$

Identidades trigonométricas

Capítulo VI

OBJETIVOS

- Conocer las identidades básicas y reconocer las formas equivalentes de cada una.
- Reducir y simplificar expresiones trigonométricas mediante las identidades trigonométricas.

Definición

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones trigonométricas que se verifica para cualquier valor admisible de la variable angular.

OBSERVACIÓN

Valor admisible es aquel valor que toma la variable para que la expresión esté definida.

Expresión	Valor admisible
$\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$	$\theta \in \mathbb{R}$
$\tan\theta$ y $\sec\theta$	$\theta \in \mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\cot\theta$ y $\csc\theta$	$\theta \in \mathbb{R}-\{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$

Ejemplos

- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$
- $\csc x + \cot x = \cot\dfrac{x}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} 3x$

Identidades trigonométricas fundamentales

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS POR COCIENTE

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$\boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}$$

Ejemplos

- $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$
- $\tan^3 10° = \dfrac{\operatorname{sen}^3 10°}{\cos^3 10°}$
- $\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{\tan\theta}$
- $\dfrac{\cos^5 5°}{\operatorname{sen}^5 5°} = \cot^5 5°$

Identidades trigonométricas recíprocas

$$\csc\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \rightarrow \operatorname{sen}\theta\csc\theta=1$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \rightarrow \cos\theta\sec\theta=1$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta} \rightarrow \tan\theta\cot\theta=1$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}20°\csc20°=1$
- $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}=\csc^2\theta$
- $\sec^3 20°=\frac{1}{\cos^3 20°}$
- $\sqrt{\csc\theta}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$

Identidades trigonométricas pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

Ejemplos

- $1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$
- $1-\cos^2\theta=\operatorname{sen}^2\theta$
- $\sec^2 10°-1=\tan^2 10°$
- $\csc^2 50°-1=\cot^2 50°$

Observación

$$\sec\theta+\tan\theta=\frac{m}{n} \leftrightarrow \sec\theta-\tan\theta=\frac{n}{m}$$

$$\csc\theta+\cot\theta=\frac{m}{n} \leftrightarrow \csc\theta-\cot\theta=\frac{n}{m}$$

Ejemplos

- $\sec\theta+\tan\theta=2 \leftrightarrow \sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{2}$
- $\csc\theta+\cot\theta=\frac{2}{3} \leftrightarrow \csc\theta-\cot\theta=\frac{3}{2}$

Identidades trigonométricas auxiliares

$$\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta$$
$$\sec^2\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta\csc^2\theta$$
$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$
$$\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta=1-3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$
$$(1\pm\operatorname{sen}\theta\pm\cos\theta)^2=2(1\pm\operatorname{sen}\theta)(1\pm\cos\theta)$$

Propiedad

Si a y b son constantes reales y θ variable real, tal que $a\operatorname{sen}\theta+b\cos\theta=c$ y $a^2+b^2=c^2$, entonces se cumple que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{a}{c} \text{ y } \cos\theta=\frac{b}{c}$$

Ejemplos

- Si $3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta=5$ y $3^2+4^2=5^2$

  $\rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{3}{5}\ ;\ \cos\theta=\frac{4}{5}$

- Si $5\operatorname{sen}\theta-12\cos\theta=13$ y $5^2+(-12)^2=13^2$

  $\rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{5}{13}\ ;\ \cos\theta=\frac{-12}{13}$

Problema N.° 1

Determine para qué valor de K, la expresión
$R=\text{sen}^6x+\cos^6x+K(\text{sen}^4x+\cos^4x)$
es independiente de x.

UNMSM 2004-II

Resolución

Nos piden K.

Dato

$$R=\text{sen}^6x+\cos^6x+K(\text{sen}^4x+\cos^4x)$$

Por identidades auxiliares

$$R=(1-3\text{sen}^2x\cos^2x)+K(1-2\text{sen}^2x\cos^2x)$$

Agrupamos

$$R=1+K+(-2K-3)\text{sen}^2x\cos^2x$$

Luego, la expresión no dependerá de x, cuando

$$-2K-3=0$$

$$\therefore\quad K=-\frac{3}{2}$$

Problema N.° 2

Si $\text{sen}x+\cos x=a$, halle el valor de

$$\frac{a^3}{2}+\text{sen}^3x+\cos^3x$$

UNMSM 2006-II

Resolución

Nos piden $L=\dfrac{a^3}{2}+\underbrace{\text{sen}^3x+\cos^3x}_{(\text{sen}x+\cos x)(1-\text{sen}x\cos x)}$

Dato: $\text{sen}x+\cos x=a$

Elevando al cuadrado $m\cdot a\cdot m$

$$\underbrace{(\text{sen}x+\cos x)^2}=a^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2x+\cos^2x}+2\text{sen}x\cos x=a^2$$

$$1+2\text{sen}x\cos x=a^2$$

$$\rightarrow\ \text{sen}x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$$

Reemplazamos

$$L=\frac{a^3}{2}+(a)\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)$$

Reducimos

$$\therefore\quad L=\frac{3a}{2}$$

Problema N.° 3

Si $\sec\theta+\tan\theta=3$, calcule $\cos\theta$.

Resolución

Nos piden $\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$.

Datos

$$\begin{cases}\sec\theta+\cancel{\tan\theta}=3\\ \sec\theta-\cancel{\tan\theta}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\ (+)$$

$$2\sec\theta=\frac{10}{3}$$

$$\sec\theta=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{3}{5}$$

Problema N.° 4

Si $\text{sen}\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$, calcule $\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta$.

Resolución

$$\begin{aligned}\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta&=1-2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta\\&=1-2(\text{sen}\theta\cos\theta)^2\\&=1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \text{sen}^4\theta+\cos^4\theta=\frac{7}{8}$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si $\tan\theta=2$, calcule el valor de $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\cos\theta}$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

2. Sea $f(x)=\tan x\cot\theta+\cos\theta\sec x$, calcule $f(\theta)$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Reduzca la siguiente expresión.
$E=\operatorname{sen}^4 15°+\operatorname{sen}^2 15°\cos^2 15°+\operatorname{sen}^2 75°$

A) 0 B) −1 C) 2
D) 1/2 E) 1

4. Si $\sec\theta+\tan\theta=2$, calcule $\cos\theta$.

A) 4/5 B) 3/5 C) 2/5
D) 1 E) 1/3

5. Si $\tan\theta+\cot\theta=3$, calcule el valor de $\tan^2\theta+\cot^2\theta$.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

6. Simplifique la siguiente expresión.
$$\frac{\sec^2\theta+\csc^2\theta}{(\tan\theta+\cot\theta)^2}$$

A) 1 B) $\cos\theta$ C) $\sec\theta$
D) $\operatorname{sen}\theta$ E) $\tan\theta$

7. Si $\operatorname{sen}x\tan x=1$, calcule $\operatorname{sen}^4 x+\cos x$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) −1 E) −2

8. Si la siguiente igualdad
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}=A\operatorname{sen}^B x+C$$
es una identidad, calcule $A+B+C$.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

9. Elimine θ a partir de
$\operatorname{sen}\theta\cos\theta=a$
$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=b$

A) $2b^2+a=1$
B) $2a^2+b=0$
C) $2a^2-b=0$
D) $2a^2+b=1$
E) $2a^2-b=1$

10. Si $\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=a$, calcule $\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta$.

A) $\dfrac{a+2}{3}$ B) $\dfrac{3a-1}{2}$ C) $3a-1$
D) $\dfrac{3a+1}{2}$ E) $3a+1$

11. Si $12\operatorname{sen}x+5\cos x=13$, calcule $5\tan x$.

A) 10 B) 12 C) 14
D) $\dfrac{25}{12}$ E) $\dfrac{25}{13}$

12. Si $\csc\theta-\cot\theta=3$, calcule $\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

A) 2 B) 3 C) −1
D) 1 E) 1/3

13. Simplifique la siguiente expresión.
$\sec^2\theta\csc^2\theta-(\tan\theta+\cot\theta)^2$

A) 0 B) 1 C) 2
D) −1 E) −2

14. Si $40\sec\theta-9\csc\theta=41\sec\theta\csc\theta$, determine el valor de $\operatorname{sen}\theta$.

A) $\dfrac{40}{45}$ B) $\dfrac{9}{40}$ C) $\dfrac{9}{41}$
D) $\dfrac{13}{41}$ E) $\dfrac{40}{41}$

15. Si $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$, calcule
$2(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{9}{25}$ C) $\dfrac{4}{25}$
D) $\dfrac{16}{9}$ E) $\dfrac{9}{16}$

16. Si $\tan\theta=\sqrt[3]{2}$, calcule $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^3\theta-\cos^3\theta}$.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

17. Simplifique la siguiente expresión.
$E=(\operatorname{sen}^2x-\cos^2x)(\operatorname{sen}^4x+\cos^4x)+\cos^8x$

A) $\tan^8x$ B) 1 C) $\cos^8x$
D) 0 E) sen^8x

18. Si $\tan\theta+\cot\theta=\sec 60°$, calcule $\tan^8\theta+\cot^8\theta$.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 128 E) 256

19. Si $\cot^3x+\cot^2x+\cot x=1$, determine el valor de $\cot^3x+\tan x$.

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 5

20. Reduzca la siguiente expresión.
$\sqrt{\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}}-\tan x;\ x\in \text{IC}$

A) $\operatorname{sen}x$ B) $\cos x$ C) $\sec x$
D) $-\sec x$ E) $\tan x$

NIVEL INTERMEDIO

21. Si $f(x)=\operatorname{sen}^4x+\cos^4x+a\operatorname{sen}^2x\cos^2x$ es independiente de x, calcule a.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) −1

22. Si $\sec x+\tan x=3$, calcule $5\operatorname{sen}x$.

A) 2 B) 1 C) 0
D) 4 E) −2

23. Si $\csc x+\cot x=4$, determine el valor de $\csc x\cot x$

A) $\dfrac{4}{17}$ B) $\dfrac{27}{222}$ C) $\dfrac{64}{255}$
D) $\dfrac{255}{64}$ E) $\dfrac{135}{64}$

24. Encuentre una relación entre a y b a partir de

$\tan\theta+\cot\theta=a$

$\sec\theta+\csc\theta=b$

A) $b^2-a^2=2b$
B) $a^2+b^2=1$
C) $a=b$
D) $a^2=b^2+2b$
E) $b^2=a^2+2a$

25. Si $\operatorname{sen}\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$, calcule $\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta$.

A) $\frac{37}{32}$ B) $\frac{8}{27}$ C) $\frac{64}{37}$
D) $\frac{23}{32}$ E) $\frac{37}{64}$

26. Si $\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta+\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta=a$, determine $\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ en términos de a.

A) $\frac{2-a}{5}$ B) $\frac{2-a}{3}$ C) $\frac{a}{3}$
D) $\frac{2+a}{5}$ E) $\frac{1-a}{3}$

27. Si $\operatorname{sen}x+\csc x=5$, calcule $\operatorname{sen}x-\csc x$.

A) $\sqrt{21}$
B) $-\sqrt{21}$
C) $\frac{1}{5}$
D) 5
E) $-\sqrt{21}$ o $\sqrt{21}$

28. Si $\sec^4x-\tan^4x=A\sec^Bx+C$ es una identidad, calcule $A+B-C$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

29. Si $\sqrt{n}\operatorname{sen}\theta-\cos\theta=\sqrt{n+1}$, calcule $\sec^2\theta$.

A) n B) $n+1$ C) $n-1$
D) $2n$ E) $2n-1$

30. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{1}{1+\sec^2\theta}+\frac{1}{1+\csc^2\theta}+\frac{1}{1+\cos^2\theta}+\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

A) 1 B) 4 C) 3
D) 2 E) -1

31. Si se verifica que

$3\operatorname{vers}\theta+2\operatorname{cov}\theta=5-\sqrt{13}$,

calcule $\sec\theta-\csc\theta$.

Considere $\operatorname{vers}\theta=1-\cos\theta$; $\operatorname{cov}\theta=1-\operatorname{sen}\theta$.

A) $-3\sqrt{13}$ B) $-5\frac{\sqrt{13}}{6}$ C) $-\sqrt{13}$
D) $-2\sqrt{13}$ E) $-\frac{\sqrt{13}}{6}$

32. Dada la ecuación $\operatorname{sen}^4\beta+\cos^4\beta=\frac{1}{2}$, calcule $\operatorname{sen}^8\beta+\cos^8\beta$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{16}$

33. Si $\sec^2x+\csc^2x=4$, determine el valor de $\sec^6x+\csc^6x$

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

34. Si $\phi \in$ IVC y $\sqrt{\sec^2\phi-1}+\sqrt{\csc^2\phi-1}=a$, calcule $\operatorname{sen}\phi\cos\phi$.

A) $\frac{2}{a}$ B) $\frac{1}{a}$ C) $-a$
D) $-\frac{1}{a}$ E) $-\frac{2}{a}$

35. Si $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{9}+\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x$; $x \in$ IVC, calcule $\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^3}{\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

36. Simplifique la siguiente expresión.

$$\left(\frac{\cos\theta+\tan\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^2\theta}\right)^2-1$$

A) $\sec^2\theta$ B) $\cot^2\theta$ C) $\operatorname{sen}^2\theta$
D) $\tan^2\theta$ E) $\cos^2\theta$

37. Simplifique la siguiente expresión.

$$\left[\frac{\cos^{n-1}(x)-\cos^{n+1}(x)}{\operatorname{sen}^{n-1}(x)-\operatorname{sen}^{n+1}(x)}\right]\cdot\tan^n(x)$$

A) $\sec^3 x$
B) $\tan^3 x$
C) $\cot^3 x$
D) $\operatorname{sen}^3 x$
E) $\cos^3 x$

38. Calcule el mínimo valor de la expresión $\sec^4 x+2\cot^2 x-\tan^4 x$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

39. Si $\cot^2\theta=2\cot^2 x+1$, calcule

$$\left(\frac{\sec^2\theta+\csc^2\theta}{\sec^2\theta}\right)\operatorname{sen}^2 x.$$

A) 3 B) 4 C) 1/2
D) 1/4 E) 2

40. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{(\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x-1)(\tan x+\cot x)}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x\cos x}+\cos x};\ x \in \text{IIIC}$$

A) 3 B) $-3\cos x$ C) $3\operatorname{sen} x$
D) $-3\cos x$ E) $3\cos x$

41. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{\sec^4 x+\tan^4 x-1}{\tan^2 x}$$

A) $2\csc^2 x$ B) $2\operatorname{sen}^2 x$ C) $2\tan^2 x$
D) $2\cos^2 x$ E) $2\sec^2 x$

42. Si $4\operatorname{sen}\theta=\sec\theta\csc\theta$, calcule $\cos^6\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\operatorname{sen}^2\theta$.

A) $\frac{15}{16}$ B) $\frac{13}{16}$ C) $\frac{5}{16}$
D) $\frac{17}{16}$ E) $\frac{1}{16}$

Identidades trigonométricas de arcos compuestos

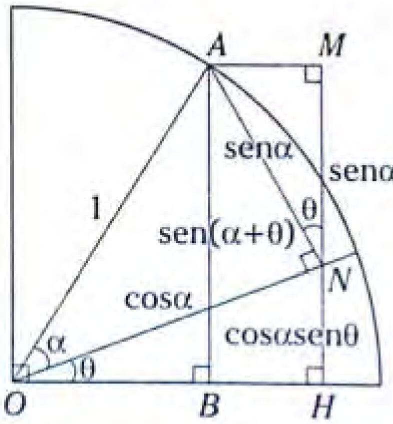
Capítulo VII

Objetivos

- Reconocer expresiones trigonométricas para la suma o diferencia de arcos.
- Calcular el valor de razones trigonométricas de ángulos no conocidos mediante la utilización de las identidades.

Identidades para la suma de dos arcos

Tenemos un cuadrante de centro O y radio 1, tal que m$\sphericalangle AON=\alpha$ y m$\sphericalangle NOH=\theta$.



- En el triángulo rectángulo ONA

  $AN=\operatorname{sen}\alpha$ y $ON=\cos\alpha$

- En el triángulo rectángulo NOH

  $NH=(ON)\operatorname{sen}\theta \rightarrow NH=\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

- En el triángulo rectángulo AMN

  $MN=(AN)\cos\theta \rightarrow MN=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta$

- En el triángulo rectángulo ABO

  $AB=(OA)\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \rightarrow AB=\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$

Del gráfico, se puede observar que

$$AB=MN+NH$$

Entonces

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}$$

También se tiene el coseno y la tangente de la suma de dos arcos

$$\boxed{\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}}$$

Identidades para la diferencia de dos arcos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} \quad 8$$

Ejemplo

$$\operatorname{sen}23^\circ=\operatorname{sen}(53^\circ-30^\circ)$$

$$\operatorname{sen}23^\circ=\operatorname{sen}53^\circ\cos30^\circ-\cos53^\circ\operatorname{sen}30^\circ$$

Luego

$$\operatorname{sen}23^\circ=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}23^\circ=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

Identidades auxiliares

Usamos las identidades auxiliares para reducir y simplificar expresiones trigonométricas complicadas.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tan\alpha+\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$$

$$\tan\alpha-\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$$

$$\tan\alpha+\tan\theta+\tan(\alpha+\theta)\tan\alpha\tan\theta=\tan(\alpha+\theta)$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}(20^\circ+x)\operatorname{sen}(20^\circ-x)=\operatorname{sen}^2 20^\circ-\operatorname{sen}^2 x$
- $\cos(60^\circ+x)\cos(60^\circ-x)=\cos^2 60^\circ-\operatorname{sen}^2 x$
- $\tan\beta+\tan 8^\circ=\dfrac{\operatorname{sen}(\beta+8^\circ)}{\cos\beta\cos 8^\circ}$
- $\tan\gamma-\tan 37^\circ=\dfrac{\operatorname{sen}(\gamma-37^\circ)}{\cos\gamma\cos 37^\circ}$

Propiedad 1

Siendo a y b números reales, x variable real, se cumple

$$a\operatorname{sen}x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\theta)$$

donde

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ejemplo

$$3\operatorname{sen}x+4\cos x=\sqrt{3^2+4^2}\operatorname{sen}(x+\theta)$$

$\rightarrow$ $3\operatorname{sen}x+4\cos x=5\operatorname{sen}(x+53^\circ)$

donde

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{4}{5}\ \wedge\ \cos\theta=\frac{3}{5}$$

$\therefore\ \theta=53^\circ$

Observación

Sea $E=a\operatorname{sen}x+b\cos x;\ x\in\mathbb{R}$, entonces se cumple que

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le E\le\sqrt{a^2+b^2}$$

donde

$$E_{\text{máx.}}=\sqrt{a^2+b^2}\quad;\quad E_{\text{mín.}}=-\sqrt{a^2+b^2}$$

Ejemplos

- $M=3\operatorname{sen}\alpha+4\cos\alpha$

  donde

  $M_{\text{máx.}}=5;\ M_{\text{mín.}}=-5$
- $N=5\operatorname{sen}\beta-12\cos\beta$

  donde

  $N_{\text{máx.}}=13;\ N_{\text{mín.}}=-13$

Propiedad 2

Si $A+B+C=180^\circ$, se cumple

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot A\cdot\cot C=1$$

Si $A+B+C=90^\circ$, se cumple

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C$$

$$\tan A\cdot\tan B+\tan B\cdot\tan C+\tan A\cdot\tan C=1$$

Ejemplos

$\tan 20^\circ+\tan 50^\circ+\tan 110^\circ=\tan 20^\circ\cdot\tan 50^\circ\cdot\tan 110^\circ$

$\cot 10^\circ\cdot\cot 50^\circ\cdot\cot 30^\circ=\cot 10^\circ+\cot 50^\circ+\cot 30^\circ$

$\cot 35^\circ\cdot\cot 70^\circ+\cot 75^\circ\cdot\cot 70^\circ+\cot 35^\circ\cdot\cot 75^\circ=1$

$\tan 25^\circ\cdot\tan 55^\circ+\tan 10^\circ\cdot\tan 25^\circ+\tan 10^\circ\cdot\tan 55^\circ=1$

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Si $x \in y$ pertenecen al intervalo $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, halle m en función de x para que se cumpla

$$\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}-\frac{\cos(x-y)}{\cos x\operatorname{sen}y}=m\sec^2 x$$

UNMSM 2013-I

Resolución

Haremos uso de las identidades

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cdot\cos y-\operatorname{sen}y\cdot\cos x$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\operatorname{sen}x\cdot\cos y$$

En el dato

$$\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}-\frac{\cos(x-y)}{\cos x\operatorname{sen}y}=m\sec^2 x$$

$$\frac{\operatorname{sen}x\cos y-\operatorname{sen}y\cos x}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}-\left(\frac{\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\operatorname{sen}y}\right)=m\sec^2 x$$

$$\frac{\operatorname{sen}x\cos y}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}-\frac{\operatorname{sen}y\cos x}{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}-\left(\frac{\cos x\cos y}{\cos x\operatorname{sen}y}+\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\operatorname{sen}y}\right)=m\sec^2 x$$

$$\cot y-\cot x-\cot y-\tan x=m\sec^2 x$$

$$-(\tan x+\cot x)=m\sec^2 x$$

$$-\operatorname{sen}x\csc x=m\sec^2 x$$

$$m=-\frac{\csc x}{\sec x}$$

Luego obtenemos

$$m=-\left(\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}{\frac{1}{\cos x}}\right)=-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$

$\therefore\ m=-\cot x$

Problema N.° 2

Determine el menor ángulo agudo que verifica

$$\tan 3x+\tan 2x+\tan 5x\cdot\tan 3x\cdot\tan 2x-\sqrt{3}=0$$

UNFV 2007-II

Resolución

Por identidad auxiliar

$$\tan 3x+\tan 2x+\tan 5x\cdot\tan 3x\cdot\tan 2x=\sqrt{3}$$

Obtenemos

$$\tan(3x+2x)=\sqrt{3}$$

$$\tan 5x=\sqrt{3}$$

$\rightarrow\ 5x=60°$

$\therefore\ x=12°$

Problema N.° 3

Sean α, β y λ los ángulos interiores de un triángulo. Si $2\tan\alpha=\tan\beta+\tan\lambda$, halle $(\tan\beta\cdot\tan\lambda)$.

UNAC 2007-I

Resolución

Por la propiedad 2

Si $\alpha+\beta+\lambda=180°$

$$\rightarrow\ \tan\alpha+\underbrace{\tan\beta+\tan\lambda}=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\lambda$$

$$\tan\alpha+2\tan\alpha=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\lambda$$

$$3\cdot\cancel{\tan\alpha}=\cancel{\tan\alpha}\cdot\tan\beta\cdot\tan\lambda$$

$\therefore\ \tan\beta\cdot\tan\lambda=3$

Problema N.º 4

La expresión

$K=2\sqrt{3}(\cos^2 13^o-\cos^2 47^o)$

es equivalente a

UNMSM 2008-I

Resolución

Como

$47^o+43^o=90^o \rightarrow \cos 47^o=\operatorname{sen}43^o$

Reemplazando en la expresión que nos piden, tenemos

$$K=2\sqrt{3}(\cos^2 13^o-\operatorname{sen}^2 43^o)$$

$$\rightarrow K=2\sqrt{3}\cos(13^o+43^o)\cos(13^o-43^o)=$$

$$=2\sqrt{3}\cos 56^o\cos(-30^o)$$

$$\rightarrow K=2\sqrt{3}\cos 56^o\cos 30^o=2\sqrt{3}\cos 56^o\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\therefore\ K=3\cos 56^o$

Problemas N.º 5

Calcule K en

$\operatorname{sen}10^o+\cos 10^o=K\cdot\cos 35^o$.

UNFV 2005

Resolución

Sea el dato de la forma

$$1\cdot\operatorname{sen}10^o+1\cdot\cos 10^o=K\cdot\cos 35^o$$

Por la propiedad 1

$$\sqrt{1^2+1^2}\cdot\operatorname{sen}(10^o+\theta)=K\cdot\cos 35^o \qquad \text{(I)}$$

Donde

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\ \wedge\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{4}\text{ rad}=45^o$$

En (I)

$$\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}(10^o+45^o)=K\cdot\cos 35^o$$

$$\sqrt{2}\,\underbrace{\operatorname{sen}55^o}=K\cdot\cos 35^o$$

$$\sqrt{2}\,\cancel{\cos 35^o}=K\cdot\cancel{\cos 35^o}$$

$\therefore\ K=\sqrt{2}$

Problema N.º 6

En un triángulo ABC si

$\operatorname{sen}A=n\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

$\cos A=n\cos B\cos C$

determine $\tan A$.

Resolución

De las condiciones

$$\operatorname{sen}A=n\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C \qquad \text{(I)}$$

$$\cos A=n\cos B\cos C \qquad \text{(II)}$$

Restamos (II) $\wedge$ (I)

$$\cos A-\operatorname{sen}A=n[\cos B\cos C-\operatorname{sen}B\cdot\operatorname{sen}C]$$

$$\cos A-\operatorname{sen}A=n\cdot\cos(B+C)$$

$$\cos A-\operatorname{sen}A=n\cdot(-\cos A)$$

$$\cos A+n\cos A=\operatorname{sen}A$$

$$\cos A(1+n)=\operatorname{sen}A$$

$$1+n=\frac{\operatorname{sen}A}{\cos A}$$

$\therefore\ \tan A=n+1$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Si $\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{8}$, calcule $16\cdot\operatorname{sen}(\alpha-45^{o})$.

$16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 8

2. Simplifique la expresión

$$\frac{2\cdot\operatorname{sen}\theta-\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}(\theta+30^{o})}{\cos(30^{o}+\theta)}.$$

A) -1
B) 0
C) 1
D) $\sqrt{3}$
E) 2

3. Calcule el valor de la expresión
$2\cdot\cos80^{o}+4\cdot\operatorname{sen}70^{o}\cdot\operatorname{sen}10^{o}$.

A) $\sqrt{3}$
B) -1
C) 1
D) $\frac{3}{2}$
E) 0

4. Simplifique

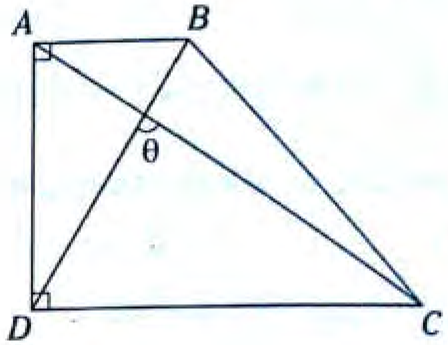
$$\frac{\tan A+\tan B}{\tan(A+B)}+\frac{\tan A-\tan B}{\tan(A-B)}$$

A) $\tan A$
B) $\tan B$
C) $\tan A+\tan B$
D) 1
E) 2

5. Si $\tan(m-n)=\frac{1}{2}$ y
$\tan(n-p)=\frac{1}{3}$,
calcule $\tan(m-p)$.

A) $\frac{1}{2}$
B) -1
C) $-\frac{1}{2}$
D) 1
E) $\frac{1}{6}$

6. Si $\frac{DC}{3}=\frac{AD}{2}=\frac{AB}{1}$, calcule $\cot\theta$.



A) $\frac{1}{8}$
B) 8
C) 4
D) $\frac{1}{4}$
E) 2

7. Simplifique

$$\frac{\cos^{2}2x-\operatorname{sen}^{2}x}{\cos3x}.$$

A) $\operatorname{sen}x$
B) $\cos x$
C) $\tan2x$
D) $\cot3x$
E) $\operatorname{sen}^{2}2x$

8. Si $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=K$,
calcule un valor que toma $\cos\theta$.

A) $\sqrt{K}$
B) $-\sqrt{K-\frac{1}{2}}$
C) $\sqrt{K-\frac{1}{4}}$
D) $\sqrt{K+\frac{1}{2}}$
E) $-\sqrt{K+1}$

9. Si $x+y=60°$, calcule el valor de

$$\frac{(\tan x+\tan y)}{\sec y\cdot\sec x}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. Calcule el valor de la expresión

$$\frac{\text{sen}\,50°}{\cos 20°\cdot\cos 30°}+\frac{\text{sen}\,25°}{\cos 20°\cdot\cos 45°}$$

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ B) $\sqrt{3}+1$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $\frac{\sqrt{3}+2}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

11. Calcule el valor de la expresión

$$\frac{\tan 23°+\tan 22°+\tan 23°\cdot\tan 22°}{\tan 28°+\tan 17°+\tan 28°\cdot\tan 17°}.$$

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) 2

12. Calcule el valor de x para que se cumpla la igualdad

$\tan 5x-\tan 2x-\tan 5x\cdot\tan 3x\cdot\tan 2x=\sqrt{3}$.

A) 20° B) 30° C) 12°

D) 18° E) 10°

13. Reduzca la expresión

$$\frac{\text{sen}\,20°+\sqrt{3}\cdot\cos 20°}{\cos 10°}.$$

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\sqrt{2}$

D) 2 E) $\frac{1}{2}$

14. Calcule el valor de

$$\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,50°-\cos 50°}{\text{sen}\,25°-\cos 25°}.$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{2}$

D) $-\sqrt{3}$ E) 2

15. Calcule el máximo valor de

$3\cdot\text{sen}x+5\cdot\cos(53°+x)$.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{2}$

D) 3 E) 10

16. Calcule la diferencia entre el máximo el y mínimo valor de la expresión

$\text{sen}(\theta+37°)-\text{sen}(53°-\theta)$.

A) 0 B) 10 C) 5

D) $-2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

17. Si $\tan(x+y+z)=0$, reduzca

$$\frac{\tan x+\tan y+\tan z}{\tan x\cdot\tan z}.$$

A) $\cot y$

B) $\tan(x+z)$

C) $\tan y$

D) $\tan y\cdot\cot y$

E) $\cot(y+x)$

18. Si $x+y+z=90°$, calcule el valor de la expresión

$$\frac{2}{\cot x\cdot\cot y}+\frac{2}{\cot y\cdot\cot z}+\frac{2}{\cot x\cdot\cot z}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\frac{1}{2}$ E) 0

19. Calcule el valor de $\dfrac{\tan 40^\circ + 2\tan 70^\circ}{\tan^2 70^\circ}$.

A) $\tan 70^\circ$
B) $\cot 40^\circ$
C) $2\tan 40^\circ$
D) $\tan 40^\circ$
E) $\tan 40^\circ \cdot \tan 70^\circ$

20. Si $\operatorname{sen}3\theta \cdot \cos 4\theta = \operatorname{sen}\theta$, calcule $\tan 4\theta \cdot \cot 3\theta$.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

21. Si $5\operatorname{sen}x + 12\cos x = 13$, calcule el valor de $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ B) $\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$ C) $\dfrac{13\sqrt{2}}{25}$

D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$ E) $\dfrac{17\sqrt{2}}{25}$

22. Si $\operatorname{sen}4 + \cos 3 = x \ \wedge \ \operatorname{sen}3 - \cos 4 = y$, determine el equivalente para el sen1.

A) $\dfrac{x^2 + y^2 - 2}{2}$

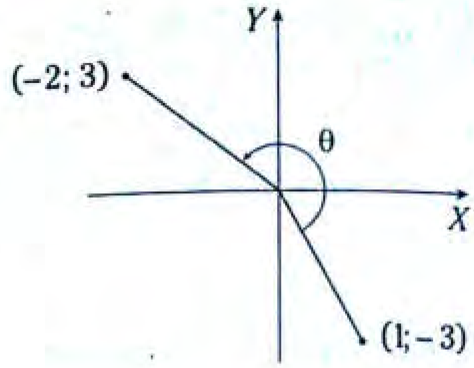
B) $\dfrac{x^2 - y^2 + 2}{2}$

C) $\dfrac{x^2 + y^2}{2}$

D) $\dfrac{x^2 + y^2 + 2}{2}$

E) $\dfrac{x^2 - y^2 - 2}{2}$

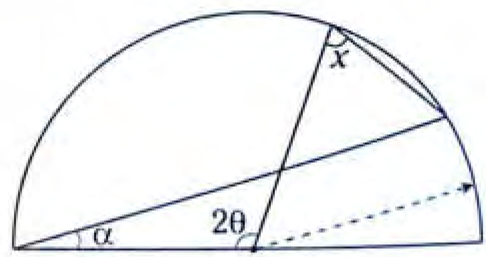
23. Del gráfico, calcule $\tan\theta$.



A) $-\dfrac{3}{11}$ B) $\dfrac{2}{11}$ C) $\dfrac{7}{11}$

D) $-\dfrac{7}{11}$ E) $\dfrac{3}{11}$

24. Del gráfico, calcule $\cot x$ si $\cot\alpha = \dfrac{1}{m}$ y $\cot\theta = \dfrac{1}{n}$.



A) $\dfrac{m-m}{m+n}$ B) $\dfrac{1-mn}{m+n}$ C) $\dfrac{1+mn}{m-n}$

D) $\dfrac{m-1}{n-1}$ E) $\dfrac{mn-1}{mn+1}$

25. Si $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) = 3$, calcule $\cot\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

A) 2 B) −2 C) $\dfrac{1}{2}$

D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

NIVEL INTERMEDIO

26. De las condiciones dadas,

$\operatorname{sen}(x-y)=0,\overset{\frown}{3} \ \wedge \ \cos y\cdot \operatorname{sen}x=0,5.$

Calcule $\operatorname{sen}(x+y)$.

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{6}$

27. Si $x_2-x_1=\pi$ rad, calcule

$$\frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{\cos x\cdot\cos x_1}-\frac{\operatorname{sen}(x-x_2)}{\cos x\cdot\cos x_2}.$$

A) 0 B) 1 C) −2

D) −1 E) 2

28. Si $\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 y-1}{1-\left(\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y\right)}=\frac{1}{3}$,

calcule $\cot(x+y)\cdot\cot(x-y)$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 3

D) −3 E) $\frac{2}{3}$

29. Si $x+y=\frac{\pi}{4}$ rad, calcule

$$\frac{(1+\tan x)(1+\tan y)+1}{(1+\tan 57^\circ)(1-\tan 12^\circ)}.$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$

D) −1 E) $\frac{3}{2}$

30. Simplifique

$\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\beta-2\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}(\theta+\beta)$.

A) $\operatorname{sen}^2(\theta-\beta)+1$

B) $\operatorname{sen}^2(\theta+\beta)$

C) $\cos^2(\theta-\beta)$

D) $\cos^2(\theta+\beta)$

E) $\cos^2(\theta-\beta)+1$

31. Calcule el valor de

$$\frac{\tan 38^\circ+\tan 16^\circ}{\cot 36^\circ}+\tan 38^\circ\cdot\tan 16^\circ.$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) −1 E) −2

32. Si $\operatorname{sen}(a^\circ)+\operatorname{sen}(b^\circ)=m$ y

$\operatorname{sen}(a^\circ)-\operatorname{sen}(b^\circ)=n$,

calcule $\frac{\operatorname{sen}(a^\circ+b^\circ)}{\csc(a^\circ-b^\circ)}$.

A) m^2n^2 B) $m\cdot n$ C) $1+mn$

D) m^2-n^2 E) $1-mn$

33. Calcule la suma del máximo y mínimo valor que toma la expresión

$2\cdot\operatorname{sen}(x+45^\circ)+(\sqrt{7}-\sqrt{2})\cos x+1$.

A) 0 B) 1 C) 2

D) 4 E) 6

34. Calcule el máximo valor que asume la expresión $9\operatorname{sen}^2x-24\operatorname{sen}x\cos x+16\cos^2 x$.

A) 9 B) 24 C) 16

D) 25 E) 49

35. Reduzca la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)+\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)}.$$

A) $\cot\left(\frac{x+\pi}{4}\right)$

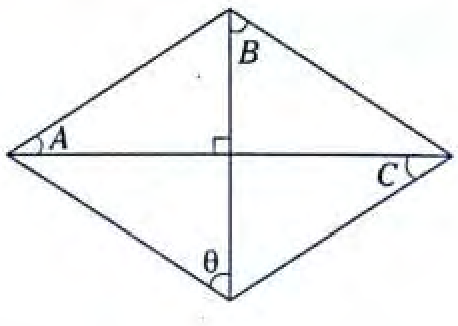
B) $\tan\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

C) $\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi}{4}\right)$

D) $\cot\left(\frac{\pi-x}{4}\right)$

E) $\tan\left(\frac{x+\pi}{4}\right)$

36. Si $A+B+C=90°$, determine el equivalente de $\cot A+\cot B+\cot C$ en términos de θ.



A) $\tan\theta$
B) $\cot\theta$
C) $\tan\theta+1$
D) $\cot\theta+1$
E) $\tan\theta+\cot\theta$

37. Calcule el valor de la expresión

$$\frac{\tan(x-10°)+\tan(10°-y)+\tan(y-x)}{\tan(x-10°)\cdot\tan(y-x)\cdot\tan(10°-y)}.$$

A) -1 B) 0 C) 1

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

38. Calcule el valor de

$$(\cos 2°-\sqrt{3}\operatorname{sen}2°)^2+2(\cos 17°+\operatorname{sen}17°)^2.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

39. En un triángulo ABC, se cumple la siguiente relación.

$3.\cot A=4\cot B=7\cdot\cot C$

Calcule $\tan C-\tan B+\tan A$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1 E) $\sqrt{12}$

40. Si se cumplen las condiciones

$A+B+C=90°$ (I)

$\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}$ (II)

calcule $\sec^2A+\sec^2B+\sec^2C$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Reducción al primer cuadrante

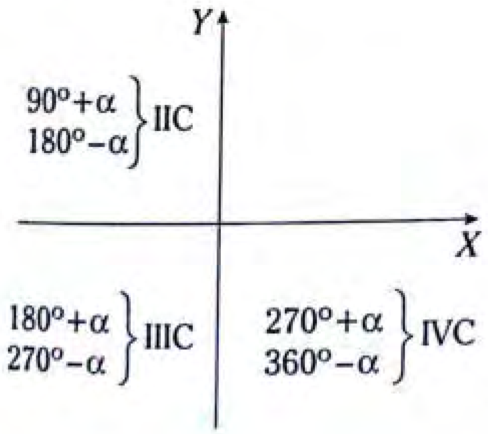
Capítulo VIII

OBJETIVOS

- Conocer la equivalencia de la razón trigonométrica de ángulos de la forma $(90°K \pm x)$ en los términos de la razón trigonométrica del ángulo x ($K \in \mathbb{Z}$).
- Reducir y simplificar expresiones trigonométricas mediante las identidades de reducción al primer cuadrante.

Para ángulos positivos y menores a una vuelta

En este caso, el ángulo a reducir se descompone como la suma o diferencia de un ángulo cuadrantal (90°; 180°; 270° o 360°) con un ángulo que sea agudo, teniendo en cuenta lo siguiente.



Luego aplicamos

$$\text{R.T.}\,(90°+\alpha)=(\text{signo})\ \text{CoRT}(\alpha)$$
$$\text{R.T.}\,(180°\pm\alpha)=(\text{signo})\ \text{R.T.}\,(\alpha)$$
$$\text{R.T.}\,(270°\pm\alpha)=(\text{signo})\ \text{CoRT}(\alpha)$$
$$\text{R.T.}\,(360°-\alpha)=(\text{signo})\ \text{R.T.}\,(\alpha)$$

Donde el signo (±) que debe anteponerse al resultado dependerá del cuadrante al cual pertenece el ángulo a reducir.

OBSERVACIÓN

Razón trigonométrica (R.T.)	Co-razón trigonométrica (CoRT)
seno	coseno
coseno	seno
tangente	cotangente
cotangente	tangente
secante	cosecante
cosecante	secante

Ejemplos

- $\operatorname{sen}120° = \operatorname{sen}(\overbrace{180°-60°}^{\text{IIC}}) = +\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$

- $\tan 315° = \tan(\overbrace{270°+45°}^{\text{IVC}}) = -\cot 45° = -1$

- $\underbrace{\cos}(\overbrace{360° - \alpha}^{\text{IVC}}) = +\cos\alpha$

- $\underbrace{\csc}(\overbrace{270° - \alpha}^{\text{IIIC}}) = -\sec\alpha$

- $\underbrace{\cot}(\overbrace{\pi + \alpha}^{\text{IIIC}}) = +\cot\alpha$

Para ángulos mayores que una vuelta

R.T. $(360°n+\alpha)$=R.T. (α); $n \in \mathbb{Z}$
R.T. $(2\pi n+\alpha)$=R.T. (α); $n \in \mathbb{Z}$

Aquí se observa que si a un ángulo de una razón trigonométrica se le elimina el número entero de vueltas que contiene, el valor de dicha razón no varía.

Ejemplos

- $\operatorname{sen}750° = \operatorname{sen}(360°\times 2 + 30°) = \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2}$

- $\cos 1560° = \cos(360°\times 4 + 120°) = \cos 120°$

  $= \underbrace{\cos}(\overbrace{180° - 60°}^{\text{IIC}}) = -\cos 60°$

- $\cot(1080° + \alpha) = \cot(360°\times 3 + \alpha) = \cot\alpha$

- $\operatorname{sen}(1800° + \alpha) = \operatorname{sen}(360°\times 5 + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

- $\cos(25\pi + \alpha) = \cos(24\pi + \pi + \alpha) =$

  $= \underbrace{\cos}(\overbrace{\pi + \alpha}^{\text{IIC}}) = -\cos\alpha$

- $\tan(1440° + \alpha) = \tan(360°\times 4 + \alpha) = \tan\alpha$

- $\sec(20\pi + \alpha) = \sec\alpha$

- $\csc(255\pi + \alpha) = \csc(254\pi + \pi + \alpha) =$

  $= \underbrace{\csc}(\overbrace{\pi + \alpha}^{\text{IIC}}) - \csc\alpha$

Para ángulos de la forma $(-\alpha)$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$	$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$

- $\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\tan(\alpha - 180°) = \tan[-(180° - \alpha)] = -\underbrace{\tan}(\overbrace{180° - \alpha}^{\text{IIC}})$

  $= -(-\tan\alpha)$

  $= \tan\alpha$

- $\sec\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sec\left[-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \underbrace{\sec}\left(\overbrace{\frac{3\pi}{2} - \alpha}^{\text{IIIC}}\right)$

  $= -\csc\alpha$

- $\cot(24\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

- $\csc(720° - \alpha) = \csc(360°\times 2 - \alpha)$

  $= \csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

- $\cos(-1560°) = \cos 1560° = \cos(\underbrace{360°\times 4 + 120°}_{\in \text{IIC}})$

  $= \cos 120° = \cos(\overbrace{180° - 60°})$

  $= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Problema N.º 1

Si $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}330^\circ\tan134^\circ}{\tan226^\circ}$,

calcule la medida del ángulo agudo α.

Resolución

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{sen}(360^\circ-30^\circ)\tan(180^\circ-46^\circ)}{\tan(180^\circ+46^\circ)}$$

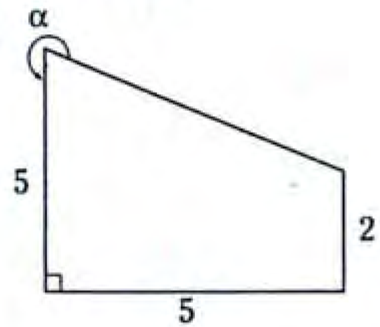
$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{(-\operatorname{sen}30^\circ)(-\tan46^\circ)}{\tan46^\circ}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}30^\circ$$

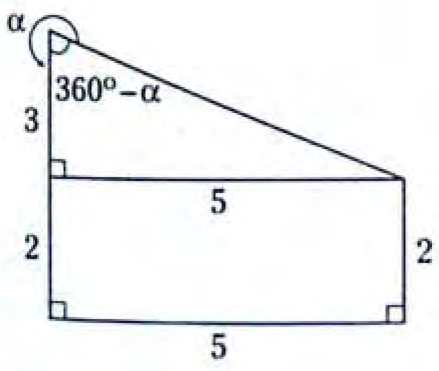
$$\therefore\quad \alpha=30^\circ$$

Problema N.º 2

Del gráfico, calcule $\cot\alpha$.



Resolución



$$\cot(360^\circ-\alpha)=\frac{3}{5}$$

$$-\cot\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \cot\alpha=-\frac{3}{5}$$

Problema N.º 3

Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\tan(180^\circ+\theta)\operatorname{sen}(270^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)\csc(180^\circ-\theta)}$$

Resolución

$$M=\frac{\tan(180^\circ+\theta)\operatorname{sen}(270^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)\csc(180^\circ-\theta)}$$

$$M=\frac{\tan\theta(-\cos\theta)}{(-\operatorname{sen}\theta)\csc\theta}$$

$$M=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(-\cos\theta)}{(-\operatorname{sen}\theta)\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\frac{-\operatorname{sen}\theta}{-1}$$

$$\therefore\quad M=\operatorname{sen}\theta$$

Problema N.º 4

Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-\pi)\tan(4\pi-x)}{\sec(\pi+x)\tan\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x-\pi)}$$

Resolución

$$M=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-\pi)\tan(4\pi-x)}{\sec(\pi+x)\tan\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x-\pi)}$$

$$M=\frac{(\cos x)(-\cos x)(-\tan x)}{(-\sec x)(-\cot x)(-\operatorname{sen}x)}$$

$$M=\frac{\cos x(-\cos x)\left(-\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)}{\left(-\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)(-\operatorname{sen}x)}$$

$$M=\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{-1}$$

$$\therefore\quad M=-\operatorname{sen}x\cos x$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Calcule $(\text{sen}150^\circ+\tan225^\circ)^{\sec300^\circ}$

A) 5/4 B) 1/4 C) 9/4
D) 3/4 E) 3/2

2. Simplifique

$$\frac{\text{sen}(180^\circ+x)+\cos(270^\circ-x)}{\text{sen}(90^\circ+x)+2\cos(180^\circ-x)}$$

A) $\tan x$ B) 1 C) $2\tan x$
D) $2\text{sen}x$ E) $2\cot x$

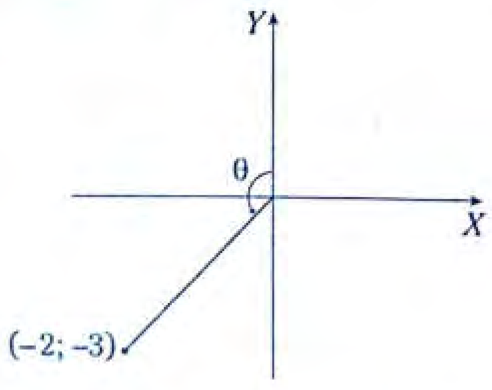
3. Si $\tan(180^\circ+\theta)+x\cot(270^\circ-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)+\tan(180^\circ+\theta)$, determine el valor de x.

A) 0 B) 1 C) 2
D) −1 E) −2

4. Si $f(\theta)=\text{sen}\theta+\cos\theta$, calcule $\dfrac{f_{(230^\circ)}}{f_{(50^\circ)}}$.

A) −1 B) 1 C) 0
D) −2 E) 2

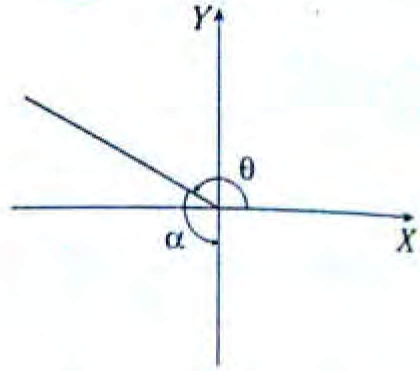
5. Del gráfico, calcule $3\tan\theta$.



A) −1 B) −2 C) −3
D) −4 E) −5

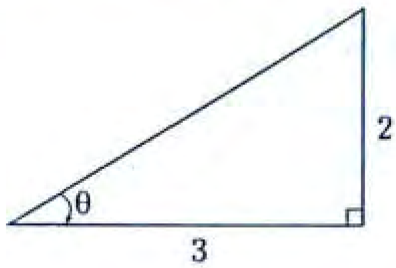
6. Del gráfico adjunto, calcule

$$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)+\tan\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right).$$



A) −1
B) 0
C) 1
D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{2}-1$

7. Del gráfico, calcule $\tan\theta$.



A) $-\dfrac{\sqrt{13}}{9}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{2}{3}$
D) $-\dfrac{\sqrt{13}}{5}$ E) $-\dfrac{1}{2}$

8. Si $\text{sen}(20\pi+\theta)=\cot(5\pi-\theta)$, calcule $\cos^2\theta-\cos\theta$.

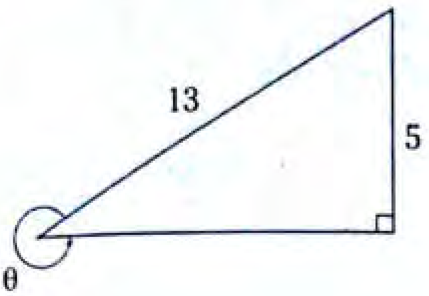
A) 0 B) −2 C) −1
D) 1 E) 2

9. Si $\tan\left(\dfrac{7\pi}{2}-\theta\right)=2$ y $\theta\in$ IIIC,

calcule $\sqrt{5}(\text{sen}\theta+\cos\theta)$.

A) −1 B) −2 C) −3
D) −5 E) −4

10. Del gráfico, calcule $\cot\theta$.



A) -5 B) $-12/5$ C) $-13/5$
D) $-5/12$ E) $-5/13$

11. Si $\alpha+\beta+\theta=5\pi$, calcule el valor de

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\pi-\theta)}+\frac{\cos(\beta+\theta+\pi)}{\cos(4\pi+\alpha)}.$$

A) 1 B) 2 C) -1
D) -2 E) 0

12. Si $f(\theta)=\dfrac{\tan\theta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-\cot\theta}$, calcule $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A) -1 B) 1 C) -2
D) $-1/2$ E) 2

13. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)\cdot\cos(-x)\cdot\sec(\pi-x)}{\csc(-x)\cdot\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}.$$

A) $\tan x$ B) 1 C) -1
D) $\sec x\csc x$ E) $\operatorname{sen} x\cos x$

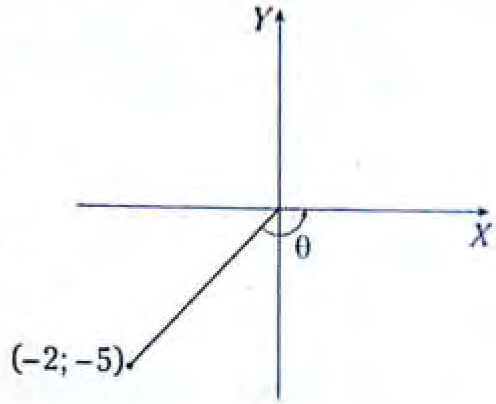
14. Si $\cos(x-y)=\dfrac{1}{3}-\cos(y-x)$,

calcule $\operatorname{sen}^2(x-y)$.

A) 2/3 B) 7/24 C) 35/36
D) 24/7 E) 36/35

15. Del gráfico, calcule $\tan\theta$.

A) $-4/5$
B) $5/2$
C) $-2/5$
D) $2/5$
E) $-5/2$



16. Si $2^{\operatorname{sen}(180°-x)}=4^{\cos(360°-x)}$, calcule $\sec^2 x$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

17. Resuelva

$$\frac{\cos(2\pi-x)+\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+x^2<4}{x}$$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\langle -2; 0\rangle$ C) $\langle 0; 2\rangle$
D) $\langle -2; 2\rangle$ E) $\langle -2; 2\rangle-\{0\}$

18. Sea la ecuación cuadrática $x^2-2x+3=0$, cuyas raíces son $\tan\alpha$ y $\tan\beta$.

Calcule $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cot(2\pi-\beta)$.

A) -2 B) 3/2 C) 2
D) 2/3 E) 1

19. Elimine θ a partir de

$\operatorname{sen}(180°-\theta)\operatorname{sen}(270°+\theta)=a$ (I)

$\tan(180°+\theta)-\cot(360°-\theta)=b$ (II)

A) $1+ab=0$ B) $ab=1$ C) $a-b=0$
D) $a+b=0$ E) $1-ab=0$

20. Simplifique

$$\sqrt{\frac{\sec(2\pi-x)+\tan(\pi+x)}{\csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}}+\tan(2\pi-x);$$

$x\in$ IC.

A) 1 B) $\cos x$ C) $-\sec x$
D) $-\cos x$ E) $\sec x$

NIVEL INTERMEDIO

21. Calcule el mínimo valor de
$\tan(180°+x)-4\tan(270°+x)$; $x\in$ IC.

A) 1 B) 5 C) 2
D) 3 E) 4

22. Determine el intervalo al cual pertenece
$f(\theta)=3\mathrm{sen}(360°-\theta)-4\mathrm{sen}(90°+\theta)$.

A) $[-5; 5\rangle$ B) $\langle-5; 5]$ C) $\langle-5; 5\rangle$
D) $[-4; -3]$ E) $[-5; 5]$

23. Si $\mathrm{sen}(5\pi-\theta)\cdot\cos(-\theta)=a^{-1}$, calcule

$$\tan^2\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)+\tan^2(20\pi+\theta).$$

A) a^2+1 B) a^2-2 C) a^2
D) a^2-4 E) a^2+2

24. Si
$\mathrm{sen}(\pi-\theta)+\mathrm{sen}(2\pi-\theta)+$
$+\mathrm{sen}(3\pi-\theta)+...+\mathrm{sen}(31\pi-\theta)=\frac{1}{3}$,
calcule $\tan^2(-51\pi-\theta)$.

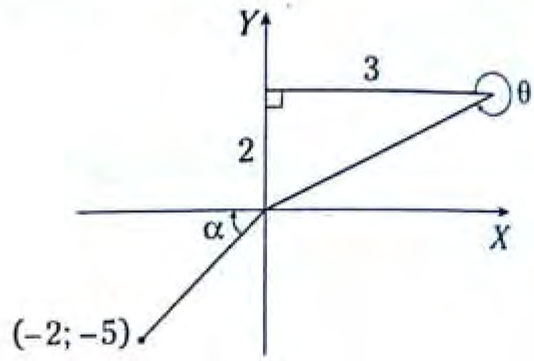
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{2}{5}$

25. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{\tan(x-\pi)}{\tan(-x)}+\frac{\mathrm{sen}\left(23\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(-20\pi-x)}$$

A) -2 B) 0 C) 3
D) 2 E) 1

26. Del gráfico mostrado, calcule $\tan\theta\cot\alpha$.



A) -2 B) $-15/4$ C) -4
D) $-8/15$ E) $-4/15$

27. Indique para qué valor de n se cumple la identidad

$$\tan(-\pi-\theta)-\cot\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)+n=$$
$$=\sec(-\theta)\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

A) 1 B) $\sec\theta$ C) -1
D) $\csc\theta$ E) 0

28. En un triángulo ABC, simplifique

$$\frac{\mathrm{sen}(A+B)}{\mathrm{sen}C}+\frac{\tan(\pi+B)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+A+C\right)}+\frac{\sec\left(\frac{A+B+C}{2}+A\right)}{\csc(2A+B+C)}.$$

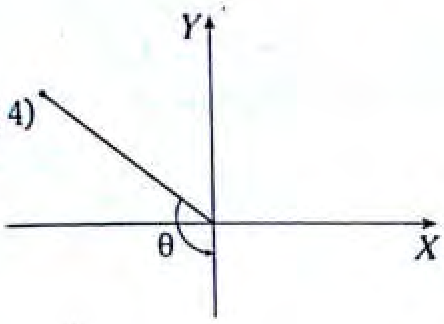
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

29. Si $\cos(-\theta)+\operatorname{sen}(-\theta)=\frac{1}{2}$,

calcule $\sec(\pi-\theta)\cdot\csc(\theta-4\pi)$.

A) $-1/3$ B) $-5/8$ C) $-8/5$
D) $-3/8$ E) $-8/3$

30. Del gráfico mostrado, calcule $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$.

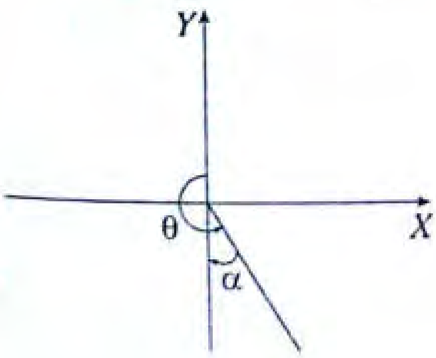


A) $2/5$ B) $1/5$ C) $7/5$
D) $-1/5$ E) $-2/5$

31. Si $\tan(-\pi+\theta)=2-\tan\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)$, determine el valor de $\tan^7(20\pi+\theta)-\cot^3(1254\pi-\theta)$.

A) -2 B) 0 C) 2
D) 1 E) -1

32. Del gráfico, calcule $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta+\tan\theta}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha-\tan\alpha}$.



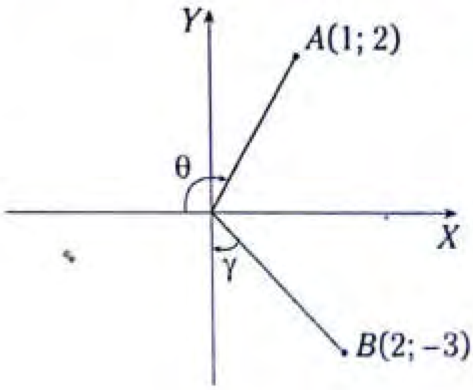
A) 1 B) -1 C) 2
D) $1/2$ E) -2

33. Si se cumple que $\theta+\alpha=2\pi$, calcule la diferencia entre el máximo y el mínimo valor de la expresión

$$M=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

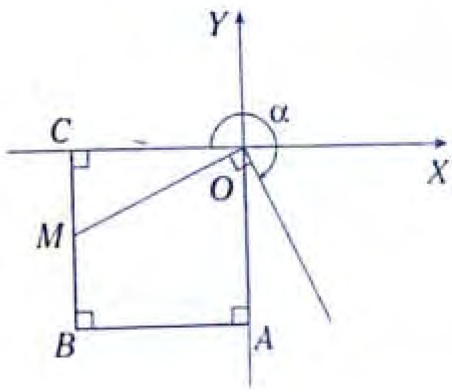
A) 2
B) $-2\sqrt{2}$
C) 0
D) $2\sqrt{2}$
E) 4

34. Del gráfico, calcule $\sqrt{5}\operatorname{sen}\theta+13\cos^2\gamma$.



A) 2 B) 4 C) 7
D) 8 E) 10

35. Del gráfico mostrado, $OABC$ es un cuadrado. Calcule $\cot\alpha-\sqrt{5}\operatorname{sen}\alpha$ si $MB=MC$.



A) $-2/3$ B) $-7/4$ C) $-2/5$
D) $-3/2$ E) $-5/2$

36. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$N=\tan\left(\frac{\pi}{4}-145\pi\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}-2013\frac{\pi}{2}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

37. Si

$$f(\theta)=\text{sen}^2 7\theta-\text{sen}^2 3\theta+\sec^{21}\frac{25\theta}{7}+\sec^{21}\frac{10\theta}{7},$$

calcule $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

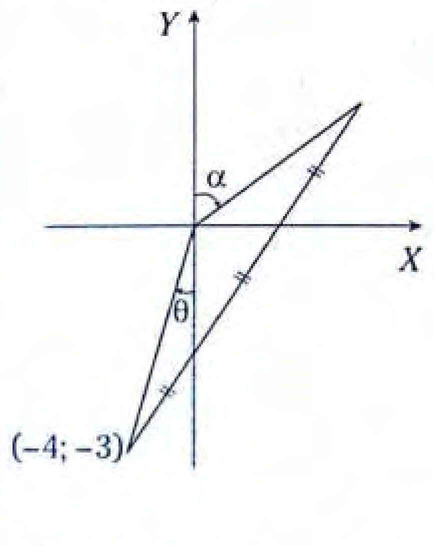
A) $\sqrt{5}-1$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

D) 0 E) $\frac{1}{2}$

38. Determine

$$5\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot(2\pi-\alpha)$$

a partir del gráfico mostrado.



A) –4/3 B) 5/4 C) 4/3
D) 3/4 E) –3/4

39. Si $\alpha+\beta+\theta=\frac{3\pi}{2}$, calcule

$\text{sen}\alpha+\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\theta)+\cos\theta$.

A) $2\cos\theta$
B) 0
C) –1
D) $2\text{sen}\alpha$
E) 1

40. Calcule el producto del máximo y mínimo valor de la expresión

$$L=4\cos(200\pi+\theta)-\cos\left(\frac{403\pi}{2}-\theta\right)+$$
$$+4\,\text{sen}(1351\pi+\theta).$$

A) 5 B) 25 C) –5
D) –16 E) –25

41. Si $\tan(\pi+\theta)=3$ y $\theta\in$ IIIC, calcule sen2θ.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$

D) $-\frac{2}{5}$ E) $-\frac{3}{4}$

42. Si $\sec(2\pi+\alpha)+\tan(-\alpha)=4$,

calcule $\dfrac{1+\text{sen}(25\pi-\alpha)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) –4

Identidades de arcos múltiples (arco doble y arco triple)

Capítulo IX

OBJETIVOS

- Conocer y desarrollar expresiones trigonométricas que relacionan un arco simple con un arco doble y triple.
- Simplificar expresiones donde intervienen arcos o ángulos y sus múltiplos.

Identidades del arco doble

Para determinar la identidad que expresa $\text{sen}(2\theta)$ usamos la identidad del seno de la suma de dos arcos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta+\text{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Si $\alpha=\beta=\theta$, se deduce $\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cdot\cos\theta$.

SENO DEL ARCO DOBLE

$$\boxed{\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta}$$

Ejemplos

- $\text{sen}20°=2\text{sen}10°\cos10°$
- $\text{sen}53°=2\text{sen}\dfrac{53°}{2}\cos\dfrac{53°}{2}$
- $\text{sen}4x=2\text{sen}2x\cos2x$

COSENO DEL ARCO DOBLE

De forma análoga, se deduce

$$\boxed{\cos2\theta=\begin{cases}\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta\\ 2\cos^2\theta-1\\ 1-2\text{sen}^2\theta\end{cases}}$$

Ejemplos

- $\cos12°=\cos^2 6°-\text{sen}^2 6°$
- $\cos18°=2\cos^2 9°-1$
- $\cos4x=1-2\text{sen}^2 2x$

Identidades de degradación

$$\boxed{\begin{array}{c}2\text{sen}^2\theta=1-\cos2\theta\\ 2\cos^2\theta=1+\cos2\theta\end{array}}$$

Ejemplos

- $2\cdot\cos^2(5\theta)=1+\cos(10\theta)$
- $2\cdot\text{sen}^2 x=1-\cos2x$
- $1+\cos6°=2\cos^2 3°$
- $1-\cos(3A)=2\text{sen}^2\left(\dfrac{3A}{2}\right)$

TANGENTE DEL ARCO DOBLE

Para hallar la identidad que expresa $\tan2\theta$ en términos de $\tan\theta$, usamos la identidad de la tangente de la suma de dos arcos.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Si $\alpha=\beta=\theta$, tenemos

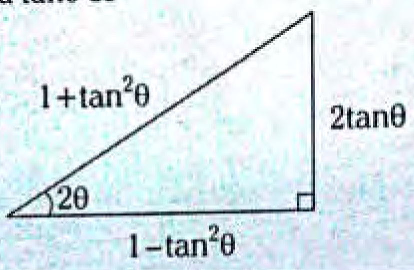
$$\tan(\theta+\theta)=\frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$$

Por lo tanto, se deduce

$$\boxed{\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$

OBSERVACIÓN

Una forma práctica de recordar las identidades del sen2θ y cos2θ en términos de la tanθ es



$\operatorname{sen}2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}16°=\dfrac{2\tan 8°}{1+\tan^2 8°}$
- $\cos 4\theta=\dfrac{1-\tan^2 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}$

IDENTIDADES AUXILIARES DEL ARCO DOBLE

Por identidades trigonométricas fundamentales se sabe que

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\left(\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-\frac{2\operatorname{sen}^2 2\theta}{4}=1-\frac{(1-\cos 4\theta)}{4}$$

Luego

$$\boxed{\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\theta}$$

En forma análoga, se tiene

$$\boxed{\operatorname{sen}^6\theta+\cos^6\theta=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\theta}$$

Además, se cumple

$$\boxed{\cot\theta+\tan\theta=2\csc 2\theta\ ;\ \cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}^4 15°+\cos^4 15°=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 60°$
- $\operatorname{sen}^6 4°+\cos^6 4°=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 16°$
- $\cot\left(\dfrac{53°}{2}\right)+\tan\left(\dfrac{53°}{2}\right)=2\csc 53°$
- $2\cot 32°=\cot 16°-\tan 16°$

OBSERVACIÓN

$$\csc\theta+\cot\theta=\cot\frac{\theta}{2}\ ;\ \csc\theta-\cot\theta=\tan\frac{\theta}{2}$$

Ejemplos

- $\csc 4\theta+\cot 4\theta=\cot 2\theta$
- $\tan 15°=\csc 30°-\cot 30°$

Identidades del arco triple

SENO DEL ARCO TRIPLE

$$\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}(\theta+2\theta)$$

$$\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}\theta\cos 2\theta+\cos\theta\operatorname{sen}2\theta$$

$$\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}\theta(1-2\operatorname{sen}^2\theta)+\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}\theta-2\operatorname{sen}^3\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}\theta-2\operatorname{sen}^3\theta+2\operatorname{sen}\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)$$

Luego tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}3\theta=3\operatorname{sen}\theta-4\operatorname{sen}^3\theta}$$

Ejemplos

- $3\operatorname{sen}20^\circ-4\operatorname{sen}^3 20^\circ=\operatorname{sen}60^\circ$
- $\operatorname{sen}15^\circ=3\operatorname{sen}5^\circ-4\operatorname{sen}^3 5^\circ$

Coseno del arco triple

$$\boxed{\cos3\theta=4\cos^3\theta-\cos\theta}$$

Ejemplos

- $4\cos^3 10^\circ-3\cos10^\circ=\cos30^\circ$
- $\cos45^\circ=4\cos^3 15^\circ-3\cos15^\circ$

Identidades de degradación

$$4\operatorname{sen}^3\theta=3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta$$
$$4\cos^3\theta=3\cos\theta+\cos3\theta$$

Ejemplos

- $4\operatorname{sen}^3 8^\circ=3\operatorname{sen}8^\circ-\operatorname{sen}24^\circ$
- $4\cos^3 2\theta=3\cos2\theta+\cos6\theta$

Tangente del arco triple

$$\boxed{\tan3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}}$$

Ejemplos

- $\tan9^\circ=\dfrac{3\tan3^\circ-\tan^3 3^\circ}{1-3\tan^2 3^\circ}$
- $\dfrac{3\tan20^\circ-\tan^3 20^\circ}{1-3\tan^2 20^\circ}=\tan60^\circ$

Identidades trigonométricas auxiliares del arco triple

$$\boxed{\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}\theta(2\cos2\theta+1)}$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}6^\circ=\operatorname{sen}2^\circ(2\cos4^\circ+1)$
- $\operatorname{sen}18^\circ=\operatorname{sen}6^\circ(2\cos12^\circ+1)$

$$\boxed{\cos3\theta=\cos\theta(2\cos2\theta-1)}$$

Ejemplos

- $\cos15^\circ=\cos5^\circ(2\cos10^\circ-1)$
- $\cos9^\circ=\cos3^\circ(2\cos6^\circ-1)$

$$\boxed{\tan3\theta=\tan\theta\left(\frac{2\cos2\theta+1}{2\cos2\theta-1}\right)}$$

Ejemplos

- $\tan30^\circ=\tan10^\circ\left(\dfrac{2\cos20^\circ+1}{2\cos20^\circ-1}\right)$
- $\dfrac{2\cos40^\circ+1}{2\cos40^\circ-1}=\dfrac{\tan60^\circ}{\tan20^\circ}$

También se utilizan las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}3\theta=4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(60^\circ-\theta)\operatorname{sen}(60^\circ+\theta)$$
$$\cos3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$$
$$\tan3\theta=\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)$$

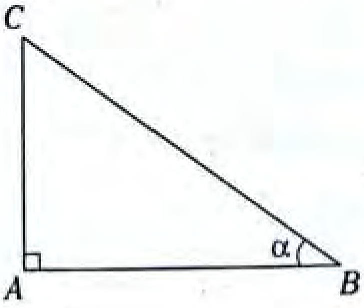
Ejemplos

- $\operatorname{sen}27^\circ=4\operatorname{sen}9^\circ\cdot\operatorname{sen}51^\circ\cdot\operatorname{sen}69^\circ$
- $4\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos80^\circ=\cos60^\circ$
- $\tan15^\circ=\tan5^\circ\cdot\tan55^\circ\cdot\tan65^\circ$

Problemas Resueltos

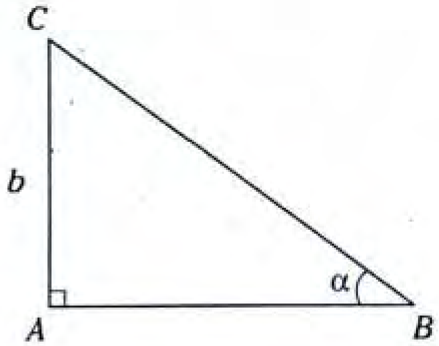
Problema N.° 1

En el triángulo BAC del gráfico, $AC=b$ cm y $BC-AB=k$ cm, donde $b > K$, halle $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



UNMSM 2012-I

Resolución



De las identidades auxiliares del arco doble

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\csc(\alpha)-\cot(\alpha)$$

Reemplazamos

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{BC}{b\text{ cm}}-\frac{AB}{b\text{ cm}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{BC-AB}{b\text{ cm}}$$

$$\rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{k\text{ }\cancel{\text{cm}}}{b\text{ }\cancel{\text{cm}}}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{k}{b}$$

Problema N.° 2

Simplifique la expresión

$$\frac{\text{sen}3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos3\theta}{\text{sen}\theta}$$

UNMSM 2013-I

Resolución

Sea la expresión

$$M=\frac{\text{sen}3\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos3\theta}{\text{sen}\theta}$$

Operando

$$M=\frac{\text{sen}3\theta\cdot\text{sen}\theta+\cos3\theta\cdot\cos\theta}{\cos\theta\cdot\text{sen}\theta}$$

Recordamos la identidad

$$\cos A\cos B+\text{sen}A\,\text{sen}B=\cos(A-B)$$

$$\rightarrow M=\frac{\cos(3\theta-\theta)}{\text{sen}\theta\cdot\cos\theta}$$

Sabemos que $\text{sen}2\theta=2\text{sen}\theta\cos\theta$

$$M=\frac{2\cdot\cos2\theta}{2\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta}$$

$$M=\frac{2\cdot\cos2\theta}{\text{sen}2\theta}$$

$$\therefore M=2\cot2\theta$$

Problema N.° 3

Si $0<\theta<\frac{\pi}{8}$ y $\tan2\theta=\frac{1}{5}$ entonces

$13\text{sen}4\theta+5\csc4\theta$ es igual a

UNAC 2010-II

Resolución

Sabemos de las identidades auxiliares de ángulo doble que $\text{sen}2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Entonces, del dato tenemos

$$\operatorname{sen}4\theta=\frac{2\cdot\tan 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$\operatorname{sen}4\theta=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$$

$$\rightarrow\ \csc 4\theta=\frac{13}{5}$$

$\therefore\ 13\cdot\operatorname{sen}4\theta+5\cdot\csc 4\theta=18$

Problema N.º 4

Halle el valor de

$$M=\sec\frac{2\pi}{9}+8\cos^2\frac{2\pi}{9}$$

UNAC 2007-II

Resolución

Llevando todo a cosenos

$$M=\frac{1+8\cos^3\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}$$

$$M=\frac{1+2\left(4\cdot\cos^3\frac{2\pi}{9}\right)}{\cos\frac{2\pi}{9}}$$

Por degradación de identidades de arco triple

$$M=\frac{1+2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+3\cos\frac{2\pi}{9}\right)}{\cos\frac{2\pi}{9}}$$

$$M=\frac{1+2\left(\frac{-1}{2}\right)+6\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{\cos\frac{2\pi}{9}}$$

$$M=\frac{6\cdot\cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}}{\cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}}$$

$\therefore\ M=6$

Problema N.º 5

Si $\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=m$, determine $\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}$.

Resolución

Nos piden

$$E=\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}=2\cos 2x+1$$

Dato

$$\frac{\tan 3x}{\tan x}=m$$

Usamos la identidad

$$\tan 3x=\tan x\left(\frac{2\cos 2x+1}{2\cos 2x-1}\right)$$

Obtenemos

$$\frac{2\cos 2x+1}{2\cos 2x-1}=m\ \rightarrow\ 2\cos 2x=\frac{m+1}{m-1}$$

Luego

$$E=2\cos 2x+1=\frac{m+1}{m-1}+1$$

$$\therefore\ E=\frac{2m}{m-1}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

ARCO DOBLE

NIVEL BÁSICO

1. Si sen20°$=a$, calcule sen10°cos10° en términos de a.

A) $4a$ B) $a/2$ C) a
D) $a/4$ E) $2a$

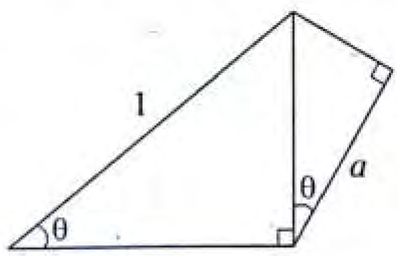
2. Si $\operatorname{sen}x+\cos x=\dfrac{1}{3}$, determine el valor de sen$2x$.

A) $-2/9$ B) $2/9$ C) $-8/9$
D) $5/9$ E) $1/9$

3. Si $9x=\pi$, calcule el valor de $\cos x\cos 2x\cos 4x$

A) $1/4$ B) 1 C) $1/2$
D) $2/3$ E) $1/8$

4. Del gráfico, calcule csc2θ en términos de a.



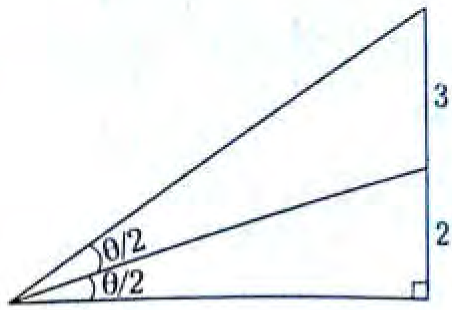
A) $3/a$ B) a C) $2a$
D) $1/2a$ E) $1/a$

5. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta}{\cos 2\theta}$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

6. Del gráfico dado, calcule cos2θ.



A) $3/4$ B) $2/5$ C) $-1/9$
D) $1/9$ E) $-2/3$

7. Si la siguiente igualdad es una identidad

$\cos^n x-\operatorname{sen}^n x=2\cos^2 x-1$,

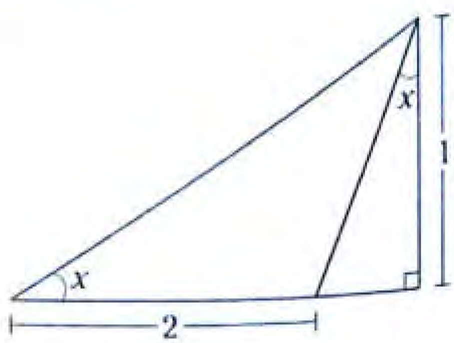
calcule cuántos valores toma n; $n\in\mathbb{Z}^+$.

A) 4 B) 1 C) 3
D) 2 E) 5

8. Si $\tan^2 x+4\tan x-1=0$, calcule tan$2x$.

A) $1/2$ B) $1/4$ C) $1/8$
D) 2 E) 4

9. Del gráfico, calcule tan$2x$.



A) $1/2$ B) 2 C) 1
D) $1/4$ E) $1/3$

10. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{\tan x}{(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 2x)}$$

A) $4\cot 4x$ B) 1 C) $\tan 2x$

D) $\dfrac{\tan 4x}{4}$ E) $\tan 4x$

11. Si $f(\theta;\alpha)=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\alpha$, calcule $f\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8}\right)$.

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

B) $\dfrac{4-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D) 1

E) $\dfrac{4-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

12. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}+\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{2}} \text{ si } x\in \text{IC}.$$

A) $\operatorname{sen}x+\cos x$
B) $\operatorname{sen}x$
C) $\cos x$
D) 1
E) $\operatorname{sen}x-\cos x$

13. Si $x\in$ IIC, simplifique la siguiente expresión.

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}2x}+\cos x$$

A) $2\cos x$
B) $\operatorname{sen}x+2\cos x$
C) $2\operatorname{sen}x$
D) $\cos x$
E) $\operatorname{sen}x$

14. Calcule el máximo valor de $f(\theta)=\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta$.

A) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ E) 1

15. Determine el mínimo valor de

$$f(\theta)=\frac{1}{2\cos^2\theta+1}.$$

A) 2 B) 1/3 C) 3
D) 1 E) 2/3

16. Elimine x a partir de

$\operatorname{sen}x\cos x=a$ (I)

$\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x=b$ (II)

A) $a^2-b^2=1$ B) $4a^2+b^2=1$ C) $a^2+b^2=1$
D) $4a^2-b^2=1$ E) $2a^2+b^2=1$

17. Si $\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}=2$,

determine el valor de $\cos^2\theta$.

A) 1/3 B) 2/3 C) 3
D) 1 E) 2

18. Si $f(\theta)=\dfrac{2\csc 2\theta-\tan\theta}{2\cot 2\theta+\tan\theta}$, calcule $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\tan\dfrac{\pi}{7}$

D) 1 E) $\cot\dfrac{\pi}{7}$

19. Simplifique la siguiente expresión.

$$\sqrt[4]{\cos 2x(1-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x)+\operatorname{sen}^8 x}$$

A) $\operatorname{sen}^4 x$ B) $\operatorname{sen}^8 x$ C) $\tan^2 x$
D) $\cos^2 x$ E) $\operatorname{sen}^2 x$

NIVEL INTERMEDIO

20. Reduzca la siguiente expresión.
$\csc 20° + \csc 40° + \csc 80° + \tan 10°$

A) $\sec 10°$ B) $\cot 10°$ C) $\tan 10°$
D) $\cos 10°$ E) $\operatorname{sen} 10°$

21. Si $\sqrt{\csc\theta - \cot\theta} + \sqrt{\csc\theta + \cot\theta} = a$,

calcule $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

A) $2-a^2$ B) a^2-1 C) a^2+2
D) a^2-2 E) a^2

22. Si $\tan^2\theta - 6\tan\theta + 1 = 0$, calcule $\operatorname{sen} 2\theta$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 1/2 E) 1/3

23. Si $\cos 2\theta = \frac{1}{4}$, determine el valor de $\tan^2\theta$.

A) 3 B) 3/5 C) 2/5
D) 2 E) 1

24. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\tan\theta - \tan^3\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^2}$$

A) $2\operatorname{sen} 2\theta$ B) $4\operatorname{sen} 4\theta$ C) $4\cos 2\theta$

D) $\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}$ E) $\frac{\cos 4\theta}{4}$

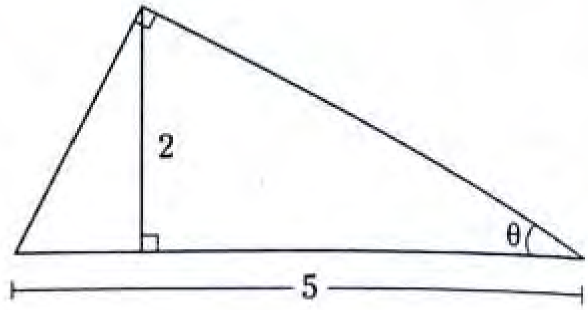
25. Si $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = A + B\cos 4x$ es una identidad, calcule $A+B$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Calcule el máximo valor de
$f(\theta) = \cos 2\theta(3+\cos 4\theta) + 4\operatorname{sen}^8\theta$.

A) 4 B) 2 C) 3
D) 1 E) 5

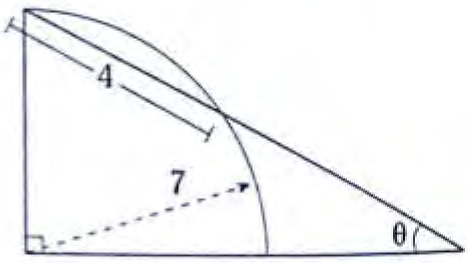
27. Del gráfico, calcule $\operatorname{sen} 2\theta$.



A) 4/5 B) 3/2 C) 10/7
D) 9/5 E) 7/4

28. Del gráfico mostrado, calcule $49\cos 2\theta$.

A) 51
B) 47
C) 41
D) 23
E) 39



29. Simplifique la siguiente expresión.

$$\tan\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) + \tan\theta$$

A) $\csc\theta$ B) $\operatorname{sen}\theta$ C) $\cos\theta$
D) $\sec\theta$ E) $\tan\theta$

30. Elimine x a partir de

$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{1+2a}$ (I)
$\tan x + \cot x = b$ (II)

A) $a^2b=1$ B) $2=ab$ C) $a=b$
D) $1=ab$ E) $a^2+b^2=1$

31. Si $\cot^3 x - \tan^3 x = 8\cot^3 2x - 1$, determine el valor $\cot 2x$.

A) 4 B) $\frac{1}{6}$ C) $-\frac{2}{3}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

32. Calcule el mínimo valor de $f(\theta)=\cos 2\theta + \operatorname{sen}\theta$.

A) −2 B) 1 C) 0

D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

33. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}10^{\circ}}+\operatorname{sen}5^{\circ}}{\sqrt{1+\cos 10^{\circ}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1

D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

34. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\csc 2\theta - \cot 2\theta}{\csc 2\theta + \cot 2\theta} - \sec^2\theta$$

A) 0 B) 2 C) −2

D) 1 E) −1

35. De la siguiente identidad

$$\frac{\cot\theta - \tan\theta}{\cos^2 2\theta} = A(\cot B\theta + \tan B\theta)$$

calcule $A+B$.

A) 5 B) 2 C) 4

D) 1 E) 3

36. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\tan\theta} - \frac{1+\cos 2\theta}{\cot\theta}$$

A) −1 B) 1 C) $\tan\theta$

D) 0 E) $\operatorname{sen}\theta$

37. Si se tiene la siguiente identidad

$$\frac{1+\operatorname{sen}2\theta+\cos 2\theta}{1+\operatorname{sen}2\theta} = \frac{A}{1+B\tan\theta},$$

calcule A^B.

A) 1/2 B) 2 C) 1

D) 1/4 E) 4

38. Reduzca la siguiente expresión.

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}50^{\circ}}{2}}}}$$

A) $\sqrt{2}\operatorname{sen}50^{\circ}$

B) $\sqrt[4]{8}\cos 40^{\circ}$

C) $\sqrt{2}\cos 40^{\circ}$

D) $\sqrt[4]{8}\cos 20^{\circ}$

E) $\sqrt[4]{8}\cos 10^{\circ}$

39. Si $\frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{2}$,

determine el valor de $4\sec 4x$.

A) −11 B) −9 C) −7

D) −4 E) −2

40. Si $\tan 2x \tan x = a$, calcule $\tan 2x \cot x$.

A) $a+1$ B) $a-2$ C) $2a+1$

D) $a+2$ E) a

ARCO TRIPLE

NIVEL BÁSICO

41. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{4\operatorname{sen}^3\theta-3\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}6\theta}$$

A) $-\frac{1}{2}\cdot\csc 3\theta$ B) $-\frac{1}{2}\cdot\tan 3\theta$ C) $-\frac{1}{2}\cdot\sec 3\theta$

D) $\frac{1}{2}\cdot\sec 3\theta$ E) $\frac{1}{2}\cdot\csc 3\theta$

42. Determine el máximo valor de
$\operatorname{sen}x(4\cos^2x-1)+\cos x(1-4\operatorname{sen}^2x)$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\sqrt{5}$

43. Reduzca la expresión

$$\frac{3\operatorname{sen}\theta-4\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}3\theta}{2\cos\theta+4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}.$$

A) $\operatorname{sen}\theta$
B) $\operatorname{sen}2\theta$
C) $4\operatorname{sen}3\theta$
D) $2\operatorname{sen}3\theta$
E) 0

44. Calcule $\operatorname{sen}111°-\cos 159°$.

A) $\frac{234}{125}$ B) $\frac{117}{125}$ C) $\frac{117}{25}$

D) $\frac{234}{5}$ E) $\frac{113}{112}$

45. Calcule el valor aproximado de $\tan(79°30')$.

A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{11}{3}$ C) 11

D) $\frac{11}{4}$ E) $\frac{11}{2}$

46. Si $4\operatorname{sen}x-5\cos x=0$,
calcule el valor de $\cot 3x$.

A) $-\frac{23}{11}$ B) $-\frac{236}{115}$ C) $-\frac{151}{17}$

D) $\frac{111}{17}$ E) $-\frac{11}{23}$

47. Si $\cos\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$; $\theta\in$ IIC,
calcule el valor que toma $\operatorname{sen}3\theta$.

A) $\frac{23}{27}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{23\sqrt{2}}{67}$

48. Si $\tan y=2$; $y\in$ IIIC,
calcule el valor de $\cos y(1-4\operatorname{sen}^2y)$.

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{11\sqrt{5}}{5}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ E) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

49. Calcule el valor de $\tan 3\theta$ en la siguiente igualdad.

$3\tan\theta-2=\tan^3\theta-6\tan^2\theta$

A) −1 B) −2 C) −3
D) 2 E) 1

50. Calcule $\operatorname{sen}[3(x+120°)]$
si se cumple que $\operatorname{sen}(x+60°)=\frac{1}{5}$.

A) $\frac{71}{125}$ B) $-\frac{71}{125}$ C) $-\frac{11}{125}$

D) $-\frac{13}{125}$ E) $\frac{13}{125}$

51. Si se cumple $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$, calcule $\cos 3\theta$.

A) $\frac{20\sqrt{2}}{57}$ B) $\frac{12\sqrt{2}}{31}$ C) $\frac{11\sqrt{2}}{51}$
D) $\frac{10\sqrt{2}}{37}$ E) $\frac{19\sqrt{2}}{27}$

52. Determine la variación de $4\operatorname{sen}3\theta-12\operatorname{sen}\theta+15$.

A) $[0; 30\rangle$ B) $[-2; 35\rangle$ C) $[-1; 31]$
D) $[-4; 32]$ E) $[-2; 51\rangle$

53. Si $\frac{\operatorname{sen}6\theta}{\operatorname{sen}2\theta}=x^2-1$, determine x.

A) $2\cos 2\theta$ B) $2\operatorname{sen}\theta$ C) $2\operatorname{sen}2\theta$
D) $2\tan\theta$ E) $2\cos\theta$

54. Si $\cos(60^\circ-x)=-\frac{1}{3}$, calcule $\sec 3x$.

A) $\frac{27}{23}$ B) $-\frac{61}{60}$ C) $-\frac{33}{26}$
D) $-\frac{27}{23}$ E) $-\frac{24}{15}$

55. Calcule

$$\left(\frac{\operatorname{sen}114^\circ}{\operatorname{sen}38^\circ}+\frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ}\right)\cdot(\operatorname{sen}14^\circ+\cos 14^\circ)^{-1}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

56. Reduzca la expresión

$$\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}2\theta(\cos 3\theta+2\cos\theta)}.$$

A) 1
B) $\sec 3\theta$
C) $0{,}5\cdot\csc 3\theta$
D) $2\cdot\csc 3\theta$
E) $0{,}5\cdot\sec 3\theta$

57. Determine los valores que toma la expresión $\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

A) $[-4; 4]-\{0\}$
B) $\langle -4; 4\rangle-\{0\}$
C) $[-4; 4]$
D) $\langle -4; 4\rangle$
E) $\langle -4; 3\rangle$

58. Simplifique $\operatorname{sen}3\theta\cdot\cot\theta-2\cos\theta$.

A) $\cos 3\theta$ B) $\cos 6\theta$ C) $\operatorname{sen}3\theta$
D) $\sec 3\theta$ E) $\csc 3\theta$

59. Reduzca la expresión $2\cos 6x\cdot\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}3x$.

A) $\operatorname{sen}12x$
B) $\operatorname{sen}9x$
C) $\operatorname{sen}6x$
D) $\operatorname{sen}15x$
E) $\operatorname{sen}3x$

60. Si $\cos x=-\frac{1}{3}$, calcule el valor que toma $\tan 3x\cdot\cot x$

A) $-\frac{5}{23}$ B) $\pm\frac{5}{23}$ C) $\pm\frac{2}{23}$
D) $\frac{7}{23}$ E) $\frac{5}{23}$

NIVEL INTERMEDIO

61. Calcule el valor de $\cos 42^\circ + 4\cos^3 74^\circ$.

A) 7/25 B) 20/23 C) 21/25
D) 7/24 E) 21/24

62. Calcule el valor de
$\text{sen}3x \cdot \csc x + \sec x \cdot \sec 3\pi \cdot \cos 3x$.

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

63. Simplifique la expresión

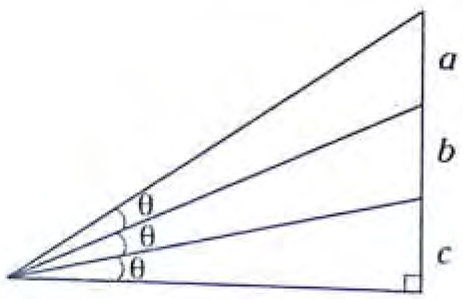
$$\frac{2\cdot \text{sen}^3\theta + \text{sen}3\theta}{2+\cos 2\theta}.$$

A) $\text{sen}\theta$ B) $\text{sen}2\theta$ C) $\cos\theta$
D) $\text{sen}3\theta$ E) $\cos 3\theta$

64. Si $2\text{sen}x \cdot \cos^2 x = a\cdot \text{sen}3x + b\,\text{sen}x$, calcule $b-a$.

A) -1 B) 0 C) 1
D) 1/2 E) $-1/2$

65. Del gráfico, calcule $\cos 2\theta - \frac{1}{2}$.



A) $\frac{b}{a+c}$ B) $\frac{a+c}{b}$ C) $\frac{a}{b+c}$
D) $\frac{a+b}{c}$ E) $\frac{c}{a+b}$

66. Si $\frac{\cot x}{\cot 3x} = 3$, calcule $\frac{\sec x}{\sec 3x}$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1/3 E) 3

67. Reduzca la expresión

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\tan 3x\left(1-3\tan^2 x\right)+\tan^3 x\right).$$

A) $\csc x$ B) $\cot x$ C) $\tan x$
D) $\text{sen}x$ E) $\sec x$

68. Elimine la variable θ de las siguientes expresiones.

$\text{sen}3\theta = a\cdot\text{sen}\theta$ (I)

$\cos 3\theta = b\cdot\cos\theta$ (II)

A) $2a+3b=7$ B) $a+b^2=6$ C) $a^2+b^2=5$
D) $a-b=2$ E) $a+b=10$

69. Calcule $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \text{sen}10^\circ$.

A) 1/4 B) 1/8 C) 1/2
D) 1 E) 1/16

70. Reduzca
$\sec 2^\circ \cdot \sec 62^\circ \cdot \sec 122^\circ$.

A) $\tan 28^\circ$ B) 1 C) $-\tan 42^\circ$
D) $-2\cdot\sec 6^\circ$ E) $-4\cdot\sec 6^\circ$

71. Calcule el valor de

$$\frac{\text{sen}50^\circ\cdot\text{sen}70^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\tan 20^\circ\cdot\tan 80^\circ\cdot\tan 40^\circ}.$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{10}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ E) 1

72. Reduzca la expresión

$$\frac{\text{sen}10^{\circ}\cdot\cos 20^{\circ}\cdot\text{sen}50^{\circ}\cdot\cos 80^{\circ}}{\text{sen}5^{\circ}}.$$

A) $\frac{\text{sen}20^{\circ}}{4}$

B) $\frac{\cos 5^{\circ}}{4}$

C) $\frac{\text{sen}5^{\circ}}{4}$

D) $\frac{\cos 10^{\circ}}{4}$

E) $\frac{\text{sen}20^{\circ}\cdot\cos 5^{\circ}}{4}$

73. Calcule el valor de

$$\left(\frac{2\cdot\tan 80^{\circ}+\tan 20^{\circ}}{\tan 80^{\circ}}\right)\cdot\tan 40^{\circ}.$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) 3

74. Simplifique

$$\frac{4\cos 18^{\circ}-3\sec 18^{\circ}}{\tan 18^{\circ}}.$$

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

75. Determine el valor de

$$\frac{\text{sen}44^{\circ}\cdot\text{sen}76^{\circ}}{2\text{sen}58^{\circ}+1}.$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/8

D) 1/3 E) 1

76. De la igualdad

$$\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+3\cos\frac{\theta}{6}\right)^2}{4}+\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{3}\right)^3}{2}=m+n\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right).$$

calcule $m+n$.

A) 58 B) −5/8 C) 3/8

D) −3/8 E) 4

77. Si $\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x=\frac{1}{2}$, calcule sen3$x$.

A) −5/8 B) −3/8 C) −11/16

D) −47/64 E) 9/11

78. Calcule

$$(1-\cos 156^{\circ})(1-\cos 84^{\circ})(1-\cos 36^{\circ})\cdot\csc^2 54^{\circ}.$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 5/3

D) 2 E) 1/3

79. Calcule

$$\frac{\cos 3\theta(3\cos\theta+\cos 3\theta)+\text{sen}3\theta(3\text{sen}\theta-\text{sen}3\theta)}{\cos^3 2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

80. Determine el equivalente de

$$\frac{2\cos 2\theta+1}{2\cos\theta+1}.$$

A) $2\cos\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\cos\theta+1$

D) $2\cos\theta+1$ E) $2\cos\theta-1$

Transformaciones trigonométricas

Capítulo X

OBJETIVOS

- Identificar las equivalencias que transforman sumas o diferencias de senos o cosenos a producto para simplificar expresiones complicadas.
- Identificar las equivalencias que nos permiten transformar el producto de senos o cosenos a una suma o diferencias de los mismos.

De suma o diferencia a producto

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}50^\circ+\operatorname{sen}20^\circ=2\operatorname{sen}\left(\frac{50^\circ+20^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{50^\circ-20^\circ}{2}\right)$
  $=2\operatorname{sen}35^\circ\cos15^\circ$

- $\operatorname{sen}3\theta-\operatorname{sen}\theta=2\cos\left(\frac{3\theta+\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right)$
  $=2\cos2\theta\operatorname{sen}\theta$

- $\cos40^\circ+\cos10^\circ=2\cos\left(\frac{40^\circ+10^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{40^\circ-10^\circ}{2}\right)$
  $=2\cos25^\circ\cos15^\circ$

- $\cos6\theta-\cos2\theta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{6\theta+2\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{6\theta-2\theta}{2}\right)$
  $=-2\operatorname{sen}4\theta\operatorname{sen}2\theta$

- $\cos70^\circ+\operatorname{sen}40^\circ=\cos70^\circ+\cos50^\circ=2\cos60^\circ\cos10^\circ$

- $1+2\operatorname{sen}10^\circ=2\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}10^\circ\right)=2(\operatorname{sen}30^\circ+\operatorname{sen}10^\circ)$
  $=2(2\operatorname{sen}20^\circ\cos10^\circ)$
  $=4\operatorname{sen}20^\circ\cos10^\circ$

PROPIEDAD

Si $A+B+C=180^\circ$, se cumple

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C=4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$

$$\cos2A+\cos2B+\cos2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$$

Ejemplos

- $\text{sen}50°+\text{sen}60°+\text{sen}70°=4\cos25°\cos30°\cos35°$
- $\cos130°+\cos40°+\cos10°=4\text{sen}65°\text{sen}20°\text{sen}5°+1$
- $\text{sen}260°+\text{sen}70°+\text{sen}30°=4\text{sen}130°\text{sen}35°\text{sen}15°$
- $\cos100°+\cos140°+\cos120°=-4\cos50°\cos70°\cos60°-1$

De producto a suma o diferencia

$$2\text{sen}A\cos B=\text{sen}(A+B)+\text{sen}(A-B)$$
$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\text{sen}A\text{sen}B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

Ejemplos

- $2\text{sen}32°\cos10°=\text{sen}(32°+10°)+\text{sen}(32°-10°)=\text{sen}42°+\text{sen}22°$
- $2\text{sen}\theta\cos3\theta=\text{sen}(\theta+3\theta)+\text{sen}(\theta-3\theta)=\text{sen}4\theta-\text{sen}2\theta$
- $2\cos5°\cos2°=\cos(5°+2°)+\cos(5°-2°)=\cos7°+\cos3°$
- $2\text{sen}10°\text{sen}8°=\cos(10°-8°)-\cos(10°+8°)=\cos2°-\cos18°$
- $\text{sen}7\theta\,\text{sen}3\theta=\dfrac{2\text{sen}7\theta\,\text{sen}3\theta}{2}=\dfrac{\cos4\theta-\cos10\theta}{2}$
- $\sqrt{3}\cos10°=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos10°=2\cos30°\cos10°=\cos40°+\cos20°$
- $\sqrt{6}=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\cos30°\cos45°=2(2\cos30°45°)$
  $=2(\cos75°+\cos15°)$

Aplicación

Demuestre $\text{sen}3\theta=3\text{sen}\theta-4\text{sen}3\theta$.

Resolución

$2\text{sen}2\theta\cos\theta=\text{sen}3\theta+\text{sen}\theta \;\rightarrow\; \text{sen}3\theta=2(2\text{sen}\theta\cos\theta)\cos\theta-\text{sen}\theta$

$\text{sen}3\theta=4\text{sen}\theta\cos^2\theta-\text{sen}\theta$

$\text{sen}3\theta=4\text{sen}\theta(1-\text{sen}^2\theta)-\text{sen}\theta$

$\therefore\; \text{sen}3\theta=3\text{sen}\theta-4\text{sen}3\theta$

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Si $\alpha=33°20'$ y $\beta=56°40'$, halle el valor de la siguiente expresión

$$M=\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^2$$

UNMSM 2009-II

Resolución

$$M=\left(2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{4}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{4}\right)^2+$$
$$+\left(2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{4}\operatorname{sen}\frac{(\alpha-\beta)}{4}\right)^2$$

$$M=4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{4}\cos^2\frac{(\alpha-\beta)}{4}+$$
$$+4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{4}\operatorname{sen}^2\frac{(\alpha-\beta)}{4}$$

$$M=4\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{4}\underbrace{\left(\cos^2\frac{(\alpha-\beta)}{4}+\operatorname{sen}^2\frac{(\alpha-\beta)}{4}\right)}_{1}$$

$$M=2\left(2\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{4}\right)=2\left(1+\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)$$

Como $\alpha=33°20'$ y $\beta=56°40'$ $\rightarrow$ $\alpha+\beta=90°$

$$\therefore\quad M=2(1+\cos 45°)=2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2}$$

Problema N.º 2

Si $10\cos 2\alpha-13\cos 3\alpha+2\operatorname{sen}\frac{5\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=0$,

$\alpha\neq(2K+1)\frac{\pi}{6}(k\in\mathbb{Z})$, calcule $\sec\alpha+\sec 3\alpha$.

UNMSM 2009-II

Resolución

Dato

$$10\cos 2\alpha-13\cos 3\alpha+2\operatorname{sen}\frac{5\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=0$$

Empleamos transformaciones trigonométricas

$$10\cos 2\alpha-13\cos 3\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha=0$$

Entonces

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{14}{11}\qquad\text{(I)}$$

Nos piden

$$P=\sec\alpha+\sec 3\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos 3\alpha}$$

$$P=\frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cos 3\alpha}$$

Transformando el numerador a producto

$$P=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\cos 3\alpha}=2\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}=2\left(\frac{14}{11}\right)\text{ de (I)}$$

$$\therefore\quad P=\frac{28}{11}$$

Problema N.º 3

Simplifique la siguiente expresión.

$\cos(x-120°)+\cos x+\cos(x+120°)$

Resolución

Sea

$$E=\cos(x-120°)+\cos x+\cos(x+120°)$$

Agrupamos de manera conveniente

$$E=[\cos(x+120°)+\cos(x-120°)]+\cos x$$

Transformamos a producto

$$E=2\cos x\cos 120°+\cos x$$

$$E=2\cos x\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos x$$

$$\therefore\quad E=0$$

Problema N.º 4

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x+2\cos x}{2\operatorname{sen}^2(2x+45^\circ)}$.

Resolución

$$M=\frac{(\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x)+2\cos x}{2\operatorname{sen}^2(2x+45^\circ)}$$

Transformamos a producto

$$M=\frac{2\operatorname{sen}4x\cos x+2\cos x}{1-\cos(4x+90^\circ)}$$

Usamos la identidad

$2\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos2\theta$

Obtenemos

$$M=\frac{2\cos x(\operatorname{sen}4x+1)}{1-(-\operatorname{sen}4x)}=\frac{2\cos x(\operatorname{sen}4x+1)}{1+\operatorname{sen}4x}$$

Simplificamos

$\therefore\ M=2\cos x$

Problema Nº. 5

Si $\operatorname{sen}3\theta+\operatorname{sen}\theta=a$, calcule $\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta$ en términos de a.

Resolución

Dato

$\operatorname{sen}3\theta+\operatorname{sen}\theta=a$, por transformación

$2\operatorname{sen}2\theta\cos\theta=a$

Por ángulo doble

$2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\cos\theta=a$

$4\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta=2$

Por identidades pitagóricas

$4(\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}^2\theta)=a$

Luego

$4(\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta)=a$

$\therefore\ \operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta=\dfrac{a}{4}$

Problema Nº. 6

Calcule el máximo valor de

$f_{(x)}=2\cos(x+30^\circ)\cos(x-30^\circ)$.

Resolución

Dato

$f_{(x)}=2\cos(x+30^\circ)\cos(x-30^\circ)$

Por transformaciones trigonométricas

$$f_{(x)}=\cos2x+\cos60^\circ=\cos2x+\frac{1}{2}$$

Como $x-1\leq\cos2x\leq1$

$$\rightarrow\ -\frac{1}{2}\leq\underbrace{\cos2x+\frac{1}{2}}_{f_{(x)}}\leq\frac{3}{2}$$

$\therefore\ f_{\text{máx}}=\dfrac{a}{4}$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si $\text{sen}20^\circ+\text{sen}8^\circ=2a\cos6^\circ$, calcule $\text{sen}14^\circ$ en términos de a.

A) $1-a$ B) a C) $2a$
D) $a+2$ E) $a-1$

2. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{\text{sen}6\theta+\text{sen}2\theta}{\cos6\theta+\cos2\theta}$$

A) $\sec4\theta$ B) $\cot2\theta$ C) $\cot4\theta$
D) $\tan4\theta$ E) $\tan2\theta$

3. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\cos\theta-\cos5\theta}{2}+\cos3\theta\cos2\theta$$

A) $\text{sen}2\theta$ B) $\tan\theta$ C) $\cos\theta$
D) $\sec\theta$ E) $\text{sen}\theta$

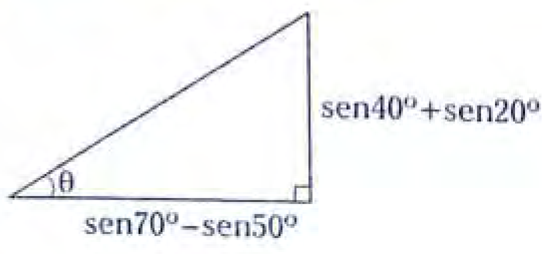
4. Elimine θ a partir de

$\text{sen}3\theta+\text{sen}\theta=2a$ (I)

$\dfrac{\text{sen}3\theta-\text{sen}\theta}{\cos2\theta}=2b$ (II)

A) $2a=2b^3+b$
B) $a^3=2b+1$
C) $2a=b+2a^3$
D) $a^3+b^3=a$
E) $2b=a+2b^3$

5. Del gráfico mostrado, calcule θ.



A) 65° B) 60° C) 80°
D) 50° E) 40°

6. De la siguiente identidad
$(\cos3\theta+\cos\theta)(\text{sen}5\theta-\text{sen}3\theta)=A\text{sen}(B\theta)$,
calcule $A+B$.

A) 5 B) 7 C) 11
D) 15/2 E) 17/2

7. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\text{sen}\theta+\text{sen}3\theta+\text{sen}5\theta}{\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta}$$

A) $\tan3\theta$ B) $\cot3\theta$ C) $\tan5\theta$
D) $\cot5\theta$ E) $\tan4\theta$

8. Si $7\theta=\pi$, calcule el valor de

$$\frac{\text{sen}6\theta+\text{sen}4\theta}{\text{sen}3\theta+\text{sen}\theta}.$$

A) -2 B) 1 C) 3
D) 2 E) -1

9. Calcule el valor de a en la siguiente igualdad.
$\cos80^\circ+2\cos40^\circ=a\cos10^\circ$

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) $2\sqrt{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10. Si $f_{(x)}=(\cos3x+\cos x)\cos4x$, calcule $f(20^\circ)$.

A) 0,225 B) 0,25 C) 3,25
D) 0,15 E) 1,25

11. Si $\sqrt{3}+2\cos 10^\circ=a$, calcule el valor de $\text{sen}70^\circ\text{sen}100^\circ$ en términos de a.

A) a B) $3a$ C) $2a$
D) $a/2$ E) $a/4$

12. Sea la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, cuyas raíces son $\cos\theta$ y $\cos\alpha$, calcule $\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)$.

A) $2c/a$ B) a/c C) c/a
D) ac E) $2a/c$

13. Al resolver la siguiente ecuación

$$(\cos 80^\circ+\cos 40^\circ)^{(\text{sen}40^\circ+\text{sen}20^\circ)}=(\text{sen}70^\circ)^{x\text{sen}20^\circ}$$

indique el valor de $2x$.

A) $\text{sen}10^\circ$ B) $\sec 10^\circ$ C) $\csc 10^\circ$
D) $\tan 10^\circ$ E) $\cot 10^\circ$

14. Si $\cos 2+\cos 8=(\cos 2-\cos 8)a$,

calcule $\dfrac{a+1}{a-1}$.

A) $\tan 2$ B) $\text{sen}2$ C) $\cos 2$
D) $\dfrac{\cos 8}{\cos 2}$ E) $\dfrac{\cos 2}{\cos 8}$

15. En un triángulo ABC, se cumple $\cos A+\cos B=\text{sen}C$.
Calcule la medida del ángulo A.

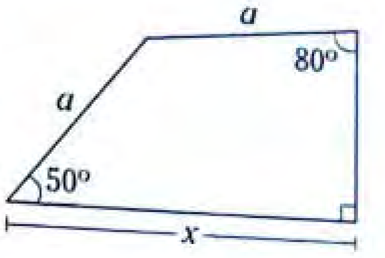
A) 30° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 105°

16. Calcule el valor de
$\text{sen}x+\text{sen}(120^\circ+x)-\text{sen}(120^\circ-x)$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) -1

17. Del gráfico, calcule x en términos de a.

A) $\sqrt{3}a\,\text{sen}20^\circ$
B) $a\cos 20^\circ$
C) $a\sqrt{3}\cos 20^\circ$
D) $2\sqrt{3}a\cos 20^\circ$
E) $2a\cos 20^\circ$



18. En un triángulo ABC, simplifique

$$\sqrt{\frac{\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}C}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}$$

A) 1 B) 2 C) -2
D) -1 E) $1/2$

19. En un triángulo ABC, se cumple
$\text{sen}2A+\text{sen}2B+\text{sen}2C=2\text{sen}A\text{sen}B$.
Calcule $\tan C$.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) 1

NIVEL INTERMEDIO

20. ¿En qué tipo de triángulo ABC se cumple $\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sqrt{2}\,\text{sen}\dfrac{B}{2}\text{sen}\dfrac{C}{2}$?

A) equilátero
B) acutángulo
C) obtusángulo
D) escaleno
E) rectángulo

21. Si $2\text{sen}20°\cos 10°=a$, calcule $(\text{sen}5°+\cos 5°)^2$ en términos de a.

A) $\dfrac{a+1}{4}$ B) $\dfrac{a+1}{2}$ C) $a+\dfrac{1}{2}$
D) a E) $2a$

22. Calcule el valor de la siguiente expresión.
$\text{sen}10°\cos 20°+\cos 70°\cos 10°$

A) 4 B) 1/4 C) 1
D) 2 E) 1/2

23. Si $f(\theta)=\dfrac{\text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta}-2\cos 2\theta$, calcule $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

A) 1/2 B) −1 C) 1
D) 0 E) 2

24. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\text{sen}3\theta\cos\theta+\text{sen}2\theta\cos 4\theta}{\text{sen}5\theta}$$

A) $\cos\theta$ B) $\text{sen}\theta$ C) $\cos 5\theta$
D) $\text{sen}5\theta$ E) $2\cos\theta$

25. Reduzca la expresión

$$\frac{\text{sen}6°\cos 2°+\text{sen}4°\cos 8°}{2\cos^2 1°-1}.$$

A) $\text{sen}5°$ B) $\text{sen}10°$ C) $\text{sen}2°$
D) $\cos 10°$ E) $\cos 5°$

26. Simplifique la siguiente expresión.
$\text{sen}(x+45°)\text{sen}(x-45°)+\text{sen}^2(90°-x)$

A) −2 B) −1 C) 2
D) 1/2 E) 1

27. Si $f(\theta)=\left(2\text{sen}2\theta+\dfrac{1}{2}\csc\theta\right)\tan\theta$, calcule $f(20°)$.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) −1 E) 2

28. Reduzca la siguiente expresión.

$$\frac{\text{sen}15x\,\text{sen}13x}{\text{sen}19x\,\text{sen}9x+\text{sen}6x\,\text{sen}4x}$$

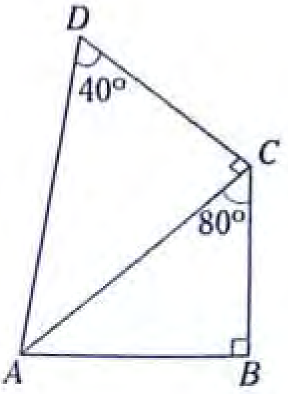
A) $\text{sen}2x$ B) −1 C) $\cos x$
D) 1 E) 2

29. Reduzca la expresión

$$\frac{2\cos 6°\cos 4°-\cos 10°}{2\text{sen}5°\cos 1°-\text{sen}6°}$$

A) $\dfrac{1}{2}\csc 2°$ B) $\csc 2°$ C) $2\csc 2°$
D) $\dfrac{1}{2}\text{sen}2°$ E) $2\text{sen}2°$

30. En el gráfico mostrado, $\text{sen}50°=0{,}766$ y $AD=4$. Calcule AB.



A) 2,532 B) 1,532 C) 3,532
D) 2,232 E) 2,732

31. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{3}\cos 10^\circ + 1 - \cos 40^\circ}{1 - \text{sen}^2 10^\circ}$$

A) -2 B) 1 C) 2
D) -1 E) $\sqrt{3}$

32. Calcule el máximo valor de la siguiente expresión.

$2\text{sen}8x\text{sen}3x + \cos 11x + 3\text{sen}5x$

A) 1 B) $\sqrt{10}$ C) 4
D) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ E) $2\sqrt{10}$

33. Halle el máximo valor de
$N = \text{sen}(2x + 50^\circ) \cdot \text{sen}(10^\circ - 2x)$.

A) 1 B) 2 C) 1/4
D) 4 E) -2

34. Elimine α a partir de

$$\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{sen}\frac{3\alpha}{2}\text{sen}\frac{\alpha}{2} = -\frac{b}{2} \qquad \text{(II)}$$

A) $(a-b)^2 = a+b+2$
B) $(a+b)^2 = a+b-2$
C) $(a+b)^2 = a-b-2$
D) $(a-b)^2 = 2ab$
E) $(a-b)^2 = a+2b$

35. Simplifique la siguiente expresión.
$L = 2\csc\theta\cos 3\theta + \sec 2\theta\,\text{sen}(2\pi + 4\theta)$

A) $\text{sen}2\theta\sec\theta$ B) $2\cos 2\theta\cot\theta$
C) $\cos 2\theta\tan\theta$
D) $\cot 2\theta\sec\theta$ E) $\tan 2\theta\sec\theta$

36. Sean $f(\theta) = 2\sec 4\theta$ y $g(\alpha) = 4\text{sen}(\alpha + 30^\circ)$, determine el equivalente de $f(20^\circ) - g(40^\circ)$.

A) $4\cos^2 10^\circ$ B) $\cos^2 10^\circ$ C) $6\cos^2 10^\circ$
D) $8\cos^2 10^\circ$ E) $16\cos^2 10^\circ$

37. Reduzca la siguiente expresión.
$4\text{sen}^2 20^\circ \text{sen}80^\circ + \text{sen}60^\circ$

A) $\sqrt{3}\cos 40^\circ$
B) $\sqrt{3}\cos 10^\circ$
C) $\sqrt{3}\cos 20^\circ$
D) $\sqrt{3}\,\text{sen}35^\circ$
E) $\sqrt{3}\,\text{sen}10^\circ$

38. Si la igualdad

$$\text{sen}10^\circ + \frac{1}{2}\sec 400^\circ = A + B\csc 50^\circ$$

es una identidad, halle el valor de $A+B$.

A) 0 B) 1/2 C) 2
D) 1/4 E) 3/4

39. De la siguiente identidad

$$2\cos\frac{6\pi}{7}\text{sen}\frac{\pi}{7} + \text{sen}\frac{2\pi}{7} + \text{sen}\frac{3\pi}{5} = K\,\text{sen}\frac{2\pi}{5},$$

calcule el valor de K.

A) 1/2 B) -1 C) 2
D) -2 E) 1

40. Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{\cos^4\theta - \text{sen}^4\theta}{(2\text{sen}3\theta\,\text{sen}\theta + \cos 4\theta)^2 + (2\cos 4\theta\cos 2\theta + \cos(\pi + 6\theta))^2}$$

A) $2\sec^2 2\theta$ B) $\sec 2\theta$ C) $\frac{1}{2}\sec^2 2\theta$
D) $\frac{1}{2}\sec 2\theta$ E) $\frac{1}{4}\sec 2\theta$

Resolución de triángulos oblicuángulos

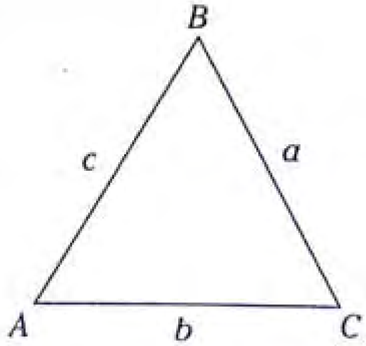
Capítulo XI

Objetivos

- Aplicar el teorema de senos y cosenos en la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Conocer los teoremas derivados para resolver triángulos y simplificar expresiones que involucren los elementos del triángulo.

Teorema de senos

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir, para cualquier triángulo ABC



se verifica $$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

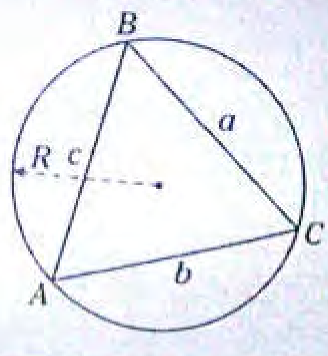
Observación

En todo triángulo ABC, de circunradio R, se cumple que

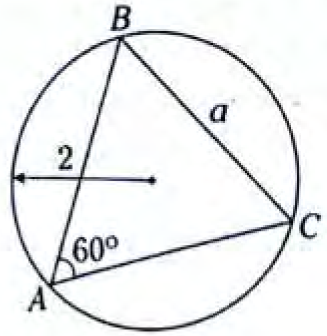
$a=2R\operatorname{sen}A$

$b=2R\operatorname{sen}B$

$c=2R\operatorname{sen}C$



Ejemplo



$a = 2R\,\mathrm{sen}A$

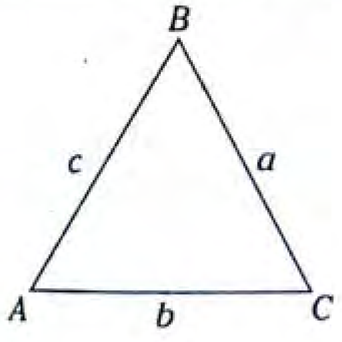
$\rightarrow\; a = 2(2)\mathrm{sen}60°$

$a = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore\; a = 2\sqrt{3}$

Teorema de cosenos

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo entre ellos. Es decir, para cualquier triángulo *ABC*



se verifica

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Observación

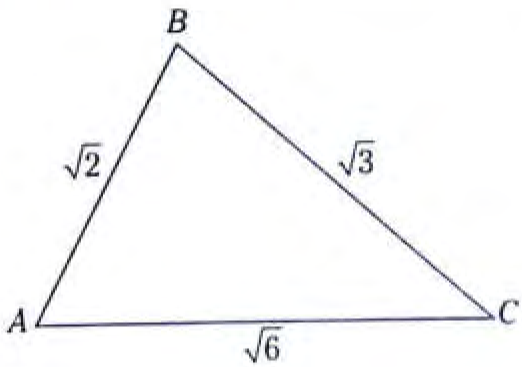
El coseno de un ángulo de un triángulo *ABC* se puede expresar en función de los lados.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejemplo



$$\cos A = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{2(\sqrt{6})(\sqrt{2})}$$

$$\cos A = \frac{6 + 2 - 3}{2\sqrt{12}}$$

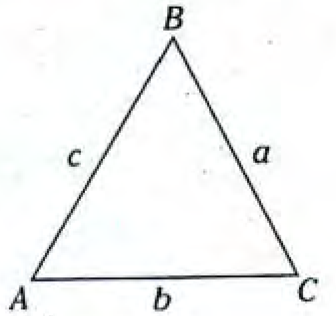
$$\cos A = \frac{5}{2(2\sqrt{3})}$$

$$\therefore\; \cos A = \frac{5\sqrt{13}}{12}$$

Teoremas derivados

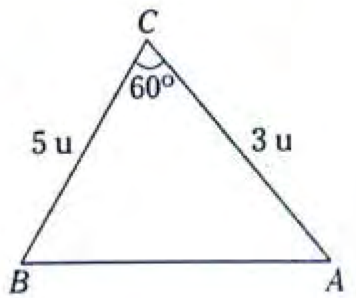
Teorema de tangentes

En todo triángulo, la diferencia de dos lados es a su suma como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la semisuma de dichos ángulos.



$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Ejemplo

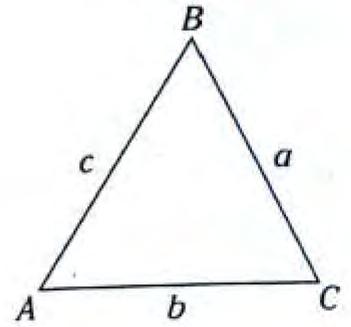


$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{5-3}{5+3} \rightarrow \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan 60^\circ}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

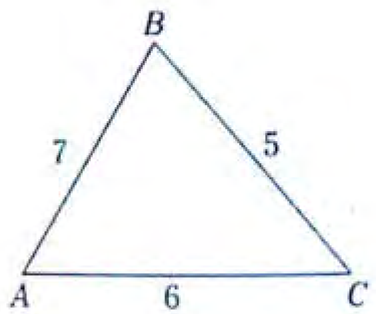
Teorema de proyecciones

En todo triángulo, se cumple que un lado cualquiera es igual a la suma de sus otros dos lados multiplicados cada uno por los cosenos de los ángulos adyacentes a dicho lado.



$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=a\cos C+c\cos A$$
$$c=b\cos A+a\cos B$$

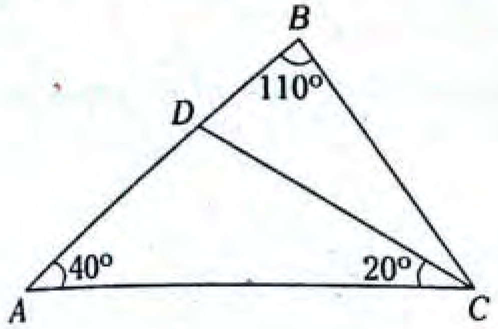
Ejemplo



$$5=6\cos C+7\cos B$$
$$6=5\cos C+7\cos A$$
$$7=6\cos A+5\cos B$$

Problema N.° 1

En el triángulo ABC de la figura, $AD=4\sqrt{3}$ cm. Halle BC.

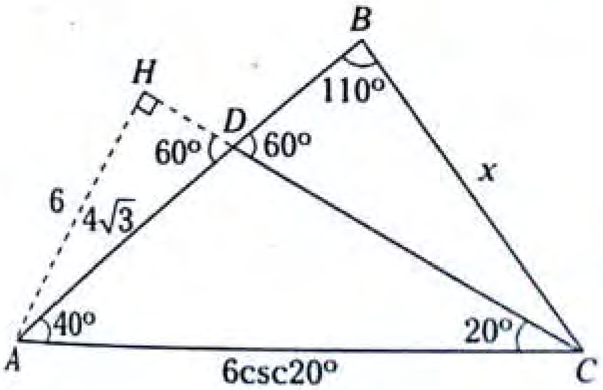


UNMSM 2012-I

Resolución

Prolongamos CD hasta H, para lo cual en el $\triangle AHC$ aplicamos resolución de triángulos rectángulos.

$$\frac{AC}{6}=\csc 20° \rightarrow AC=6\cdot\csc 20°;\ BC=x$$



Aplicamos teorema de senos

$$\frac{x}{\text{sen}40°}=\frac{6\csc 20°}{\underbrace{\text{sen}110°}_{\text{sen}(90°+20°)}}$$

$$\frac{x}{2\,\text{sen}20°\cdot\cancel{\cos 20°}}=\frac{6\csc 20°}{\cancel{\cos 20°}}$$

$$x=12\underbrace{\text{sen}20°\cdot\csc 20°}_{1}$$

$\therefore\ x=12$ cm

Problema N.° 2

En un triángulo ABC, se tiene

$AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$.

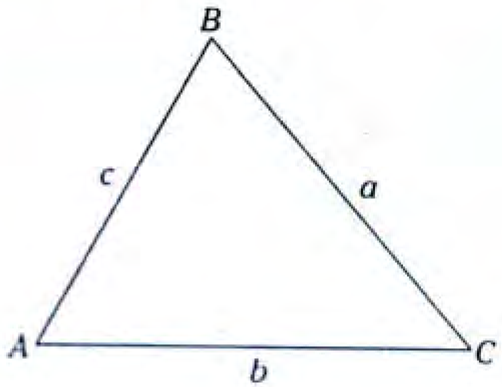
Si $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{c}{a-b}+1=0$,

el valor de $\sqrt{3}(\cot B-\tan B)$ es

UNAC 2010-II

Resolución

Del dato, obtenemos el gráfico



Operamos el otro dato

$$a(a-b)+c(b+c)+(b+c)(a-b)=0$$

$$a^2-ab+cb+c^2+\cancel{ba}+ac-b^2-\cancel{bc}=0$$

$$a^2+c^2=b^2-ac$$

Del teorema de cosenos

$$a^2+c^2=a^2+c^2-2ac\cos B-ac$$

$$\cos B=-\frac{1}{2} \rightarrow B=120°$$

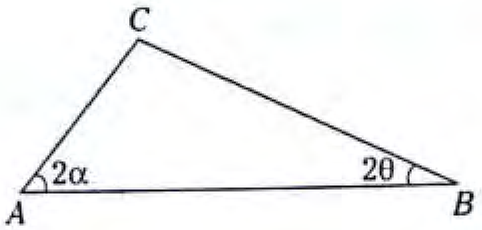
Reemplazamos en lo que piden

$\therefore\ \sqrt{3}(\cot B-\tan B)=2$

Problema N.° 3

En el gráfico, se tiene el triángulo ABC con $BC=3AC$.

Halle el valor de $E=\dfrac{\text{sen}\,2\alpha\tan(\alpha-\theta)}{\tan(\alpha+\theta)\,\text{sen}\,2\theta}$.

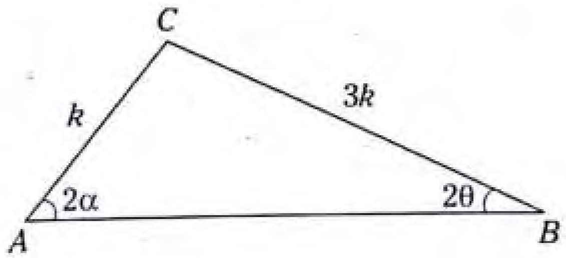


UNMSM 2012-II

Resolución

Del dato, tenemos

$$\frac{BC}{AC}=\frac{3}{1}\;\rightarrow\;\begin{matrix}BC=3k\\ AC=k\end{matrix}$$



Por el teorema de tangentes

$$\frac{\tan\left(\dfrac{2\alpha-2\theta}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{2\alpha+2\theta}{2}\right)}=\frac{3k-k}{3k+k}\;\rightarrow\;\frac{\tan(\alpha-\theta)}{\tan(\alpha+\theta)}=\frac{1}{2}\qquad\text{(I)}$$

Por el teorema de senos

$$\frac{k}{\text{sen}\,2\theta}=\frac{3k}{\text{sen}\,2\alpha}\;\rightarrow\;\frac{\text{sen}\,2\alpha}{\text{sen}\,2\theta}=3\qquad\text{(II)}$$

Multiplicamos (I)×(II)

$$\therefore\quad E=\frac{3}{2}$$

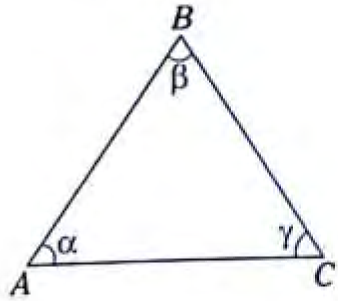
Problema N.° 4

En el triángulo del gráfico, se tiene que

$(BC)(AC)=12\ \text{u}^2$, $(BC)(AB)=8\ \text{u}^2$ y

$(AC)(AB)=6\ \text{u}^2$

Halle el valor de $M=3\cos\alpha+4\cos\beta+6\cos\gamma$.



UNMSM 2008-I

Resolución

Nos piden M.

Sean $AB=C$, $AC=b$, $BC=a$

Del dato

$$a\cdot b=12\ \text{u}^2\qquad\text{(I)}$$

$$a\cdot c=8\ \text{u}^2\qquad\text{(II)}$$

$$b\cdot c=6\ \text{u}^2\qquad\text{(III)}$$

Multiplicamos (I), (II) y (III)

$$abc=24\qquad\text{(IV)}$$

Reemplazamos (I), (II) y (III) en (IV)

$\rightarrow\quad a=4$, $b=3$ y $c=2$

Por el teorema de proyecciones

$$3\cos\alpha+4\cos\beta=2\qquad\text{(V)}$$

Por el teorema de cosenos

$$\cos\gamma=\frac{3^2+4^2-2^2}{2(3)(4)}\;\rightarrow\;6\cos\gamma=\frac{21}{4}\qquad\text{(VI)}$$

(V) y (VI) en M

$$\therefore\quad M=\frac{29}{4}$$

NIVEL BÁSICO

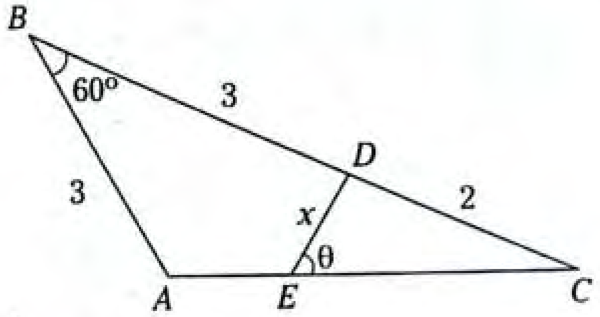
1. En un triángulo ABC, $BC=\sqrt{2}$; $m\measuredangle ABC=60°$ y $m\measuredangle BAC=45°$. Calcule AC.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) $\sqrt{7}$

2. En un triángulo acutángulo ABC, el lado $BC=6$ u, además, se cumple $\sqrt{3}\cdot \operatorname{sen} A=\operatorname{sen} B$. Calcule AC.

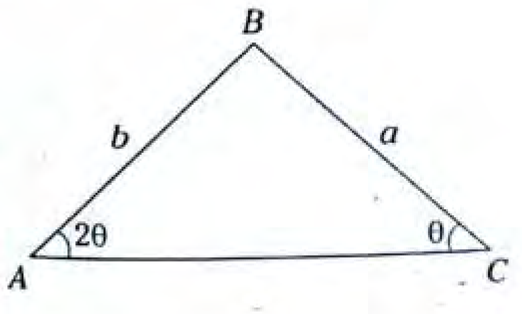
A) $2\sqrt{3}$ u B) $3\sqrt{3}$ u C) $4\sqrt{3}$ u
D) $5\sqrt{3}$ u E) $6\sqrt{3}$ u

3. Del gráfico, $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{3}{4}$. Calcule $\sqrt{19}\cdot x$.



A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{19}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{19}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

4. Del gráfico, calcule $\sec\theta$.



A) $\dfrac{b}{a}$ B) $\dfrac{a}{b}$ C) $\dfrac{2b}{a}$
D) $\dfrac{b}{2a}$ E) $\dfrac{b}{3a}$

5. Sea R circunradio del $\triangle ABC$ cuyos lados son a, b y c, respectivamente. Si se cumple $3R^2=4c^2\cdot\cos^2 C$, determine $m\measuredangle ACB$.

A) 15° B) 16° C) 50°
D) 30° E) 24°

6. Se tiene un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, donde se cumple $\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B=\dfrac{3}{2}$; $\operatorname{sen} C=\dfrac{3}{4}$ y $c=6$. Calcule el perímetro del triángulo.

A) 18 B) 16 C) 14
D) 12 E) 20

7. En un triángulo ABC, de lados a, b y c, respectivamente, determine el equivalente de la siguiente expresión.
$b\cdot c\cdot \operatorname{sen}A\cdot(\cot B+\cot C)$

A) $3abc$ B) abc C) c^2
D) b^2 E) a^2

8. Se tiene un triángulo ABC de lados proporcionales a 2; 3 y 4. Calcule el menor valor del coseno de uno de sus ángulos internos.

A) $-\dfrac{7}{8}$ B) $-\dfrac{1}{5}$ C) $-\dfrac{1}{4}$
D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{1}{4}$

9. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética de razón 4 u. Si su mayor ángulo interno mide 120°, calcule su perímetro.

A) 10 u B) 15 u C) 20 u
D) 25 u E) 30 u

10. En un triángulo, el ángulo intermedio es 60°. Calcule los lados del triángulo si los dos menores se diferencian en 2 u y los dos mayores en 1 u.

A) 7; 9; 10 B) 5; 7; 8 C) 6; 8; 9
D) 4; 6; 7 E) 3; 5; 6

11. Dos fuerzas de 20 N y 25 N actúan sobre un cuerpo. Si sus direcciones forman un ángulo de 53°, calcule la resultante en Newton.

A) $5\sqrt{65}$ B) 30 C) $\sqrt{65}$
D) 40 E) 15

12. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, calcule el equivalente de

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2-(c^2-b^2)}.$$

A) $\tan B\cdot\cot C$
B) $\tan C\cdot\cot B$
C) $\tan B\cdot\tan C$
D) $\cot B\cdot\cot C$
E) $\tan B+\tan C$

13. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, se cumple $3a^2=3b^2+3c^2-2bc$. Calcule $\tan A$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C) 3
D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{1}{3}$

14. En un triángulo ABC, donde $BC=a$, $AC=b$ y $AB=c$, se cumple que

$$\frac{a+b}{c-b\sqrt{3}}=\frac{c}{a-b}.$$ Calcule $2\cdot\operatorname{sen}2A$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 4

15. Dado un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, reduzca

$$\frac{a-b}{a+b}+\cot\left(\frac{B+A}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

16. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$\frac{\tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}=1$$

Calcule $\cot\left(\frac{C}{2}\right)$.

A) $\frac{a-b}{a+b}$ B) $\frac{b-a}{a+b}$ C) $\frac{c}{a+b}$
D) $\frac{a-b}{c}$ E) $\frac{a-b}{2c}$

17. En un triángulo ABC,
$m\sphericalangle BAC=45°$; $m\sphericalangle BCA=53°$; $AB=b$ y $BC=a$.

Si se cumple que

$\frac{b-a}{b+a}=\tan(\alpha)\cdot\cot(\theta)$; $\theta>\alpha$,

calcule $\tan(\theta-\alpha)$.

A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) $1/2$

18. En un triángulo ABC, se tiene que
$m\sphericalangle BCA=60°$; $BC=3$ y $AC=1$.

Calcule $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. En un triángulo ABC, se cumple

$\cot\left(\frac{C}{2}\right)=7\cdot\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$; $BC=12$ u

$AB=7$ u. Calcule $\tan B$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

20. En un triángulo ABC de lados a, b y c, se cumple que $m\sphericalangle BAC=120°$.

Calcule $\left(\frac{c^2-b^2}{c^2+2c\cdot b+b^2}\right)\cdot\cot\left(\frac{C-B}{2}\right)$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) 1

21. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, se cumple que

$a=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ y $\cot C=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calcule $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. Reduzca la expresión

$$\frac{a\operatorname{sen}B\cdot\cos B+b\cdot\cos A\cdot\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}$$

siendo a, b y c lados de un triángulo ABC.

A) a B) b C) c
D) 1 E) $a\cdot b$

23. En un triángulo ABC, cuyos lados son a, b y c, respectivamente. Reduzca la expresión

$a(\cos B+\cos C)+b(\cos A+\cos C)+$
$+c(\cos A+\cos B)$

Siendo p: semiperímetro.

A) $4p$ B) $3p$ C) $2p$
D) p E) $p/2$

NIVEL INTERMEDIO

24. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, y circunradio igual a 5, se cumple que

$\frac{5-c\cdot\cos A}{a\cdot\cos C}=\tan 225°$. Calcule $\operatorname{sen}B$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

25. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, determine el equivalente de la expresión

$$\frac{b-c\cdot\cos A}{a+b\cdot\cos C-c\cdot\cos B}$$

A) $\dfrac{\operatorname{sen} B}{2\cdot\operatorname{sen} A}$

B) $\dfrac{2\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$

C) $\dfrac{\operatorname{sen} C}{2\operatorname{sen} A}$

D) $\dfrac{\operatorname{sen} A}{2\cdot\operatorname{sen} B}$

E) $\dfrac{\operatorname{sen} A\cdot\operatorname{sen} C}{2\operatorname{sen} B}$

26. En un triángulo ABC, se cumple que

$\operatorname{sen} A=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

Calcule $\dfrac{b-a\cdot\cos C}{a\cdot\operatorname{sen} C}$.

A) 10 B) 1/7 C) 7
D) 1/10 E) $7\sqrt{2}$

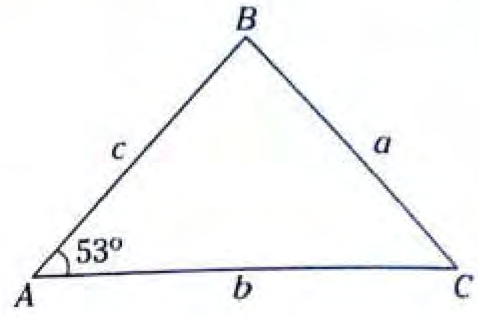
27. En un triángulo ABC, de lados $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$, determine en términos de los lados la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\cos\dfrac{C}{2}}.$$

A) $\dfrac{a-b}{c}$ B) $\dfrac{c-2b}{a}$ C) $\dfrac{a}{c-2b}$

D) $\dfrac{a}{2b-c}$ E) $\dfrac{2b+c}{a}$

28. Del gráfico, $AB=5$. Calcule $a\cos B+c\cdot\cos A+b\cdot\cos A$.



A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

29. Si los lados de un triángulo están en progresión aritmética ($a < b < c$), calcule

$\dfrac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$.

A) 1/2 B) 1/4 C) 1
D) 2 E) 3

30. En un triángulo ABC, se cumple

$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Calcule $\operatorname{sen}\left(\dfrac{C}{2}\right)$.

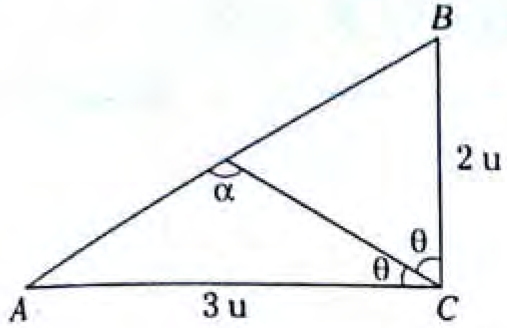
A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,7

31. Calcule el área de la región triangular de lados $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$.

A) $\sqrt{6}\ u^2$ B) $\dfrac{\sqrt{23}}{4}u^2$ C) $\dfrac{\sqrt{26}}{4}u^2$

D) $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}u^2$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}u^2$

32. Si $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, calcule $3\text{sen}\alpha$.



A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

33. En un triángulo ABC de lados a, b y c, respectivamente, donde

$(a+b+c)(a+b-c) = \frac{5}{7}a \cdot b$,

calcule $\cos C$.

A) $-\frac{9}{14}$ B) $-\frac{3}{24}$ C) $-\frac{9}{28}$

D) $\frac{5}{9}$ E) $-\frac{5}{9}$

34. En un triángulo ABC, donde $a=3b$, reduzca

$$\frac{\cot\left(\frac{C}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2}\right) - \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

35. Si a, b y c son los lados de un triángulo ABC, que cumplen

$\frac{a}{c-b} + \frac{c}{a-b} = 1$,

calcule $\tan(2B)$.

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) 1
D) -1 E) 0

36. En un triángulo ABC, si $AB=c$; $AC=b$ y $BC=a$, determine el equivalente de

$b\text{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right) + c\text{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right)$ si p: semiperímetro.

A) p B) $2p-$a C) $p-a$
D) $p/2$ E) $2p$

37. En un triángulo ABC, se cumple

$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C} = \sqrt{3}R + 1.$

Si R: circunradio, calcule R.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

38. En un triángulo ABC, se cumple

$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{c}{ab}$.

Determine el equivalente de

$\cos A + \cos B + \cos C$.

A) $\sqrt{2}\,\text{sen}(A+45°)$
B) $\sqrt{2}\cos(A+45°)$
C) $\sqrt{2}\,\text{sen}A$
D) $\sqrt{2}\cos A$
E) $\tan A$

Funciones trigonométricas

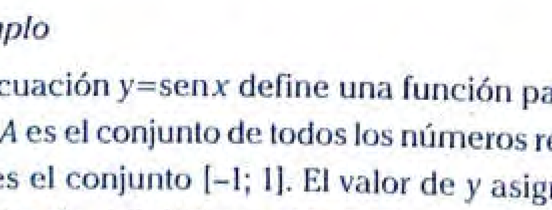
Capítulo XII

OBJETIVOS

- Analizar y determinar el dominio y el rango de una función a partir de su regla de correspondencia.
- Estudiar y analizar definiciones que nos permitan graficar una función (paridad, imparidad, creciente, decreciente y periódica).
- Aplicar el estudio de las funciones trigonométricas a situaciones prácticas de la vida cotidiana.

Definición

Una función f de un conjunto A en otro conjunto B ($f: A \to B$) es una correspondencia que asigna a cada elemento x de A un único elemento y de B. Esta correspondencia se expresa frecuentemente por medio de una ecuación: $y=f(x)$.



Ejemplo

La ecuación $y=\operatorname{sen}x$ define una función para la cual A es el conjunto de todos los números reales y B es el conjunto $[-1; 1]$. El valor de y asignado al valor de x se obtiene al hallar el $\operatorname{sen}x$.

OBSERVACIÓN

Notación funcional

variable dependiente → y; variable independiente → x

$$\underbrace{y=f(x)}_{\text{regla de correspondencia}}$$

Función real de variable real

$f: A \to B$ es una función real de variable real si $A \subseteq \mathbb{R} \wedge B \subseteq \mathbb{R}$

Dominio de una función

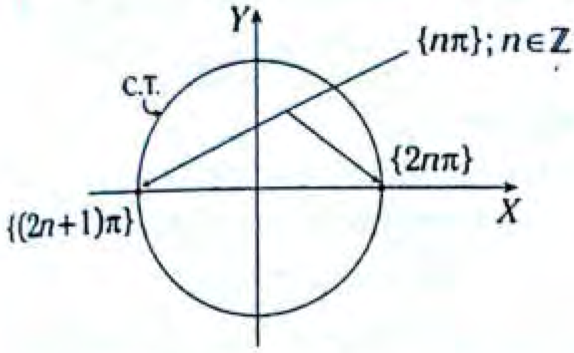
Sea $f: A \to B$ una función real de variable real, el dominio de f está formado por todos los valores de $x \in A$ que garantizan la existencia de $y=f(x)$.

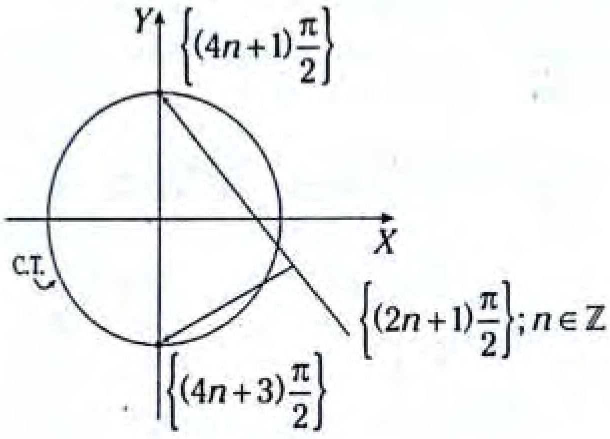
Notación: Df o $\operatorname{Dom}f$

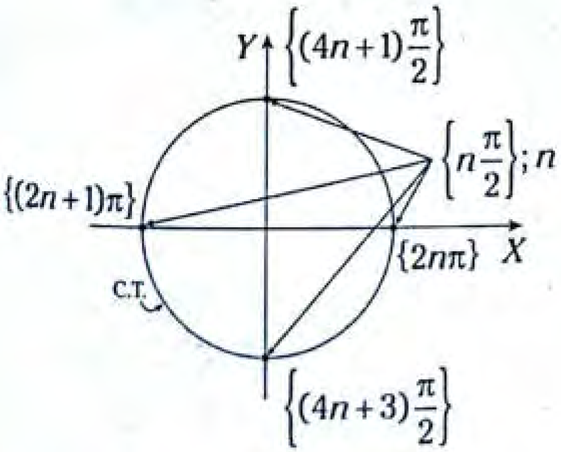
CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Para determinar el dominio de una función, no se debe simplificar la regla de correspondencia por más evidente que sea, donde se deben establecer las restricciones principales.

Formas generales de arcos referentes







Restricciones principales

a. Por funciones trigonométricas

$\tan x; \sec x: x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

$\cot x; \csc x: x \neq \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

b. Por función cociente $\frac{1}{x}; x \neq 0$

c. Por existencia de radicales de índice par $\sqrt[n]{x} : x \geq 0$ (n: par)

OBSERVACIÓN

$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} : x > 0$ (n: par)

Rango de una función

Sea $f: A \to B$ una función real de variable real, el rango de f está formado por todos los valores de $y \in B$. Se calcula a partir del dominio.

Notación: Rf o Ran$f$

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA FUNCIÓN

1.º Determine el dominio de la función (restricciones principales).

2.º Siempre y cuando se pueda, trate de simplificar la regla de correspondencia y expresarla en función de un único operador.

3.º Calcule el rango considerando los pasos anteriores.

Función	Dominio	Rango
$y=\operatorname{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$
$y=\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$
$y=\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$
$y=\cot x$	$\mathbb{R}-\{n\pi\}$	$\mathbb{R}$
$y=\csc x$	$\mathbb{R}-\{n\pi\}$	$\langle-\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
$y=\sec x$	$\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\langle-\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

Donde $n \in \mathbb{Z}$

Análisis de una función

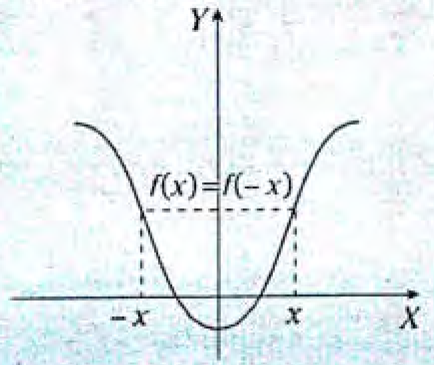
FUNCIÓN PAR

Una función f es par si para cualquier número x en su dominio, el número $-x$ está también en el dominio y se cumple

$$\boxed{f(-x)=f(x)}$$

OBSERVACIÓN

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje Y.



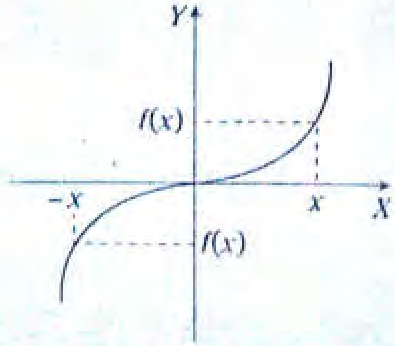
FUNCIÓN IMPAR

Una función f es impar si para cualquier número x en su dominio, el número $-x$ está también en el dominio y se cumple

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

OBSERVACIÓN

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.



FUNCIÓN CRECIENTE

Una función f es creciente sobre un intervalo I de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

FUNCIÓN DECRECIENTE

Una función f es decreciente sobre un intervalo I de su dominio si para cualquier x_1 y x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función f se dice que es periódica cuando existe un número real $T \neq 0$, tal que

$$f(x+T)=f(x),\ \forall\ x, x+T \in \text{Dom}f$$

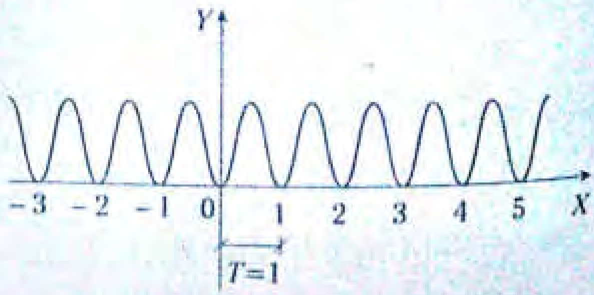
El menor número positivo T se denomina periodo principal de la función. En general, se puede calcular el periodo para las siguientes funciones considerando $B > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

Función	Periodo
$y=\text{sen}^n(Bx)$	n par $\rightarrow T=\frac{\pi}{B}$
$y=\cos^n(Bx)$	
$y=\csc^n(Bx)$	n impar $\rightarrow T=\frac{2\pi}{B}$
$y=\sec^n(Bx)$	

Función	Periodo
$y=\tan^n(Bx)$	$T=\frac{\pi}{B}$
$y=\cot^n(Bx)$	

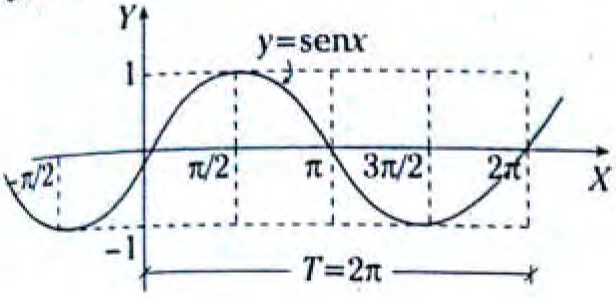
OBSERVACIÓN

La gráfica de una función periódica es repetitiva a lo largo del eje de abscisas.



Gráficas de funciones

Función seno



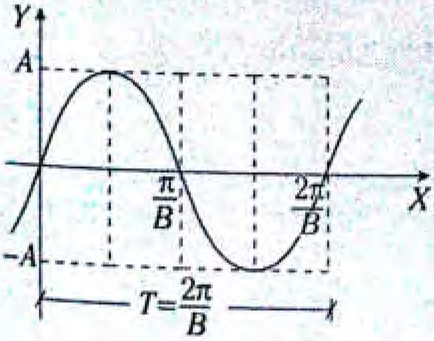
x	y=senx
0	0
π/2	1
π	0

Características del senoide

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función consiste en todos los números reales entre –1 y 1.
- El máximo valor de la función es 1.
- El mínimo valor de la función es –1.
- Es una función impar, pues $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$.
- La función seno es periódica, con periodo 2π.

Observación

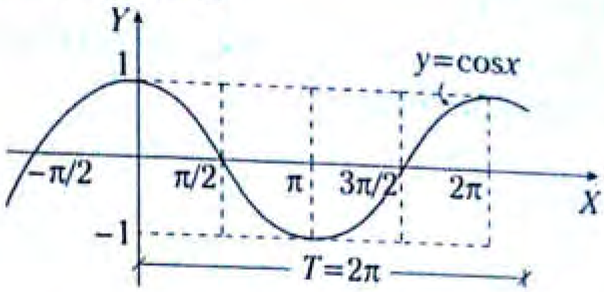
$f_{(x)} = A\operatorname{sen}(Bx)$, $A > 0$ y $B > 0$



Características

- Máximo valor de la función: A
- Mínimo valor de la función: $-A$
- Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

Función coseno



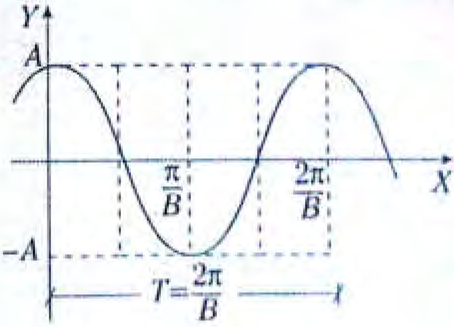
x	y=cos x
0	1
π/2	0
π	–1

Características de la función coseno

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función consiste en todos los números reales entre –1 y 1.
- El máximo valor de la función es 1.
- El mínimo valor de la función es –1.
- Es una función par, pues $\cos(-x) = \cos x$.
- La función coseno es periódica, con periodo 2π.

Observación

$f_{(x)} = A\cos(Bx)$, $A > 0 \wedge B > 0$



Características

- Máximo valor de la función: A
- Mínimo valor de la función: $-A$
- Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{B}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Calcule el dominio de la función definida por $f(x)=\sec x+\csc^3 x+2$.

Resolución

Restricciones

- $\sec x$: $x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$ (I)
- $\csc x$: $x \neq \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$ (II)

De (I) y (II)

$$x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{n\pi\}$$

$$x \neq \left\{...; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; ...\right\} \cup \{...; 0; \pi; 2\pi\}$$

$$x \neq \left\{...; 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; ...\right\}$$

$$x \neq \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

Problema N.º 2

Calcule el rango de la función definida por $f(x)=\cos^2 x+2\cos x+3$.

Resolución

I. La función no tiene restricciones
$\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}$: $\text{Dom}f=\mathbb{R}$

II. Se reduce a un solo operador

$$f(x) = \underbrace{\cos^2 x + 2\cos x + 1} + 2$$

$$f(x)=(\cos x+1)^2+2$$

III. Se calcula el rango como $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\xrightarrow{+1} 0 \leq \cos x+1 \leq 2$$

$$\xrightarrow{(\ )^2} 0 \leq (\cos x+1)^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{+2} 2 \leq \underbrace{(\cos x + 1)^2 + 2}_{f(x)} \leq 6$$

$$2 \leq f(x) \leq 6$$

$\therefore$ $\text{Ran}f=[2; 6]$

Problema N.º 3

Calcule el dominio y el rango de la función definida por

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,2x}{\cos x}$$

Resolución

I. Hallamos el dominio de la función

Restricción

$$\cos x \neq 0 : x \neq \left\{...; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; ...\right\}$$

$$x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$$

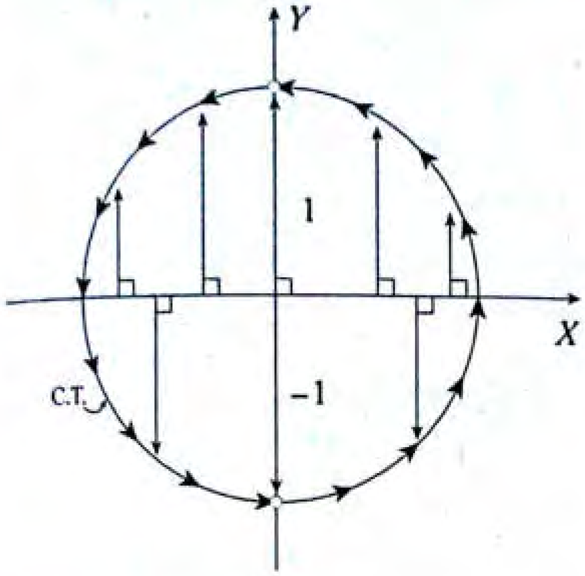
$\therefore$ $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

II. Cálculo del rango

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,2x}{\cos x} = \frac{2\,\text{sen}\,x\,\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 2\,\text{sen}\,x$$

$$f(x)=2\,\text{sen}\,x$$

Como $x \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$; $n \in \mathbb{Z}$, en la C.T.



Del gráfico

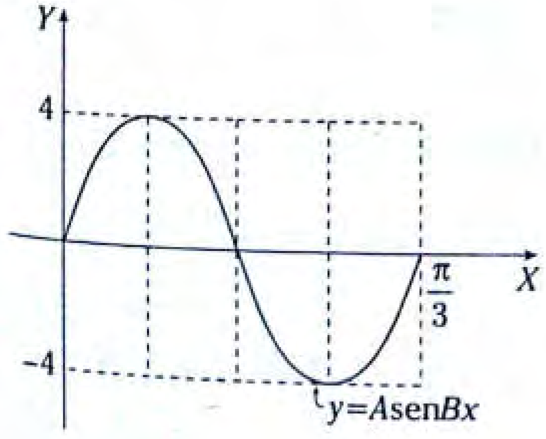
$$-1 < \operatorname{sen} x < 1$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 < \underbrace{2\operatorname{sen} x}_{f(x)} < 2$$

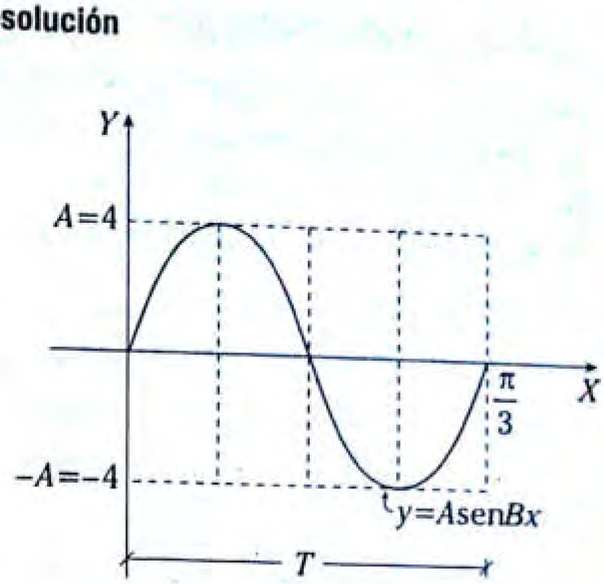
$\therefore$ Ran$f=\langle -2; 2\rangle$

Problema N.° 4

Del gráfico mostrado, calcule $A+B$.



Resolución



Del gráfico

$A=4$

$$T=\frac{2\pi}{B} \rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{B}=\frac{\cancel{\pi}}{3} \rightarrow B=6$$

$\therefore \quad A+B=10$

Problema N.° 5

Calcule el rango de la función definida por

$f_{(x)}=\tan x+\operatorname{sen} x$; $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$.

Resolución

Como $\forall\, x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$: $f_{(x)}=\tan x+\operatorname{sen} x$ es creciente

Por definición de función creciente

si $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow \quad f_{(0)} < f_{(x)} < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \operatorname{Ran} f=\left\langle f_{(0)}; f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\rangle=\left\langle 0; 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si $f(x)=\text{sen}2x \rightarrow Df=\mathbb{R}$

II. Si $g(x)=\cot x \rightarrow Dg=\mathbb{R}-\{n\pi;\, n\in\mathbb{Z}\}$

III. Si $h(x)=\sec^3 x \rightarrow Dh=\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

A) VFF B) VVV C) VFV
D) FVF E) FFF

2. Sea la función definida por la siguiente regla de correspondencia $f(x)=\tan x+\cot x$. Calcule el dominio.

A) $\mathbb{R}$

B) $\mathbb{R}_0^+$

C) $\mathbb{Z}$

D) $\mathbb{R}-\left\{n\frac{\pi}{2};\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

3. Calcule el dominio de la función definida por

$f(x)=\text{sen}\,x\csc x+3;\, n\in\mathbb{Z}$.

A) $\mathbb{R}-\{n\pi\}$

B) $\mathbb{R}$

C) $\mathbb{Q}$

D) $\mathbb{R}-\left\{n\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

4. Determine el dominio de la función definida por

$$f(x)=\frac{1}{\tan x}+\text{sen}\,x;\, n\in\mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R}$

B) $\mathbb{R}-\{n\pi\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\{(2n+1)\pi\}$

5. Sea la función f definida por

$f(x)=\sqrt{\text{sen}\,x-1}$.

Calcule su dominio; $n\in\mathbb{Z}$.

A) $\{n\pi\}$

B) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

C) $\{(2n+1)\pi\}$

D) $\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}\right\}$

6. Halle el dominio de la función definida por

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\cos x}};\, x\in\langle 0;\pi\rangle.$$

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right]$

D) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

7. Si el dominio máximo de la función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x}+\sqrt{\cos x}$ en $\langle 0; 2\pi\rangle$ es $\langle a; b]$; calcule $\operatorname{sen}(a+b)$.

A) $-1/2$ B) 0 C) -1
D) $1/2$ E) 1

8. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. Si $x\in\left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \rightarrow \operatorname{sen}x\in\langle 0;1\rangle$

II. Si $x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \cos x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

III. Si $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right] \rightarrow \tan x\in[0;1]$

A) VVF B) FFF C) VFV
D) FVF E) VVV

9. Calcule el rango de la función f definida por $f(x)=2\operatorname{sen}x+1$.

A) $[-1; 2]$ B) $[-1; 3]$ C) $[-1; 4]$
D) $[-1; 1]$ E) $[-3; 1]$

10. Determine el rango de la función f definida por $f(x)=2\cos^2x+3$.

A) $[3; 4]$ B) $\langle 3; 5\rangle$ C) $[3; 5]$
D) $[1; 3]$ E) $[2; 5]$

11. Si el rango de la función $f(x)=\operatorname{sen}x\cos x+2$ es $[a; b]$, calcule $4ab$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

12. Calcule el rango de la siguiente función. $f(x)=\tan^2x+2|\tan x|$

A) $\mathbb{R}^+$ B) $\mathbb{R}^-$ C) $\mathbb{R}-\{0\}$
D) $\mathbb{R}_0^+$ E) $\mathbb{R}_0^-$

13. Determine el rango de la función definida por la siguiente regla de correspondencia $f(x)=2\operatorname{sen}^3x+1$ si $x\in\langle 0; \pi\rangle$.

A) $\langle 1; 3]$ B) $\langle 1; 3\rangle$ C) $\langle 1; 2]$
D) $\langle 1; 4\rangle$ E) $[1; 3\rangle$

14. Sea la función $f(x)=3\operatorname{sen}x+4\cos x+1$. Calcule la suma del máximo y mínimo de f.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

15. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. Si $f(x)=\operatorname{sen}x \rightarrow f$ es impar

II. Si $g(x)=\tan x \rightarrow g$ es par

III. Si $h(x)=\operatorname{sen}x+\csc x \rightarrow h$ es impar

A) VVF B) FFF C) VFV
D) FFV E) VVV

16. Calcule el periodo de las siguientes funciones.

I. $f(x)=\operatorname{sen}x$

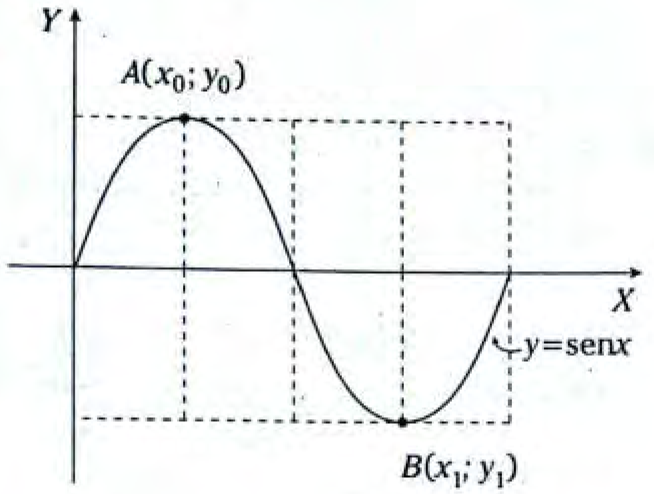
II. $g(x)=\tan x$

III. $h(x)=\cos 2x$

A) $2\pi; \pi; \dfrac{\pi}{2}$ B) $2\pi; \dfrac{\pi}{2}; \pi$ C) $\pi; \pi; \pi$
D) $2\pi; \pi; \pi$ E) $2\pi; \pi; 2\pi$

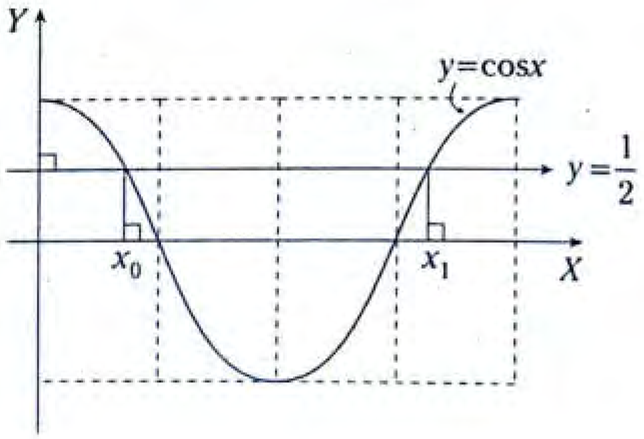
17. Del gráfico mostrado, calcule

$\frac{x_1}{y_0}+\frac{x_0}{y_1}$.



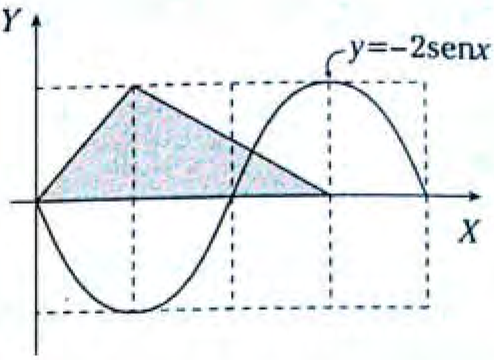
A) $\frac{\pi}{2}$
B) 2π
C) $\frac{3\pi}{2}$
D) π
E) 4π

18. Del gráfico dado, halle $\frac{x_1}{x_0}$.



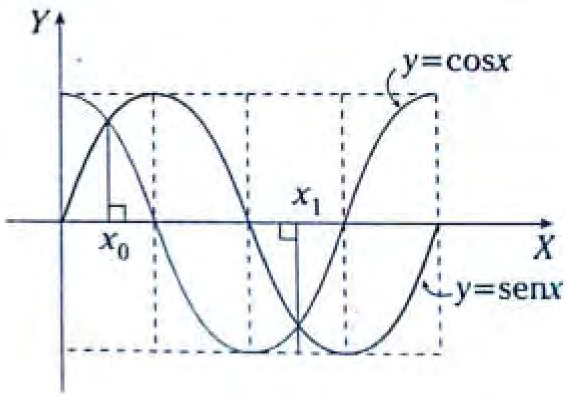
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

19. Del gráfico adjunto, calcule el área de la región sombreada.



A) $\pi\ u^2$
B) $\frac{3\pi}{2}u^2$
C) $2\pi\ u^2$
D) $\frac{5\pi}{2}u^2$
E) $\frac{\pi}{2}u^2$

20. Del gráfico, calcule $\text{sen}(x_0+x_1)$.



A) 0
B) −1
C) 1
D) 1/2
E) −1/2

NIVEL INTERMEDIO

21. Calcule el dominio de la función f, definida por $f(x)=\frac{\text{sen}\,2x+\pi}{\cos x}$; $n\in\mathbb{Z}$.

A) $\mathbb{R}$
B) $\mathbb{R}-\{n\pi\}$
C) $\mathbb{R}-\{(2n+1)\pi\}$
D) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
E) $\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

22. Determine el dominio de la función f, definida por la regla de correspondencia
$f(x)=\cot^3x+\cos^2x+\csc x$; $n\in\mathbb{Z}$.

A) $\mathbb{R}$

B) $\mathbb{R}-\{n\pi\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\{(2n+1)\pi\}$

23. Halle el dominio de la función f, definida por
$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}$; $n\in\mathbb{Z}$.

A) $\mathbb{R}-\{0\}$

B) $\mathbb{R}-\{n\pi\}$

C) $\mathbb{R}-\{(2n+1)\pi\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{n\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

24. Calcule el dominio de la función f, definida por $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}x-1}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}$; $n\in\mathbb{Z}$.

A) $\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

B) $\{n\pi\}$

C) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

D) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

E) $\{2n\pi\}$

25. Calcule el dominio de la función f, cuya regla de correspondencia es
$f(x)=\sqrt{2\cos x-1}$; $x\in\langle 0;\pi\rangle$.

A) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{\pi}{3}\right]$

D) $\left\langle 0;\frac{2\pi}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$

26. Si el rango de la función
$f(x)=2\operatorname{sen}2x+5$ es $[a;b]$, calcule $a-b$.

A) -2 B) -3 C) -4

D) 2 E) 4

27. Calcule el rango de la función f, definida por
$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+2}{\operatorname{sen}x+5}$.

A) $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ B) $\left\langle\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\rangle$ C) $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\rangle$

D) $\left[\frac{1}{2};1\right]$ E) $\left[\frac{1}{2};2\right\rangle$

28. Determine el rango de la función
$f(x)=\tan^2x+2$ si $x\in\left\langle-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\rangle$.

A) $\langle 2;3\rangle$ B) $[2;3\rangle$ C) $[2;3]$

D) $\langle 1;2]$ E) $[2;4\rangle$

29. Sea la función definida por
$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}x}$, determine el rango.

A) $\langle -2;2\rangle$ B) $\langle -1;1\rangle$ C) $[-2;2]$

D) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ E) $\left\langle-\frac{1}{2};1\right]$

30. Calcule el dominio y el rango de la función
$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+2}{\operatorname{sen}x+4}$.

A) $\mathbb{R};\left[\frac{1}{3};1\right]$ B) $\mathbb{R};\left[\frac{1}{3};\frac{3}{5}\right]$ C) $\mathbb{R};\left[\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right]$
D) $\mathbb{R};\left[\frac{1}{3};2\right]$ E) $\mathbb{R};\left[\frac{1}{3};3\right]$

31. Calcule el mínimo valor de f si
$f(x)=\tan x+\cot x;\ x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 1/2

32. Analice la paridad e imparidad de las siguientes funciones, e indique cuántas son funciones pares.

I. $f(x)=\operatorname{sen}^3x$
II. $g(x)=\cos(\operatorname{sen}x)$
III. $h(x)=1-\operatorname{sen}|x|$
IV. $F(x)=\tan^2x$
V. $G(x)=x+\operatorname{sen}x$
VI. $H(x)=\ln(\csc x)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

33. Determine el periodo de las siguientes funciones.

I. $f(x)=\operatorname{sen}2x$
II. $g(x)=\tan x+\cot x$
III. $h(x)=\cos(\operatorname{sen}x)$

A) $2\pi;\ \pi;\ \pi$ B) $2\pi;\ 2\pi;\ \pi$ C) $\frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{\pi}{2}$
D) $\pi;\ \pi;\ \pi$ E) $\pi;\ \frac{\pi}{2};\ \pi$

34. Determine el número de puntos de intersección de $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=\cos x$ en $[0;\ 2\pi]$.

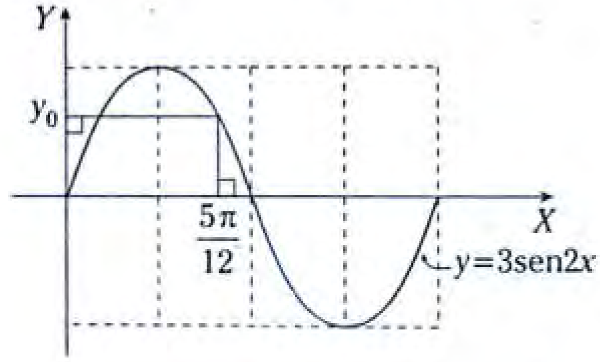
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

35. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. $f(x)=\operatorname{sen}x$ es creciente en $\langle\pi/2;\ 3\pi/2\rangle$
II. $g(x)=\cos x$ es decreciente en $\langle-\pi/2;\ 0\rangle$
III. $h(x)=|\operatorname{sen}x|$ es creciente en $\langle\pi/2;\ \pi\rangle$

A) FFV B) FFF C) FVF
D) VFV E) VVV

36. Del gráfico mostrado, calcule y_0.

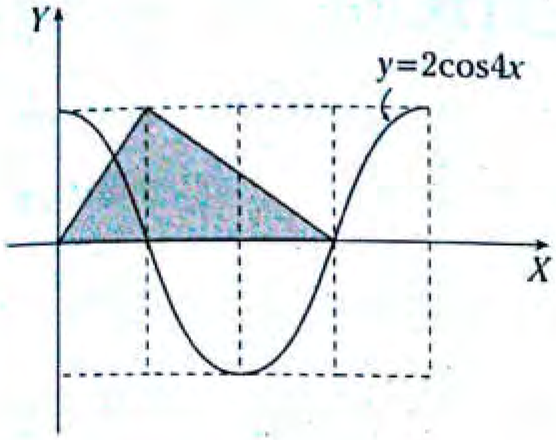


A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

37. Calcule el rango de la función definida por
$f(x)=\tan x-\cos x;\ \forall\ x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{4}\right\rangle$.

A) $\langle 0;\ 1\rangle$ B) $\langle 0;\ \sqrt{2}\rangle$
C) $\left\langle -1;\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right\rangle$
D) $\left\langle 0;\ \frac{1}{2}\right\rangle$ E) $\langle 0;\ 2\rangle$

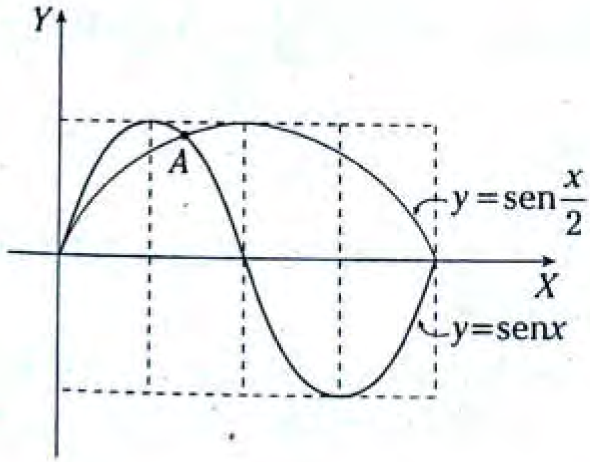
38. Del gráfico dado, calcule el área de la región sombreada.



A) $\frac{3\pi}{2}\text{u}^2$ B) $\frac{3\pi}{8}\text{u}^2$ C) $\frac{3\pi}{16}\text{u}^2$

D) $\frac{3\pi}{64}\text{u}^2$ E) $\frac{3\pi}{4}\text{u}^2$

39. Del gráfico dado, calcule las coordenadas de A.



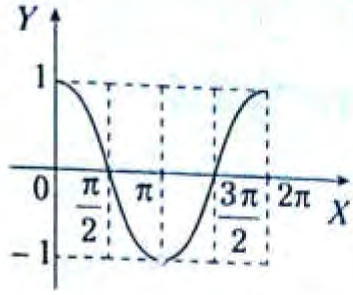
A) $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C) $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$

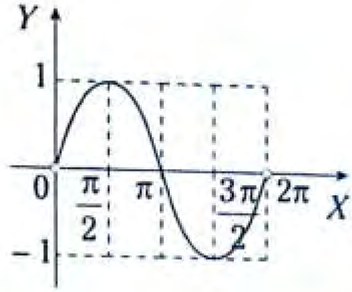
D) $\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$ E) $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

40. Bosqueje la gráfica de la siguiente función.
$f(x)=\text{sen}^2x\csc x$

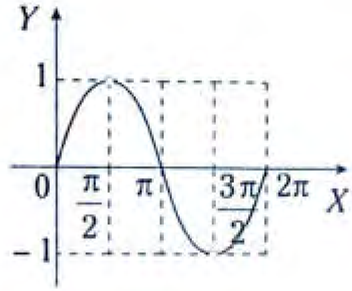
A)



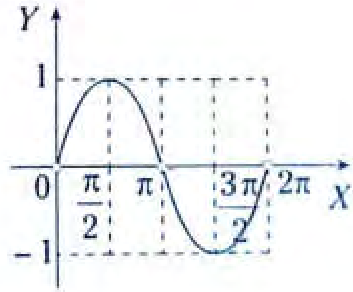
B)



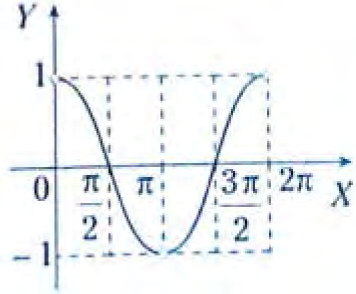
C)



D)



E)



Funciones trigonométricas inversas

Capítulo XIII

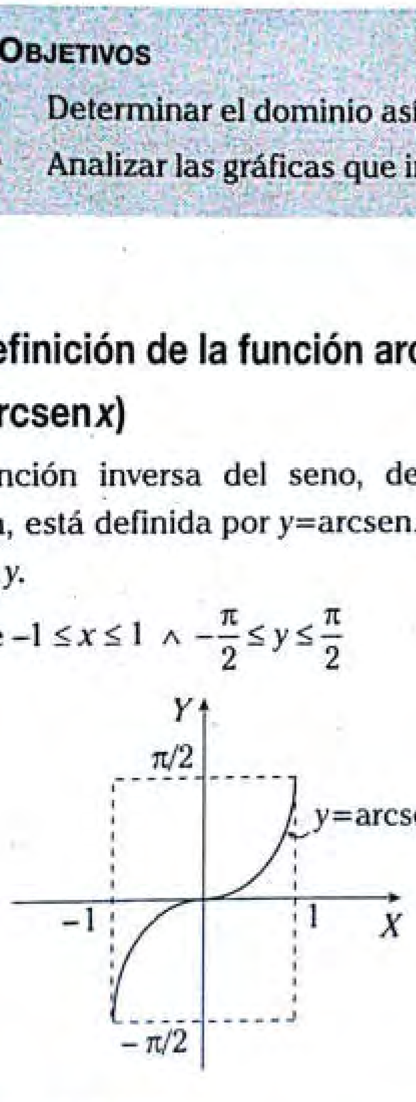
OBJETIVOS

- Determinar el dominio así como el rango de las funciones trigonométricas inversas.
- Analizar las gráficas que involucran funciones trigonométricas inversas.

Definición de la función arcoseno (y =arcsen$x$)

La función inversa del seno, denotada por arcsen, está definida por y=arcsen$x$ si y solo si x=sen$y$.

Donde $-1 \leq x \leq 1 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$



CARACTERÍSTICAS

- Dominio de la función: [−1; 1]
- Rango de la función: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- Es una función creciente.
- Si $x_1 \leq x \leq x_2$
  $\leftrightarrow$ arcsen$(x_1) \leq$ arcsen$(x) \leq$ arcsen(x_2)

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\theta=\text{arcsen}(k) \leftrightarrow \text{sen}\theta=k \wedge \theta\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Ejemplos

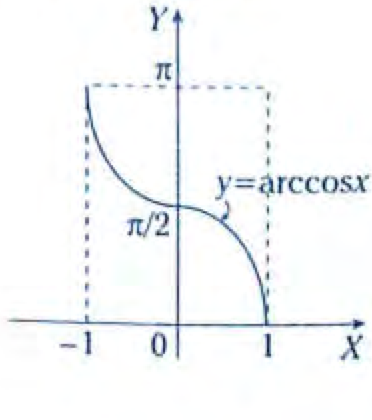
$$\text{sen}\,\theta=\frac{2}{5} \wedge \theta\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \theta=\text{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{8} \wedge \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \alpha=\text{arcsen}\left(\frac{-\sqrt{2}}{8}\right)$$

Definición de la función arcocoseno (y=arccos$x$)

La función inversa del coseno, denotada por arccos, está definida por y=arccos$x$ si y solo si x=cos$y$.

Donde $-1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \pi$



CARACTERÍSTICAS

- Dominio de la función: $[-1; 1]$
- Rango de la función: $[0; \pi]$
- Es una función decreciente.
- Si $x_1 \leq x \leq x_2$
  $\leftrightarrow$ $\arccos(x_1) \geq \arccos(x) \geq \arccos(x_2)$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\theta = \arccos(k) \leftrightarrow \cos\theta = k \wedge \theta \in [0; \pi]$$

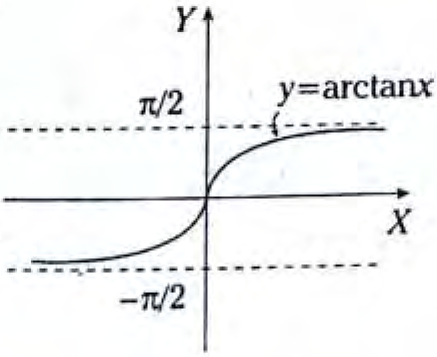
Ejemplos

- $\cos\theta = \dfrac{1}{4} \wedge \theta \in [0; \pi] \rightarrow \theta = \arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- $\cos\beta = \dfrac{-2}{7} \wedge \beta \in [0; \pi] \rightarrow \beta = \arccos\left(-\dfrac{2}{7}\right)$

Definición de la función arcotangente (y=arctan$x$)

La función inversa de la tangente, denotada por arctan, está definida por $y=\arctan x$ si y solo si $x=\tan y$.

Donde $x \in \mathbb{R} \wedge -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$



CARACTERÍSTICAS

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$
- Rango de la función: $\left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$
- Es una función creciente.
- No es una función periódica.
- Si $x_1 \leq x \leq x_2$
  $\leftrightarrow$ $\arctan(x_1) \leq \arctan(x) \leq \arctan(x_2)$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\theta = \arctan(k) \leftrightarrow \tan\theta = k \wedge \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

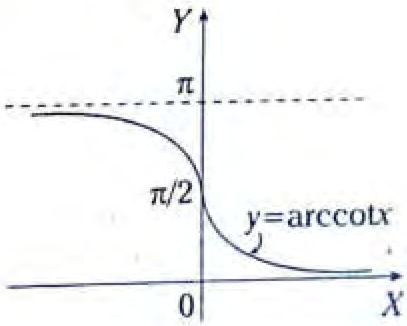
Ejemplos

- $\tan\alpha = 5 \wedge \alpha \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \rightarrow \alpha = \arctan(5)$
- $\arctan(x_1) = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow x_1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Definición de la función arcocotangente (y=arccot$x$)

La función inversa de la cotangente, denotada por arccot, está definida por $y=\text{arccot}\,x$ si y solo si $x=\cot y$.

Donde $x \in \mathbb{R}$ y $0 < y < \pi$



CARACTERÍSTICAS

- Dominio de la función: $\mathbb{R}$
- Rango de la función: $\langle 0; \pi \rangle$
- Es una función decreciente.
- No es una función periódica.
- Si $x_1 \leq x \leq x_2$
  $\leftrightarrow$ $\text{arccot}(x_1) \geq \text{arccot}(x) \geq \text{arccot}(x_2)$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\theta = \text{arccot}(k) \leftrightarrow \cot\theta = k \wedge \theta \in \langle 0; \pi \rangle$$

Ejemplos

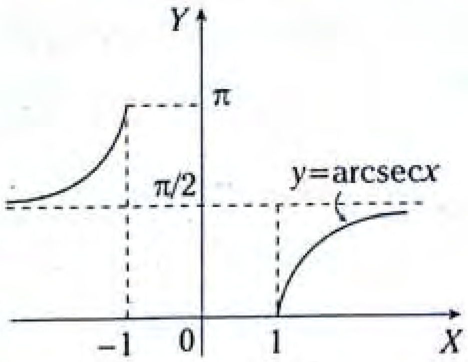
- $\cot\alpha=2 \wedge 0<\alpha<\pi \rightarrow \alpha=\text{arccot}(2)$
- $\text{arccot}(x_1)=\dfrac{\pi}{4} \rightarrow x_1=\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Definición de la función arcosecante (y=arcsec$x$)

La función inversa de la secante, denotada por arcsec, está definida por $y=\text{arcsec}x$ si y solo si $x=\sec y$.

Donde

$$x\in\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle\ ;\ y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right]$$



CARACTERÍSTICAS

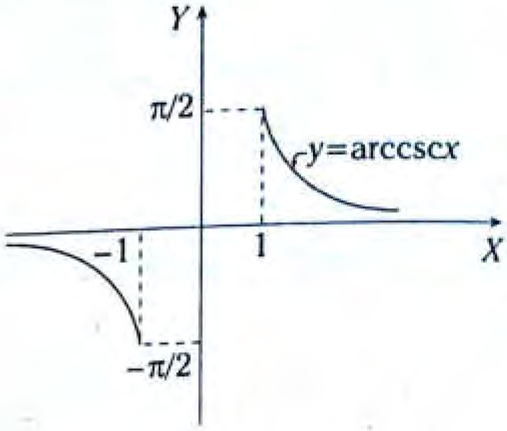
- Dominio de la función: $\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$
- Rango de la función: $[0;\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Definición de la función arcocosecante (y=arccsc$x$)

La función inversa de la cosecante, denotada por arccsc, está definida por $y=\text{arccsc}x$ si y solo si $x=\csc y$.

Donde

$$x\in\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle;\ y\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right\rangle\cup\left\langle0;\frac{\pi}{2}\right]$$



CARACTERÍSTICAS

- Dominio de la función: $\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$
- Rango de la función: $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\theta=\text{arcsec}k \leftrightarrow \sec\theta=k\wedge\theta\in[0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\theta=\text{arccsc}k \rightarrow \csc\theta=k\wedge\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$$

Ejemplos

- $\theta=\text{arcsec}\left(\dfrac{3}{2}\right) \rightarrow \sec\theta=\dfrac{3}{2};\theta\in[0;\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$
- $\alpha=\text{arccsc}(5) \rightarrow \csc\alpha=5;\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

Problema N.º 1

Calcule el valor de

$$M=\tan\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

UNAC 2008-II

Resolución

Sea $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\theta \rightarrow \tan 2\theta=\frac{1}{5}$ (I)

En

$$M=\tan\left(\frac{5\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{4}-\theta\right)$$

$$M=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

Por reducción al primer cuadrante

$$M=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$M=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

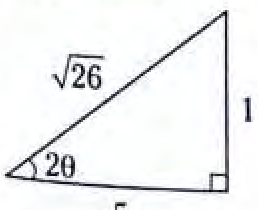
Por identidades de arco doble

$$M=2\cdot\csc\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$$

$$M=2\sec 2\theta$$

De (I)

Forma práctica



$\Rightarrow \sec 2\theta=\frac{\sqrt{26}}{5}$

$\therefore \quad M=\frac{2\sqrt{26}}{5}$

Problema N.º 2

Si $\tan\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{4-x^2}\right)-\operatorname{sen}(\arctan 2)=0$, entones $3|x|$ es igual a

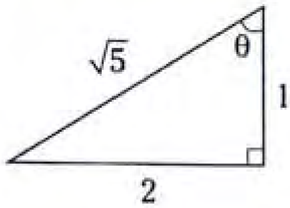
UNAC 2009-I

Resolución

$\tan\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{4-x^2}\right)=\operatorname{sen}(\arctan 2)$ (I)

Sea $\theta=\arctan(2) \rightarrow \tan\theta=2;\ \theta\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

Forma práctica



$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (II)

Reemplazamos (II) en (1)

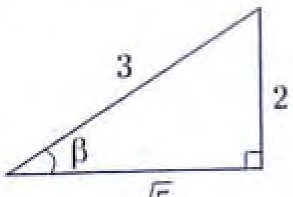
$\tan\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{4-x^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (III)

Sea $\operatorname{arcsen}\sqrt{4-x^2}=\beta \rightarrow \operatorname{sen}\beta=\sqrt{4-x^2}$ (IV)

De (III)

$$\tan\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Forma práctica



$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta=\frac{2}{3}$ (V)

Igualamos (IV) y (V)

$$\sqrt{4-x^2}=\frac{2}{3}$$

$\therefore \quad 3|x|=4\sqrt{2}$

Problema N.º 3

Determine el dominio y el rango de la siguiente función.

$$f(x)=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{arccos}\left(\frac{2-x}{4}\right)$$

Resolución

Determinamos el dominio

Se conoce

$$-1\leq\frac{2-x}{4}\leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} -4\leq 2-x\leq 4$$

$$\xrightarrow{-2} -6\leq -x\leq 2$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -2\leq x\leq 6$$

$\therefore$ Dom$f$=[−2; 6]

Determinamos el rango

De $x\in[-2;6]$ $\rightarrow$ $0\leq\operatorname{arccos}\left(\frac{2-x}{4}\right)\leq\pi$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{4}} 0\leq\frac{1}{4}\operatorname{arccos}\left(\frac{2-x}{4}\right)\leq\frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{+\frac{3\pi}{8}} \frac{3\pi}{8}\leq\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{arccos}\left(\frac{2-x}{4}\right)\leq\frac{5\pi}{8}$$

$\therefore$ $\operatorname{Ran}f=\left[\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right]$

Problema N.º 4

Grafique la siguiente función.

$f(x)=4\cdot\operatorname{arcsen}(x-1)+\pi$

Resolución

- Cálculo del dominio

  Se conoce $-1\leq x-1\leq 1$

  $\xrightarrow{+1} 0\leq x\leq 2$

  $\therefore$ Dom$f$=[0; 2]

- Cálculo del rango

  Se conoce

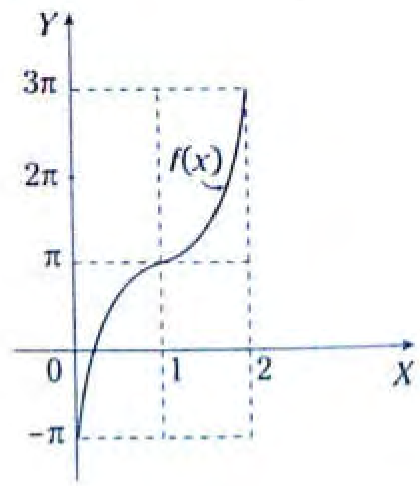
  $$-\frac{\pi}{2}\leq\operatorname{arcsen}(x-1)\leq\frac{\pi}{2}$$

  $$\xrightarrow{\times 4} -2\pi\leq 4\cdot\operatorname{arcsen}(x-1)\leq 2\pi$$

  $$\xrightarrow{+\pi} -\pi\leq 4\cdot\operatorname{arcsen}(x-1)+\pi\leq 3\pi$$

  $\therefore$ Ran$f$=[−π; 3π]

Graficamos



NIVEL BÁSICO

1. Sea f una función definida por

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\operatorname{arcsen}(\sqrt{3x-1})+\frac{\pi}{5}$.

Calcule su dominio.

A) $[0;1]$ B) $\left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$ C) $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$

D) $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ E) $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$

2. Determine el dominio de

$f(x)=\arccos\left(\frac{1}{|x|}\right)$

A) $\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$
B) $\langle-\infty;0\rangle\cup\langle0;+\infty\rangle$
C) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle1;+\infty\rangle$
D) $[-1;1]$
E) $\langle-1;1\rangle$

3. Si f es la función definida por

$f(x)=\operatorname{arcsen}(3x-2)+2\cdot\arccos(2x-3)$,

calcule su dominio.

A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $[1;2]$ C) $[-1;1]$

D) $\left[\frac{1}{3};1\right]$ E) $\{1\}$

4. Calcule el dominio de

$f(x)=\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{arccsc}(3x-1)$

A) $\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$

B) $\langle-\infty;0]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$

C) $\langle-\infty;0]\cup\left\langle\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$

D) $\langle-\infty;0\rangle\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$

E) $\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$

5. Si $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{8x^2-1};\ x<0$, calcule el mínimo valor de su dominio.

A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) 1

6. Si $f(x)=\arccos(x^2+1)$, calcule su rango.

A) $[0;1\rangle$ B) $[0;1]$ C) $\{0\}$
D) $\{0;1\}$ E) $\langle0;1]$

7. Calcule el rango de la función

$f(x)=\frac{\operatorname{arccot}x}{4}+\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot}x}{3}$.

A) $\left\langle-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right\rangle$ B) $\left\{\frac{\pi}{12}\right\}$ C) $\left\langle\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ E) $\left\langle-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\rangle$

8. Calcule el rango de f.

$f(x)=\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

A) $\left\langle0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ C) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

D) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ E) $\left\langle0;\frac{\pi}{2}\right]$

9. Determine el dominio y el rango de la función $f(x)=4\cdot\operatorname{arcsen}(2x-5)+\pi$

A) $Df=[2; 3]$; $Rf=[-\pi; \pi]$
B) $Df=[2; 3]$; $Rf=[-\pi; 3\pi]$
C) $Df=[-2; 2]$; $Rf=[-\pi; 0]$
D) $Df=[-3; 2]$; $Rf=[-3\pi; \pi]$
E) $Df=[0; 3]$; $Rf=[\pi; 3\pi]$

10. Determine el dominio y el rango de la función $f(x)=4\cdot\operatorname{arccsc}(2x-5)$.

A) $Df=\mathbb{R}-\langle -3; 3\rangle$; $Rf=[-\pi; \pi]-\{0\}$
B) $Df=\mathbb{R}-\langle 1; 3\rangle$; $Rf=[-\pi; -2\pi]-\{0\}$
C) $Df=\mathbb{R}-\langle 2; 3\rangle$; $Rf=[-2\pi; 2\pi]-\{0\}$
D) $Df=\mathbb{R}-\langle -2; 2\rangle$; $Rf=[-\pi; 2\pi]-\{0\}$
E) $Df=\mathbb{R}-\langle -1; 1\rangle$; $Rf=[-\pi; \pi]-\{0\}$

11. Dada la función
$f(x)=3\cdot\arccos\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)$,
calcule $Df \cap Rf$.

A) $[0; 3]$ B) $[-2; 0]$ C) $[0; 3\pi]$
D) $[-2; \pi]$ E) $[3; 3\pi]$

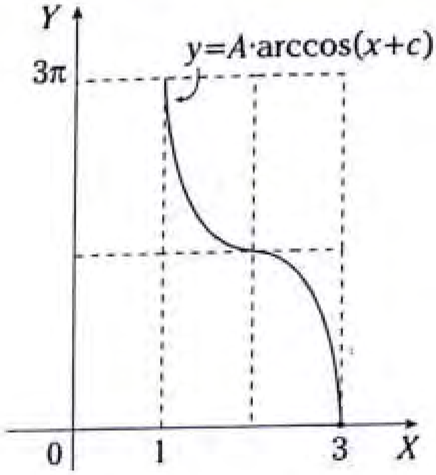
12. Calcule el rango de la función
$f(x)=\operatorname{arcsen}(4x-1)+\arccos(2x-2)+\dfrac{3\pi}{2}$.

A) $\{\pi\}$ B) $\{2\pi\}$ C) $\left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$
D) $\{0\}$ E) $\{3\pi\}$

13. Dada la función
$f(x)=\operatorname{arcsen}(2x-1)+\arccos(2x+1)$,
calcule $Df \cup Rf$.

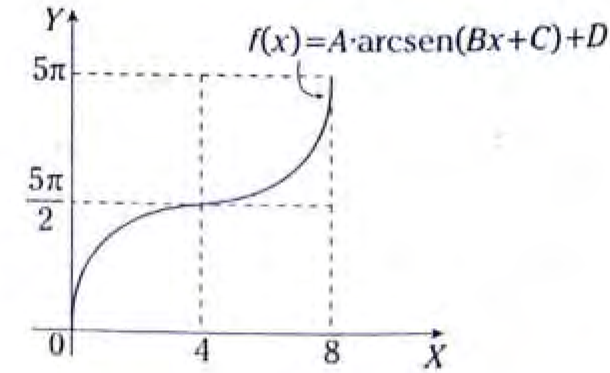
A) $\left\{1; -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ B) $\{0; \pi\}$ C) ϕ
D) $\left\{0; -\dfrac{\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{-1; -\dfrac{\pi}{2}\right\}$

14. Del gráfico, determine la regla de correspondencia de la función



A) $y=2\arccos(x+3)$
B) $y=3\arccos(x-2)$
C) $y=3\arccos(x+2)$
D) $y=3\arccos(x+3)$
E) $y=2\arccos(x-3)$

15. De acuerdo con el gráfico, determine
$\dfrac{D}{A\cdot(1-C)\cdot B}$.



A) $-\pi$ B) π C) -2π
D) 2π E) $\pi/2$

16. Calcule el valor de

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan(1)-\operatorname{arcsec}2.$$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{24}$ C) $\frac{\pi}{18}$

D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{15}$

17. Calcule el valor de

$$\cot\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

18. Calcule el valor de

$$\operatorname{arccsc}(-2)+\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2}).$$

A) $\frac{13\pi}{12}$ B) $\frac{11\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

19. Calcule

$$\sec^2(\arctan 4)+\csc^2(\operatorname{arccot} 5).$$

A) 41 B) 42 C) 43
D) 44 E) 45

20. Reduzca la expresión

$$\arctan(\sqrt{3}-1)+\arctan(\sqrt{3}+1)+\arctan(2\sqrt{3}).$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) π C) arctan(2)

D) $\frac{\pi}{6}$ E) 0

NIVEL INTERMEDIO

21. Simplifique

$$\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec}\sqrt{6})}{\operatorname{sen}(\arctan\sqrt{5})}.$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/3
D) 1 E) 1/5

22. Calcule

$$\sec\left(\operatorname{arcsec}(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\operatorname{arcsec}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right).$$

A) 2 B) 4 C) 1/2
D) 1/4 E) 1/8

23. Calcule $\cos\theta$ si

$$\theta=2\cdot\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{7}\right)+\arctan\left(\frac{7}{24}\right).$$

A) 0 B) 1 C) −1
D) 2/3 E) −2/3

24. Determine el valor de

$$\operatorname{sen}^2\left(\arccos\sqrt{\frac{7}{8}}\right)+\cos^2\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{8}}\right).$$

A) 1 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

25. Calcule el valor de la expresión

$$\sec\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{9}\right)\right)\cdot\tan\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

A) $\frac{10}{11}$ B) $\frac{11}{10}$ C) $\frac{8}{7}$

D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{9}{8}$

26. Determine el dominio de la función definida por $f(x)=\sqrt{\operatorname{arcsen} x-\arctan x}$.

A) $[0; 1\rangle$ B) $\langle 0; 1\rangle$ C) $\left\langle\frac{1}{2}; 1\right\rangle$
D) $[0; 1]$ E) $\langle 0; 1]$

27. Si

$$\arctan\left(\frac{a}{4}\right)+\arctan\left(\frac{3b}{4}\right)+\arctan\left(\frac{c}{8}\right)=\frac{\pi}{2},$$

calcule $6ab+ac+3bc$.

A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

28. Calcule

$$3\cdot\operatorname{sen}\left(2\cdot\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)+4\cdot\cos(2\cdot\operatorname{arccot}(-3))$$

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{1}{7}$

29. Calcule el mínimo valor que asume la expresión
$[\operatorname{arcsen} x]^2+\pi\cdot\operatorname{arcsen} x+\frac{\pi^2}{4}$.

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{3}$ C) $\frac{\pi^2}{4}$
D) π^2 E) 0

30. Calcule el valor de

$$\frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{5}\right)}{\operatorname{arccsc}(5)}+\frac{\operatorname{arccot}(7)}{\arctan\left(\frac{1}{7}\right)}+\frac{\arccos\left(\frac{3}{5}\right)}{\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)}.$$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) −2

31. Si $\frac{1}{2}\arccos x=\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right]$, calcule x.

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

32. Sea la función $f_{(x)}=\arctan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ definida para $x>0$. Determine su rango.

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right]$ B) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ C) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
D) $\left\langle\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ E) $\left\langle\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$

Ecuaciones trigonométricas

Capítulo XIV

OBJETIVOS

- Conocer el fundamento de las ecuaciones trigonométricas estableciendo similitudes y diferencias con otras ecuaciones.
- Aplicar procedimientos algebraicos en la resolución de las ecuaciones.

Definición

Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene funciones trigonométricas ligadas a una variable angular y se cumplen para un conjunto de valores angulares que hace posible la igualdad original.

Ejemplos

- $\operatorname{sen}2x-\cos x=1$
- $\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x+1=0$
- $\cos^4x-\operatorname{sen}^4x=1$
- $\tan x+\cot x=2$
- $\cot^3x-27=0$
- $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}=0$

Ecuación trigonométrica elemental

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{\text{F.T.}(ax+b)=N}$$

Donde

F.T.: función trigonométrica (sen, cos, tan, cot, sec, csc)

x: variable angular

a, b, N: constantes reales ($a \neq 0$)

N: valor admisible

Ejemplos

- $\operatorname{sen}x=1$
- $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$
- $\cos\frac{2x}{3}=-\frac{1}{2}$
- $\cos 2x=\frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sec(x+1)=\sqrt{2}$

Solución de una ecuación trigonométrica

Es un número real que satisface la ecuación trigonométrica dada.

Ejemplos

- $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{\pi}{6}$, es solución de la ecuación trigonométrica, pues $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
- $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \rightarrow x=0$, es solución de la ecuación trigonométrica, pues $\tan\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Conjunto solución de una ecuación trigonométrica

Es el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación trigonométrica dada.

Ejemplos

- Si $\operatorname{sen}x=0 \rightarrow x\in \underbrace{\{...; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; ...\}}_{\text{soluciones}}$

  $\therefore$ $CS=\{...; 0; \pi; 2\pi; ...\}\in \{n\pi\}; n\in \mathbb{Z}$

- Si $\tan x=1 \rightarrow x\in\left\{...; \underbrace{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}}_{\text{soluciones}}; ...\right\}$

  $\therefore$ $CS=\left\{...; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; ...\right\}=\left\{n\pi+\frac{\pi}{4}\right\}; n\in\mathbb{Z}$

Solución general para una ecuación trigonométrica elemental

Para el seno

Si $\operatorname{sen}\theta=N \rightarrow \theta=n\pi+(-1)^n\beta; n\in\mathbb{Z}$

donde $\operatorname{sen}\beta=N$, tal que $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplos

- $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}; n\in\mathbb{Z}$

- $\operatorname{sen}2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

  $\therefore$ $\theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{8}; n\in\mathbb{Z}$

- $\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\theta}{3}=n\pi(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

  $\therefore$ $\theta=3n\pi-(-1)^n\frac{3\pi}{4}$

Para el coseno

Si $\cos\theta=N \rightarrow \theta=2n\pi\pm\beta; n\in\mathbb{Z}$
donde $\cos\beta=N$, tal que $\beta\in[0; \pi]$

Ejemplos

- $\cos\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$

- $\cos\frac{\theta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\theta}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

  $\therefore$ $\theta=6n\pi\pm\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$

- $\cos4\theta=-\frac{1}{2} \rightarrow 4\theta=2n\pm\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

  $\therefore$ $\theta=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}; n\in\mathbb{Z}$

Para la tangente

Si $\tan\theta=N \rightarrow \theta=n\pi\pm\beta; n\in\mathbb{Z}$

donde $\tan\beta=N$, tal que $\beta\in\left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Ejemplos

- $\tan\theta=1 \rightarrow \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z}$

- $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3} \rightarrow \theta-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{3}$

  $\therefore$ $\theta=n\pi+\frac{7\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$

- $\tan3\theta=-1 \rightarrow 3\theta=n\pi-\frac{\pi}{4}$

  $\therefore$ $\theta=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$

Nota

Para resolver una ecuación trigonométrica, se debe llevar a su forma elemental y luego aplicar C. T. o gráficas de funciones trigonométricas para calcular las soluciones.

Problema N.° 1

Halle el número de raíces de la ecuación
$\text{sen}2x+\text{sen}x=0$; $x\in[0; 2\pi]$

UNMSM 2009-II

Resolución

Llevando a su forma elemental, aplicamos identidad del ángulo doble

$$2\text{sen}x\cos x+\text{sen}x=0$$

Factorizando obtenemos

$$\text{sen}x(2\cos x+1)=0$$

$\rightarrow$ $\text{sen}x=0 \vee 2\cos x+1=0$

$\rightarrow$ $\text{sen}x=0 \vee \cos x=-\frac{1}{2}; x\in[0; 2\pi]$

- Si $\text{sen}x=0 \rightarrow x_1=0, x_2=\pi, x_3=2\pi$
- Si $\cos x=-\frac{1}{2} \rightarrow x_4=\frac{2\pi}{3}, x_5=\frac{4\pi}{3}$

Por lo tanto, la ecuación tiene 5 raíces.

Problema N.° 2

Halle la solución general de la ecuación trigonométrica $2\text{sen}3x-\sqrt{3}=0$.

Resolución

Del dato, tenemos

$$\text{sen}3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow$ $3x=n\pi+(-1)^n\beta; n\in\mathbb{Z}$ (I)

Donde

$$\text{sen}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}; \beta\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \beta=\frac{\pi}{6}$$

Reemplazamos en (I)

$$3x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

$$x=\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}$$

$$\therefore \text{ S.G.}=\left\{\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\right\}; n\in\mathbb{Z}$$

Problema N.° 3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\text{sen}x\cos x(2\cos^2x-1)=\frac{1}{8}, x\in\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Resolución

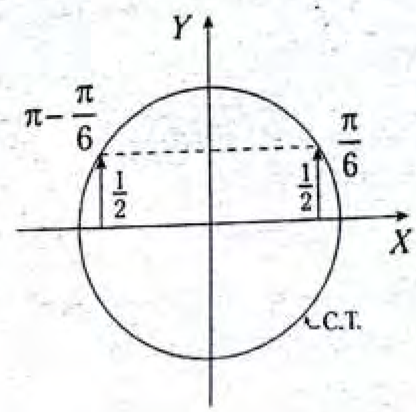
Del dato, tenemos

$$\underbrace{\text{sen}x\cos x}_{\frac{\text{sen}2x}{2}}\underbrace{(2\cos^2x-1)}_{\cos 2x}=\frac{1}{8}$$

$$\underbrace{2\cdot\text{sen}2x\cos 2x}=\frac{2}{8}\times 2$$

$$\text{sen}4x=\frac{1}{2}; 4x\in\langle 0; 2\pi\rangle$$

Como sen$4x$ es positivo, entonces, $4x\in$ IC $\vee$ IIC, analizamos en una circunferencia trigonométrica.



Del gráfico, se observa que si

$$\text{sen}4x=\frac{1}{2}; 0<4x<2\pi \rightarrow 4x=\frac{\pi}{6} \vee 4x=\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{ CS}=\left\{\frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}\right\}$$

Problema N.° 4

Resuelva la ecuación trigonométrica
$2\cos^2 x+3\cos x-2=0;\ x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$
e indique la mayor solución positiva.

Resolución

Del dato, tenemos

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

$$\begin{array}{ll} 2\cos x & -1 \\ \cos x & +2 \end{array}$$

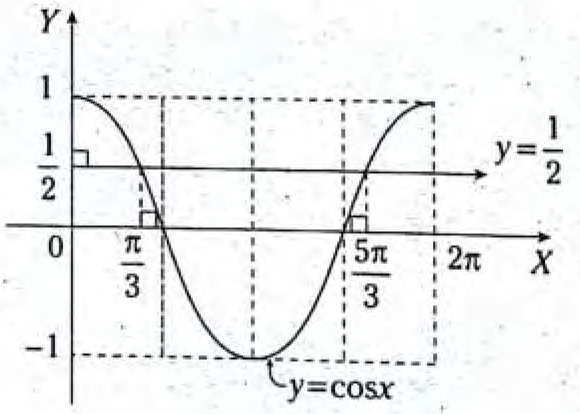
$\rightarrow\ (2\cos x-1)(\cos x+2)=0$

$\rightarrow\ 2\cos x-1=0\ \vee\ \cos x+2=0$

$\rightarrow\ \cos x=\dfrac{1}{2}\ \vee\ \cos x=-2;\ x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$

Si $\cos x=-2\ \rightarrow\ x\in\phi$, pues $-1\leq\cos x\leq 1$

Si $\cos x=\dfrac{1}{2}$, por gráficas de funciones



Del gráfico

$$x_1=\frac{\pi}{3};\ x_2=\frac{5\pi}{3}$$

Por lo tanto, la mayor solución es $\dfrac{5\pi}{3}$.

Problema N.° 5

Calcule la menor solución positiva de la ecuación
$(\operatorname{sen}x-\cos x)^2+\cos 2x=\operatorname{sen}x-\cos x;\ x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

Resolución

Del dato tenemos

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)^2+\overbrace{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}^{\cos 2x}=$$
$$=\operatorname{sen}x-\cos x$$

Factorizamos

$$(\operatorname{sen}x-\cos x)(-2\cos x-1)=0$$

Donde

$$\operatorname{sen}x-\cos x=0\ \vee\ -2\cos x-1=0$$

$$\tan x=1\quad\vee\quad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\ x=\frac{\pi}{4}\quad\vee\quad x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, la menor solución positiva es $\dfrac{\pi}{4}$.

NIVEL BÁSICO

1. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.
I. Si $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ es solución.
II. Si $\tan x=0 \rightarrow x=n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$.
III. Si $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=\frac{\pi}{4}$ es solución.

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FFV E) FFF

2. Calcule la menor solución positiva de la ecuación trigonométrica dada.
$2\operatorname{sen}x-\sqrt{2}=0$

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{5}$

3. Al resolver la ecuación
$(\csc x-2)(\operatorname{sen}x+3)=0$,
indique las dos primeras soluciones positivas.

A) $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right\}$
D) $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$

4. Dada la ecuación
$\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=1$,
halle x en $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 2π C) 0
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

5. Halle la suma de soluciones de la ecuación $3\cos x-1=0$ en $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) π
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2π

6. Al resolver la ecuación
$\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=\sec^2x-\tan^2x$,
indique la mayor solución negativa.

A) $-\pi$ B) -2π C) $-\frac{\pi}{4}$
D) $-\frac{\pi}{3}$ E) $-\frac{3\pi}{2}$

7. Resuelva la siguiente ecuación.
$\cos^2x-2\cos x+\tan\frac{\pi}{4}=0;\ n\in\mathbb{Z}$

A) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $\{(2n+1)\pi\}$ C) $\{2n\pi\}$
D) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ E) $\{n\pi\}$

8. Calcule el número de soluciones de $\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x=0$ en $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. Resuelva $|\tan x|=5$ e indique el número de soluciones en $\langle 0;\ 2\pi\rangle$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. Resuelva la ecuación
$\text{sen}4x+\text{sen}2x=0$ en $\langle 0;\pi\rangle$.

A) $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{5}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right\}$

11. Determine la solución general de la ecuación
$(2\text{sen}\,x-\sqrt{3})(\tan^2 x+1)(\sec^2 x+7)=0;$
$\forall\, n\in\mathbb{Z}$

A) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{5}\right\}$

E) $\left\{n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{5}\right\}$

12. Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación
$\text{sen}\,x\cos 2x+\cos x\,\text{sen}\,2x=\frac{\sqrt{2}}{2};$
$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{3}$, calcule $\frac{x_2}{x_1}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. Calcule la diferencia de las dos primeras soluciones positivas de la ecuación
$2\tan x=1-\tan^2 x$.

A) 3π B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π

D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

14. Calcule la suma de soluciones de la ecuación $2\cos^2\frac{x}{2}-2\text{sen}^2\frac{x}{2}=1$ en $\langle 0;2\pi\rangle$.

A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{2\pi}{3}$

D) π E) 2π

15. Determine el número de soluciones de la ecuación
$2^{2\text{sen}^2x}\cdot 2^{\text{sen}\,x}=\sec^2 45^\circ$ en $\langle 0;2\pi\rangle$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación
$\csc 2x-\cot 2x=\tan^2 60^\circ$; $0<x_1<x_2<2\pi$,
calcule $\tan\left(\frac{x_2-x_1}{4}\right)$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) -1
D) 0 E) 2

17. Resuelva la ecuación trigonométrica
$\text{sen}(20\pi+8x)=\text{sen}(14\pi+6x)$
e indique la menor solución positiva.

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{2\pi}{9}$ C) $\frac{\pi}{14}$

D) $\frac{3\pi}{14}$ E) $\frac{\pi}{7}$

18. Resuelva la ecuación trigonométrica dada
$\frac{\text{sen}\,3x+\text{sen}\,x}{\cos 3x+\cos x}=1;\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$

A) $\left\{\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{8}\right\}$ C) $\left\{\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{8}\right\}$

D) $\left\{\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right\}$ E) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{6}\right\}$

19. Calcule la mayor solución negativa de la ecuación trigonométrica

$$\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos x=\tan\frac{3\pi}{8}$$

A) $-\frac{11\pi}{6}$ B) $-\frac{5\pi}{4}$ C) $-\frac{3\pi}{4}$

D) $-\frac{7\pi}{6}$ E) $-\frac{7\pi}{4}$

20. Calcule la suma de soluciones de la ecuación

$\tan 3x+\tan x+\tan 4x\tan 3x\tan x=1;\ x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle.$

A) $\frac{11\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{5\pi}{8}$

D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

NIVEL INTERMEDIO

21. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$|\operatorname{sen}x|+|\cos x|=\sqrt{2};\ x\in\langle 0;2\pi\rangle$?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

22. Calcule la suma de soluciones de la ecuación

$\log(\operatorname{sen}x)+\log(\cos x)+\log(4)=\log(\sqrt{3});$

$x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle.$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) π E) $\frac{3\pi}{2}$

23. Resuelva la ecuación trigonométrica

$3\cos 2x-1=10\left(2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-1\right);\ x\in\langle 0;2\pi\rangle$

Calcule la suma de soluciones.

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) π C) 3π

D) 2π E) 4π

24. Resuelva la ecuación trigonométrica

$(\operatorname{sen}x+\cos x)^4=(\csc^2x-\cot^2x)^6$

e indique la suma de soluciones en $\langle 0;2\pi\rangle$.

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) 2π C) 4π

D) 5π E) 3π

25. Resuelva la ecuación trigonométrica

$[\cos x(2\cos 2x-1)]^2=\cos 4x\cos 2x$

e indique la solución general; $\forall\, n\in\mathbb{Z}$.

A) $\left\{\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

D) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ E) $\{n\pi\}$

26. Determine la solución general de la ecuación trigonométrica

$\tan\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\log 5+\log 2;\ \forall\, n\in\mathbb{Z}.$

A) $\left\{\frac{3n\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\right\}$ B) $\left\{\frac{n\pi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{n\pi+\frac{5\pi}{8}\right\}$

D) $\left\{3n\pi+\frac{5\pi}{8}\right\}$ E) $\left\{2n\pi+\frac{5\pi}{8}\right\}$

27. Resuelva la ecuación trigonométrica

$\operatorname{sen}(2\pi+x)\cos^5 x+\operatorname{sen}^5 x\cos(3\pi+x)=\dfrac{1}{8};$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}.$

A) $\left\{\dfrac{3\pi}{5};\dfrac{5\pi}{12}\right\}$ B) $\left\{\dfrac{\pi}{24};\dfrac{5\pi}{24}\right\}$ C) $\left\{\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12}\right\}$

D) $\left\{\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right\}$ E) $\left\{\dfrac{\pi}{7};\dfrac{3\pi}{7}\right\}$

28. Resuelva la ecuación trigonométrica

$\operatorname{sen}5x=\operatorname{sen}3x-2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2};\ x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle$

e indique el número de soluciones.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 9

29. Indique la solución general de la ecuación
$\operatorname{sen}x-\tan 60^\circ\cos x=\operatorname{sen}90^\circ;\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$

A) $\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right\}$

B) $\left\{\dfrac{n\pi}{2}+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right\}$

E) $\left\{\dfrac{n\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right\}$

30. Calcule la suma de soluciones de la ecuación

$\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{2\cos 4x\cos 3x-\cos 7x}{\operatorname{sen}x};x\in\langle 0;\ \pi\rangle.$

A) 3π B) 2π C) $\dfrac{3\pi}{2}$

D) $\dfrac{5\pi}{2}$ E) π

31. Determine el número de soluciones de la ecuación

$3\operatorname{sen}^2 x-(\sqrt{5}+9)\operatorname{sen}x+3\sqrt{5}=0;\ x\in\langle 0;\ 2\pi\rangle.$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

32. Calcule las dos primeras soluciones negativas de la ecuación

$\operatorname{sen}x+\cos^4\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{sen}^4\dfrac{x}{2}.$

A) $\left\{-\dfrac{17\pi}{12};-\dfrac{25\pi}{12}\right\}$

B) $\left\{-\dfrac{9\pi}{14};-\dfrac{7\pi}{12}\right\}$

C) $\left\{-\dfrac{7\pi}{6};-\dfrac{11\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{-\dfrac{4\pi}{3};-\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

E) $\left\{-\dfrac{13\pi}{12};-\dfrac{23\pi}{12}\right\}$

33. Calcule el número de soluciones de la ecuación $\sqrt{\sqrt{\sec x+\sqrt{2}}+2}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{8}}};\ x\in\langle 0;2\pi\rangle.$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

34. Si $x_1;\ x_2$ son soluciones de la ecuación
$\log(\tan x)+\log(\cot^2 x)=1$ en $\langle 0;\ 2\pi\rangle$,
calcule $\cos(x_1-x_2)$.

A) 1 B) -1 C) 0

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\dfrac{1}{2}$

35. Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{3}{4\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)};$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$.

Halle la solución general.

A) $\left\{n\pi+\frac{\pi}{6}\right\}$ B) $\left\{n\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$ C) $\left\{n\pi\pm\frac{\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{2n\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right\}$

36. ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación?

$(\cos x+\cos 2x)^2=\cos^2 x+\cos^2 2x$; $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

37. Calcule la suma de los valores de $x \in [0; 2\pi]$ que verifican la siguiente ecuación.

$2\tan x \operatorname{sen} x - 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \tan x + \sqrt{3} = 0$

A) $\frac{15\pi}{8}$ B) $\frac{7\pi}{3}$ C) $\frac{9\pi}{8}$

D) $\frac{8\pi}{3}$ E) $\frac{13\pi}{3}$

38. Indique las soluciones de la ecuación

$\operatorname{sen}^6 x+\operatorname{sen}^4 x+\cos^6 x+\cos^4 x=2$; $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

A) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}\right\}$

39. Resuelva la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}$$

e indique la solución general; $\forall n \in \mathbb{Z}$.

A) $\{(2n+1)\pi\}$

B) $\{2n\pi\}$

C) $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

D) $\{n\pi\}$

E) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

40. Determine el número de soluciones de la ecuación trigonométrica

$$\frac{\tan x+2}{1-\tan x}+\frac{1-\tan x}{\tan x+2}=2 \text{ en } \langle 0; 4\pi\rangle.$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

41. Calcule la suma de soluciones de la ecuación $\sec 2x \sec x=1$; $x \in \langle 0; 10\pi\rangle$.

A) 8π B) 20π C) 15π
D) 25π E) 18π

Bibliografía

- ANDREESCU, Titu y Zuming, FENG. *103 problemas de trigonometría*. Cambridge: Editorial Birkhäuser, 2005.
- FERILLI, Aldo y Eleonora, VIVIANI. *Curso de Trigonometría*. Milán: Editorial Ariani, 1986.
- FLEMING, Walter. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Nueva Yersey: Editorial Prentice Hall, 1999.
- HALL, Henry y KNIGHT, Samuel. *Trigonometría elemental*. México D.F.: Editorial Uteha, 1961.
- INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. *Trigonometría plana y esférica*. Lima: Lumbreras Editores, 1994.
- KUDRIAVTSEV, L. D. *Curso de análisis matemático*. Moscú: Editorial Mir, 1983.
- LA SALLE, Haaser. *Análisis matemático*. México D. F.: Editorial Trillas, 1973.
- LEHMANN, Charles H. *Geometría analítica*. México D. F.: Editorial Limusa, 1978.
- LEITHOLD, Louis. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México D. F.: Editorial Latinoamericana, 1994.
- LIDSKI, V. B. *Problemas de matemáticas elementales*. Moscú: Editorial Mir, 1972.
- LITVINENKO, V. y A., MORDKOVICH. *Álgebra y trigonometría*. Moscú: Editorial Mir, 1989.
- SWOKOWSKI, Cole. *Álgebra y trigonometría*. México D. F.: Editorial Iberoamericana, 1997.

Claves

Geometría

Capítulo I

1 D	5 A	9 A	13 C	17 C	21 C	25 E	29 D	33 B
2 B	6 A	10 C	14 E	18 E	22 B	26 B	30 D	34 C
3 D	7 E	11 E	15 C	19 C	23 B	27 C	31 C	35 B
4 B	8 D	12 C	16 B	20 A	24 A	28 B	32 C	

Capítulo II

1 A	5 B	9 D	13 C	17 C	21 B	25 A	29 E
2 E	6 C	10 B	14 E	18 C	22 D	26 C	30 C
3 B	7 C	11 E	15 B	19 B	23 D	27 A	
4 D	8 C	12 D	16 C	20 D	24 A	28 B	

Capítulo III

1 C	5 B	9 E	13 E	17 D	21 D	25 C	29 A
2 D	6 C	10 B	14 E	18 A	22 E	26 B	30 C
3 B	7 C	11 C	15 E	19 B	23 B	27 A	31 B
4 E	8 E	12 B	16 D	20 D	24 E	28 D	

Capítulo IV

1 B	4 E	7 C	10 B	13 B	16 C	19 E	22 C	25 C
2 C	5 C	8 D	11 B	14 C	17 A	20 D	23 C	26 D
3 B	6 C	9 C	12 E	15 D	18 C	21 D	24 B	27 A
								28 C

Capítulo V

1 E	5 C	9 C	13 C	17 A	21 A	25 A	29 C
2 B	6 B	10 D	14 C	18 E	22 C	26 C	30 E
3 D	7 C	11 A	15 D	19 A	23 D	27 E	31 E
4 C	8 D	12 B	16 B	20 E	24 B	28 D	

Capítulo VI

1 B	5 B	9 E	13 C	17 B	21 D	25 D	29 C
2 D	6 B	10 B	14 D	18 B	22 A	26 E	30 A
3 C	7 D	11 E	15 E	19 C	23 C	27 B	
4 B	8 C	12 B	16 D	20 D	24 C	28 C	

Capítulo VII

1 C	5 B	9 E	13 D	17 B	21 C	25 C	29 C
2 A	6 E	10 E	14 C	18 C	22 E	26 E	30 D
3 D	7 B	11 C	15 E	19 D	23 B	27 E	31 B
4 D	8 B	12 E	16 C	20 B	24 D	28 E	32 C

Capítulo VIII

1 E	5 C	9 C	13 D	17 D	21 D	25 C	29 C	33 B
2 E	6 D	10 D	14 A	18 A	22 B	26 E	30 C	34 D
3 D	7 A	11 B	15 C	19 D	23 A	27 B	31 D	
4 E	8 B	12 C	16 A	20 C	24 C	28 C	32 E	

Capítulo IX

1 D	5 B	9 A	13 C	17 E	21 C	25 C	29 D
2 B	6 E	10 D	14 B	18 B	22 E	26 B	30 A
3 C	7 B	11 D	15 E	19 D	23 C	27 D	31 C
4 A	8 C	12 C	16 B	20 A	24 E	28 C	32 D
							33 E

Capítulo X

1 A	5 E	9 C	13 D	17 A	21 D	25 C	29 D
2 C	6 B	10 E	14 C	18 C	22 E	26 D	30 D
3 B	7 E	11 C	15 E	19 B	23 D	27 E	
4 A	8 D	12 B	16 D	20 E	24 B	28 E	

Capítulo XI

1 D	5 E	9 B	13 C	17 B	21 A	25 D	29 C	33 D
2 D	6 D	10 A	14 B	18 E	22 B	26 B	30 D	34 D
3 E	7 C	11 B	15 C	19 A	23 D	27 B	31 A	35 E
4 B	8 E	12 C	16 D	20 C	24 E	28 E	32 E	

Capítulo XII

1 C	4 C	7 C	10 B	13 E	16 D	19 D	22 E	25 C
2 D	5 C	8 D	11 C	14 B	17 C	20 B	23 B	26 C
3 B	6 D	9 C	12 D	15 D	18 E	21 B	24 D	27 C

Capítulo XIII

1 A	5 B	9 C	13 D	17 D	21 E	25 A	29 E
2 A	6 B	10 A	14 E	18 E	22 E	26 C	
3 C	7 B	11 C	15 E	19 A	23 C	27 E	
4 E	8 C	12 B	16 A	20 D	24 D	28 B	

Capítulo XIV

1 B	5 E	9 D	13 C	17 C	21 A	25 C	29 D
2 D	6 B	10 E	14 B	18 D	22 D	26 E	30 A
3 E	7 D	11 C	15 E	19 D	23 E	27 A	31 E
4 C	8 A	12 E	16 D	20 D	24 A	28 B	

Capítulo XV

1 A	5 D	9 B	13 E	17 B	21 D	25 B	29 D	33 E
2 C	6 E	10 C	14 A	18 C	22 B	26 B	30 C	
3 D	7 A	11 C	15 A	19 B	23 E	27 E	31 B	
4 C	8 D	12 D	16 C	20 E	24 A	28 E	32 C	

Capítulo XVI

1 D	5 E	9 A	13 D	17 D	21 D	25 A	29 E
2 B	6 D	10 C	14 E	18 E	22 B	26 D	30 D
3 E	7 D	11 E	15 E	19 C	23 D	27 A	31 C
4 B	8 B	12 B	16 A	20 D	24 E	28 E	32 D

Capítulo XVII

1 C	5 D	9 E	13 A	17 A	21 D	25 B	29 B
2 A	6 C	10 A	14 B	18 B	22 E	26 D	30 C
3 A	7 C	11 E	15 B	19 D	23 B	27 D	31 D
4 E	8 D	12 B	16 D	20 E	24 E	28 E	

Capítulo XVIII

1 D	5 B	9 B	13 B	17 A	21 E	25 A	29 B
2 E	6 C	10 B	14 C	18 B	22 D	26 D	30 B
3 B	7 C	11 D	15 E	19 D	23 B	27 E	31 D
4 A	8 A	12 A	16 C	20 B	24 D	28 D	32 C

Claves

Trigonometría

Capítulo I

1 B	9 B	17 C	25 A	33 A	41 B	49 C	57 C
2 D	10 E	18 A	26 C	34 B	42 C	50 E	58 E
3 A	11 C	19 D	27 B	35 D	43 C	51 D	59 D
4 C	12 D	20 A	28 D	36 C	44 A	52 A	60 A
5 B	13 A	21 B	29 E	37 C	45 D	53 C	
6 D	14 D	22 D	30 A	38 A	46 E	54 B	
7 E	15 B	23 C	31 C	39 B	47 D	55 E	
8 B	16 E	24 E	32 E	40 D	48 B	56 A	

Capítulo II

1 E	6 D	11 E	16 D	21 C	26 D	31 D	36 A
2 A	7 E	12 A	17 E	22 B	27 C	32 C	37 C
3 E	8 A	13 C	18 C	23 D	28 D	33 B	38 C
4 E	9 B	14 D	19 A	24 C	29 D	34 E	39 E
5 C	10 B	15 C	20 E	25 E	30 C	35 D	40 B

Capítulo III

1 D	5 C	9 B	13 C	17 A	21 B	25 A	29 D
2 E	6 B	10 C	14 C	18 D	22 E	26 E	30 C
3 B	7 A	11 E	15 E	19 D	23 C	27 C	31 E
4 A	8 D	12 B	16 B	20 A	24 B	28 B	

Capítulo IV

1 A	6 E	11 C	16 C	21 E	26 C	31 E	36 B
2 B	7 C	12 C	17 E	22 B	27 B	32 C	37 C
3 C	8 E	13 E	18 E	23 A	28 C	33 E	38 A
4 D	9 C	14 E	19 C	24 E	29 C	34 A	39 B
5 B	10 A	15 C	20 D	25 D	30 E	35 D	40 B

Capítulo V

1 D	7 E	13 D	19 D	25 E	31 D	37 D
2 E	8 A	14 B	20 D	26 E	32 C	38 B
3 A	9 D	15 E	21 E	27 A	33 B	39 E
4 B	10 B	16 A	22 D	28 C	34 E	40 A
5 C	11 C	17 C	23 A	29 B	35 C	41 C
6 C	12 A	18 B	24 B	30 C	36 A	

Capítulo VI

1 C	7 B	13 A	19 C	25 E	31 E	37 B
2 B	8 B	14 E	20 C	26 A	32 C	38 E
3 E	9 D	15 D	21 B	27 B	33 C	39 E
4 A	10 B	16 B	22 D	28 D	34 D	40 E
5 C	11 B	17 E	23 D	29 B	35 E	41 E
6 A	12 E	18 B	24 E	30 D	36 D	42 D

Capítulo VII

1 B	6 A	11 B	16 E	21 B	26 C	31 A	36 A
2 A	7 B	12 A	17 C	22 A	27 A	32 B	37 C
3 C	8 D	13 D	18 B	23 E	28 C	33 C	38 D
4 E	9 C	14 C	19 D	24 B	29 E	34 D	39 B
5 D	10 E	15 B	20 D	25 B	30 D	35 E	40 D

Capítulo VIII

1 C	7 C	13 E	19 A	25 A	31 C	37 D
2 C	8 D	14 C	20 E	26 E	32 A	38 D
3 D	9 C	15 E	21 E	27 C	33 E	39 B
4 A	10 B	16 E	22 E	28 C	34 C	40 E
5 B	11 B	17 E	23 B	29 E	35 E	41 B
6 B	12 A	18 D	24 D	30 D	36 B	42 C

Capítulo IX

1 B	11 B	21 D	31 E	41 C	51 E	61 C	71 A
2 C	12 A	22 E	32 A	42 B	52 C	62 D	72 B
3 E	13 E	23 B	33 B	43 D	53 A	63 A	73 C
4 D	14 D	24 D	34 E	44 A	54 D	64 B	74 D
5 B	15 B	25 B	35 C	45 E	55 B	65 E	75 A
6 C	16 B	26 A	36 D	46 B	56 C	66 A	76 E
7 D	17 A	27 A	37 B	47 A	57 D	67 C	77 C
8 A	18 D	28 C	38 B	48 E	58 A	68 D	78 B
9 C	19 D	29 D	39 D	49 D	59 B	69 B	79 D
10 D	20 B	30 D	40 D	50 B	60 E	70 E	80 E

Capítulo X

1 B	6 E	11 E	16 A	21 C	26 D	31 C	36 D
2 D	7 A	12 A	17 C	22 E	27 B	32 B	37 A
3 C	8 B	13 C	18 B	23 C	28 D	33 C	38 E
4 E	9 B	14 E	19 D	24 A	29 A	34 A	39 E
5 C	10 B	15 C	20 E	25 B	30 A	35 B	40 D

Capítulo XI

1 B	6 A	11 A	16 A	21 A	26 B	31 B	36 C
2 E	7 E	12 B	17 C	22 B	27 A	32 E	37 E
3 C	8 C	13 D	18 E	23 C	28 B	33 A	38 A
4 C	9 E	14 C	19 B	24 E	29 D	34 D	
5 D	10 B	15 C	20 D	25 D	30 C	35 B	

Capítulo XII

1 B	6 A	11 D	16 D	21 D	26 C	31 B	36 C
2 D	7 E	12 D	17 D	22 B	27 A	32 D	37 C
3 A	8 E	13 A	18 E	23 D	28 B	33 E	38 B
4 C	9 B	14 C	19 B	24 A	29 A	34 B	39 A
5 D	10 C	15 C	20 B	25 C	30 B	35 B	40 D

Capítulo XIII

1 C	5 C	9 B	13 D	17 E	21 D	25 E	29 E
2 A	6 C	10 C	14 B	18 D	22 A	26 D	30 D
3 E	7 C	11 A	15 B	19 C	23 C	27 C	31 C
4 B	8 A	12 E	16 A	20 B	24 B	28 B	32 A

Capítulo XIV

1 C	7 C	13 B	19 E	25 E	31 C	37 D
2 D	8 C	14 E	20 B	26 A	32 A	38 D
3 A	9 D	15 C	21 E	27 B	33 C	39 D
4 C	10 A	16 A	22 C	28 E	34 B	40 E
5 E	11 B	17 C	23 D	29 A	35 C	41 B
6 A	12 C	18 D	24 B	30 E	36 E	