CENGAGE Learning

Precálculo

Álgebra y Trigonometría con geometría analítica

SWOKOWSKI • COLE

Precálculo

Álgebra y Trigonometría

con geometría analítica

Primera edición

EARL W. SWOKOWSKI
JEFFERY A. COLE
Community College Anoka-Ramsey

Traducción
María del Pilar Carril Villarreal
Traductora profesional

Revisión técnica
Laura Isabel Mora Reyes
Escuela Nacional Preparatoria Número 6
Universidad Nacional Autónoma de México

Alejandro Chávez Ochoa
César Augusto Hernández Flores
Jonathan Galván Colín
Preparatoria
Tecnológico de Monterrey
Campus Ciudad de México

María de Guadalupe Arroyo Santisteban
Vinicio Pérez Fonseca
José Cruz Ramos Báez
Ignacio García Juárez
Universidad Panamericana ECEE

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning

Precálculo
Álgebra y trigonometría
con geometría analítica
Primera edición
Earl W. Swokowski, Jeffery A. Cole

Gerente editorial de contenidos en español
Jesús Mares Chacón

Gerente de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente de Desarrollo Editorial en Español
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Javier Reyes Martínez

Diseño de portada:
Mariana Sierra Enriquez

Imagen de portada:
©Kisov Boris / Shutterstock.com

Composición tipográfica:
Mariana Sierra Enriquez

Traducido del libro
Precalculus: Functions and Graphs, Twelfth Edition, Enhanced Edition
Earl W. Swokowski, Jeffery A. Cole

Publicado en inglés por Cengage Learning © 2017
ISBN: 978-1-305-66309-1

Datos para catalogación bibliográfica:
Swokowski, Earl W.; Cole, Jeffery A.
Precálculo
Álgebra y Trigonometría
con geometría analítica
Primera edición
ISBN: 978-607-526-546-9

Visite nuestro sitio web en:
http://latinoamerica.cengage.com

A LA MEMORIA DE EARL W. SWOKOWSKI

Contenido

Prefacio

CAPÍTULO 1 **Temas de álgebra 1**

1.1 Números reales 2
1.2 Exponentes y radicales 16
1.3 Expresiones algebraicas 27
1.4 Ecuaciones 41
1.5 Números complejos 57
1.6 Desigualdades 64
Capítulo 1 Ejercicios de repaso 75
Capítulo 1 Ejercicios para análisis 77
Capítulo 1 Examen 79

CAPÍTULO 2 **Funciones y gráficas 81**

2.1 Sistemas de coordenadas rectangulares 82
2.2 Gráficas de ecuaciones 89
2.3 Rectas 104
2.4 Definición de función 120
2.5 Gráficas de funciones 136
2.6 Funciones cuadráticas 151
2.7 Operaciones con funciones 165
Capítulo 2 Ejercicios de repaso 174
Capítulo 2 Ejercicios para análisis 180
Capítulo 2 Examen 181

CAPÍTULO 3 **Funciones polinomiales y racionales 183**

3.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2 184
3.2 Propiedades de la división 194
3.3 Ceros de polinomios 201
3.4 Ceros complejos y racionales de polinomios 213
3.5 Funciones racionales 221
3.6 Variación 236
Capítulo 3 Ejercicios de repaso 244
Capítulo 3 Ejercicios para análisis 246
Capítulo 3 Examen 247

CAPÍTULO 4 **Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas 249**

4.1 Funciones inversas 250
4.2 Funciones exponenciales 261
4.3 La función exponencial natural 274
4.4 Funciones logarítmicas 283
4.5 Propiedades de los logaritmos 297
4.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 305
Capítulo 4 Ejercicios de repaso 316
Capítulo 4 Ejercicios para análisis 319
Capítulo 4 Examen 322

CAPÍTULO 5 **Funciones trigonométricas 323**

5.1 Ángulos 324
5.2 Funciones trigouométricas de los ángulos 334
5.3 Funciones trigonométricas de los uúmeros reales 349
5.4 Valores de las funciones trigonométricas 366
5.5 Gráficas trigonométricas 373
5.6 Gráficas trigonométricas adicionales 386
5.7 Problemas aplicados 393
Capítulo 5 Ejercicios de repaso 405
Capítulo 5 Ejercicios para análisis 411
Capítulo 5 Examen 412

CAPÍTULO 6 **Trigonometría analítica 415**

6.1 Verificación de identidades trigonométricas 416
6.2 Ecuaciones trigonométricas 422
6.3 Fórmulas de suma y resta 436
6.4 Fórmulas de múltiplos de un ángulo 446
6.5 Fórmulas de producto a suma y suma a producto 455
6.6 Funciones trigonométricas inversas 460
Capítulo 6 Ejercicios de repaso 475
Capítulo 6 Ejercicios para análisis 477
Capítulo 6 Examen 479

CAPÍTULO 7 **Aplicaciones de trigonometría 481**

7.1 Ley de los senos 482
7.2 Ley de los cosenos 491
7.3 Vectores 500
7.4 El producto punto 514
7.5 Forma trigonométrica de números complejos 524
7.6 Teorema de De Moivre y las raíces n-ésimas de números complejos 530
Capítulo 7 Ejercicios de repaso 535
Capítulo 7 Ejercicios para análisis 538
Capítulo 7 Examen 540

CAPÍTULO 8 **Sistemas de ecuaciones y desigualdades 543**

8.1 Sistemas de ecuaciones 544
8.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables 553
8.3 Sistemas de desigualdades 562
8.4 Programación lineal 569
8.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables 577
8.6 Álgebra de matrices 592
8.7 El inverso de una matriz 601
8.8 Determinantes 607

8.9 Propiedades de los determinantes 613
8.10 Fracciones parciales 621
Capítulo 8 Ejercicios de repaso 627
Capítulo 8 Ejercicios para análisis 630
Capítulo 8 Examen 632

CAPÍTULO 9 Sucesiones, series y probabilidad 635

9.1 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria 636
9.2 Sucesiones aritméticas 649
9.3 Sucesiones geométricas 656
9.4 Inducción matemática 666
9.5 Teorema del binomio 672
9.5 Permutaciones 680
9.6 Permutaciones y combinaciones distinguibles 687
9.7 Probabilidad 694
Capítulo 9 Ejercicios de repaso 709
Capítulo 9 Ejercicios para análisis 711
Capítulo 9 Examen 713

CAPÍTULO 10 Temas de geometría analítica 715

10.1 Parábolas 716
10.2 Elipses 725
10.3 Hipérbolas 738
10.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas 749
10.5 Coordenadas polares 762
10.6 Ecuaciones polares de cónicas 776
Capítulo 10 Ejercicios de repaso 782
Capítulo 10 Ejercicios para análisis 784
Capítulo 10 Examen 786

Apéndices

I Gráficas comunes y sus ecuaciones AP2

II Resumen de transformaciones gráficas AP4

III Gráficas de las funciones trigonométricas y sus inversas AP6

IV Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una unidad circular AP8

Respuestas de ejercicios seleccionados A1

Índice analítico A85

Lista de temas a estudiar con ayuda de calculadora graficadora

CAPÍTULO 1 **Temas de álgebra**

Almacenamiento de valores y evaluación de expresiones 4
Recíprocos 6
Resta y negativos 6
Prueba de desigualdades y de la ley de tricotomía 8
Valor absoluto 10
Forma científica 13
Notación exponencial 16
Raíz enésima 20
Exponentes racionales 24
Comprobación del resultado de una factorización 32
Cómo determinar el *mcm* 34
Suma de fracciones 34
Cómo crear una tabla 35
Comprobación de ecuaciones 47
Operaciones con números complejos 60-61

CAPÍTULO 2 **Funciones y gráficas**

Trazo de puntos 86
Trazo de la gráfica en una ventana de visualización estándar 93
Estimación de los puntos de intersección de las gráficas 99-100
Cómo encontrar la recta de mejor ajuste 114
Representación de exponentes racionales y cómo determinar valores funcionales 130
Trazo de la gráfica de una función definida por tramos 142
Cómo encontrar un valor máximo (o mínimo) 156

CAPÍTULO 4 **Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas**

Gráfica de la inversa de una función 257

CAPÍTULO 5 **Funciones trigonométricas**

Conversión de medición en radianes a medición en grados 328-329

CAPÍTULO 6 **Trigonometría analítica**

Aproximación de las soluciones de una ecuación trigonométrica 429

CAPÍTULO 7 Aplicaciones de trigonometría

Suma de dos vectores 506
Obtención de un producto punto 514
Operaciones con números complejos 526
Obtención de la raíz de un número complejo 533

CAPÍTULO 8 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Gráfica de una desigualdad 566
Cómo ingresar una matriz 585
Solución de un sistema utilizando la forma escalonada reducida de renglón
Multiplicación de matrices 597
Cómo encontrar el determinante de una matriz 610

CAPÍTULO 9 Sucesiones, series y probabilidad

Generación de sucesiones 637
Gráfica de una sucesión 638
Cómo encontrar términos de una sucesión definida de forma recursiva 639
Cómo encontrar la suma de una sucesión 641
Cómo encontrar los términos de una sucesión de sumas parciales 643
Uso del modo Sucesión de la calculadora TI-83/4 Plus 645
Cálculo de factoriales 674
Cálculo de permutaciones 685
Cálculo de combinaciones 691

CAPÍTULO 10 Temas de Geometría analítica

Gráficas de semielipses 731
Trazo de gráficas en modo paramétrico 752
Conversión de polar a rectangular 765
Conversión de rectangular a polar 765
Gráfica de una ecuación polar 768

Prefacio

La primera edición en español (duodécima en inglés) de *Precálculo*: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica incluye más de 650 ejercicios y 11 ejemplos nuevos, muchos de los cuales son resultado de las sugerencias de usuarios y revisores de ediciones anteriores. Casi 22% de los ejercicios son diferentes. El capítulo 11 (disponible en inglés y en línea en el sitio web www.cengagebrain.com) es nuevo. Todo se ha incorporado sin sacrificar la precisión matemática que ha sido primordial para el éxito de este libro.

Una de las novedades de esta edición es el examen al final de cada capítulo, que incluye preguntas sencillas representativas de las preguntas planteadas previamente, así como preguntas conceptuales para el examen por capítulo.

La inclusión de ejemplos e inserciones del uso de calculadora graficadora, que presentan secuencias específicas de teclas y pantallas del modelo TI-83/4 Plus, ha demostrado aportar un valor agregado al texto, en particular para quienes trabajan por primera vez con calculadoras de este tipo. También brinda más flexibilidad a los docentes en cuanto a la forma de abordar una solución. El diseño de la obra permite identificar con facilidad las inserciones sobre recursos tecnológicos, las cuales se incluyen en un índice específico para facilitar su búsqueda.

Enseguida se presenta un resumen de los capítulos, seguido por una breve descripción del curso universitario de álgebra que impartí en el Community College Anoka-Ramsey, y luego una lista de las características generales del libro.

Perspectiva general

CAPÍTULO 1 Este capítulo contiene un resumen de algunos temas de álgebra elemental. Usted ya debe estar familiarizado con gran parte de este material, pero algunos de los ejercicios suponen un reto que lo preparará para cursos de cálculo integral y diferencial. Se introducen y utilizan operaciones con calculadora graficadora para comprobar las operaciones algebraicas. Asimismo, las ecuaciones y desigualdades se resuelven de manera algebraica y numérica con apoyo de herramientas tecnológicas; en capítulos posteriores se resolverán gráficamente. Usted ampliará sus conocimientos sobre estos temas; por ejemplo, seguramente ha trabajado con la fórmula cuadrática, pero se le pedirá que la relacione con la factorización y que trabajen con coeficientes que no son números reales (revise los ejemplos 6 y 7 de la sección 1.4).

CAPÍTULO 2 En este capítulo se introducen las gráficas y las funciones bidimensionales. Se proporcionan instrucciones específicas para la mayoría de las funciones básicas de una calculadora graficadora, por ejemplo, encontrar ceros y puntos de intersección, así como para algunos de los temas más complejos, entre ellos determinar un modelo de regresión y graficar una función definida por intervalos. El ejemplo 10 en la sección 2.5, uno de mis favoritos, es una aplicación de actualidad (impuestos) que relaciona tablas, fórmulas y gráficas. La notación de flechas, introducida en la sección 3.5, se ha trasladado a la sección 2.2 y se hace referencia a ella con más frecuencia.

CAPÍTULO 3 Este capítulo comienza con un análisis de las funciones polinómicas y un poco de teoría de polinomios. En la sección 3.5 se realiza un análisis completo de las funciones racionales, seguido por una sección sobre variaciones, que incluye gráficas de funciones polinómicas simples y funciones racionales.

CAPÍTULO 4 Las funciones inversas son el primer tema de análisis, seguido de varias secciones que se ocupan de las funciones exponenciales y logarítmicas. Hay un ejemplo nuevo sobre la obtención de la inversa de una función racional (revise el ejemplo 4 de la sección 4.1).

CAPÍTULO 5 Los ángulos son el primer tema de este capítulo. A continuación se introducen las funciones trigonométricas, utilizando el método del triángulo rectángulo, y luego se definen en términos de una circunferencia unitaria. Las identidades trigonométricas básicas se mencionan a lo largo del capítulo, el cual concluye con secciones sobre gráficas trigonométricas y problemas de aplicación.

CAPÍTULO 6 Este capítulo trata principalmente sobre las identidades trigonométricas, sus fórmulas y ecuaciones. La última sección contiene las definiciones, propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas inversas.

CAPÍTULO 7 Las leyes de senos y cosenos se utilizan para resolver triángulos oblicuos. Luego se introducen los vectores y se utilizan en las aplicaciones. Las dos últimas secciones se relacionan con las funciones trigonométricas y los números complejos.

CAPÍTULO 8 Los sistemas de desigualdades y la programación lineal siguen inmediatamente a la solución de sistemas por sustitución y eliminación. A continuación se introducen las matrices, mismas que se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones. Este capítulo concluye con una discusión de los determinantes y las fracciones parciales.

CAPÍTULO 9 El capítulo comienza con una exposición de las sucesiones, que se apoya considerablemente en el uso de herramientas tecnológicas. Las fórmulas para el enésimo término de las sucesiones aritméticas y geométricas se han generalizado para encontrarlo utilizando cualquier término, no sólo el primero. Luego se presentan la inducción matemática y el teorema del binomio, seguidos por temas de conteo. La última sección trata sobre temas como probabilidades y valor esperado. Mi ejemplo favorito incluye un nuevo tipo de problema de probabilidad, y la solución se puede aplicar a muchos problemas similares (revise el ejemplo 9 de la sección 9.8).

CAPÍTULO 10 Las secciones sobre parábola, elipse e hipérbola inician este capítulo. Dos formas diferentes de representar funciones se presentan en las secciones subsiguientes sobre ecuaciones paramétricas y coordenadas polares. Se han incorporado cerca de 100 ejercicios nuevos.

CAPÍTULO 11 (disponible sólo en inglés y en línea) Los límites de funciones se introducen de forma intuitiva y precisa en las dos primeras secciones de este nuevo capítulo. En la sección 11.2, el primer ejemplo ayudará al estudiante a sentirse cómodo con la notación. Las dos últimas secciones contienen los teoremas de límites (incluidos los que tienden a infinito), lo que le proporciona una base sólida para avanzar hacia cualquier curso básico de cálculo.

Mi curso

En el Community College de Anoka-Ramsey en Coon Rapids, Minnesota, Álgebra I es un curso de un semestre.

Para los estudiantes que tienen la intención de tomar Cálculo, este curso va seguido por un curso de un semestre, Álgebra II y Trigonometría, el cual también sirve como un curso final de matemáticas.

Las secciones que se cubren en Álgebra I son:

2.1–2.7, 3.1, 3.5 (parte), 3.6, 4.1–4.6, 8.1–8.4, 9.1–9.3 y 9.5–9.8.

El capítulo 1 se usa como material de repaso de algunas clases y las secciones restantes se enseñan en el curso siguiente. En algunas secciones se requiere usar calculadora graficadora y en otras es opcional.

Características de la edición

Una lista específica de temas con calculadora graficadora Para una consulta rápida, se incluye una lista de temas a manejar con calculadora graficadora.

Tablas Las tablas ofrecen un acceso fácil a resúmenes de las propiedades, leyes, gráficas, relaciones y definiciones, y a menudo contienen ejemplos sencillos de los conceptos que se presentan.

Ejemplos Todos los ejemplos, titulados para facilitar su consulta, proporcionan soluciones detalladas de problemas similares a aquellos que aparecen en las series de ejercicios. Muchos incluyen gráficas o tablas para ayudarle a usted a entender los procedimientos y soluciones.

Explicaciones paso a paso Con la finalidad de ayudarle a seguirlas más fácilmente, muchas de las soluciones de los ejemplos contienen explicaciones detalladas.

Ejercicios para análisis Cada capítulo concluye con varios ejercicios adecuados para comentarse en equipos de discusión. Estos ejercicios varían en grado dificultad de fáciles a difíciles y de teóricos a orientados a la aplicación.

Demostraciones Las soluciones de algunos ejemplos se prueban de forma explícita, a fin de recordarle al estudiante que debe comprobar que sus soluciones satisfagan las condiciones de los problemas.

Ejemplos con calculadora graficadora Donde es apropiado, se agregaron al texto ejemplos que requieren usar una herramienta o dispositivo de graficación, los cuales se identifican con el icono de calculadora (que se muestra a la izquierda) y se ilustran con una figura reproducida de la pantalla de la calculadora graficadora.

Inserciones con calculadora graficadora Además de los ejemplos con calculadora graficadora, hay inserciones que resaltan algunas de las capacidades de este tipo de calculadoras o ilustran su uso para realizar las operaciones en estudio. Por ejemplo, vea en la sección 9.1 "Uso del modo de sucesión en la TI-83/4 Plus".

Ejercicios con calculadora graficadora En secciones donde conviene, se incluyen ejercicios diseñados específicamente para resolverse con una herramienta de graficación. Estos ejercicios también se identifican con el icono de calculadora (que se muestra a la izquierda).

Aplicaciones Para despertar el interés del estudiante y ayudarle a relacionar los ejercicios con situaciones reales, se han titulado los ejercicios aplicación. Numerosos docentes han señalado que las aplicaciones constituyen una de las características más sólidas del libro.

Ejercicios Las series de ejercicios comienzan con problemas cotidianos y avanzan de forma gradual hacia problemas más complejos. Un gran número de ejercicios contiene gráficas y datos tabulados; otros le piden al estudiante diseñar un modelo matemático para los datos proporcionados. Muchos de los ejercicios nuevos requieren que usted comprenda la relación conceptual entre una ecuación y su gráfica.

Por lo general, los problemas de aplicación aparecen al final de una serie de ejercicios, de modo que el estudiante adquiera seguridad en la aplicación de las nuevas ideas planteadas, antes de que intente resolver problemas que requieren un mayor análisis y síntesis de estas ideas. Los ejercicios de repaso al final de cada capítulo se pueden usar como preparación para los exámenes.

Exámenes por capítulo Esta es una característica nueva en esta edición. Los exámenes contienen preguntas representativas de los ejercicios de las secciones, así como preguntas conceptuales. Espero que los docentes me compartan sus preguntas preferidas de examen; por favor háganmelas llegar.

Lineamientos o pasos Los lineamientos que se presentan en un recuadro enumeran los pasos de un procedimiento o técnica para ayudarle al estudiante a resolver problemas de forma sistemática.

Alertas Intercaladas en el texto hay llamadas de atención para alertar al estudiante sobre errores comunes que se cometen cuando se estudia la materia.

Diseño del libro Las figuras y gráficas, que constituyen un conjunto de arte total insuperable, se han generado por computadora para obtener mayor precisión, utilizando la tecnología más reciente.

Formato de interiores El libro ha sido diseñado para asegurar que las exposiciones de los temas sean fáciles de seguir y los conceptos importantes estén resaltados. Se utiliza color para esclarecer pedagógicamente las gráficas complejas y ayudar al estudiante a visualizar problemas prácticos.

Apéndices El apéndice I, Gráficas comunes y sus ecuaciones, es un resumen ilustrado de gráficas y ecuaciones que los estudiantes suelen encontrar en matemáticas de precálculo. El apéndice II, Resumen de las transformaciones de gráficas, es una sinopsis ilustrativa de las transformaciones básicas de gráficas que se estudian en el texto: desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión. El apéndice III, Gráficas de funciones trigonométricas y de sus inversas, contiene gráficas, dominios y rangos de las seis funciones trigonométricas y sus inversas. El apéndice IV, Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una circunferencia unitaria, es una referencia de página completa sobre los ángulos más comunes en una circunferencia unitaria, valiosa para quienes intentan aprender los valores de las funciones trigonométricas básicas. El apéndice V, Teoremas de límites, contiene demostraciones de algunos teoremas del capítulo 11; este apéndice está disponible en inglés en el sitio web del estudiante.

Sección de respuestas El apéndice de respuestas del final del libro contiene las respuestas de la mayoría de los ejercicios impares, así como las de todos los ejercicios de repaso de los capítulos. Se aplicó mucho esfuerzo y dedicación para hacer que esta sección fuera una herramienta de aprendizaje para el estudiante en vez de sólo un sitio para comprobar respuestas. Por ejemplo, se proporcionan demostraciones para los problemas de inducción matemática. Las respuestas numéricas de muchos ejercicios se expresan tanto en forma exacta como aproximada. Las gráficas, demostraciones y sugerencias se incluyen cuando es apropiado. Las soluciones y respuestas preparadas por el autor garantizan un alto grado de coherencia entre el texto, las soluciones y las respuestas.

Recursos didácticos para el docente

(disponibles en inglés para los docentes que adopten el libro como texto básico en sus cursos)

Instructor's Solutions Manual por Jeffery A. Cole

ISBN-10: 1-111-57349-2; ISBN-13: 978-1-111-57349-2

Este manual, preparado por el autor, incluye las respuestas de todos los ejercicios y soluciones detalladas para la mayoría de ellos. Ha sido revisado a fondo para lograr mayor exactitud. Las soluciones del capítulo 11 se incluyen en el sitio web del profesor.

MindTap for Mathematics and Statistics

(disponible en inglés y con costo adicional)

La experiencia es importante cuando se desea contribuir al éxito de los estudiantes. Con MindTap for Mathematics and Statistics, los docentes pueden:

- Personalizar la ruta de aprendizaje para que coincida con el programa del curso al reordenar el contenido o añadir material original al contenido en línea
- Mejorar la experiencia de aprendizaje y los resultados mediante la simplificación del flujo de trabajo del estudiante
- Personalizar las evaluaciones y tareas en línea
- Conectar un portal de sistema de administración del aprendizaje al curso en línea
- Hacer un seguimiento de la participación, el progreso y la comprensión de los estudiantes
- Promover el éxito del estudiante mediante interactividad, multimedia y ejercicios

Los docentes que utilizan un sistema de administración del aprendizaje (como Blackboard, Canvas o Moodle) para el seguimiento de los contenidos, tareas y evaluaciones del curso pueden acceder con facilidad a MindTap, la herramienta de contenidos y evaluaciones para este curso.

Conozca más en www.cengage.com/mindtap.

CengageBrain.com Para acceder a otros materiales del curso y recursos complementarios, visite www.cengagebrain.com.

Herramientas de aprendizaje para el estudiante

(disponibles en inglés y con costo adicional)

Manual de soluciones para el estudiante por Jeffery A. Cole

ISBN-10: 1-111-57350-6; ISBN-13: 978-1-111-57350-8

Este manual, preparado por el autor, ofrece las soluciones de todos los ejercicios impares, así como estrategias para la solución de ejercicios adicionales. También incluye muchos consejos y recomendaciones útiles. Las soluciones del capítulo 11 se incluyen en el sitio web del estudiante.

MindTap para matemáticas y estadística es una solución digital que coloca el aprendizaje en el núcleo de la experiencia. Además de problemas generados mediante algoritmos, retroalimentación inmediata y un potente sistema de evaluación de respuestas y calificación, MindTap para matemáticas y estadística ofrece una experiencia personalizada que combina tareas dinámicas, un plan de mejora continua y apoyo integrado justo a tiempo, que convierte la rutina en innovación, la apatía en compromiso y a los estudiantes que aprenden por memorización en pensadores de alto nivel. Descubra más en www.cengage.com/mindtap.

DVD específicos del libro

ISBN-10: 1-111-58077-4; ISBN-13: 978-1-111-58077-3

Esta serie de DVD presenta el material de cada capítulo, dividido en lecciones de solución de problemas de 10 a 20 minutos que cubren cada sección.

Agradecimientos

Muchos de los cambios en esta edición se deben a las siguientes personas, quienes revisaron el manuscrito o hicieron sugerencias para incrementar la utilidad del libro para el estudiante:

Elsie Campbell, Universidad Estatal Angelo
Ronald Dotzel, Universidad de Missouri-St. Louis
Sherry Gale, Universidad de Cincinnati
Sheila Ledford, Colegio Comunitario de la Costa de Georgia
Chris Parks, Universidad de Indiana
Brenda Shryock, Universidad de Carolina del Norte en Chapel Hill
Lisa Townsley, Universidad de Georgia
Stephanie Vance, Colegio Estatal Adams
Loris Zucca, Lone Star College-Kingwood

También agradezco a Marv Riedesel y Mary Johnson por su revisión de la precisión de los ejemplos y ejercicios nuevos y ya revisados.

Estoy agradecido por la excelente cooperación del personal de Cengage Learning, especialmente del grupo editorial de Gary Whalen, Stacy Green, Cynthia Ashton, Samantha Lugtu, Jennifer Risden y Stefanie Beck. Gracias a Lynh Pham por el manejo de muchos temas de tecnología y a Mia Dreyer por su ayuda en la preparación del manuscrito. Sally Lifland, Gail Magin, Jane Hoover y Quica Ostrander, de Lifland et al., Bookmakers, se encargaron del libro en todas las etapas de producción, pusieron un cuidado excepcional para que no se produjeran inconsistencias y ofrecieron muchas sugerencias útiles. El fallecido George Morris, de Scientific Illustrators, creó el arte de este libro con precisión matemática a lo largo de varias ediciones. Su hijo Brian continua con esta tradición de excelencia.

Además de todas las personas nombradas aquí, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a los estudiantes y docentes que han contribuido a estructurar mis puntos de vista sobre la enseñanza de las matemáticas. Por favor, siéntase en la libertad de escribirme (Jeff-cole@comcast.net) en torno a cualquier aspecto del libro, apreciaré mucho su opinión.

Jeffery A. Cole

1

Temas de álgebra

1.1 Números reales

1.2 Exponentes y radicales

1.3 Expresiones algebraicas

1.4 Ecuaciones

1.5 Números complejos

1.6 Desigualdades

La palabra *álgebra* proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala*, título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe al-Khworizimi. El título se ha traducido como la ciencia de la restauración y reducción, lo cual significa transponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La transliteración latina de *al-jabr* llevó al nombre de la rama de las matemáticas que ahora se llama álgebra.

Este capítulo inicia con una revisión de los números reales y sus propiedades, las cuales se utilizan a lo largo del libro y en otros cursos de matemáticas. Se presenta una discusión sobre algunas técnicas algebraicas fundamentales antes de centrar la atención en ecuaciones y desigualdades, cuyas soluciones son subconjuntos de la recta numérica real.

1.1 Números reales

Los números reales se utilizan en las matemáticas, y debemos familiarizarnos con los símbolos que los representan, por ejemplo

$$1,\ 73,\ -5,\ \tfrac{49}{12},\ \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt[3]{-85},\quad 0.33333\ldots,\quad 596.25,$$

etcétera. Los **enteros positivos**, o **números naturales**, son

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

Los **números enteros no negativos** son los números naturales combinados con el cero. Los **números enteros** son los números naturales, el cero y los enteros negativos.

$$\ldots,\quad -4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

A lo largo del libro, las letras minúsculas $a, b, c, x, y, \ldots$ representan números reales arbitrarios (también llamados *variables*). Si a y b denotan el mismo número real, se escribe $a = b$, lo cual se lee "a **es igual a** b" y se le llama igualdad. La notación $a \neq b$ se lee "a **no es igual a** b."

Si a, b y c son enteros y $c = ab$, entonces a y b son **factores**, o **divisores**, de c. Por ejemplo, como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6)$$

sabemos que $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6 son factores de 6

Un entero positivo p diferente de 1 es **primo** si sus únicos factores positivos son 1 y p. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El **teorema fundamental de la aritmética** establece que todo entero positivo diferente de 1 puede expresarse como el producto de números primos de una y solo una manera (excepto por el orden de los factores). Algunos ejemplos son

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,\quad 540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Un **número racional** es un número real que puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Tenga en cuenta que todo número entero a es un número racional, ya que se puede expresar en la forma $a/1$. Todo número real puede expresarse como un decimal y las representaciones decimales de los números racionales son *finitas* o *no finitas* y *periódicas*. Por ejemplo, podemos mostrar mediante el proceso aritmético de división que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \quad \text{y} \quad \tfrac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{55}$ se repiten de forma indefinida (lo cual a veces se escribe $3.2\overline{18}$).

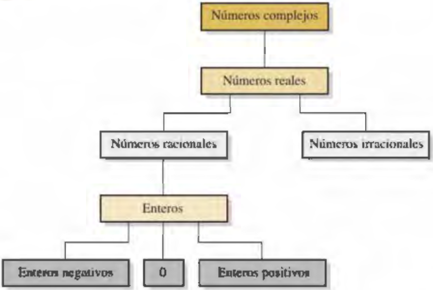
En la escritura técnica, es conveniente utilizar el símbolo $\approx$ para **es aproximadamente igual a**.

Los números reales que no son racionales son **números irracionales**. Las representaciones decimales de los números irracionales son siempre *no finitas* y *no periódicas*. Un número irracional común, que se denota por π, es la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. A veces se usa la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π es **aproximadamente igual a** 3.1416.

No hay un número *racional* b tal que $b^2 = 2$, donde b^2 se denota $b \cdot b$. Sin embargo, existe un número *irracional*, indicado por $\sqrt{2}$ (**raíz cuadrada** de 2), tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

El sistema de los **números reales** está formado por todos los números racionales e irracionales. Las relaciones entre los tipos de números que se utilizan en el álgebra se ilustran en el diagrama de la figura 1, donde una línea que une dos rectángulos significa que los números mencionados en el rectángulo superior incluyen a aquellos en el rectángulo inferior. Los números complejos, que se estudian en la sección 1.5, incluyen todos los números reales.

FIGURA 1 Tipos de números que se utilizan en el álgebra



Los números reales son **cerrados con respecto a la operación de adición** (que se denota por $+$); es decir, a todo par a, b de números reales le corresponde exactamente un número real $a + b$ llamado la **suma** de a y b. Los números reales son también **cerrados respecto a la multiplicación** (que se denota con $\cdot$); es decir, a todo par a, b de números reales le corresponde exactamente un número real $a \cdot b$ (que también se denota con ab) llamado el **producto** de a y b.

Las propiedades importantes de la adición y la multiplicación de los números reales se listan en la siguiente tabla.

Propiedades de los números reales

Terminología	Caso general	Significado
1) La adición es **conmutativa.**	$a + b = b + a$	El orden no es relevante cuando se suman dos números.
2) La adición es **asociativa.**	$a + (b + c) = (a + b) + c$	La agrupación no es relevante cuando se suman tres números.
3) 0 es el **idéntico aditivo.**	$a + 0 = a$	La suma de 0 a cualquier número da el mismo número.
4) $-a$ es el **inverso aditivo,** o **simétrico,** de a.	$a + (-a) = 0$	La suma de un número y su simétrico da 0.
5) La multiplicación es **conmutativa.**	$ab = ba$	El orden no es relevante cuando se multiplican dos números.
6) La multiplicación es **asociativa.**	$a(bc) = (ab)c$	La agrupación no es relevante cuando se multiplican tres números.
7) 1 es el **idéntico multiplicativo.**	$a \cdot 1 = a$	La multiplicación de un número cualquiera por 1 da el mismo número.
8) Si $a \neq 0$, $\frac{1}{a}$ es el **inverso multiplicativo,** o **recíproco,** de a.	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	La multiplicación de un número diferente de cero por su recíproco da 1.
9) La multiplicación es **distributiva** respecto a la adición.	$a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$	La multiplicación de un número y una suma de dos números es equivalente a multiplicar cada uno de los dos números por el número y luego sumar los productos.

Dado que $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ son siempre iguales, podemos usar $a + b + c$ para expresar este número real. Se utiliza abc ya sea para $a(bc)$ o $(ab)c$. Asimismo, si cuatro o más números reales a, b, c, d se suman o multiplican, podemos escribir $a + b + c + d$ para su suma y $abcd$ para su producto, sin importar la manera en que se agrupan o intercambian los números.

Las propiedades distributivas son útiles para encontrar productos de muchos tipos de expresiones que contienen sumas. El siguiente ejemplo muestra su uso.

EJEMPLO 1 **Uso de las propiedades distributivas**

Si p, q, r y s denotan números reales, demuestre que

$$(p + q)(r + s) = pr + ps + qr + qs$$

SOLUCIÓN Utilizamos las dos propiedades distributivas del punto 9) de la tabla anterior:

$(p + q)(r + s)$

$= p(r + s) + q(r + s)$	segunda propiedad distributiva, con $c = r + s$
$= (pr + ps) + (qr + qs)$	primera propiedad distributiva
$= pr + ps + qr + qs$	eliminamos paréntesis ■

EJEMPLO 2 **Almacenamiento de valores y evaluación de expresiones**

Evalúe los lados izquierdo y derecho de la igualdad del ejemplo 1 para

$$p = 5, \quad q = 3, \quad r = -6 \quad \text{y} \quad s = 7.$$

SOLUCIÓN

COMBINACIÓN DE TECLAS PARA LA CALCULADORA TI-83/4 PLUS

Almacena valores en P, Q, R y S.

5 [STO▷] [ALPHA] [P] [ALPHA] [:]
3 [STO▷] [ALPHA] [Q] [ALPHA] [:]
[(−)] 6 [STO▷] [ALPHA] [R] [ALPHA] [:]
7 [STO▷] [ALPHA] [S] [ENTER]

Evalúa el lado izquierdo (LI).

[(] [ALPHA] [P] [+] [ALPHA] [Q] [)]
[(] [ALPHA] [R] [+] [ALPHA] [S] [)] [ENTER]

Evalúa el lado derecho (LD).

[ALPHA] [P] [ALPHA] [R]
[+] [ALPHA] [P] [ALPHA] [S]
[+] [ALPHA] [Q] [ALPHA] [R]
[+] [ALPHA] [Q] [ALPHA] [S] [ENTER]

```
5→P:3→Q:-6→R:7→S
                7
(P+Q)(R+S)
                8
PR+PS+QR+QS
                8
```

Ambos lados son iguales a 8, lo cual da credibilidad al resultado, pero no demuestra que sea correcto. ■

Las siguientes son propiedades básicas de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces

1) $a + c = b + c$
2) $ac = bc$

Las propiedades 1 y 2 establecen que el mismo número puede sumarse a ambos lados de una igualdad, y ambos lados de una igualdad pueden multiplicarse por el mismo número. Estas propiedades se usarán ampliamente en todo el libro como auxiliar para encontrar soluciones de las ecuaciones.

El siguiente resultado se puede demostrar.

Productos que involucran el 0

1) $a \cdot 0 = 0$ para todo número real a

2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

Cuando usamos la palabra *o* como lo hacemos en el inciso 2), queremos decir que *por lo menos* uno de los factores a y b es 0. Nos referimos a 2) como el *teorema del factor cero* en un trabajo futuro.

Algunas propiedades de los negativos se listan en la siguiente tabla.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
1) $-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
3) $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
4) $(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco $\frac{1}{a}$ de un número real diferente de cero a suele denotarse con a^{-1}, como en la siguiente tabla.

Notación de recíprocos

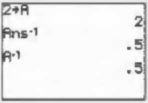
Definición	Ejemplos
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.	$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{1}{3/4} = \dfrac{4}{3}$

Observe que si $a \neq 0$, entonces

$$a \cdot a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Recíprocos

2 STO▷ ALPHA A ENTER
x^{-1} ENTER
ALPHA A x^{-1} ENTER



En la figura se aprecian dos maneras de calcular el recíproco: 1) Con sólo presionar obtenemos el recíproco de la última respuesta, el cual se almacena en ANS. 2) Podemos introducir una variable (o sólo un número) y luego encontrar su recíproco.

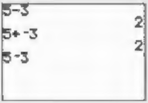
Las operaciones de **resta** $(-)$ y **división** $(\div)$ se definen como sigue.

Resta y división

Definición	Significado	Ejemplo
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número a otro, se suma el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ $= a \cdot b^{-1};\ b \neq 0$	Para dividir un número entre un número diferente de cero, se multiplica por el recíproco.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ $= 3 \cdot 7^{-1}$

Resta y negativos

5 − 3 ENTER
5 + (−) 3 ENTER
5 (−) 3 ENTER



La ejecución del último enunciado produce un error de sintaxis (SYNTAX) en la calculadora TI-83/4 Plus. Utilice la tecla − (menos) para la operación de resta y la tecla (−) (negación) para números negativos. En lo sucesivo omitiremos la tecla de negación y sencillamente escribiremos -3.

Usaremos a/b o $\frac{a}{b}$ para $a \div b$ y se hace referencia a a/b como el **cociente de a y b** o la **fracción a sobre b.** Los números a y b son el **numerador** y **denominador,** respectivamente, de a/b. Dado que 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no se define si $b = 0$; es decir, la *división entre cero no está definida.* Es por esta razón que los números reales no son cerrados respecto a la división. Observe que

$$1 \div b = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \text{si} \quad b \neq 0$$

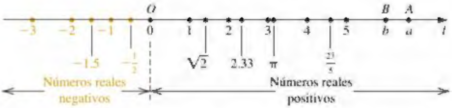
Las siguientes propiedades de los cocientes son verdaderas, siempre que todos los denominadores sean números reales diferentes de cero.

Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ejemplo
1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
2) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
3) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$
5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
7) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

Los números reales pueden representarse mediante puntos sobre una recta l, de manera que a cada número real a le corresponde exactamente un punto en l y a cada punto P en l le corresponde un número real. A esto se le llama **correspondencia uno a uno.** Primero elegimos un punto arbitrario O, llamado el **origen**, y lo asociamos con el número real 0. Luego, los puntos asociados con los enteros se determinan al trazar segmentos de recta sucesivos de igual longitud a ambos lados de O, como se muestra en la figura 2. El punto correspondiente a un número racional, por ejemplo $\frac{23}{5}$, se obtiene al subdividir estos segmentos de recta. Los puntos asociados con ciertos números irracionales, como $\sqrt{2}$, se pueden obtener por construcción (vea el ejercicio 45).

FIGURA 2



El número a que está asociado con un punto A en l es la **coordenada** de A. A estas coordenadas se les conoce como **sistema de coordenadas** a l, como la **recta de coordenadas** o **recta real.** Se puede asignar una dirección a l al tomar la **dirección positiva** hacia la derecha y la **dirección negativa** hacia la izquierda. La dirección positiva se denota al colocar una flecha sobre l, como se muestra en la figura 2.

Los números que corresponden a los puntos a la derecha de O en la figura 2 son **números reales positivos.** Los números que se ubican a la izquierda de O son **números reales negativos.** *El número real* 0 *no es positivo ni negativo.*

Observe la diferencia entre un número real negativo y el *negativo* de un número real. En particular, el negativo de un número real a puede ser positivo. Por ejemplo, si a es negativo, es decir $a = -3$, entones el negativo de a es $-a = -(-3) = 3$, el cual es positivo. En general, tenemos las siguientes relaciones.

Relaciones entre a y $-a$

1) Si a es positivo, entones $-a$ es negativo.

2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

En la siguiente tabla se definen las nociones de **mayor que** y **menor que** para los números reales a y b. Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad,** y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se llaman **desigualdades (estrictas).**

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Si los puntos A y B sobre una recta de coordenadas tienen las coordenadas a y b, respectivamente, entonces $a > b$ es equivalente al enunciado "*A está a la derecha de B*", mientras que $a < b$ es equivalente a "*A está a la izquierda de B*".

EJEMPLOS **Mayor que ($>$) y menor que ($<$)**

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, porque $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, porque $-4 - 0 = -4$ es negativo.

La siguiente ley permite comparar, u *ordenar*, dos números reales cualesquiera.

Ley de tricotomía

Si a y b son números reales, entonces exactamente una de las siguientes relaciones es verdadera:

$$a = b, \qquad a > b \qquad \text{o} \qquad a < b$$

Prueba de desigualdades y de la ley de tricotomía

5 [2nd] [TEST] [3] 3 [ENTER]
5 [2nd] [TEST] [5] 3 [ENTER]
5 [2nd] [TEST] [1] 3 [ENTER]

```
5>3
              1
5<3
              0
5=3
              0
```

(continúa)

Los resultados indican que "1" representa *verdadero* y "0" representa *falso*. Sólo una de las relaciones anteriores puede ser verdadera según la ley de tricotomía. Como se ilustró antes, en la calculadora TI-83/4 Plus se usa la notación (n) para las opciones de menú.

El **signo** de un número real es positivo si el número es positivo, o negativo si el número es negativo. Dos números reales tienen *el mismo signo* si los dos son positivos o ambos son negativos. Los números tienen *signos opuestos* si uno es positivo y el otro negativo. Los resultados siguientes sobre los signos de los productos y cocientes de dos números reales a y b pueden demostrarse usando las propiedades de los negativos y los cocientes.

Leyes de los signos

1) Si a y b tienen el mismo signo, entones ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

2) Si a y b tienen signos opuestos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Los **recíprocos*** de las leyes de los signos también son válidos. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

La notación $a \geq b$ se lee "a **es mayor o igual que** b", lo que significa ya sea que $a > b$ o $a = b$ (pero no ambas). Por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a. El símbolo $a \leq b$, que se lee "a **es menor o igual que** b", significa que $a < b$ o $a = b$. Las expresiones de la forma $a \leq b$ y $a \geq b$ se llaman **desigualdades no estrictas,** ya que a puede ser igual a b. Del mismo modo que con el símbolo de igualdad, cualquier símbolo de desigualdad se puede negar al colocar una diagonal en medio del mismo, es decir, $\not>$ significa no mayor que.

Una expresión de la forma $a < b < c$ se conoce como **desigualdad continua** y significa que $a < b$ y $b < c$; se dice que "b **está entre** a y c". Asimismo, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y $b > a$.

EJEMPLOS **Ordenar tres números reales**

■ $1 < 5 < \frac{11}{2}$ ■ $-4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2}$ ■ $3 > -6 > -10$

Existen otros tipos de desigualdades. Por ejemplo, $a < b \leq c$ significa que $a < b$ y $b \leq c$. De la misma manera, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y $b < c$. Por último, $a \leq b \leq c$ significa que $a \leq b$ y $b \leq c$.

*Si un teorema se escribe en la forma "Si P, entonces Q", donde P y Q son enunciados matemáticos llamados *hipótesis* y *conclusión*, respectivamente, entonces el *recíproco* del teorema tiene la forma "Si Q, entonces P". Si tanto el teorema como su recíproco son verdaderos, suele escribirse "P si y sólo si Q" (que se denota P ssi Q).

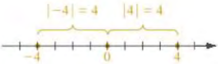
EJEMPLO 3 **Determinación del signo de un número real**

Si $x > 0$ y $y < 0$, determine el signo de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

SOLUCIÓN Como x es un número positivo y y un número negativo, x y y tienen signos opuestos. Por lo lo tanto, x/y y y/x son negativos. La suma de dos números negativos es también un número negativo, por lo que

el signo de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ es negativo ■

FIGURA 3



Si a es un entero, entonces es la coordenada de algún punto A en una recta de coordenadas y el símbolo $|a|$ denota el número de unidades entre A y el origen, sin importar la dirección. El número $|a|$ no negativo se conoce como *el valor absoluto de a*. Con respecto a la figura 3, observamos que para el punto con la coordenada -4 tenemos $|-4|$. Asimismo, $|4| = 4$. En general, *si a es negativo, se cambia su signo para determinar* $|a|$*; si a no es negativo, entonces* $|a| = a$. La definición siguiente amplía este concepto a todos los números reales.

Definición de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a, que se denota con $|a|$, se define como sigue:

1) Si $a \geq$, entonces $|a| = a$.

2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Dado que a es negativo en el inciso 2) de la definición, $-a$ representa un número real *positivo*. Algunos casos especiales de esta definición se proporcionan en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS **Notación del valor absoluto $|a|$**

- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, porque $-3 < 0$. Por lo tanto, $|-3| = 3$.
- $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, porque $2 - \sqrt{2} > 0$.
- $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2)$, porque $\sqrt{2} - 2 < 0$.
  Por tanto, $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

En la demostración anterior, $|3| = |-3|$ y $|2 - \sqrt{2}| = |\sqrt{2} - 2|$. En general, tenemos lo siguiente:

$$|a| = |-a|, \text{ para todo número real } a$$

Valor absoluto

EJEMPLO 4 **Cancelación de un símbolo de valor absoluto**

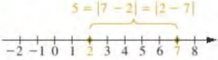
Si $x < 1$, reescribimos $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN Si $x < 1$, entonces $x - 1 < 0$; es decir, $x - 1$ es negativo. De aquí que a partir del inciso 2) de la definición de valor absoluto,

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x$$ ■

Debemos utilizar el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos cualesquiera sobre una recta de coordenadas. Primero observe que la distancia entre los puntos con las coordenadas 2 y 7, que se muestran en la figura 4, es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia que se obtiene al restar la coordenada menor (en el extremo izquierdo) de la coordenada mayor (extremo derecho) $(7 - 2 = 5)$. Si usamos valores absolutos, entonces, como $|7 - 2| = |2 - 7|$, es necesario preocuparse por el orden de la sustracción. Este hecho da lugar a la siguiente definición.

FIGURA 4



Definición de distancia entre los puntos en una recta de coordenadas

Sean a y b las coordenadas de dos puntos A y B, respectivamente, sobre una recta de coordenadas. La **distancia entre A y B**, que se denota por $d(A, B)$, se define como

$$d(A, B) = |b - a|$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB.

Como $d(B, A) = |a - b|$ y $|b - a| = |a - b|$, observamos que

$$d(A, B) = d(B, A).$$

Observe que la distancia entre el origen O y el punto A es

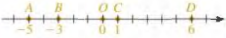
$$d(O, A) = |a - 0| = |a|,$$

lo cual concuerda con la interpretación geométrica del valor absoluto que se muestra en la figura 4. La fórmula $d(A, B) = |b - a|$ es verdadera sin importar los signos de a y b, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Determinación de las distancias entre puntos**

Sean A, B, C y D puntos con las coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, sobre una recta de coordenadas, como se aprecia en la figura 5. Encuentre $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$ y $d(C, D)$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN Usando la definición de la distancia entre puntos en una recta de coordenadas, obtenemos las distancias:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2 \\ d(C, B) &= |-3 - 1| = |-4| = 4 \\ d(O, A) &= |-5 - 0| = |-5| = 5 \\ d(C, D) &= |6 - 1| = |5| = 5 \end{aligned}$$ ■

El concepto de valor absoluto tiene otros usos, además de encontrar las distancias entre puntos; se emplea siempre que tenemos interés en la magnitud o valor numérico de un número real sin importar su signo.

En la siguiente sección comentaremos la *notación exponencial* a^n, donde a es un número real (llamado *base*) y n es un número entero (llamado *exponente*). En particular, para la base 10 tenemos

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,$$

etcétera. Para exponentes negativos se usa el recíproco del exponente positivo correspondiente, como sigue:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Esta notación se puede usar para escribir cualquier representación decimal finita de un número real como una suma del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} 437.56 &= 4(100) + 3(10) + 7(1) + 5\left(\tfrac{1}{10}\right) + 6\left(\tfrac{1}{100}\right) \\ &= 4(10^2) + 3(10^1) + 7(10^0) + 5(10^{-1}) + 6(10^{-2}) \end{aligned}$$

En las ciencias suele trabajarse con números muy grandes o muy pequeños y comparar las magnitudes relativas de las cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por lo general, un número positivo a grande o pequeño se representa de *forma científica* usando el símbolo $\times$ para denotar multiplicación.

Forma científica	$a = c \times 10^n$, donde $1 \leq c < 10$ y n es un entero.

La distancia que recorre un rayo de luz en un año es aproximadamente 5,900,000,000,000 millas. Este número se puede escribir en forma científica como 5.9×10^{12}. El exponente positivo 12 indica que el punto decimal debe moverse 12 posiciones a la *derecha*. La notación también funciona bien para números pequeños. El peso de una molécula de oxígeno se estima en

$$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ gramos},$$

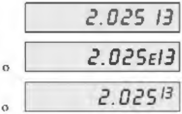
o, en forma científica, 5.3×10^{-23} gramos. El exponente negativo indica que el punto decimal debe moverse 23 posiciones a la *izquierda*.

EJEMPLOS

Forma científica

- $513 = 5.13 \times 10^2$
- $93{,}000{,}000 = 9.3 \times 10^7$
- $0.000\ 000\ 000\ 43 = 4.3 \times 10^{-10}$
- $7.3 = 7.3 \times 10^0$
- $20{,}700 = 2.07 \times 10^4$
- $0.000\ 648 = 6.48 \times 10^{-4}$

FIGURA 6



Muchas calculadoras utilizan en sus pantallas la forma científica. Para el número $c \times 10^n$, el 10 se suprime y el exponente suele ir precedido por la letra E. Por ejemplo, para encontrar $(4{,}500{,}000)^2$ en una calculadora científica, se podría introducir el entero 4,500,000, presionar la tecla $\boxed{x^2}$ (o elevar al cuadrado) y obtener un resultado parecido al que se muestra en la pantalla de la figura 6. Esto se traduciría como 2.025×10^{13}. Por lo tanto,

$$(4{,}500{,}000)^2 = 20{,}250{,}000{,}000{,}000$$

Las calculadoras también utilizan la forma científica cuando se introducen los números. El manual del usuario debe contener los detalles específicos.

Forma científica

57 000 000 000 ENTER
.000 000 057 ENTER
9.3 2nd EE 4 ×
6.7 2nd EE −11 ENTER

```
57000000000
          5.7E10
.000000057
          5.7E-8
9.3E4*6.7E-11
         6.231E-6
```

Antes de concluir esta sección, debemos considerar brevemente el problema del redondeo de los resultados. Los problemas aplicados suelen incluir números obtenidos por varios tipos de mediciones y, por consiguiente, son *aproximaciones* a valores exactos. Estas respuestas deben redondearse porque el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos que se han estado usando. Por ejemplo, si la longitud y el ancho de un rectángulo se miden con una precisión de dos posiciones decimales, no podemos esperar una precisión de más de dos posiciones decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Para un trabajo puramente *matemático*, si se proporcionan los valores de la longitud y el ancho de un rectángulo, se asume que las dimensiones son *exactas* y no se requiere redondeo.

Si un número a se escribe en forma científica como $a = c \times 10^n$ para $1 \leq c < 10$ y si c se redondea a k posiciones decimales, entonces se dice que a es preciso (o se ha redondeado) a $k + 1$ **cifras** o **dígitos significativos**. Por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10^1, o 37.264; a 3 cifras significativas es 3.73×10^1 o 37.3, y a 1 cifra significativa, 4×10^1, o 40.

1.1 Ejercicios

Ejer. 1–2: Si $x < 0$ y $y > 0$, determine el signo del número real.

1 **a)** xy **b)** x^2y

c) $\dfrac{x}{y} + x$ **d)** $y - x$

2 **a)** $\dfrac{x}{y}$ **b)** xy^2

c) $\dfrac{x - y}{xy}$ **d)** $y(y - x)$

Ejer. 3–6: Reemplace el símbolo □ con el símbolo <, > o = que valide el enunciado resultante.

3 **a)** $-7 \,\square\, -4$ **b)** $\dfrac{\pi}{2} \,\square\, 1.5$ **c)** $\sqrt{225} \,\square\, 15$

4 **a)** $-3 \,\square\, -6$ **b)** $\dfrac{\pi}{4} \,\square\, 0.8$ **c)** $\sqrt{289} \,\square\, 17$

5 **a)** $\frac{1}{11} \,\square\, 0.09$ **b)** $\frac{2}{3} \,\square\, 0.666$ **c)** $\frac{22}{7} \,\square\, \pi$

6 **a)** $\frac{1}{7} \,\square\, 0.143$ **b)** $\frac{5}{6} \,\square\, 0.833$ **c)** $\sqrt{2} \,\square\, 1.4$

Ejer. 7–8: Exprese el enunciado como una desigualdad.

7 **a)** x es negativo.

b) y no es negativo.

c) q es menor o igual que π.

d) d está entre 4 y 2.

e) t no es menor que 5.

f) El negativo de z no es mayor que 3.

g) El cociente de p y q es como máximo 7.

h) El recíproco de w es como mínimo 9.

i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

8 **a)** b es positivo.

b) s no es positivo.

c) w es mayor o igual que -4.

d) c está entre $\dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{1}{3}$.

e) p no es mayor que -2.

f) El negativo de m no es menor que -2.

g) El cociente de r y s es como mínimo $\frac{1}{5}$.

h) El recíproco de f es como máximo 14.

i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejer. 9–14: Reescriba el número sin utilizar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

9 **a)** $|-3-4|$ **b)** $|-5|-|2|$ **c)** $|7|+|-4|$

10 **a)** $|-11+1|$ **b)** $|6|-|-3|$ **c)** $|8|+|-9|$

11 **a)** $(-5)|3-6|$ **b)** $|-6|/(-2)$ **c)** $|-7|+|4|$

12 **a)** $(4)|6-7|$ **b)** $5/|-2|$ **c)** $|-1|+|-9|$

13 **a)** $|4-\pi|$ **b)** $|\pi-4|$ **c)** $|\sqrt{2}-1.5|$

14 **a)** $|\sqrt{3}-1.7|$ **b)** $|1.7-\sqrt{3}|$ **c)** $|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}|$

Ejer. 15–18: Los números dados son coordenadas de los puntos A, B y C, respectivamente, en una recta de coordenadas. Encuentre la distancia.

a) $d(A, B)$ **b)** $d(B, C)$

c) $d(C, B)$ **d)** $d(A, C)$

15 $3, 7, -5$ **16** $-6, -2, 4$

17 $-9, 1, 10$ **18** $8, -4, -1$

Ejer. 19–24: Los dos números proporcionados son coordenadas de los puntos A y B, respectivamente, sobre una recta de coordenadas. Exprese el enunciado indicado como una desigualdad que involucre el símbolo de valor absoluto.

19 x, 7; $d(A, B)$ es menor que 2

20 x, $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1

21 x, -3; $d(A, B)$ es como mínimo 8

22 x, 4; $d(A, B)$ es como máximo 5

23 4, x; $d(A, B)$ no es mayor que 3

24 -2, x; $d(A, B)$ no es menor que 4

Ejer. 25–32: Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

25 $|3+x|$ si $x < -3$ **26** $|5-x|$ si .

27 $|2-x|$ si $x < 2$ **28** $|7+x|$ si

29 $|a-b|$ si $a < b$ **30** $|a-b|$ si

31 $|x^2+4|$ **32** $|-x^2-1|$

Ejer. 33–40: Reemplace el símbolo $\square$ ya sea con $=$ o $\neq$ para hacer que el enunciado resultante sea verdadero para todos los números reales a, b, c y d, siempre que las expresiones estén definidas.

33 $\dfrac{ab+ac}{a} \square b+ac$ **34** $\dfrac{ab+ac}{a} \square b+c$

35 $\dfrac{b+c}{a} \square \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$ **36** $\dfrac{a+c}{b+d} \square \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

37 $(a \div b) \div c \square a \div (b \div c)$

38 $(a-b)-c \square a-(b-c)$

39 $\dfrac{a-b}{b-a} \square -1$ **40** $-(a+b) \square -a+b$

Ejer. 41–42: Aproxime la expresión en números reales a cuatro posiciones decimales.

41 **a)** $|3.2^2-\sqrt{4.27}|$

b) $\sqrt{(15.6-1.5)^2+(4.3-5.4)^2}$

42 **a)** $\dfrac{3.42-1.29}{5.83+2.64}$

b) π^3

Ejer. 43–44: Aproxime la expresión en números reales. Exprese la respuesta en notación científica precisa a cuatro cifras significativas.

43 **a)** $\dfrac{1.2 \times 10^3}{3.1 \times 10^2 + 1.52 \times 10^3}$

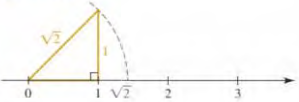
b) $(1.23 \times 10^{-4}) + \sqrt{4.5 \times 10^3}$

44 **a)** $\sqrt{|3.45 - 1.2 \times 10^4| + 10^5}$

b) $(1.79 \times 10^2) \times (9.84 \times 10^3)$

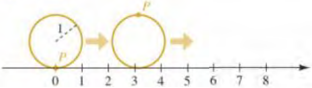
45 El punto sobre una recta de coordenadas que corresponde a $\sqrt{2}$ puede determinarse mediante la construcción de un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como muestra la figura. Determine los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia:* use el teorema de Pitágoras.)

EJERCICIO 45



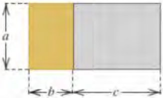
46 Un círculo de radio 1 rueda a lo largo de una recta de coordenadas en dirección positiva, como se aprecia en la figura. Si el punto P está inicialmente en el origen, encuentre la coordenada de P después de una, dos y diez revoluciones completas.

EJERCICIO 46



47 Las demostraciones geométricas de las propiedades de los números reales las proporcionaron por primera vez los antiguos griegos. Con la finalidad de establecer la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$ para los números reales positivos a, b y c, determine el área del rectángulo que se muestra, de dos maneras, en la figura.

EJERCICIO 47



48 Las aproximaciones racionales a las raíces cuadradas se pueden obtener mediante una fórmula descubierta por los antiguos babilonios. Sea x_1 la primera aproximación racional para $\sqrt{n}$. Si

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right),$$

entonces x_2 será una mejor aproximación para $\sqrt{n}$ y el cálculo puede repetirse al sustituir x_2 por x_1. A partir de $x_1 = \frac{3}{2}$, determine las siguientes dos aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$.

Ejer. 49–50: Exprese en forma científica el número.

49 **a)** 427,000 **b)** 0.000 000 093 **c)** 810,000,000

50 **a)** 85,200 **b)** 0.000 005 4 **c)** 24,900,000

Ejer. 51–52: Exprese el número en forma decimal.

51 **a)** 8.3×10^5 **b)** 2.9×10^{-12} **c)** 5.64×10^8

52 **a)** 2.3×10^7 **b)** 7.01×10^{-9} **c)** 1.25×10^{10}

53 Masa de un átomo de hidrógeno La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente

0.000 000 000 000 000 000 000 001 7 gramos.

Exprese este número en forma científica.

54 **Masa de un electrón** La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-31} kilogramos. Exprese en forma decimal este número.

55 **Año luz** En astronomía, las distancias a las estrellas se miden en años luz. Un año luz es la distancia que un rayo de luz viaja en un año. Si la velocidad de la luz es aproximadamente 186,000 millas por segundo, estime el número de millas en un año luz.

56 **Galaxia de la Vía Láctea**

a) Los astrónomos han estimado que la galaxia de la Vía Láctea contiene 100,000 millones de estrellas. Exprese en forma científica este número.

b) Se estima que el diámetro d de la galaxia de la Vía Láctea es de 100,000 años luz. Exprese d en millas. (Consulte el ejercicio 55.)

57 **Número de Avogadro** El número de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23}. Si un mol del gas tiene una masa de 1.01 gramos, estime la masa de un átomo de hidrógeno.

58 **Población de peces** La dinámica poblacional de muchos peces se caracteriza por tasas de fertilidad sumamente altas entre los adultos y tasas de supervivencia muy bajas entre los jóvenes. Un halibut maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo 0.00035% de las crías sobreviven la edad de tres años. Use la forma científica para aproximar el *número de crías* que viven hasta la edad de tres años.

59 **Cuadros en una película de cine** Una de las películas más largas jamás filmadas es una película inglesa de 1970 que dura 48 horas. Suponiendo que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, estime el número total de cuadros de esta película. Exprese en forma científica su respuesta.

60 **Números primos grandes** El número $2^{44,497} - 1$ es un número primo. En la época en que se determinó que era primo, una de las computadoras más rápidas del mundo tardó alrededor de 60 días en verificarlo. Esta computadora era capaz de realizar 2×10^{11} cálculos por segundo. Utilice la forma científica para estimar el número de cálculos requeridos para realizar este cálculo. (Recientemente, en 2005, se demostró que $2^{30,402,457} - 1$, un número que contiene 9,152,052 dígitos, es primo.)

61 **Presión de un tornado** Cuando un tornado pasa cerca de un edificio, hay un descenso rápido de la presión exterior y la presión interior no tiene tiempo de cambiar. La diferencia resultante es capaz de causar una presión de 1.4 lb/pulg^2 hacia afuera de las paredes y del techo del edificio.

a) Calcule la fuerza en libras que se ejerce en 1 pie cuadrado de una pared.

b) Estime las toneladas de la fuerza ejercida sobre una pared que mide 8 pies de alto por 40 pies de ancho.

62 **Población de ganado** Un ranchero tiene 750 cabezas de ganado que consisten en 400 adultos (de 2 o más años), 150 bovinos de un año y 200 becerros. Se sabe la siguiente información acerca de esta especie en particular. Cada primavera una hembra adulta pare un solo becerro y 75% de estos becerros sobreviven el primer año. Los porcentajes anuales de supervivencia para los bovinos adultos son de 80% y 90%, respectivamente. La proporción de machos a hembras es de uno en todas las clases de edades. Estime la población de cada clase de edades

a) en la próxima primavera **b)** en la primavera pasada

1.2 Exponentes y radicales

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n, definida en la siguiente tabla, representa n veces el producto del número real a por sí mismo. Nos referimos a a^n como **a a la n-ésima potencia** o, sencillamente, *a a la n*. Al entero positivo n se le conoce como el **exponente** y al número real a como la **base.**

Notación exponencial

Caso general (n es cualquier entero positivo)	Casos especiales
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

La siguiente lista contiene varios ejemplos numéricos de la notación exponencial.

EJEMPLOS **La notación exponencial a^n**

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

Es importante observar que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ significa $3(a^n)$, no $(3a)^n$. El número real 3 es el **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. Asimismo, $-3a^n$ significa $(-3)a^n$, no $(-3a)^n$.

EJEMPLOS **La notación ca^n**

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$
- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

Notación exponencial

-3 ( )) (x^2) (ENTER)
-3 (x^2) (ENTER)
1 (÷) 2 ( )) (∧) 5 (ENTER)

```
(-3)²
               9
-3²
              -9
(1/2)^5
          .03125
```

$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Note que la expresión del segundo renglón, -3^2, es equivalente a $-1 \cdot 3^2$.

Enseguida ampliamos la definición de a^n a exponentes no positivos.

Exponentes cero y negativos (no positivos)

Definición ($a \neq 0$)	Ejemplos
$a^0 = 1$	$3^0 = 1$, $\quad (-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$, $\quad (-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

Como el número total de factores de a en la derecha es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}; es decir,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Podemos ampliar esta fórmula para $m \leq 0$ o $n \leq 0$ usando las definiciones del exponente cero y los exponentes negativos. Esto nos da la ley 1, que se establece en la siguiente tabla.

Para demostrar la ley 2 podemos escribir, para m y n positivos,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ factores de } a^m}$$

y contar el número de veces que a aparece como un factor en el lado derecho. Dado que $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, con a ocurriendo como un factor m veces, y dado que el número de estos grupos de m factores es n, el número de factores de a es $m \cdot n$. Por lo tanto,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Los casos $m \leq 0$ y $n \leq 0$ pueden demostrarse usando la definición de exponentes no positivos. Las tres leyes restantes pueden establecerse de manera similar mediante el conteo de factores. En las leyes 4 y 5 se supone que los denominadores no son 0.

Leyes de exponentes para los números reales a y b y los enteros m y n

Ley	Ejemplos
1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125}$
5) **a)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
b) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$	$\dfrac{2^3}{2^5} = \dfrac{1}{2^{5-3}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Por lo general se usa 5a) si $m > n$ y 5b) si $m < n$.

Las leyes de los exponentes se pueden ampliar para obtener reglas como $(abc)^n = a^n b^n c^n$ y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$. Algunos otros ejemplos de las leyes de los exponentes se proporcionan en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS **Leyes de los exponentes**

- $x^5 x^6 x^2 = x^{5+6+2} = x^{13}$
- $(y^5)^7 = y^{5\cdot 7} = y^{35}$
- $(3st)^4 = 3^4 s^4 t^4 = 81 s^4 t^4$
- $\left(\dfrac{p}{2}\right)^5 = \dfrac{p^5}{2^5} = \dfrac{p^5}{32}$
- $\dfrac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5$
- $\dfrac{u^3}{u^8} = \dfrac{1}{u^{8-3}} = \dfrac{1}{u^5}$

Simplificar una expresión que involucre potencias de números reales significa cambiar a una expresión en la cual cada número real aparece sólo una vez y todos los exponentes son positivos. *Asumiremos que los denominadores siempre representan números reales diferentes de cero.*

EJEMPLO 1 **Simplificación de expresiones que contienen exponentes**

Use las leyes de los exponentes para simplificar cada expresión:

a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ **b)** $(2a^2b^3c)^4$ **c)** $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2\left(\dfrac{s}{r^3}\right)^3$ **d)** $(u^{-2}v^3)^{-3}$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}(3x^3y^4)(4xy^5) &= (3)(4)x^3xy^4y^5 && \text{reacomodamos los factores}\\ &= 12x^4y^9 && \text{ley 1}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(2a^2b^3c)^4 &= 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 && \text{ley 3}\\ &= 16a^8b^{12}c^4 && \text{ley 2}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 &= \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 4}\\ &= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 3}\\ &= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) && \text{ley 2}\\ &= 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) && \text{reacomodamos los factores}\\ &= 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) && \text{leyes 5(b) y 5(a)}\\ &= \frac{4s}{r^3} && \text{reacomodamos los factores}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}(u^{-2}v^3)^{-3} &= (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3} && \text{ley 3}\\ &= u^6v^{-9} && \text{ley 2}\\ &= \frac{u^6}{v^9} && \text{definición de } a^{-n}\end{aligned}$$

■

El teorema siguiente es útil para problemas que involucran exponentes negativos.

Teorema de exponentes negativos	1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$ 2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

DEMOSTRACIONES Usando las propiedades de los exponentes negativos y cocientes, obtenemos

1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{1/a^m}{1/b^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{b^n}{1} = \dfrac{b^n}{a^m}$

2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ■

EJEMPLO 2 **Simplificación de expresiones que contienen exponentes negativos**

Simplifique:

a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

SOLUCIÓN Aplicamos el teorema de los exponentes negativos así como las leyes de los exponentes.

a)
$$\begin{aligned}
\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} &= \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{y^{-5}}{x^{-1}} && \text{reordenamos los cocientes de modo que los exponentes negativos estén en una fracción}\\
&= \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{x^1}{y^5} && \text{teorema de los exponentes negativos (1)}\\
&= \frac{2x^4}{y^7} && \text{ley 1 de los exponentes}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3} &= \left(\frac{2v}{u^2}\right)^3 && \text{teorema de los exponentes negativos (2)}\\
&= \frac{2^3v^3}{(u^2)^3} && \text{leyes 4 y 3 de los exponentes}\\
&= \frac{8v^3}{u^6} && \text{ley 2 de los exponentes}
\end{aligned}$$
■

Enseguida se define la **raíz *n*-ésima** $\sqrt[n]{a}$ de un número real a.

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sean n un número positivo entero mayor que 1 y a un número real.

1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *positivo* b tal que $b^n = a$.

3) **a)** Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *negativo* b tal que $b^n = a$.

b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Los números complejos, que estudiamos en la sección 1.5, son necesarios para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a < 0$ y n es un entero positivo par, porque para todos los números reales b, $b^n \geq 0$ siempre que n sea par.

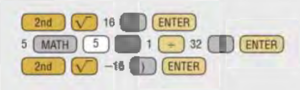
Si $n = 2$, escribimos $\sqrt{a}$ en vez de $\sqrt[2]{a}$ y a $\sqrt{a}$ se le llama **raíz cuadrada** de a. El número $\sqrt[3]{a}$ es la **raíz cúbica de** a.

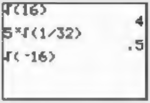
EJEMPLOS La raíz n-ésima $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Observe que $\sqrt{16} \neq \pm 4$ porque, por definición, las raíces de los números reales positivos son positivas. El símbolo $\pm$ se lee "más o menos".

Raíz enésima





Cuando el último renglón se ejecuta en la calculadora TI-83/4 Plus, aparece el mensaje de error NONREAL ANS, ya que esta expresión representa un número complejo, no un número real (que se estudia en la sección 1.5).

Para completar nuestra terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a es el **radicando** y n es el **índice** del radical. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **signo de radical.**

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; es decir, $(\sqrt{a})^2 = a$. Si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = a$, o $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. Al generalizar este patrón obtenemos la propiedad 1 de la siguiente tabla.

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$ (n es un entero positivo)

Propiedad	Ejemplos	
1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ si $\sqrt[n]{a}$ es un número real	$(\sqrt{5})^2 = 5$,	$(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
2) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5$,	$\sqrt[3]{2^3} = 2$
3) $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a < 0$ y n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$,	$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
4) $\sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ si $a < 0$ y n es par	$\sqrt{(-3)^2} = \|-3\| = 3$,	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \|-2\| = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad 4 se reduce a la propiedad 2. También observamos de la propiedad 4 que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

para todo número real x. En particular, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, pero si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positivo.

Las tres leyes que se listan en la siguiente tabla son verdaderas para los enteros positivos m y n, *siempre que las raíces indicadas **existan***, es decir, siempre y cuando las raíces sean números reales.

Leyes de los radicales

Ley	Ejemplos
1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\,\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$
3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2(3)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Los radicandos de las leyes 1 y 2 son productos y cocientes. Debemos tener cuidado cuando hay sumas o restas en el radicando. La siguiente tabla contiene dos advertencias particulares sobre errores que se cometen comúnmente.

¡Atención!

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	Ejemplos
1) $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
2) $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real y c^n es un factor en un radical de índice n, entonces podemos eliminar c del radicando si se toma en cuenta el signo de c. Por ejemplo, si $c > 0$ o si $c < 0$ y n es *impar*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\,\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

siempre que $\sqrt[n]{d}$ exista. Si $c < 0$ y n es *par*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\,\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$.

EJEMPLOS **Eliminar las *n*-ésimas potencias de $\sqrt[n]{\ }$**

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\,\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

Nota: Para evitar considerar los valores absolutos, *en los ejemplos y ejercicios de este capítulo que contengan radicales, asumiremos que todas las letras —a, b, c, d, x, y, etcétera— que aparecen en los radicandos representan números reales positivos, a menos que se especifique otra cosa.*

Como observamos en la demostración anterior y en los siguientes ejemplos, si el índice de un radical es n, entonces el radicando se reordena aislando un factor de la forma p^n, donde p puede estar formado por varias letras. Luego eliminamos $\sqrt[n]{p^n} = p$ del radical, como se indicó antes. De esta manera, en el ejemplo 3b) el índice del radical es 3 y el radicando se reordena en *cubos*, con lo cual obtenemos un factor p^3, con $p = 2xy^2z$. En el inciso c), el índice del radical es 2, y el radicando se reordena en cuadrados, obteniendo un factor p^2, con $p = 3a^3b^2$.

Simplificar un radical significa eliminar factores del radical hasta que ningún factor en el radicando tenga un exponente mayor o igual que el índice del radical y el índice sea lo menor posible.

EJEMPLO 3 **Eliminación de factores de los radicales**

Simplifique cada radical (todas las letras denotan números reales positivos):

a) $\sqrt[3]{320}$ **b)** $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **c)** $\sqrt{3a^2b^3}\,\sqrt{6a^5b}$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{64 \cdot 5} && \text{factorizamos el cubo mayor en 320}\\ &= \sqrt[3]{4^3}\,\sqrt[3]{5} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 4\sqrt[3]{5} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16x^3y^8z^4} &= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} && \text{Reordenamos el radicando en cubos}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\,\sqrt[3]{2y^2z} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2b^3}\,\sqrt{6a^5b} &= \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)} && \text{reordenamos el radicando en cuadrados}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\,\sqrt{2a} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 3a^3b^2\sqrt{2a} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{\ }\end{aligned}$$

■

Si el denominador de un cociente tiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces la multiplicación del numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminará el radical del denominador, ya que

$$\sqrt[n]{a^k}\,\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Este proceso se llama **racionalizar un denominador.** Algunos casos especiales se listan en la siguiente tabla.

Racionalizar denominadores de cocientes ($a > 0$)

Factor en el denominador	Multiplicar el numerador y el denominador por	Factor resultante en el denominador
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\,\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3}\,\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$

El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 **Racionalización de denominadores**

Racionalice cada denominador:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ d) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\dfrac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$ ■

Si usamos una calculadora para determinar aproximaciones decimales de los radicales, racionalizar los denominadores no supone una ventaja, por ejemplo en $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ o $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, como se hizo en el ejemplo 4a) y c). No obstante, para las simplificaciones *algebraicas*, cambiar las expresiones a estas formas a veces es recomendable. Asimismo, en cursos de matemáticas avanzadas, como cálculo, el cambio de $1/\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[3]{x^2}/x$, como en el ejemplo 4b), podría complicar *aún más* un problema. En estos cursos es más sencillo trabajar con la expresión $1/\sqrt[3]{x}$ que con su forma racionalizada.

A continuación usamos radicales para definir los *exponentes racionales*.

Definición de exponentes racionales

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1. Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces

$$\begin{aligned} &\mathbf{1)}\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}\\ &\mathbf{2)}\quad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\\ &\mathbf{3)}\quad a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}\end{aligned}$$

Cuando evaluamos $a^{m/n}$ en 2), por lo general utilizamos $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; es decir, primero se toma la raíz n-ésima de a y luego el resultado se eleva a la m-ésima potencia m, como se muestra en la siguiente demostración.

EJEMPLOS **La notación exponencial $a^{m/n}$**

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^2 = 5^2 = 25$
- $\left(\frac{32}{243}\right)^{3/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{32}{243}}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

Exponentes racionales

El comando Frac cambia una representación decimal a fraccionaria.

Las leyes de los exponentes son válidas para exponentes racionales y exponentes *irracionales*, por ejemplo $3^{\sqrt{2}}$ o 5^{π}, que se consideran en el capítulo 4.

Para simplificar una expresión que contenga potencias racionales de letras que representan números reales, ésta se cambia a una expresión en la cual cada letra aparezca sólo una vez y todos los exponentes sean positivos. Como se hizo con los radicales, asumimos que todas las letras representan números reales positivos, a menos que se especifique otra cosa.

EJEMPLO 5 **Simplificación de potencias racionales**

Simplifique:

a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ **b)** $(r^2s^6)^{1/3}$ **c)** $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2\left(\sqrt{4}\right)^{-5} && \text{definición de exponentes racionales}\\ &= (-3)^2(2)^{-5} && \text{obtenemos las raíces}\\ &= \frac{(-3)^2}{2^5} && \text{definición de exponentes negativos}\\ &= \tfrac{9}{32} && \text{obtenemos las potencias}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(r^2s^6)^{1/3} &= (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} && \text{ley 3 de los exponentes}\\ &= r^{2/3}s^2 && \text{ley 2 de los exponentes}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) &= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) && \text{leyes de los exponentes}\\ &= \frac{(4\cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}} && \text{ley 1 de los exponentes}\\ &= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}} && \text{común denominador}\\ &= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} && \text{simplificamos}\end{aligned}$$

■

Los exponentes racionales son útiles para problemas que implican radicales que no tienen el mismo índice, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Combinación de radicales**

Cambie a una expresión que contenga un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$:

a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

SOLUCIÓN Al introducir exponentes racionales, obtenemos

a) $\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a} = a^{1/3}a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a^{1/4}}{a^{2/3}} = a^{(1/4)-(2/3)} = a^{-5/12} = \dfrac{1}{a^{5/12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$ ■

En los ejercicios 1.2, siempre que un indice de un radical es par (o se emplea un exponente racional m/n en que n es par), se asume que las letras que aparecen en el radicando denotan números reales positivos, a menos que se indique otra cosa.

1.2 Ejercicios

Ejer. 1–10: Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

1 $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

2 $(-3)^3$

3 $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$

4 $\dfrac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$

5 $-2^4 + 3^{-1}$

6 $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 2^{-4}$

7 $9^{5/2}$

8 $16^{-3/4}$

9 $(-0.008)^{2/3}$

10 $(0.008)^{-2/3}$

Ejer. 11–46: Simplifique.

11 $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(16x^5)$

12 $(-3x^{-2})(4x^4)$

13 $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$

14 $\dfrac{(2x^2)^3y^2}{4x^4y^2}$

15 $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$

16 $(-4b^3)\left(\frac{1}{6}b^2\right)(-9b^4)$

17 $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3}\cdot(3x^2)^0$

18 $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3}\cdot(5y^3)^0$

19 $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$

20 $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$

21 $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$

22 $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

23 $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-3}\right)^{-2}$

24 $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

25 $(3y^3)^4(4y^2)^{-3}$

26 $(-3a^2b^{-5})^3$

27 $(-2r^4s^{-3})^{-2}$

28 $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$

29 $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$

30 $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$

31 $\left(\dfrac{3x^5y^4z}{x^0y^{-3}z}\right)^2$

32 $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$

33 $(-5a^{3/2})(2a^{1/2})$

34 $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$

35 $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$

36 $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$

37 $(27a^6)^{-2/3}$

38 $(25z^4)^{-3/2}$

39 $(8x^{-2/3})x^{1/6}$

40 $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$

41 $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$

42 $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$

43 $\left(\dfrac{x^6}{16y^{-4}}\right)^{-1/2}$

44 $\left(\dfrac{c^{-4}}{81d^8}\right)^{3/4}$

45 $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$

46 $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Ejer. 47–52: Reescriba la expresión utilizando exponentes racionales.

47 $\sqrt[4]{x^4 + y}$

48 $\sqrt[3]{x^3 + y^2}$

49 $\sqrt[3]{(a + b)^2}$

50 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$

51 $\sqrt{x^2 + y^2}$

52 $\sqrt[3]{r^3 - s^3}$

Ejer. 53–56: Reescriba la expresión usando un radical.

53 a) $4x^{3/2}$ b) $(4x)^{3/2}$

54 a) $4 + x^{3/2}$ b) $(4 + x)^{3/2}$

55 a) $8 - y^{1/3}$ b) $(8 - y)^{1/3}$

56 a) $64y^{1/3}$ b) $(64y)^{1/3}$

Ejer. 57–80: Simplifique la expresión y racionalice el denominador cuando sea apropiado.

57 $\sqrt{81}$

58 $\sqrt[3]{-216}$

59 $\sqrt[5]{-64}$

60 $\sqrt[4]{512}$

61 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

62 $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

63 $\sqrt{9x^{-4}y^6}$

64 $\sqrt{16a^8b^{-3}}$

65 $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$

66 $\sqrt[4]{81r^5s^8}$

67 $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^5}}$

68 $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

69 $\sqrt[3]{\dfrac{2x^4y^4}{9x}}$

70 $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2y^5}{4x}}$

71 $\sqrt[4]{\dfrac{5x^8y^3}{27x^2}}$

72 $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^{12}}{125x}}$

73 $\sqrt[5]{\dfrac{5x^7y^2}{8x^3}}$

74 $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75 $\sqrt[4]{(5x^5y^{-2})^4}$

76 $\sqrt[6]{(7u^{-3}v^4)^6}$

77 $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\ \sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$

78 $\sqrt{5xy^7}\ \sqrt{15x^3y^3}$

79 $\sqrt[3]{3t^4v^2}\ \sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$

80 $\sqrt[3]{(2r-s)^3}$

Ejer. 81–84: Simplifique la expresión, suponiendo que x y y pueden ser negativos.

81 $\sqrt{x^6y^4}$

82 $\sqrt{x^4y^{10}}$

83 $\sqrt[4]{x^8(y-3)^{12}}$

84 $\sqrt[4]{(x+2)^{12}y^4}$

Ejer. 85–90: Reemplace el símbolo $\square$ con $=$ o $\neq$ para hacer que el enunciado resultante sea verdadero, siempre que la expresión tenga significado. Explique su respuesta.

85 $(a^r)^2 \square a^{(r^2)}$

86 $(a^2+1)^{1/2} \square a+1$

87 $a^rb^s \square (ab)^{rs}$

88 $\sqrt{a^r} \square \left(\sqrt{a}\right)^r$

89 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{c}} \square \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$

90 $a^{1/k} \square \dfrac{1}{a^k}$

Ejer. 91–92: Cuando se evalúan números negativos elevados a potencias fraccionarias, tal vez se requiera evaluar la raíz y la potencia entera por separado. Por ejemplo, $(-3)^{2/5}$ se puede evaluar correctamente como $[(-3)^{1/5}]^2$ o $[(-3)^2]^{1/5}$, mientras que de otro modo podría aparecer un mensaje de error. Aproxime la expresión del número real a cuatro posiciones decimales.

91 a) $(-3)^{2/5}$ b) $(-7)^{4/3}$

92 a) $(-1.2)^{3/7}$ b) $(-5.08)^{7/3}$

Ejer. 93–94: Aproxime la expresión del número real a cuatro posiciones decimales.

93 a) $\sqrt{\pi+1}$ b) $\sqrt[3]{17.1}+5^{1/4}$

94 a) $(2.6-1.3)^{-2}$ b) $5^{\sqrt{7}}$

95 **Cuenta de ahorros** Uno de los bancos más antiguos de Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si se hubieran depositado 200 dólares en aquel entonces en una cuenta que pagaba un interés anual de 4%, entonces 180 años después el importe se habría incrementado a $200(1.04)^{180}$ dólares. Aproxime esta cantidad al centavo más cercano.

96 **Distancia de visibilidad** En un día claro, la distancia d (en millas) a la que se tiene visibilidad desde la cima de un edificio alto con una altura h (en pies) puede aproximarse mediante la ecuación $d = 1.2\sqrt{h}$. Aproxime la distancia a la que se puede ver desde la cima de la Torre Sears de Chicago, que mide 1454 pies de altura.

97 **Longitud de un lenguado** La relación longitud-peso para el lenguado del Pacífico puede aproximarse con la fórmula $L = 0.46\sqrt[3]{W}$, donde W está en kilogramos y L en metros. El lenguado más grande que se ha documentado pesaba 230 kilogramos. Estime su longitud.

98 **Peso de una ballena** La relación longitud-peso para la ballena sei puede aproximarse con $W = 0.0016L^{2.43}$, donde W se expresa en toneladas y L en pies. Estime el peso de una ballena que mide 25 pies de largo.

99 **Puntaje de los levantadores de pesas** La fórmula de O'Carroll se utiliza para medir el puntaje de los levantadores de pesas. Si un levantador que pesa b kilogramos levanta w kilogramos de peso, entonces el puntaje de la pesa W está dado por

$$W = \frac{w}{\sqrt[3]{b-35}}.$$

Suponga que dos levantadores que pesan 75 y 120 kilogramos levantan pesas de 180 y 250 kilogramos, respectivamente. Use la fórmula de O'Carroll para determinar cuál es el mejor levantador de pesas.

100 **Área de la superficie corporal** El área de la superficie corporal S de una persona (en pies cuadrados) puede aproximarse con

$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725},$$

donde la altura h se expresa en pulgadas y el peso w en libras.

a) Estime S para una persona de 6 pies de altura que pesa 175 libras.

b) Si una persona mide 5 pies de altura, ¿qué efecto tiene un incremento de 10% en el peso sobre S?

101 **Peso en hombres** El peso medio W (en libras) para los hombres h con una estatura entre 64 y 79 pulgadas puede aproximarse usando la fórmula $W = 0.1166h^{1.7}$. Elabore una tabla para W donde $h = 64, 65, \ldots, 79$. Redondee todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	
68		76	
69		77	
70		78	
71		79	

102 **Peso en mujeres** El peso medio W (en libras) para las mujeres con una estatura h entre 60 y 75 pulgadas puede aproximarse usando la fórmula $W = 0.1049h^{1.7}$. Elabore una tabla para W donde $h = 60, 61, \ldots, 75$. Redondee todos los pesos a la libra más cercana.

Estatura	Peso	Estatura	Peso
60		68	
61		69	
62		70	
63		71	
64		72	
65		73	
66		74	
67		75	

1.3 Expresiones algebraicas

En ocasiones utilizamos la notación y terminología de conjuntos para describir relaciones matemáticas. Un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo, y los objetos se llaman **elementos** del conjunto. Las letras mayúsculas $R, S, T, \ldots$ suelen emplearse para denotar conjuntos y las letras minúsculas $a, b, x, y, \ldots$ por lo general representan elementos de conjuntos. A lo largo del libro, $\mathbb{R}$ denota el conjunto de números reales y $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los enteros.

Dos conjuntos S y T son **iguales,** denotados por $S = T$, si S y T contienen exactamente los mismos elementos. Escribimos $S \neq T$ si S y T no son iguales. En la siguiente tabla se muestra otra notación o terminología.

Notación o terminología	Significado	Ejemplos
$a \in S$	a es un elemento de S	$3 \in \mathbb{Z}$
$a \notin S$	a no es un elemento de S	$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$
S es un **subconjunto** de T	Todo elemento de S es un elemento de T	$\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$
Constante	Una letra o símbolo que representa un elemento *específico* de un conjunto	$5, -\sqrt{2}, \pi$
Variable	Una letra o símbolo que representa *cualquier* elemento de un conjunto	Sea x cualquier número real

Por lo general se utilizan las letras al final del alfabeto, como x, y y z, para las variables, y las letras al principio del alfabeto, por ejemplo, a, b y c, para las constantes. A lo largo del libro, a menos que se especifique otra cosa, las variables representan números reales.

Cuando los elementos de un conjunto S tienen cierta propiedad, a veces esto se indica con la expresión $S = \{x\colon\ \}$, anotando la propiedad que describe a la variable x en el espacio después de los dos puntos. La expresión encerrada entre corchetes y los dos puntos se lee "el conjunto de toda x tal que…", y la frase se completa mencionando la propiedad que se anotó después de los dos puntos. Por ejemplo, $\{x\colon x > 3\}$ se lee "el conjunto de toda x tal que x es mayor que 3."

$\{x \mid x > 3\}$ es una notación equivalente.

Para conjuntos finitos, en ocasiones se listan todos los elementos del conjunto dentro de corchetes. Así, si el conjunto T está formado por los primeros cinco enteros positivos, podemos escribir $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando los conjuntos se describen de esta manera, el orden que se utiliza para listar los elementos no es relevante, por lo que también podría escribir $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, y así sucesivamente.

Si comenzamos con cualquier colección de variables y números reales, entonces una **expresión algebraica** es el resultado que se obtiene al aplicar a esta colección sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias o raíces. Si en una expresión algebraica las variables se reemplazan por números específicos, el número resultante se llama **valor numérico** de la expresión para estos números. El **dominio** de una expresión algebraica consiste en todos los números reales que pueden representar las variables. Por lo tanto, a menos que se especifique otra cosa, *asumimos que el dominio está compuesto por aquellos números reales que, cuando sustituyen a las variables, no hacen que la expresión carezca de sentido; esto significa que los denominadores no pueden ser iguales a cero y las raíces siempre existen.* En la tabla siguiente se proporcionan dos ejemplos.

Expresiones algebraicas

Ejemplo	Dominio	Valor común
$x^3 - 5x + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$	toda $x > 0$	En $x = 4$: $4^3 - 5(4) + \dfrac{6}{\sqrt{4}} = 64 - 20 + 3 = 47$
$\dfrac{2xy + (3/x^2)}{\sqrt[3]{y-1}}$	toda $x \neq 0$ y toda $y \neq 1$	En $x = 1$ y $y = 9$ $\dfrac{2(1)(9) + (3/1^2)}{\sqrt[3]{9-1}} = \dfrac{18+3}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{21}{2}$

Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real y n un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. Un *polinomio en x* es una suma de cualquier número de monomios en x. Otra manera de decir esto es la siguiente.

Definición de polinomio

Un **polinomio en x** es una suma de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio tiene **grado n**.

Cada expresión $a_k x^k$ en la suma es un **término** del polinomio. Si un coeficiente a_k es cero, por lo general se elimina el término $a_k x^k$. El coeficiente a_k de la máxima potencia de x se denomina **coeficiente principal** del polinomio.

La tabla siguiente contiene ejemplos específicos de polinomios.

Polinomios

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de potencias de x semejantes son iguales. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, se le llama **polinomio cero** y se denota con 0. Sin embargo, por convención, el grado del polinomio cero no es cero, sino que no está definido. Si c es un *número real diferente de cero*, entonces c es un polinomio de grado 0. Estos polinomios (junto con el polinomio cero) son **polinomios constantes**.

Si un coeficiente de un polinomio es negativo, normalmente usamos un signo menos entre términos apropiados. Para ejemplificar,

$$3x^2 + (-5)x + (-7) = 3x^2 - 5x - 7$$

También podemos considerar polinomios en variables distintas de x. Por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. A menudo, los términos de un polinomio se acomodan en orden de potencias decrecientes de la variable; por lo tanto, escribimos

$$\tfrac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}\,z^4 = -3z^7 - \sqrt{5}\,z^4 + \tfrac{2}{5}z^2 + 8$$

Podemos considerar un polinomio en x como una expresión algebraica obtenida al emplear un número finito de sumas, restas y multiplicaciones que contienen x. Si una expresión algebraica tiene divisiones o raíces con una variable x, entonces no es un polinomio en x.

EJEMPLOS **No polinominos**

- $\dfrac{1}{x} + 3x$
- $\dfrac{x-5}{x^2+2}$
- $3x^2 + \sqrt{x} - 2$

Dado que los polinomios representan números reales, se pueden usar las propiedades descritas en la sección 1.1. En particular, si se realizan sumas, restas y multiplicaciones con polinomios, los resultados pueden simplificarse usando las propiedades de los números reales, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Multiplicación de polinomios**

Calcule el producto: $(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$

SOLUCIÓN Primero utilizamos una propiedad distributiva, tratando el polinomio $2x^3 + 3x - 1$ como un solo número real:

$$\begin{aligned}&(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)\\&\quad = x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1)\end{aligned}$$

Se puede ilustrar que ambas expresiones son equivalentes: Guarde 7 en X y muestre que la expresión original y la expresión final son iguales a 56.480.

Luego utilizamos otra propiedad distributiva tres veces y se simplifica el resultado, obteniendo

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1) \\ &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4 \\ &= 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4.\end{aligned}$$

Observe que los tres monomios del primer polinomio se multiplicaron por cada uno de los tres monomios en el segundo polinomio, lo cual dio un total de nueve términos. ■

Podemos considerar polinomios con más de una variable. Por ejemplo, un polinomio con *dos* variables, x y y, es una suma finita de términos, cada uno de la forma ax^my^k para un número real a y enteros m y k no negativos. Un ejemplo es

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5$$

Otros polinomios pueden tener tres variables, por ejemplo, x, y, z, o bien, *cualquier* número de variables. La suma, resta y multiplicación se realizan utilizando las propiedades de los números reales, del mismo modo que se hace para los polinomios en una variable.

Los productos enumerados en la siguiente tabla ocurren con tanta frecuencia que merecen una atención especial. Puede verificar la validez de cada fórmula por medio de una multiplicación. En los incisos 2) y 3) usamos el signo superior en ambos lados o el signo inferior en ambos lados. Así, el inciso 2) es en realidad *dos* fórmulas:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{y} \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

De la misma manera, el inciso 3) representa dos fórmulas.

Fórmulas de productos

Fórmula	Ejemplos
1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2$ $= 4a^2 - 12a + 9$
3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3$ $= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

Si un polinomio es un producto de otros polinomios, entonces cada polinomio del producto es un **factor** del polinomio original. **Factorizar** es el proceso de expresar una suma de términos como un producto. Por ejemplo, como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, los polinomios $x + 3$ y $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$.

La factorización es un proceso importante en matemáticas, ya que se puede usar para reducir el estudio de una expresión compleja al estudio de varias expresiones más sencillas. Por ejemplo, las propiedades del polinomio $x^2 - 9$ pueden determinarse al examinar los factores $x + 3$ y $x - 3$. Como se verá más adelante en el capítulo, otro uso importante de la factorización es encontrar soluciones de las ecuaciones.

El interés se centrará principalmente en los **factores no triviales** de los polinomios, es decir, los factores que contienen polinomios de grado positivo. Sin embargo, si los coeficientes están restringidos a números *enteros*, entonces se elimina un factor común entero de cada término del polinomio. Por ejemplo,

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3)$$

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números es **primo**, o **irreducible** sobre S, si no puede escribirse como un producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Un polinomio puede ser irreducible sobre un conjunto S pero no sobre otro. Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales, ya que no puede expresarse como un producto de dos polinomios de grado positivo que tengan coeficientes *racionales*. Sin embargo, $x^2 - 2$ no es irreducible sobre los números reales, ya que podemos escribir

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

Del mismo modo, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales, pero como veremos en la sección 1.5, no sobre los números complejos.

Cada polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible. Si a y b no tienen máximo común divisor (MCD).

Antes de factorizar un polinomio, se debe especificar el sistema numérico (o conjunto) a partir del cual se eligen los coeficientes de los factores. En este capítulo usaremos la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, entonces los factores deben ser polinomios con coeficientes enteros*. **Factorizar** un polinomio significa expresarlo como un producto de polinomios irreducibles.

El **máximo factor común (mfc)** de una expresión es el producto de los factores que aparecen en cada término, con cada uno de estos factores elevado al mínimo exponente no nulo que aparece en cualquier término. Al factorizar polinomios, es recomendable factorizar primero el mfc, como se muestra en las dos últimas partes de los siguientes ejemplos. En las dos primeras partes se factorizan los trinomios por el **método de prueba y error**.

EJEMPLOS **Polinomios factorizados**

- $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$
- $6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$
- $12x^3 - 36x^2y + 27xy^2 = 3x(4x^2 - 12xy + 9y^2)$
  $= 3x(2x - 3y)(2x - 3y) = 3x(2x - 3y)^2$
- $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2)$
  $= x^2y(4x - 3y)(x - 2y)$

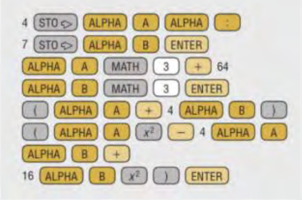
Por lo general es difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En los casos simples, las fórmulas de factorización siguientes pueden resultar útiles. Se puede demostrar que los factores $x^2 + xy + y^2$ y $x^2 - xy + y^2$ en la resta y suma de dos cubos, respectivamente, son irreducibles sobre los números reales.

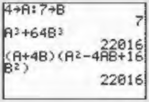
Fórmulas de factorización

Fórmula	Ejemplos
1) Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
2) Diferencia de dos cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$ $= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
3) Suma de dos cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$a^3 + 64b^3 = a^3 + (4b)^3$ $= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2]$ $= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2)$

Comprobación del resultado de una factorización

El resultado de una factorización se puede comprobar al multiplicar la respuesta propuesta y compararla con la expresión original. Aquí se sustituirán los valores de las variables y se evaluarán la expresión original y la respuesta propuestas.





No elija valores como 0, 1 o 2 para A y B, ya que es demasiado fácil obtener el mismo valor para la expresión original y la respuesta propuestas. Por ejemplo, si sustituimos 1 por A y 0 por B y factorizamos $A^3 + 64B^3$ incorrectamente como $(A + 4B)(A^2 + 16B^2)$, ambas expresiones serían iguales a 1 y se cometería una equivocación al pensar que $A^3 + 64B^3$ se factorizó correctamente.

Si una suma contiene cuatro o más términos, es posible agrupar de manera adecuada los términos y luego encontrar una factorización usando las propiedades distributivas. Esta técnica, llamada **factorización por agrupación**, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Factorización por agrupación**

Factorice:

a) $4ac + 2bc - 2ad - bd$ **b)** $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

c) $x^2 - 16y^2 + 10x + 25$

SOLUCIÓN

a) Agrupamos los primeros dos y los últimos dos términos, y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \ldots \text{ cada grupo tiene mfc} \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b). \end{aligned}$$

En esta etapa no se ha factorizado la expresión dada, porque el lado derecho tiene la forma

$$2ck - dk \quad \text{con } k = 2a + b.$$

No obstante, si factorizamos k, entonces

$$2ck - dk = (2c - d)k = (2c - d)(2a + b).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2c - d)(2a + b). \end{aligned}$$

Observe que si $2ck - dk$ se factoriza como $k(2c - d)$, entonces la última expresión es $(2a + b)(2c - d)$.

b) Agrupamos los primeros dos y los últimos dos términos, y luego procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8)\\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2)\\ &= (x^2 - 4)(3x + 2)\end{aligned}$$

Por último, usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para $x^2 - 4$, obtenemos la factorización:

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

c) Primero reacomodamos y agrupamos los términos, y luego aplicamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados como sigue:

$$\begin{aligned}x^2 - 16y^2 + 10x + 25 &= (x^2 + 10x + 25) - 16y^2\\ &= (x + 5)^2 - (4y)^2\\ &= [(x + 5) + 4y][(x + 5) - 4y]\\ &= (x + 4y + 5)(x - 4y + 5)\end{aligned}$$

Una **expresión fraccionaria** es un cociente de dos expresiones algebraicas. Como caso especial, una **expresión racional** es un cociente p/q de dos *polinomios* p y q. Como la división entre cero no está permitida, el dominio de p/q está formado por todos los números reales, excepto aquellos que hagan que el denominador sea cero. En la siguiente tabla se proporcionan dos ejemplos.

Expresiones racionales

Cociente	El denominador es cero si	Dominio
$\dfrac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	$x = \pm 3$	Toda $x \neq \pm 3$
$\dfrac{x^3 - 3x^2y + 4y^2}{y - x^3}$	$y = x^3$	Toda x y y tales que $y \neq x^3$

En la mayor parte del libro se utilizan expresiones racionales en las que tanto el numerador como el denominador son polinomios con sólo una variable.

Como las variables de una expresión racional representan números reales, podemos usar las propiedades de los cocientes de la sección 1.1, reemplazando las letras a, b, c y d con polinomios. La siguiente propiedad es de particular importancia, donde $bd \neq 0$:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

A veces este proceso de simplificación se describe al decir que *un factor común diferente de cero en el numerador y el denominador de un cociente se puede cancelar*.

Una expresión racional se *simplifica* o se *reduce a su mínima expresión*, si el numerador y el denominador no tienen como factores comunes polinomiales de grado positivo y no hay factores comunes enteros mayores que 1. Para simplificar una expresión racional, el numerador y el denominador se factorizan en factores primos y luego, suponiendo que los factores del denominador son diferentes de cero, los factores comunes se cancelan, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 **Productos y cocientes de expresiones racionales**

Efectúe la operación que se indica y simplifique:

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x - 2}{x - 3}$ b) $\dfrac{x + 2}{2x - 3} \div \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

SOLUCIÓN

a)
$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x - 2}{x - 3} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(2x - 2)}{(x^2 - 1)(x - 3)} \qquad \text{propiedad de los cocientes}$$
$$= \frac{(x - 3)^{\cancel{2}\,1} \cdot 2\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}\cancel{(x - 3)}} \qquad \text{factorizamos todos los polinomios}$$
$$\overset{\text{si } x \neq 3,\, x \neq 1}{=} \frac{2(x - 3)}{x + 1} \qquad \text{cancelamos los factores comunes}$$

b)
$$\frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x} = \frac{x + 2}{2x - 3} \cdot \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 4} \qquad \text{propiedad de los cocientes}$$
$$= \frac{\cancel{(x + 2)}x\cancel{(2x - 3)}}{\cancel{(2x - 3)}\cancel{(x + 2)}(x - 2)} \qquad \text{propiedad de los cocientes; se factorizan todos los polinomios}$$
$$\overset{\text{si } x \neq -2,\, x \neq 3/2}{=} \frac{x}{x - 2} \qquad \text{cancelamos los factores comunes}$$
■

Para sumar o restar dos expresiones racionales, por lo general encontramos un *denominador común* y usamos las siguientes propiedades de los cocientes:

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a - c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, se puede obtener un denominador común al multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por una expresión apropiada. Por lo general se emplea el ***mínimo* común múltiplo (mcm)** de los dos cocientes. Para determinar el mcm, factorizamos cada denominador en primos y luego formamos el producto de los diferentes factores primos, usando el máximo exponente que aparezca con cada factor primo.

Las calculadoras graficadoras pueden determinar el mínimo común múltiplo (mcm) de dos números, así como sumas exactas de fracciones. Estas características se ilustran con los números 7/24 y 5/18.

Cómo determinar el mcm MATH ▷ 8 24 , 18) ENTER

Sumar las fracciones 7 ÷ 24 + 5 ÷ 18 MATH 1 ENTER

```
lcm(24,18)
                72
7/24+5/18▸Frac
             41/72
```

EJEMPLO 4 **Simplificación de sumas y diferencias de expresiones racionales**

Efectúe las operaciones y simplifique:

$$\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2}$$

SOLUCIÓN Los denominadores ya están en forma factorizada. El mcm es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres cocientes que tienen el denominador $x^2(3x-2)$, multiplicamos por x el numerador y el denominador del primer cociente, los del segundo cociente por x^2 y los del tercero por $3x - 2$, lo cual nos da

$$\begin{aligned}
\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2} &= \frac{6}{x(3x-2)}\cdot\frac{x}{x} + \frac{5}{3x-2}\cdot\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cdot\frac{3x-2}{3x-2} \\
&= \frac{6x}{x^2(3x-2)} + \frac{5x^2}{x^2(3x-2)} - \frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)} \\
&= \frac{6x + 5x^2 - 2(3x-2)}{x^2(3x-2)} \\
&= \frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}
\end{aligned}$$

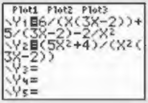
■

Crear una tabla

Se revisará la simplificación del ejemplo 4 al crear y comparar tablas de valores para la expresión original y la expresión final. Estas expresiones se asignarán a Y_1 y Y_2 (más adelante llamadas *funciones*) y se compararán sus valores para $x = 1, 2, 3\ldots$

Hacer asignaciones de Y

[Y=] 6 [÷] [(] [X,T,θ,n] [(]
3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [)] [+]
5 [÷] [(] 3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [−]
2 [÷] [X,T,θ,n] [x^2] [ENTER]
[(] 5 [X,T,θ,n] [x^2] [+] 4 [)] [÷]
[(] [X,T,θ,n] [x^2] [(]
3 [X,T,θ,n] [−] 2 [)] [)] [ENTER]



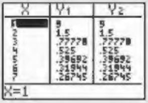
Ajustar una tabla

[2nd] [TBLSET] 1 [▽] 1 [ENTER]

Ver la tabla

[2nd] [TABLE]

La tabla apoya la simplificación.



Una **fracción compleja** es un cociente en el que el numerador o el denominador es una expresión fraccionaria. Ciertos problemas en cálculo requieren la simplificación de fracciones complejas del tipo dado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Simplificación de una fracción compleja**

Simplifique la fracción compleja:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}$$

SOLUCIÓN Cambiamos el numerador de la expresión dada en un solo cociente y luego usamos una propiedad para simplificar los cocientes:

$$\frac{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{a+3}}{x-a}=\frac{\dfrac{2(a+3)-2(x+3)}{(x+3)(a+3)}}{x-a}$$ combinamos las fracciones en el numerador

$$=\frac{2a-2x}{(x+3)(a+3)}\cdot\frac{1}{x-a}$$ simplificamos; propiedad de los cocientes

$$=\frac{2(a-x)}{(x+3)(a+3)(x-a)}$$ factorizamos $2a-2x$; propiedad de los cocientes

$$\overset{\text{si } x\neq a}{=}-\frac{2}{(x+3)(a+3)}$$ reemplazamos $\dfrac{a-x}{x-a}$ con -1

Otro método es multiplicar el numerador y el denominador de la expresión dada por $(x+3)(a+3)$, el mcm del numerador y del denominador, y luego simplificar el resultado. ■

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a+\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; como en el siguiente ejemplo, estos cocientes se pueden simplificar al multiplicar el numerador y el denominador por el **conjugado** $a-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, respectivamente. Desde luego, si aparece $a-\sqrt{b}$, entonces se multiplica por $a+\sqrt{b}$.

En el ejemplo 4 de la sección 1.2 se racionalizaron los denominadores. En cálculo, a veces es necesario racionalizar el *numerador* de un cociente, como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 6 **Racionalización de un denominador**

Si $h\neq 0$, racionalizamos el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$ propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \qquad \text{ley de los radicales}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \qquad \text{simplificamos}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \qquad \text{cancelamos } h \neq 0$$

Puede parecer que se ha logrado muy poco, ya que hay radicales en el denominador. Sin embargo, en cálculo es de interés determinar lo que es cierto si h es muy cercana a cero. Tenga en cuenta que si usamos la expresión *dada* obtenemos lo siguiente:

$$\text{Si} \quad h \approx 0, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \approx \frac{\sqrt{x+0}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0},$$

una expresión sin sentido. Sin embargo, si utilizamos la forma *racionalizada*, obtenemos la siguiente información:

$$\text{Si} \quad h \approx 0, \quad \text{entonces} \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Los problemas del tipo que se muestra en el siguiente ejemplo también se presentan en el cálculo.

EJEMPLO 7 **Simplificación de una expresión fraccionaria**

Simplifique:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{\left[(2x+5)^{1/2}\right]^2}$$

SOLUCIÓN Una forma de simplificar la expresión es como sigue:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3\left(\frac{1}{2}\right)(2x+5)^{-1/2}(2)}{\left[(2x+5)^{1/2}\right]^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} \qquad \text{definición de exponentes negativos}$$

$$= \frac{\dfrac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5} \qquad \text{combinamos los términos en el numerador}$$

$$= \frac{6x^3+15x^2-x^3}{(2x+5)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x+5} \qquad \text{propiedad de los cocientes}$$

$$= \frac{5x^3+15x^2}{(2x+5)^{3/2}} \qquad \text{simplificamos}$$

$$= \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}} \qquad \text{factorizamos el numerador}$$

Una simplificación alterna es eliminar la potencia negativa, $-\frac{1}{2}$, en la expresión dada, como sigue:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}}$$ multiplicamos el numerador y el denominador por $(2x+5)^{1/2}$

$$= \frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}}$$ propiedad de los cocientes y ley de los exponentes

El resto de la simplificación es similar.

Un tercer método de simplificación es factorizar primero el máximo factor común. En este caso, los factores comunes son x y $(2x + 5)$, y los exponentes mínimos son 2 y $-\frac{1}{2}$, respectivamente. Entonces, el máximo factor común es $x^2(2x + 5)^{-1/2}$, factorizamos el numerador y simplificamos como sigue:

$$\frac{x^2(2x+5)^{-1/2}[3(2x+5)^1 - x]}{(2x+5)^1} = \frac{x^2(5x+15)}{(2x+5)^{3/2}} = \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$

Uno de los problemas en cálculo es determinar los valores de x que hacen que el numerador sea igual a cero. La forma simplificada ayuda a responder con relativa facilidad esta pregunta: los valores son 0 y -3. ■

1.3 Ejercicios

Ejer. 1-12: Exprese como un polinomio.

1 $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$

2 $(3u - 1)(u + 2) + 7u(u + 1)$

3 $\dfrac{8x^2y^3 - 6x^3y}{2x^2y}$

4 $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

5 $(2x + 7y)(2x - 7y)$

6 $(5x + 3y)(5x - 3y)$

7 $(3x + 2y)^2$

8 $(5x - 4y)^2$

9 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

10 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

11 $(x - 2y)^3$

12 $(x + 3y)^3$

Ejer. 13-30: Factorice el polinomio.

13 $8x^2 - 17x - 21$

14 $7x^2 + 10x - 8$

15 $x^2 + 4x + 5$

16 $3x^2 - 4x + 2$

17 $36x^2 - 60x + 25$

18 $9x^2 + 24x + 16$

19 $x^4 - 4x^2$

20 $x^3 - 16x$

21 $8x^3 - y^6$

22 $x^6 - 27y^3$

23 $343x^3 + y^9$

24 $x^3 + 64$

25 $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$

26 $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

27 $a^6 - b^6$

28 $x^8 - 16$

29 $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$

30 $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$

Ejer. 31-60: Simplifique la expresión.

31 $\dfrac{y^2 - 25}{y^3 - 125}$

32 $\dfrac{12 + r - r^2}{r^3 + 3r^2}$

33 $\dfrac{9x^2 - 4}{3x^2 - 5x + 2} \cdot \dfrac{9x^4 - 6x^3 + 4x^2}{27x^4 + 8x}$

34 $\dfrac{5a^2 + 12a + 4}{a^4 - 16} \div \dfrac{25a^2 + 20a + 4}{a^2 - 2a}$

35 $\dfrac{4}{3s + 1} - \dfrac{11}{(3s + 1)^2}$

36 $\dfrac{4}{(5s - 2)^2} + \dfrac{s}{5s - 2}$

37 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3x + 1}{x^2} - \dfrac{x - 2}{x^3}$

38 $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2x - 1}{x^2} + \dfrac{x + 7}{x^3}$

39 $\dfrac{3t}{t + 2} + \dfrac{5t}{t - 2} - \dfrac{40}{t^2 - 4}$

40 $\dfrac{t}{t + 3} + \dfrac{4t}{t - 3} - \dfrac{18}{t^2 - 9}$

41 $\dfrac{4x}{3x-4}+\dfrac{8}{3x^2-4x}+\dfrac{2}{x}$

42 $\dfrac{12x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x^2+x}+\dfrac{5}{x}$

43 $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$

44 $\dfrac{5x}{2x+3}-\dfrac{6}{2x^2+3x}+\dfrac{2}{x}$

45 $3+\dfrac{5}{u}+\dfrac{2u}{3u+1}$

46 $6+\dfrac{2}{u}-\dfrac{3u}{u+5}$

47 $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}-\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}$

48 $\dfrac{4x+12}{x^2+6x+9}+\dfrac{5x}{x^2-9}+\dfrac{7}{x-3}$

49 $\dfrac{\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$

50 $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$

51 $\dfrac{y^{-1}+x^{-1}}{(xy)^{-1}}$

52 $\dfrac{y^{-2}-x^{-2}}{y^{-2}+x^{-2}}$

53 $\dfrac{\dfrac{r}{s}+\dfrac{s}{r}}{\dfrac{r^2}{s^2}-\dfrac{s^2}{r^2}}$

54 $\dfrac{\dfrac{2}{w}-\dfrac{4}{2w+1}}{\dfrac{5}{w}+\dfrac{8}{2w+1}}$

55 $\dfrac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}$

56 $\dfrac{(x+h)^3+5(x+h)-(x^3+5x)}{h}$

57 $\dfrac{\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{5}{a-1}}{x-a}$

58 $\dfrac{\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{a+2}{a}}{x-a}$

59 $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}$

60 $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

Ejer. 61-64: Racionalice el denominador.

61 $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$

62 $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

63 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ (*Sugerencia*: multiplique el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.)

64 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Ejer. 65-68: Racionalice el numerador.

65 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^2-b^2}$

66 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b^2-c^2}$

67 $\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

68 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}}$

Ejer. 69-72: Exprese como una suma de términos de la forma ax^r, donde r es un número racional.

69 $\dfrac{3x^2-x+7}{x^{2/3}}$

70 $\dfrac{x^2+4x-6}{\sqrt{x}}$

71 $\dfrac{(x^2+2)^2}{x^5}$

72 $\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{x^3}$

Ejer. 73-76: Exprese como un cociente.

73 $x^{-1}+x^2$

74 $x^{-5}-x$

75 $x^{-1/2}-x^{1/2}$

76 $x^{-2/3}+x^{7/3}$

Ejer. 77-90: Simplifique la expresión.

77 $(2x^2-3x+1)(4)(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4(4x-3)$

78 $(6x-5)^3(2)(x^2+4)(2x)+(x^2+4)^2(3)(6x-5)^2(6)$

79 $(x^2-4)^{1/2}(3)(2x+1)^2(2)+(2x+1)^3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-4)^{-1/2}(2x)$

80 $(3x+2)^{1/3}(2)(4x-5)(4)+(4x-5)^2\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{-2/3}(3)$

81 $(3x+1)^6\left(\frac{1}{2}\right)(2x-5)^{-1/2}(2)+(2x-5)^{1/2}(6)(3x+1)^5(3)$

82 $(x^2+9)^4\left(-\frac{1}{3}\right)(x+6)^{-4/3}+(x+6)^{-1/3}(4)(x^2+9)^3(2x)$

83 $\dfrac{(6x+1)^3(27x^2+2)-(9x^3+2x)(3)(6x+1)^2(6)}{(6x+1)^6}$

84 $\dfrac{(x^2-1)^4(2x)-x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8}$

85 $\dfrac{(x^2+2)^3(2x)-x^2(3)(x^2+2)^2(2x)}{[(x^2+2)^3]^2}$

86 $\dfrac{(x^2-5)^4(3x^2) - x^3(4)(x^2-5)^3(2x)}{[(x^2-5)^4]^2}$

87 $\dfrac{(x^2+4)^{1/3}(3) - (3x)(\frac{1}{3})(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2+4)^{1/3}]^2}$

88 $\dfrac{(1-x^2)^{1/2}(2x) - x^2(\frac{1}{2})(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1-x^2)^{1/2}]^2}$

89 $\dfrac{(4x^2+9)^{1/2}(2) - (2x+3)(\frac{1}{2})(4x^2+9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2+9)^{1/2}]^2}$

90
$\dfrac{(3x+2)^{1/2}(\frac{1}{3})(2x+3)^{-2/3}(2) - (2x+3)^{1/3}(\frac{1}{2})(3x+2)^{-1/2}(3)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}$

Ejer. 91-92: Evalúe el par de expresiones para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 para elaborar una tabla de valores. Comente si las dos expresiones podrían ser o no iguales.

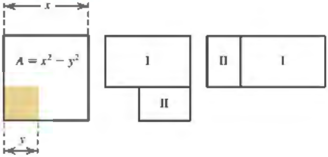
91 $\dfrac{113x^3 + 280x^2 - 150x}{22x^3 + 77x^2 - 100x - 350}$, $\quad \dfrac{3x}{2x+7} + \dfrac{4x^2}{1.1x^2 - 5}$

92 $\dfrac{20x^2 + 41x + 31}{10x^3 + 10x^2}$, $\quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3.2}{x^2}$

Ejer. 93-94: Los antiguos griegos dieron pruebas geométricas de las fórmulas de factorización para la diferencia de dos cuadrados y la diferencia de dos cubos. Establezca la fórmula para el caso especial descrito.

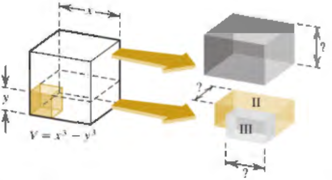
93 Encuentre las áreas de las regiones I y II de la figura, a fin de establecer la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para el caso especial $x > y$.

EJERCICIO 93



94 Determine los volúmenes de las cajas I, II y III de la figura para establecer la fórmula de la diferencia de dos cubos para el caso especial $x > y$.

EJERCICIO 94



95 **Requerimientos calóricos** El requerimiento básico de energía para una persona indica el número mínimo de calorías necesarias para mantener procesos vitales esenciales como la circulación, la regulación de la temperatura corporal y la respiración. Si se proporciona el sexo, peso w (en kilogramos), la estatura h (en centímetros) y la edad y (en años) de una persona, se puede estimar el requerimiento básico de energía en calorías usando las fórmulas siguientes, donde C_w y C_h son las calorías necesarias para mujeres y hombres, respectivamente:

$$C_w = 66.5 + 13.8w + 5h - 6.8y$$
$$C_h = 655 + 9.6w + 1.9h - 4.7y$$

a) Determine los requerimientos básicos de energía primero para una mujer de 25 años que pesa 59 kilogramos y tiene una estatura de 163 centímetros y luego para un hombre de 55 años que pesa 75 kilogramos y mide 178 centímetros.

b) Explique por qué, en ambas fórmulas, el coeficiente para y es negativo pero los otros coeficientes son positivos.

1.4 Ecuaciones

Una **ecuación** (o **igualdad**) es un enunciado que expresa que dos cantidades o expresiones son iguales. Las ecuaciones se utilizan en todos los campos que emplean números reales. La siguiente tabla se aplica a una variable x, pero se puede considerar cualquier otra. Las abreviaturas LI y LD en el segundo ejemplo indican los lados izquierdo y derecho de la ecuación, respectivamente.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ecuación en x	Enunciado de igualdad que contiene una variable, x	$x^2 - 5 = 4x$
Solución o **raíz** de una ecuación en x	Número b que da un enunciado verdadero al sustituirlo por x	5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$, porque la sustitución nos da LI: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y LD: $4 \cdot 5 = 20$, y $20 = 20$ es un enunciado verdadero.
Un número b **satisface** una ecuación en x	b es una solución de la ecuación	5 satisface a $x^2 - 5 = 4x$.
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones	$2x + 1 = 7$ $2x = 7 - 1$ $2x = 6$ $x = 3$
Resolver una ecuación en x	Encontrar todas las soluciones de la ecuación	Para resolver $(x + 3)(x - 5) = 0$, se iguala cada factor a 0: $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, obteniendo las soluciones -3 y 5.

Una **ecuación algebraica** en x contiene sólo expresiones algebraicas como polinomios, expresiones racionales, radicales y otras. Una ecuación de este tipo se denomina **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no son soluciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ es condicional porque el número $x = 4$ (y otros) no es una solución. Si *todos* los números en el dominio de las expresiones en una ecuación algebraica son una solución, a la ecuación se le llama **identidad**.

Supondremos que se tiene alguna experiencia en la búsqueda de soluciones de ecuaciones con una variable. Para resolver una **ecuación lineal** $ax + b = 0$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$, restamos b de ambos lados y dividimos entre a como sigue:

$$ax + b = 0, \quad ax = -b, \quad x = -\frac{b}{a}$$

De esta manera, la ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene **exactamente una solución**, $-b/a$.

En los siguientes ejemplos, las frases en color naranja indican cómo se obtuvo una ecuación equivalente a partir la ecuación anterior. Para acortar estas frases se usó, al igual que en el ejemplo 1, "dividir entre 2" en vez de la expresión más precisa, pero larga, *dividir ambos lados entre 2*.

Si una ecuación contiene expresiones racionales, a menudo eliminamos los denominadores multiplicando ambos lados por el mcm de estas expresiones. Si multiplicamos ambos lados por una expresión que es igual a cero para algún valor de x, entonces la ecuación resultante puede *no* ser equivalente a la ecuación original, como se ilustra en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 1 **Una ecuación sin soluciones**

Resuelva la ecuación $\dfrac{3x}{x-2} = 1 + \dfrac{6}{x-2}$

SOLUCIÓN

$$\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2} \qquad \text{ecuación}$$

$$\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) = (1)(x-2) + \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2) \qquad \text{multiplicamos por } x-2$$

$$3x = (x-2) + 6 \qquad \text{simplificamos}$$

$$3x = x + 4 \qquad \text{simplificamos}$$

$$2x = 4 \qquad \text{restamos } x$$

$$x = 2 \qquad \text{dividimos entre 2}$$

✓ **Comprobación** $x = 2$ LI: $\dfrac{3(2)}{(2)-2} = \dfrac{6}{0}$

Como la división entre 0 no está permitida, $x = 2$ no es una solución. Por consiguiente, *la ecuación dada no tiene soluciones.* ■

Las fórmulas que contienen varias variables se utilizan en muchas aplicaciones matemáticas. A veces es necesario despejar una variable específica en función de las variables restantes que aparecen en la fórmula, como lo ilustran los dos ejemplos siguientes.

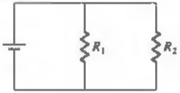
EJEMPLO 2 **Resistores conectados en paralelo**

En la teoría eléctrica, la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se utiliza para calcular la resistencia total R cuando dos resistores R_1 y R_2 se conectan en paralelo, como se muestra en la figura 1. Despeje R_1.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación dada por el mcm de las tres fracciones y luego despejamos, como sigue:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{fórmula}$$

$$\frac{1}{R}\cdot RR_1R_2 = \frac{1}{R_1}\cdot RR_1R_2 + \frac{1}{R_2}\cdot RR_1R_2 \qquad \text{multiplicamos por el mcm } RR_1R_2$$

$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \qquad \text{cancelamos los factores comunes}$$

$$R_1R_2 - RR_1 = RR_2 \qquad \text{reunimos los términos con } R_1 \text{ en un lado}$$

$$R_1(R_2 - R) = RR_2 \qquad \text{factorizamos } R_1$$

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R} \qquad \text{dividimos entre } R_2 - R$$

Otro método de solución es primero despejar la fórmula $1/R_1$, combinar las fracciones $1/R$ y $-1/R_2$, y luego aplicar la propiedad que establece que si dos números diferentes de cero son iguales, entonces también lo son sus recíprocos. Obtenemos el mismo resultado. ■

Las ecuaciones suelen usarse para resolver *problemas prácticos*, es decir, problemas que incluyen aplicaciones de matemáticas en otros campos de actividad. Debido a la ilimitada variedad de problemas prácticos, es difícil establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Los siguientes lineamientos pueden ser útiles, siempre y cuando el problema se pueda formular en términos de una ecuación con una variable. Cuando lea la solución del ejemplo 3, identifique los pasos específicos utilizados.

Lineamientos para resolver problemas prácticos

1. Si el problema se expresa por escrito, léalo detenidamente varias veces y piense en los datos que se proporcionan junto con la cantidad desconocida que se debe determinar.
2. Introduzca una letra para denotar la cantidad desconocida. Este es uno de los pasos más importantes de la solución. Las frases que contengan palabras como *qué, calcular, cuánto, a qué distancia* o *cuándo* deben ponerle en alerta acerca de la cantidad desconocida.
3. Si es apropiado, elabore un dibujo y agregue rótulos.
4. Elabore una lista de los datos conocidos, junto con cualesquiera relaciones que contengan la cantidad desconocida. Una relación puede describirse mediante una ecuación en la que los enunciados por escrito, en lugar de letras o números, aparecen en uno o ambos lados del signo igual.
5. Después de analizar la lista del punto 4, formule una ecuación que describa con precisión lo que se expresa con palabras.
6. Resuelva la ecuación formulada en el punto 5.
7. Compruebe las soluciones obtenidas en el punto 6 repasando el enunciado original del problema. Verifique que la solución sea coherente con las condiciones expresadas.

Los bancos y otras instituciones financieras pagan intereses sobre las inversiones. Por lo general, este interés es *compuesto* (como se describe en la sección 4.2), pero si el dinero se invierte o presta durante un periodo breve, puede pagarse un *interés simple* usando la siguiente fórmula.

Fórmula del interés simple

Si una suma de dinero C (**capital inicial**) se invierte a una tasa de interés simple i (expresada como decimal), entonces el **interés simple** I al final de t años es

$$I = Cit$$

EJEMPLO 3 **Inversión de dinero en dos acciones**

Una empresa de inversiones tiene \$100,000 de un cliente para invertir y decide hacerlo en dos acciones, A y B. La tasa de interés anual esperada o interés simple para la acción A es 15%, pero supone un riesgo y el cliente no desea invertir más de \$50,000 en ella. Se anticipa que la tasa de interés anual para la acción B más estable es 10%. Determine si hay una manera de invertir el dinero, de modo que el interés anual sea

a) \$12,000 **b)** \$13,000

SOLUCIÓN La tasa de interés anual está dada por $I = Ci$, que proviene de la fórmula del interés simple $I = Cit$ con $t = 1$. Si con x se denota la cantidad invertida en la acción A, entonces $100{,}000 - x$ se invertirá en la acción B. Esto lleva a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad invertida en la acción A al 15\%} \\ 100{,}000 - x &= \text{cantidad invertida en la acción B al 10\%} \\ 0.15x &= \text{interés anual de la acción A} \\ 0.10(100{,}000 - x) &= \text{interés anual de la acción B} \end{aligned}$$

Al sumar el interés de ambas acciones, obtenemos

$$\text{interés anual total} = 0.15x + 0.10(100{,}000 - x)$$

Al simplificar el lado derecho, tenemos

$$\text{interés anual total} = 10{,}000 + 0.05x. \qquad (*)$$

a) El interés anual total es \$12,000 si

$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 12{,}000 && \text{de } (*) \\ 0.05x &= 2000 && \text{restamos 10,000} \\ x &= \frac{2000}{0.05} = 40{,}000. && \text{dividimos entre 0.05} \end{aligned}$$

Entonces, \$40,000 deben invertirse en la acción A y los \$60,000 restantes en la acción B. Como la cantidad invertida en la acción A no es mayor de \$50,000, esta manera de invertir el dinero satisface el requerimiento del cliente.

✓ **Comprobación** Si \$40,000 se invierten en la acción A y \$60,000 en la acción B, entonces el interés anual total es

$$40{,}000(0.15) + 60{,}000(0.10) = 6000 + 6000 = 12{,}000.$$

b) El interés anual total es \$13,000 si

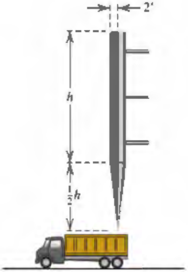
$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 13{,}000 && \text{de } (*) \\ 0.05x &= 3000 && \text{restamos 10,000} \\ x &= \frac{3000}{0.05} = 60{,}000. && \text{dividimos entre 0.05} \end{aligned}$$

Así, \$60,000 deben invertirse en la acción A y los restantes \$40,000 en la acción B. Este plan *no* satisface el requerimiento del cliente de que no se inviertan más de \$50,000 en la acción A. En consecuencia, la empresa no puede invertir el dinero del cliente en las acciones A y B de modo que el interés total anual sea \$13,000. ■

EJEMPLO 4 **Construcción de una tolva de elevador de granos**

Se construirá una tolva de elevador de granos, como se indica en la figura 2, con un cilindro circular recto de 2 pies de radio y altura h pies sobre un cono circular recto cuya altura es la mitad de la del cilindro. ¿Qué valor de h hará que el volumen total V de la tolva sea de 500 ft^3?

FIGURA 2



SOLUCIÓN Si V_{cilindro} y V_{cono} denotan los volúmenes (en ft^3) y h_{cilindro} y h_{cono} denotan las alturas (en pies) del cilindro y cono, respectivamente, entonces, usando las fórmulas para volumen, obtenemos lo siguiente:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_{\text{cilindro}} = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$
$$V_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_{\text{cono}} = \tfrac{1}{3}\pi(2)^2\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \tfrac{2}{3}\pi h$$

Como el volumen total V de la tolva tendrá 500 ft^3, debemos tener

$$\begin{aligned} 4\pi h + \tfrac{2}{3}\pi h &= 500 && V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cono}} = V_{\text{total}} \\ 12\pi h + 2\pi h &= 1500 && \text{multiplicamos por 3} \\ 14\pi h &= 1500 && \text{combinamos los términos} \\ h &= \frac{1500}{14\pi} \approx 34.1 \text{ ft.} && \text{dividimos entre } 14\pi \end{aligned}$$

Una **ecuación cuadrática** en x es una ecuación que se puede escribir en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

Para que se puedan resolver muchos tipos de ecuaciones, usaremos el siguiente teorema.

Teorema del factor cero Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$pq = 0 \text{ si y sólo si } p = 0 \text{ o } q = 0$$

El teorema del factor cero se puede extender a cualquier número de expresiones algebraicas, es decir,

$$pqr = 0 \text{ si y sólo si } p = 0,\ q = 0 \text{ o } r = 0,$$

y así sucesivamente. Deducimos que si $ax^2 + bx + c$ podemos escribir como un producto de dos polinomios de primer grado, entonces podemos hallar soluciones al igualar a 0 cada uno de los factores, como se aprecia enseguida. Esta técnica se conoce como **método de factorización**. Para usar dicho método, *es esencial que en un lado de la ecuación sólo aparezca el número 0.*

EJEMPLOS **Resolver una ecuación por factorización**

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 10 - x \\ 3x^2 + x - 10 &= 0 \\ (3x - 5)(x + 2) &= 0 \\ x = \tfrac{5}{3} \quad &\text{o} \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 8x \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ (x - 4)(x - 4) &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Como $x - 4$ aparece dos veces como factor en la segunda parte de los ejemplos anteriores, a 4 se le llama **raíz doble** o **raíz de multiplicidad 2** de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para algún número $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$ o, lo que es equivalente,

$$\left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right) = 0$$

Al igualar a cero cada factor se obtienen las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia se usa el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más o menos* $\sqrt{d}$) para representar tanto $\sqrt{d}$ como $-\sqrt{d}$. Entonces, para $d > 0$, se ha demostrado el siguiente resultado. (El caso $d < 0$ requiere el sistema de números complejos que se estudia en la sección 1.5.)

Una ecuación cuadrática especial	Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$

Comentario sobre la notación: Es común en la práctica que una variable represente más de un valor, como en $x = \pm 3$. Una notación más descriptiva es $x_{1,2} = \pm 3$, lo cual implica que $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

El proceso de resolver $x^2 = d$, como se indica en el cuadro anterior, se conoce como *obtener la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación*. Observe que si $d > 0$ se obtiene una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa, no sólo la raíz cuadrada principal definida en la sección 1.2.

EJEMPLOS **Resolver ecuaciones de la forma $x^2 = d$**

■ $x^2 = 169$

$$x = \pm\sqrt{169}$$
$$= \pm 13$$

■ $(x + 3)^2 = 5$

$$x + 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{5}$$

Las soluciones de una **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$, para $a \neq 0$, se pueden obtener por medio de la siguiente fórmula.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula cuadrática da dos soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Éstas son $x = x_1, x_2$, donde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Asumimos que $b^2 - 4ac \geq 0$ de modo que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. (El caso en que $b^2 - 4ac < 0$ se estudiará en la siguiente sección.) Por lo pronto, continuaremos como sigue:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{ecuación}$$
$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{restamos } c$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{dividimos entre } a$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad \text{completamos el trinomio cuadrado perfecto*}$$

*Recuerde, de un curso anterior de matemáticas, que **completar el trinomio cuadrado perfecto** significa sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{restamos } \frac{b}{2a}$$

Podemos escribir la última ecuación como

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$ o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, vemos que en todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ■

Observe que si la fórmula cuadrática se ejecuta de forma apropiada, no es necesario comprobar las soluciones, porque no se introducen soluciones extrañas. El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical en la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Si el discriminante es positivo, hay dos raíces reales y desiguales de la ecuación cuadrática. Si es cero, hay una raíz de multiplicidad 2, y si es negativo, no hay raíces reales de la ecuación cuadrática.

EJEMPLO 5 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para usar la fórmula cuadrática, debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Al hacerlo, obtenemos la ecuación $-2x^2 + 6x = 3$ o, de manera equivalente, $2x^2 - 6x + 3 = 0$. Ahora sustituimos $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, con lo cual obtenemos:

Observe que

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \neq \frac{3}{2} \pm \sqrt{3}.$$

*El 2 del denominador debe dividirse entre **ambos** términos del numerador, de esta manera*

$$\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Por consiguiente, las soluciones son

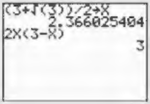
$$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2.37 \quad \text{y} \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0.63$$ ■

Comprobación de ecuaciones

Para comprobar la solución del ejemplo 5, guardamos $(3 + \sqrt{3})/2$ en X y obtenemos el valor del lado derecho de la ecuación, mostrando que es igual al valor del lado derecho de la ecuación.

Comprobación $x = (3 + \sqrt{3})/2$.

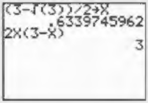
(3 + 2nd √ 3))
÷ 2 STO▷ X,T,θ,n ENTER
2 X,T,θ,n (3 − X,T,θ,n) ENTER



(continúa)

Comprobación
$x = (3 - \sqrt{3})/2$.

Usaremos algunas funciones sencillas de edición de las calculadoras para comprobar la segunda solución.



A medida que aumenta el nivel de dificultad de las ecuaciones que resolvamos, la comprobación en una calculadora graficadora es de gran ayuda.

El ejemplo siguiente muestra cómo se usa la fórmula cuadrática para factorizar trinomios.

EJEMPLO 6 **Factorización con la fórmula cuadrática**

Factorice el polinomio $21x^2 - 13x - 20$.

SOLUCION Resolvemos la ecuación cuadrática asociada,

$$21x^2 - 13x - 20 = 0,$$

usando la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(21)(-20)}}{2(21)} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 1680}}{42} = \frac{13 \pm \sqrt{1849}}{42} \\ &= \frac{13 \pm 43}{42} = \frac{56}{42}, -\frac{30}{42} = \frac{4}{3}, -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación como producto de factores lineales, ambos de la forma (x − solución):

$$\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x - \left(-\tfrac{5}{7}\right)\right) = 0$$

Eliminamos los denominadores al multiplicar ambos lados por $3 \cdot 7$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7\left(x - \tfrac{4}{3}\right)\left(x + \tfrac{5}{7}\right) &= 0 \cdot 3 \cdot 7 \\ 3\left(x - \tfrac{4}{3}\right) \cdot 7\left(x + \tfrac{5}{7}\right) &= 0 \\ (3x - 4)(7x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

El lado izquierdo es la factorización deseada, es decir,

$$21x^2 - 13x - 20 = (3x - 4)(7x + 5).$$ ■

En el siguiente ejemplo utilizamos la fórmula cuadrática para resolver una ecuación que contiene más de una variable.

EJEMPLO 7 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva $y = x^2 - 6x + 5$ para x, donde $x \leq 3$.

SOLUCION Podemos escribir la ecuación en la forma

$$x^2 - 6x + 5 - y = 0,$$

de modo que es una ecuación cuadrática en x con coeficientes $a = 1$, $b = 6$ y $c = 5 - y$. Observe que y se considera una constante, puesto que se está despejando la variable x. Ahora usamos la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5 - y)}}{2(1)} && x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2} && \text{simplificamos } b^2 - 4ac \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{4}\sqrt{4 + y}}{2} && \text{factorizamos } \sqrt{4} \\
&= \frac{6 \pm 2\sqrt{4 + y}}{2} && \sqrt{4} = 2 \\
&= 3 \pm \sqrt{4 + y} && \text{en } \textit{ambos} \text{ términos dividimos entre 2}
\end{aligned}$$

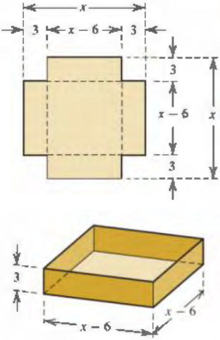
Como $\sqrt{4 + y}$ es no negativa, $3 + \sqrt{4 + y}$ es mayor o igual que 3 y $3 - \sqrt{4 + y}$ es menor o igual que 3. Debido a que la restricción dada es $x \leq 3$, tenemos

$$x = 3 - \sqrt{4 + y}.$$

■

Muchos problemas prácticos conducen a ecuaciones cuadráticas. Una de ellas se muestra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 3



EJEMPLO 8 **Construcción de una caja rectangular**

Se desea construir una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de una lámina de hojalata cuadrada, cortando un cuadrado de 3 pulgadas en cada esquina de la lámina y doblando los lados. Si la caja debe contener 48 pulg^3, ¿de qué tamaño debe ser la lámina de hojalata?

SOLUCION Iniciamos por trazar la figura 3, rotulando x la longitud desconocida del lado de la lámina de hojalata. Por consiguiente, cada lado de la base de la caja tendrá una longitud de $x - 3 - 3 = x - 6$.

Como el área de la base de la caja es $(x - 6)^2$ y la altura es 3, obtenemos

$$\text{volumen de la caja} = 3(x - 6)^2$$

Como la caja debe contener 48 pulg^3,

$$3(x - 6)^2 = 48$$

Ahora despejamos x:

$$\begin{aligned}
(x - 6)^2 &= 16 && \text{dividimos entre 3} \\
x - 6 &= \pm 4 && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \\
x &= 6 \pm 4 && \text{sumamos 6}
\end{aligned}$$

Así que,

$$x = 10 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

✓ **Comprobación** En la figura 2 vemos que $x = 2$ no es aceptable, porque no hay caja posible en este caso, sin embargo, si se comienza con un cuadrado de hojalata de 10 pulgadas, se cortan esquinas de 3 pulgadas y se dobla, se obtiene una caja cuyas dimensiones son 4, 4 y 3 pulgadas. La caja tiene el volumen deseado de 48 pulg^3. Por lo tanto, un cuadrado de 10 pulgadas es la respuesta del problema. ■

Las ecuaciones consideradas en secciones previas no son adecuadas para muchos problemas. Por ejemplo, en las aplicaciones a veces es necesario considerar potencias x^k con $k > 2$. Algunas ecuaciones comprenden valores absolutos o radicales. Esta sección concluye con ejemplos de ecuaciones de varios tipos que se pueden resolver usando métodos elementales.

EJEMPLO 9 **Solución de una ecuación que contiene un valor absoluto**

Resuelva la ecuación $2|x - 5| + 3 = 9$.

SOLUCIÓN Primero aislamos la expresión de valor absoluto al restar 3 y dividir entre 2, para obtener

$$|x - 5| = \frac{9 - 3}{2} = 3$$

Si a y b son números reales con $b > 0$, entonces $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$. Por lo tanto, si $|x - 5| = 3$, entonces

$$x - 5 = 3 \qquad \text{o} \qquad x - 5 = -3$$

Al despejar x obtenemos

$$x = 5 + 3 = 8 \qquad \text{o} \qquad x = 5 - 3 = 2$$

Así, la ecuación dada tiene dos soluciones, 8 y 2. ■

EJEMPLO 10 **Solución de una ecuación mediante agrupación**

Resuelva la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 && \text{ecuación}\\
x^2(x + 2) - 1(x + 2) &= 0 && \text{agrupamos los términos}\\
(x^2 - 1)(x + 2) &= 0 && \text{factorizamos } x + 2\\
(x + 1)(x - 1)(x + 2) &= 0 && \text{factorizamos } x^2 - 1\\
x + 1 = 0,\quad x - 1 = 0,\quad x + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
x = -1,\quad x = 1,\quad x &= -2 && \text{despejamos } x
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 11 **Solución de una ecuación que contiene exponentes racionales**

Resuelva la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
x^{3/2} &= x^{1/2} && \text{ecuación}\\
x^{3/2} - x^{1/2} &= 0 && \text{restamos } x^{1/2}\\
x^{1/2}(x-1) &= 0 && \text{factorizamos } x^{1/2}\\
x^{1/2} = 0,\quad x - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
x = 0,\qquad x &= 1 && \text{despejamos } x
\end{aligned}
$$

En el ejemplo 11 hubiera sido incorrecto dividir ambos lados de la ecuación $x^{3/2} = x^{1/2}$ entre $x^{1/2}$, obteniendo $x = 1$, porque la solución $x = 0$ se perdería. En general, *evite dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que contenga variables*; en vez de ello siempre *factorice*.

Elevar ambos lados de una ecuación a una potencia ***impar*** *puede introducir soluciones imaginarias. Por ejemplo, elevar al cubo ambos lados de $x = 1$ da $x^3 = 1$, que es equivalente a $x^3 - 1 = 0$. Esta ecuación tiene tres soluciones, de las cuales dos son imaginarias (vea el ejemplo 7 de la sección 1.5).*

Si una ecuación contiene radicales o exponentes fraccionarios, ambos lados suelen elevarse a una potencia positiva. Las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las soluciones de la ecuación dada. Por ejemplo, las soluciones de

$$2x - 3 = \sqrt{x+6}$$

son también soluciones de

$$(2x-3)^2 = \left(\sqrt{x+6}\right)^2$$

En algunos casos, la nueva ecuación tiene *más* soluciones que la ecuación dada. Para ilustrarlo, si se proporciona la ecuación $x = 3$ y elevamos al cuadrado ambos lados, obtenemos $x^2 = 9$. Note que la ecuación dada $x = 3$ tiene sólo una solución, 3, pero la nueva ecuación $x^2 = 9$ tiene dos soluciones, 3 y -3. Por ello *es esencial comprobar todas las soluciones obtenidas después de elevar ambos lados de una ecuación a una potencia par*. Estas comprobaciones no son necesarias si ambos lados se elevan a una potencia *impar*.

En general, para la ecuación $x^{m/n} = a$, donde x es un número real, elevamos ambos lados de la ecuación a la potencia n/m (el recíproco de m/n) para despejar x. Si m es impar, obtenemos $x = a^{n/m}$, pero si m es par, tenemos $x = \pm a^{n/m}$. Si n es constante, por ejemplo, si $x^{3/2} = -8$, entonces $x = (-8)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = (-2)^2 = 4$. Sin embargo, 4 no es una solución de $x^{3/2} = -8$, ya que $x = 4^{3/2} = 8$, no a -8.

EJEMPLOS **Resolver $x^{m/n} = a$, m impar, x real**

Ecuación	**Solución**
$x^{4/1} = 16$	$x = \pm 16^{1/4} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
$x^{2/3} = 16$	$x = \pm 16^{3/2} = \pm\left(\sqrt{16}\right)^3 = \pm 4^3 = \pm 64$

EJEMPLOS **Resolver $x^{m/n} = a$, m par, x real**

Ecuación	**Solución**
$x^{4/1} = 16$	$x = \pm 16^{1/4} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
$x^{2/3} = 16$	$x = \pm 16^{3/2} = \pm\left(\sqrt{16}\right)^3 = \pm 4^3 = \pm 64$

En el siguiente ejemplo, antes que elevar ambos lados de la ecuación a una potencia, se *aísla un radical*, es decir, se considera una ecuación equivalente en la que sólo aparece en un lado el radical.

EJEMPLO 12 **Solución de una ecuación que contiene un radical**

Resuelva la ecuación $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
3 + \sqrt{3x+1} &= x && \text{ecuación}\\
\sqrt{3x+1} &= x - 3 && \text{despejamos el radical}\\
\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 &= (x-3)^2 && \text{ambos lados}\\
3x + 1 &= x^2 - 6x + 9 && \text{simplificamos}\\
x^2 - 9x + 8 &= 0 && \text{restamos } 3x + 1\\
(x-1)(x-8) &= 0 && \text{factorizamos}\\
x - 1 = 0, \quad x - 8 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
x = 1, \quad x &= 8 && \text{despejamos } x
\end{aligned}$$

Elevamos ambos lados a una potencia par, de modo que se requieren comprobaciones.

✓ **Comprobación** $x = 1$ LI: $3 + \sqrt{3(1) + 1} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$
LD: 1

Como $5 \neq 1$, $x = 1$ no es una solución.

✓ **Comprobación** $x = 8$ LI: $3 + \sqrt{3(8) + 1} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$
LD: 8

Como $8 = 8$ es un enunciado verdadero, $x = 8$ es una solución.

Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución, $x = 8$. ■

Una ecuación es de **tipo cuadrático** si se puede escribir en la forma

$$au^2 + bu + c = 0,$$

donde $a \neq 0$ y u es una expresión con alguna variable. Si pueden encontrarse las soluciones en términos de u, entonces las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener a partir de la forma específica de u.

EJEMPLO 13 **Solución de una ecuación de tipo cuadrático**

Resuelva la ecuación $x^6 + 7x^3 = 8$.

SOLUCIÓN Como $x^6 = (x^3)^2$, la forma de la ecuación sugiere que $u = x^3$, como en la segunda línea de abajo:

$$\begin{aligned}
x^6 + 7x^3 - 8 &= 0 && \text{igualamos a 0 un lado}\\
u^2 + 7u - 8 &= 0 && \text{sea } u = x^3\\
(u+8)(u-1) &= 0 && \text{factorizamos}\\
u = -8, \quad u &= 1 && \text{despejamos } u\\
x^3 = -8, \quad x^3 &= 1 && u = x^3\\
x = -2, \quad x &= 1 && \text{obtenemos la raíz cúbica}
\end{aligned}$$

■

1.4 Ejercicios

Ejer. 1–10: Resuelva la ecuación.

1 $4x - 3 = -5x + 6$

2 $5x - 4 = 2(x - 2)$

3 $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

4 $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

5 $\dfrac{3x + 1}{6x - 2} = \dfrac{2x + 5}{4x - 13}$

6 $\dfrac{7x + 2}{14x - 3} = \dfrac{x - 8}{2x + 3}$

7 $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$

8 $\dfrac{2}{2x+5} + \dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{10x+5}{4x^2-25}$

9 $\dfrac{5}{2x+3} + \dfrac{4}{2x-3} = \dfrac{14x+3}{4x^2-9}$

10 $\dfrac{-3}{x+4} + \dfrac{7}{x-4} = \dfrac{-5x+4}{x^2-16}$

Ejer. 11–14: Resuelva por factorización la ecuación .

11 $75x^2 + 35x - 10 = 0$ **12** $48x^2 + 12x - 90 = 0$

13 $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{1}{x} - 4 = \dfrac{9}{x^2+3x}$

14 $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{-4}{x^2-4}$

Ejer. 15–18: Resuelva la ecuación usando la ecuación cuadrática especial de la página 46.

15 $25x^2 = 9$ **16** $64x^2 = 49$

17 $(x-3)^2 = 17$ **18** $(x+5)^2 = 29$

Ejer. 19–20: Resuelva usando la fórmula cuadrática.

19 $x^2 + 6x + 3 = 0$ **20** $x^2 - 4x - 2 = 0$

Ejer. 21–24: Utilice la fórmula cuadrática para factorizar las expresiones.

21 $x^2 + x - 30$ **22** $x^2 - 11x$

23 $12x^2 - 16x - 3$ **24** $15x^2 + 34x - 16$

Ejer. 25–42: Resuelva la ecuación.

25 $|3x-2| + 3 = 7$ **26** $2|5x+2| - 1 = 5$

27 $3|x+1| - 5 = -11$ **28** $|x-3| + 6 = 6$

29 $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

30 $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

31 $y^{3/2} = 5y$ **32** $y^{4/3} = -4y$

33 $\sqrt{7-5x} = 8$ **34** $\sqrt{3-x} - x = 3$

35 $x = 3 + \sqrt{5x-9}$ **36** $x + \sqrt{5x+19} = -1$

37 $5y^4 - 7y^2 + 1.5 = 0$ **38** $3y^4 - 5y^2 + 1.5 = 0$

39 $36x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$ **40** $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

41 $3x^{2/3} + 4x^{1/3} - 4 = 0$ **42** $2y^{1/3} - 3y^{1/6} + 1 = 0$

Ejer. 43–44: Encuentre las soluciones reales de la ecuación.

43 **a)** $x^{5/3} = 32$ **b)** $x^{4/3} = 16$ **c)** $x^{2/3} = -64$

d) $x^{3/4} = 125$ **e)** $x^{3/2} = -27$

44 **a)** $x^{3/5} = -27$ **b)** $x^{2/3} = 25$ **c)** $x^{4/3} = -49$

d) $x^{3/2} = 64$ **e)** $x^{3/4} = -8$

Ejer. 45–46: Use la fórmula cuadrática para despejar a) *x* en función de *y* y b) *y* en función de *x*.

45 $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$ **46** $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejer. 47–48: Cuando se realizan cálculos en una calculadora, la fórmula cuadrática no siempre da resultados precisos si b^2 es grande en comparación con ac, debido a que una de las raíces estará cerca de cero y es difícil hacer una aproximación.

a) Use la fórmula cuadrática para aproximar las raíces de la ecuación dada.

b) Para obtener una mejor aproximación para la raíz cercana a cero, racionalice el numerador a cambiar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ para } x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}},$$

y use la segunda fórmula.

47 $x^2 + 4{,}500{,}000x - 0.96 = 0$

48 $x^2 - 73{,}000{,}000x + 2.01 = 0$

Ejer. 49–52: Resuelva la fórmula para la variable especificada.

49 $EK + L = D - TK$ para K

50 $CD + C = PC + R$ para C

51 $N = \dfrac{Q+1}{Q}$ para Q **52** $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ para α

Ejer. 53–64: La fórmula se usa en la aplicación indicada. Despeje la variable especificada.

53 $A = C + PCit$ para r (capital más intereses)

54 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ para t (distancia a la que cae un objeto)

55 $S = \dfrac{p}{q + p(1-q)}$ para q (ley de Amdahl para supercomputadoras)

56 $S = 2(lw + hw + hl)$ para h (área superficial de una caja rectangular)

57 $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ para q (fórmula para lentes)

58 $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ para R_2 (tres resistores conectados en paralelo)

59 $K = \frac{1}{2}mv^2$ para v (energía cinética)

50 $F = g\dfrac{mM}{d^2}$ para d (ley de Newton de gravitación)

61 $A = 2\pi r(r + h)$ para r (superficie del área de un cilindro cerrado)

62 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ para t (distancia a la que cae un objeto

63 $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ para C (segmento de círculos)

54 $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ para h (superficie del área de un cono)

65 **Costo del aislamiento térmico** El costo de instalar aislante térmico en una casa particular de dos recámaras es \$2,400. Los costos mensuales actuales de calefacción promedian \$200, pero se espera que el aislante reduzca los costos 10%. ¿Cuántos meses tomará recuperar el costo del aislamiento?

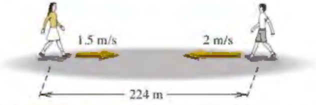
66 **Inversión municipal** El gobierno de una ciudad ha aprobado la construcción de un campo deportivo de \$800 millones. Se recaudarán hasta \$480 millones por venta de bonos que pagan un interés simple a una tasa de 6% anual. La cantidad restante (hasta \$640 millones) se obtendrán mediante préstamos de una compañía de seguros a una tasa de interés simple de 5%. Determine si el campo se puede financiar de manera que el interés anual sea de \$42 millones.

67 **Velocidades de caminata** Dos jóvenes, que están a una distancia de 224 metros entre sí, comienzan a caminar uno hacia el otro en el mismo instante con una rapidez de 1.5 m/s y 2 m/s, respectivamente (vea la figura).

a) ¿Cuándo se encontrarán?

b) ¿Cuánto habrá caminado cada uno?

EJERCICIO 67



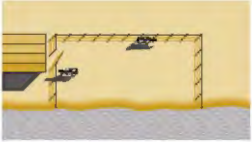
68 **Instalación de una cerca** Un agricultor piensa usar 180 pies de cerca para encerrar una región rectangular, usando en lugar de cerca parte de la orilla de un río como uno de los lados del rectángulo, como lo muestra la figura. Encuentre el área de la región si la longitud del lado paralelo a la orilla del río mide

a) el doble de la longitud de un lado adyacente.

b) la mitad de la longitud de un lado adyacente.

c) lo mismo que la longitud de un lado adyacente.

EJERCICIO 68

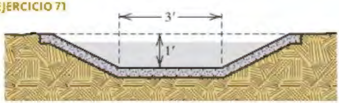


69 **Distancia a un blanco** Una bala se dispara horizontalmente hacia un blanco y el sonido de su impacto se escucha 1.5 segundos después. Si la velocidad de la bala es 3,300 pies/s y la velocidad del sonido es 1,100 pies/s, ¿a qué distancia está el blanco?

70 **Velocidades de trote** Una mujer comienza a trotar a las 6:00 P.M., corriendo hacia el norte a un ritmo de 6 minutos por milla. Más tarde, invierte la dirección y corre hacia el sur a un ritmo de 7 minutos por milla. Si regresa al punto de partida a las 6:47 P.M., calcule el número total de millas recorridas.

71 **Dimensiones de una zanja** La sección transversal de una zanja es un trapecio isósceles con una base menor de 3 pies y una altura de 1 pie, como se aprecia en la figura. Determine el ancho de la base mayor que daría a la zanja un área de sección transversal de 5 ft².

EJERCICIO 71



72 **Construcción de un silo** Se construirá un silo grande para granos en forma de cilindro circular, con una semiesfera en la parte superior (vea la figura). El diámetro del silo debe ser 30 pies, pero la altura aún no se ha determinado. Encuentre la altura h del silo que resultará en una capacidad de $11,250\pi$ ft³.

EJERCICIO 72

73 Temperatura del aire Debajo de la base de una nube, la temperatura del aire T (en °F) a una altura h (en pies) se puede aproximar con la ecuación $T = T_0 - \left(\frac{55}{1000}\right)h$, donde T_0 es la temperatura al nivel del suelo.

a) Determine la temperatura del aire a una altura de 1 milla si la temperatura del suelo es 70 °F.

b) ¿A qué altura se alcanza la temperatura de congelación?

74 Altura de una nube La altura h (en pies) de la base de una nube se puede estimar usando $h = 227(T - D)$, donde T es la temperatura del suelo y D es el punto de condensación.

a) Si la temperatura es 70 °F y el punto de condensación es 55 °F, encuentre la altura de la base de la nube.

b) Si el punto de condensación es 65 °F y la base de la nube está a 3,500 pies, estime la temperatura del suelo.

75 Temperatura de una nube La temperatura T dentro de una nube a una altura h (en pies) sobre su base se puede aproximar usando la ecuación $T = B - \left(\frac{3}{1000}\right)h$, donde B es la temperatura de la nube en su base. Determine la temperatura a 10,000 pies en una nube con una temperatura base de 55 °F y una altura de base de 4,000 pies. **Nota:** para una aplicación interesante que abarca los tres ejercicios anteriores, vea el ejercicio 14 de los ejercicios para análisis al final del capítulo.

76 Relación huesos-estatura Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra sólo un húmero, entonces la estatura del individuo se puede determinar usando una relación lineal sencilla. (El húmero es el hueso entre el hombro y el codo.) Para una mujer, si x es la longitud del húmero (en centímetros), entonces su estatura h (en centímetros) se determina con la fórmula $h = 65 + 3.14x$. Para un hombre debe usarse $h = 73.6 + 3.0x$.

a) Se encuentra un esqueleto femenino que tiene un húmero de 30 centímetros. Calcule la estatura de la mujer cuando murió.

b) La estatura de una persona por lo general disminuye 0.06 centímetros por año después de los 30 años. Se encuentra el esqueleto completo de un hombre. El húmero mide 34 centímetros y la estatura del hombre era de 174 centímetros. Determine su edad aproximada cuando murió.

77 Distancia de frenado La distancia que un automóvil recorre entre el momento en que el conductor pisa el freno y el momento en que el automóvil en realidad se detiene es la distancia de frenado. Para cierto automóvil que corre a v mi/h, la distancia de frenado d (en pies) está dada por $d = v + (v^2/20)$.

a) Calcule la distancia de frenado cuando v es 55 mi/h.

b) Si un conductor decide frenar a 120 pies de una señal de alto, ¿a qué velocidad puede ir el automóvil y aún detenerse en el momento en que llega a la señal?

78 Temperatura del agua hirviendo La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve se relaciona con la elevación h (en metros sobre el nivel del mar) por medio de la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

para $95 \leq T \leq 100$.

a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98 °C?

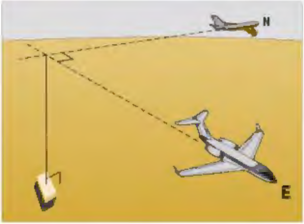
b) La altura del monte Everest es aproximadamente de 8,840 metros. Estime la temperatura a la que hierve el agua en la cima de este monte. (*Sugerencia:* use la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$.)

79 Distancia entre aviones Un avión que vuela al norte a 200 mi/h pasó sobre un punto en tierra a las 2:00 P.M. Otro avión a la misma altitud pasó sobre el punto a las 2:30 P.M., volando al este a 400 mi/h (vea la figura).

a) Si t denota el tiempo en horas después de las 2:30 P.M., exprese la distancia d entre los aviones en función de t.

b) ¿A qué hora después de las 2:30 P.M. estaban los aviones a 500 millas entre sí?

EJERCICIO 79



80 Altura de un acantilado Cuando una piedra se deja caer desde un acantilado hacia el mar, recorre aproximadamente $16t^2$ pies en t segundos. Si su caída en el agua se escucha 4 segundos más tarde y la velocidad del sonido es de 1100 pies/s, aproxime la altura del acantilado.

81 Precio de un reproductor de CD Cuando una popular marca de reproductores de CD fija el precio de $300 por unidad, una tienda vende 15 unidades por semana. No obstante, cada vez que el precio se reduce $10, las ventas aumentan 2 unidades por semana. ¿Qué precio de venta producirá ingresos semanales de $7,000?

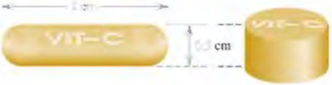
82 Dimensiones de un barril de petróleo Se fabricará un barril de petróleo con forma de un cilindro circular recto cerrado, con una altura de 4 pies, de manera que el área superficial total sea de 100π ft^2. Calcule el diámetro del barril.

83 **Dimensiones de una tableta de vitamina** La rapidez a la que una pastilla de vitamina C comienza a disolverse depende de su área superficial. Una marca de tabletas mide 2 centímetros de largo y tiene forma de cilindro con una semiesfera de 0.5 cm de diámetro unida en cada extremo, como se aprecia en la figura. Se producirá una segunda marca de tabletas en forma de cilindro circular recto con 0.5 cm de altura.

a) Encuentre el diámetro de la segunda tableta para que su área superficial sea igual a la de la primera tableta.

b) Encuentre el volumen de cada tableta.

EJERCICIO 83



84 **Resistencia al retiro de clavos** La *resistencia al retiro* de un clavo indica su resistencia a la fuerza de retención de la madera. Una fórmula que se usa para clavos comunes, de acabado brillante, es $P = 15{,}700S^{5/2}RD$, donde P es la máxima resistencia al retiro (en libras), S es la gravedad específica de la madera al 12% de contenido de humedad, R es el radio del clavo (en pulgadas) y D es la profundidad (en pulgadas) que el clavo penetra en la madera. Un clavo común brillante 6d de 2 pulgadas de longitud y 0.113 pulgadas de diámetro se introduce por completo en una pieza de abeto Douglas. Si se requiere una fuerza máxima de 380 libras para sacar el clavo, aproxime la gravedad específica del abeto Douglas.

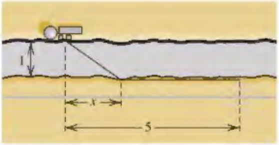
85 **Altura de una escalera** La distancia recomendada d a la que una escalera debe colocarse de una pared vertical es a 25% de su longitud L. Aproxime la altura h a la que se puede llegar al relacionar h como un porcentaje de L.

EJERCICIO 85

86 **La isla de calor urbana** Las zonas urbanas tienen promedios más altos de temperatura del aire que las zonas rurales, como resultado de la presencia de edificios, asfalto y concreto. Este fenómeno se conoce como *isla de calor urbana*. La diferencia de temperatura T (en °C) entre zonas urbanas y rurales cerca de Montreal, con una población P entre 1000 y 1,000,000, se puede describir con la fórmula $T = 0.25\,P^{1/4}/\sqrt{v}$, donde v es la velocidad media del viento (en mi/h) y $v \geq 1$. Si $T = 3$ y $v = 5$, encuentre P.

87 **Instalación de una línea de energía eléctrica** Se instalará una línea de energía eléctrica que atraviesa un río de 1 milla de ancho hasta una ciudad que está 5 millas corriente abajo (vea la figura). Cuesta $7,500 por milla tender un cable bajo el agua y $6,000 por milla tenderlo en tierra. Determine cómo debe instalarse el cable si se han asignado $35,000 para este proyecto.

EJERCICIO 87



Ejer. 88-89: Elija la ecuación que describa mejor la tabla de datos. (*Sugerencia:* asigne valores a $Y_1 - Y_4$ y examine una tabla de sus valores.)

88

x	y
1	0.8
2	−0.4
3	−1.6
4	−2.8
5	−4.0

1) $y = -1.2x + 2$

2) $y = -1.2x^2 + 2$

3) $y = 0.8\sqrt{x}$

4) $y = x^{1/4} - 0.2$

89

x	y
1	−9
2	−4
3	11
4	42
5	95

1) $y = 13x - 22$

2) $y = x^2 - 2x - 8$

3) $y = 4\sqrt{x} - 13$

4) $y = x^3 - x^2 + x - 10$

90 **Relaciones entre temperatura y latitud** La tabla contiene las temperaturas medias anuales para los hemisferios norte y sur en varias latitudes.

Latitud	H. norte	H. sur
85°	−8 °F	−5 °F
75°	13 °F	10 °F
65°	30 °F	27 °F
55°	41 °F	42 °F
45°	57 °F	53 °F
35°	68 °F	65 °F
25°	78 °F	73 °F
15°	80 °F	78 °F
5°	79 °F	79 °F

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones predice con mayor exactitud la temperatura media anual en el hemisferio sur a una latitud L?

1) $T_1 = -1.09L + 96.01$

2) $T_2 = -0.011L^2 - 0.126L + 81.45$

b) Aproxime la temperatura media anual en el hemisferio sur a una latitud de 50°.

91 **Relaciones entre luz diurna y latitud** La siguiente tabla proporciona las cifras de minutos de luz del día que hay en diversas latitudes en el hemisferio norte, en los solsticios de verano e invierno.

Latitud	Verano	Invierno
0°	720	720
10°	755	685
20°	792	648
30°	836	604
40°	892	548
50°	978	462
60°	1107	333

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones predice con mayor exactitud la duración del día en el solsticio de verano a la latitud L?

1) $D_1 = 6.096L + 685.7$

2) $D_2 = 0.00178L^3 - 0.072L^2 + 4.37L + 719$

b) Aproxime la duración de luz diurna a 35° de latitud en el solsticio de verano.

1.5 Números complejos

Los *números complejos* se requieren para encontrar soluciones de ecuaciones que no se pueden resolver usando sólo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. La siguiente tabla ilustra varias ecuaciones cuadráticas sencillas y los tipos de números requeridos para las soluciones.

Ecuación	Soluciones	Tipo de números requerido
$x^2 = 9$	$3, -3$	Enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -9$	?	Números complejos

Las soluciones de las primeras tres ecuaciones de la tabla están en $\mathbb{R}$; no obstante, como los cuadrados de los números reales nunca son negativos, no contienen las soluciones de $x^2 = -9$. Para resolver esta ecuación necesitamos el **sistema de números complejos** $\mathbb{C}$, que contiene tanto $\mathbb{R}$ como números cuyos cuadrados son negativos.

Iniciaremos con la introducción de la **unidad imaginaria**, que se denota con i, que tiene las siguientes propiedades.

Propiedades de *i*

$$i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real. Es una entidad matemática nueva que permite obtener $\mathbb{C}$. Como i, junto con $\mathbb{R}$, debe estar contenida en $\mathbb{C}$, se deben considerar productos de la forma bi para un número real b y también expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b. La siguiente tabla contiene las definiciones que se deben usar.

Terminología	Definición	Ejemplos
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$	$3, 2 + i, 2i$
Número imaginario	$a + bi$ con $b \neq 0$	$3 + 2i, -4i$
Número imaginario puro	bi con $b \neq 0$	$-4i, \sqrt{3}\,i, i$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$	$x + yi = 3 + 4i$ ssi $x = 3$ y $y = 4$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	vea el ejemplo 1a)
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	vea el ejemplo 1b)

Observe que los números imaginarios puros son un subconjunto de los números imaginarios, y éstos a su vez son un subconjunto de los números complejos. Las frases *número complejo no real* y *número imaginario* se usan indistintamente.

No es necesario memorizar las definiciones de la suma y la multiplicación de números complejos dadas en la tabla anterior. En vez de ello, *todos los símbolos pueden tratarse como si tuvieran propiedades de los números reales, con exactamente una excepción: i^2 se sustituye por* -1. Por lo tanto, para el producto $(a + bi)(c + di)$ simplemente se usan las leyes distributivas y el hecho de que

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd$$

EJEMPLO 1 **Suma y multiplicación de números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ **b)** $(3 + 4i)(2 + 5i)$

SOLUCIÓN

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$

b)
$$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 + 5i) &= (3 + 4i)(2) + (3 + 4i)(5i)\\ &= 6 + 8i + 15i + 20i^2\\ &= 6 + 23i + 20(-1)\\ &= -14 + 23i\end{aligned}$$
■

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ puede identificarse con el conjunto de los números complejos de la forma $a + 0i$. También es conveniente referirse al número complejo $0 + bi$ como bi. Así,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

En consecuencia, $a + bi$ se puede considerar como la suma de dos números complejos a y bi (es decir, $a + 0i$ y $0 + bi$). Para el número complejo $a + bi$, se dice que a es la **parte real** y b la **parte imaginaria**.

EJEMPLO 2 **Igualdad de números complejos**

Encuentre los valores de x y y, donde x y y son números reales:

$$(2x - 4) + 9i = 8 + 3yi$$

SOLUCIÓN Comenzamos por igualar las partes reales y las partes imaginarias de cada lado de la ecuación:

$$2x - 4 = 8 \quad \text{y} \quad 9 = 3y$$

Dado que $2x - 4 = 8$, $2x = 12$ y $x = 6$. Como $9 = 3y$, $y = 3$. Los valores de x y y que hacen que los números complejos sean iguales son

$$x = 6 \text{ y } y = 3$$ ■

Con los números complejos, ahora es posible resolver una ecuación como $x^2 = -9$. En específico, como

$$(3i)(3i) = 3^2i^2 = 9(-1) = -9,$$

vemos que una solución es $3i$ y otra $-3i$.

En la siguiente tabla se define la resta de números complejos y la multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real k	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si le piden que escriba una expresión de la forma $a + bi$, la forma $a - di$ es aceptable porque $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 3 **Operaciones con números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ **b)** $(4 - 3i)(2 + i)$ **c)** $i(3 - 2i)^2$
d) i^{51} **e)** i^{-13}

SOLUCIÓN

a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$

b) $(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$

c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

d) Al elevar a potencias sucesivas de i, obtenemos

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

y entonces el ciclo inicia otra vez:

$$i^5 = i, i^6 = i^2 = -1, \text{ y así sucesivamente.}$$

En particular,

$$i^{51} = i^{48}i^3 = (i^4)^{12}i^3 = (1)^{12}i^3 = (1)(-i) = -i$$

e) En general, i^{-a} multiplicamos por i^b, donde $a \leq b \leq a + 3$ y b es un múltiplo de 4 (de manera que $i^b = 1$). Para i^{-13}, escoja $b = 16$.

$$i^{-13} \cdot i^{16} = i^3 = -i$$ ■

El siguiente concepto tiene usos importantes cuando se trabaja con números complejos.

Definición del conjugado de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado**, que se denota con $\bar{z}$, es $a - bi$.

Dado que $a - bi = a + (-bi)$, se deduce que el conjugado de $a - bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi$$

Por lo tanto, $a + bi$ y $a - bi$ *son conjugados uno del otro*. Algunas propiedades de los conjugados se proporcionan en los ejercicios 57-62.

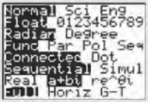
EJEMPLOS Conjugados

	Número complejo	Conjugado
■	$5 + 7i$	$5 - 7i$
■	$5 - 7i$	$5 + 7i$
■	$4i$	$-4i$
■	3	3

Operaciones con números complejos

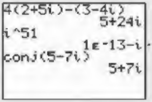
Primero, cambiamos al modo complejo.

MODE ▽ (6 times) ▷ ENTER



La i está en la tecla del punto decimal.

4 (2 + 5 2nd i) −
(3 − 4 2nd i) ENTER
2nd i ∧ 51 ENTER
MATH ▷ ▷ 1
5 − 7 2nd i) ENTER



En la calculadora TI-83/4 Plus, note que la segunda respuesta es equivalente a $0 - i$. Sabemos que esto se tomó del ejemplo 3d), donde se vio que la parte real de una potencia de i debe ser 0, 1 o -1. Usted debe estar alerta a estas pequeñas inconsistencias.

Las dos propiedades siguientes son consecuencias de las definiciones de la suma y del producto de números complejos.

Propiedades de los conjugados	Ejemplo
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2i^2 = 4^2 + 3^2$

Observe que *la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales*. Los conjugados son útiles para determinar el **inverso multiplicativo** de $a + bi$, $1/(a + bi)$ o para simplificar el cociente de dos números complejos. Como se ilustra en el siguiente ejemplo, estos tipos de simplificaciones se pueden considerar simplemente como *racionalización del denominador*, puesto que se está multiplicando el cociente por el conjugado del denominador dividido entre sí mismo.

EJEMPLO 4 **Cocientes de números complejos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

a) $\dfrac{1}{9 + 2i}$ b) $\dfrac{7 - i}{3 - 5i}$

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{1}{9 + 2i} = \dfrac{1}{9 + 2i} \cdot \dfrac{9 - 2i}{9 - 2i} = \dfrac{9 - 2i}{81 + 4} = \dfrac{9}{85} - \dfrac{2}{85}i$

b) $\dfrac{7 - i}{3 - 5i} = \dfrac{7 - i}{3 - 5i} \cdot \dfrac{3 + 5i}{3 + 5i} = \dfrac{21 + 35i - 3i - 5i^2}{9 + 25}$

$= \dfrac{26 + 32i}{34} = \dfrac{13}{17} + \dfrac{16}{17}i$ ▪

Si p es un número real positivo, entonces la ecuación $x^2 = -p$ tiene soluciones en $\mathbb{C}$. Una solución es $\sqrt{p}\,i$, porque

$$\left(\sqrt{p}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{p}\right)^2 i^2 = p(-1) = -p$$

Asimismo, $-\sqrt{p}\,i$ es también una solución.

La definición de $\sqrt{-r}$ en la siguiente tabla está motivada por $(\sqrt{r}\,i)^2 = -r$ para $r > 0$. Cuando use esta definición, tenga cuidado de *no* escribir $\sqrt{ri}$ cuando lo que se pretende es escribir $\sqrt{r}i$.

Terminología	Definición	Ejemplos
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ por $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}\,i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i = i$

Operaciones con números complejos

No olvide cambiar al modo complejo.

(7 − 2nd *i*) ÷
(3 − 5 2nd *i*) ENTER
MATH 1 ENTER
2nd √ −9) ENTER

```
(7-i)/(3-5i)
.7647058824+.94…
Ans▸Frac
    13/17+16/17i
√(-9)
              3i
```

El signo de radical debe usarse con cuidado cuando el radicando sea negativo. Por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que se cumple para números reales positivos, *no* es verdadera cuando a y b son negativos ambos, como se muestra enseguida:

$$\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} = \left(\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{3}\,i\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3(-1) = -3$$

Pero $\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Por lo tanto, $\sqrt{-3}\,\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}$

Si sólo *uno* de a o b es negativo, entonces $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no se aplican las leyes de los radicales si los radicandos son negativos. En lugar de ello, la forma de los radicales se cambia a imaginario antes de efectuar alguna operación, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Trabajo con raíces cuadradas de números negativos**

Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$\left(5 - \sqrt{-9}\right)\left(-1 + \sqrt{-4}\right)$$

SOLUCIÓN Primero usamos la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}\,i$, y luego simplificamos:

$$\begin{aligned}\left(5 - \sqrt{-9}\right)\left(-1 + \sqrt{-4}\right) &= \left(5 - \sqrt{9}\,i\right)\left(-1 + \sqrt{4}\,i\right)\\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i)\\ &= -5 + 10i + 3i - 6i^2\\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i\end{aligned}$$

■

En la sección 1.4 se indica que si el discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo, entonces no hay raíces reales de la ecuación. De hecho, las soluciones de la ecuación son dos números *imaginarios*. Además, las soluciones son conjugadas entre sí, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Una ecuación cuadrática con soluciones complejas**

Resuelva la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Si aplicamos la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, vemos que

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}\\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5} = -\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. ■

EJEMPLO 7 **Una ecuación con soluciones complejas**

Resuelva la ecuación $x^3 - 1 = 0$.

Diferencia de dos cubos:
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

SOLUCIÓN Usando la fórmula de factorización de la diferencia de dos cubos con $a = x$ y $b = 1$, escribimos $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Al igualar a cero cada factor y resolver las ecuaciones resultantes, obtenemos las soluciones

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

o bien, de manera equivalente,

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Como el número 1 se denomina **número real unitario** y la ecuación dada puede escribirse como $x^3 = 1$, a estas tres soluciones se les llama **raíces cúbicas de la unidad**. ■

En la sección 1.3 se mencionó que $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números *reales*. Sin embargo, si factorizamos sobre los números *complejos*, entonces $x^2 + 1$ puede factorizarse como sigue:

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

1.5 Ejercicios

Ejer. 1-34: Escriba la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$ **2** $(-5 + 4i) + (3 + 9i)$

3 $(7 - 8i) - (-5 - 3i)$ **4** $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5 $(3 + 5i)(2 - 7i)$ **6** $(-2 + 3i)(8 - i)$

7 $(4 - 3i)(2 + 7i)$ **8** $(8 + 2i)(7 - 3i)$

9 $(5 - 2i)^2$ **10** $(6 + 7i)^2$

11 $i(3 + 4i)^2$ **12** $i(2 - 7i)^2$

13 $(3 + 4i)(3 - 4i)$ **14** $(4 + 7i)(4 - 7i)$

15 a) i^{43} b) i^{-20} **16** a) i^{66} b) i^{-33}

17 a) i^{73} b) i^{-46} **18** a) i^{56} b) i^{-55}

19 $\dfrac{3}{2 + 4i}$ **20** $\dfrac{5}{3 - 7i}$

21 $\dfrac{1 - 7i}{6 - 2i}$ **22** $\dfrac{2 + 9i}{-3 - i}$

23 $\dfrac{-4 + 6i}{2 + 7i}$ **24** $\dfrac{-3 - 2i}{5 + 2i}$

25 $\dfrac{4 - 2i}{-7i}$ **26** $\dfrac{-2 + 6i}{3i}$

27 $(2 + 5i)^3$ **28** $(3 - 2i)^3$

29 $\left(2 - \sqrt{-4}\right)\left(3 - \sqrt{-16}\right)$

30 $\left(-3 + \sqrt{-25}\right)\left(8 - \sqrt{-36}\right)$

31 $\dfrac{4 + \sqrt{-81}}{2 - \sqrt{-9}}$ **32** $\dfrac{5 - \sqrt{-121}}{1 + \sqrt{-25}}$

33 $\dfrac{\sqrt{-36}\,\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$ **34** $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\,\sqrt{-81}}$

Ejer. 35-38: Encuentre los valores de x y y, donde x y y son números reales.

35 $4 + (x + 2y)i = x + 2i$ **36** $(x - y) + 3i = 4 + yi$

37 $(2x - y) - 16i = 10 + 4yi$

38 $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

Ejer. 39-56: Encuentre las soluciones de la ecuación.

39 $x^2 - 6x + 13 = 0$ **40** $x^2 - 2x + 26 = 0$

41 $x^2 + 12x + 37 = 0$ **42** $x^2 + 8x + 17 = 0$

43 $x^2 - 5x + 20 = 0$ **44** $x^2 + 3x + 6 = 0$

45 $4x^2 + x + 3 = 0$ **46** $-3x^2 + x - 5 = 0$

47 $x^3 + 64 = 0$ **48** $x^3 - 27 = 0$

49 $27x^3 = (x + 5)^3$

50 $16x^4 = (x - 4)^4$

51 $x^4 = 625$ **52** $x^4 = 81$

53 $4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$ **54** $27x^4 + 21x^2 + 4 = 0$

55 $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$

56 $8x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$

Ejer. 57-62: Verifique la propiedad.

57 $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ **58** $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

59 $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ **60** $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

61 $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real.

62 $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$

1.6 Desigualdades

Una **desigualdad** es un enunciado que establece que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor que ($<$), menor o igual que ($\leq$), mayor que ($>$) o mayor o igual que ($\geq$) otra cantidad. Considere la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

donde x es una variable. Si se obtiene un enunciado verdadero cuando un número b se sustituye por x, entonces b es una **solución** de la desigualdad. Así, $x = 5$ es una solución de $2x + 3 > 11$ porque $13 > 11$ es verdadero, pero $x = 3$ no es una solución porque $9 > 11$ es falso. **Resolver** una desigualdad significa encontrar *todas* las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

La mayoría de las desigualdades tienen un número infinito de soluciones. Para ilustrar esto, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

están formadas por *todo* número real x entre 2 y 5. A este conjunto de números se le denomina **intervalo abierto** y se denota con $(2, 5)$. La **gráfica** del intervalo abierto $(2, 5)$ es el conjunto de todos los puntos de una recta de coordenadas que se encuentra entre, pero no los incluye, los puntos correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$. La gráfica se representa al sombrear una parte apropiada del eje, como se aprecia en la figura 1. A este proceso se le conoce como **trazar la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se denominan **puntos extremos** del intervalo $(2, 5)$. Los paréntesis en la notación $(2, 5)$ y en la figura 1 se usan para indicar que los puntos extremos del intervalo no están incluidos.

FIGURA 1

FIGURA 2

Si se desea incluir un punto extremo, se usan un corchete en lugar de un paréntesis; por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \leq x \leq 5$ se denotan por $[2, 5]$ y se les conoce como un **intervalo cerrado**. En la figura 2 está trazada la gráfica $[2, 5]$, donde los corchetes indican que los puntos extremos están incluidos. También se consideran **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$ e **intervalos infinitos**, como se describe en la siguiente tabla. El símbolo ∞ (léase "infinito") que se usa para intervalos infinitos es sólo una notación y *no* representa un número real.

Intervalos

Notación	Desigualdad	Gráfica
1) (a, b)	$a < x < b$	
2) $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
3) $[a, b)$	$a \leq x < b$	
4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
5) (a, ∞)	$x > a$	
6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a aquellos que se emplean para resolver ecuaciones. En particular, con frecuencia se usan las propiedades de desigualdades para sustituir una desigualdad dada con una lista de desigualdades equivalentes, terminando con una desigualdad de la que se obtienen soluciones fácilmente. Las propiedades de la tabla siguiente se pueden demostrar para números reales a, b, c y d.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
1) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$	$2 < 5$ y $5 < 9$, por lo tanto $2 < 9$
2) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$	$2 < 7$, por lo tanto $2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$
3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$	$2 < 5$ y $3 > 0$, por lo tanto $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{3}$
4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$	$2 < 5$ y $-3 < 0$, por lo tanto $2(-3) > 5(-3)$ y $\dfrac{2}{-3} > \dfrac{5}{-3}$

Invierta la desigualdad cuando multiplique o divida por un número negativo.

Es importante recordar que al multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número real negativo el signo de desigualdad se *invierte* (vea la propiedad 4). Las propiedades semejantes a las mencionadas líneas antes son verdaderas para otras desigualdades y para $\le$ y $\ge$. Por lo tanto, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $a \ge b$ y $c < 0$, entonces $ac \le bc$, etcétera.

Si x representa un número real, entonces, por la propiedad 2, sumar o restar la misma expresión que contiene x en ambos lados de una desigualdad dará una desigualdad equivalente. Por la propiedad 3, se puede multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por una expresión que contenga x si se tiene la seguridad de que la expresión es positiva para todos los valores de x bajo consideración. Para ejemplificar, la multiplicación o división por $x^4 + 3x^2 + 5$ sería permisible, puesto que esta expresión es siempre positiva. Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por una expresión que siempre sea negativa, como $-7 - x^2$, entonces, por la propiedad 4, la desigualdad se invierte.

En los ejemplos describiremos soluciones de desigualdades por medio de intervalos y también se representarán gráficamente.

EJEMPLO 1 **Solución de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-4x - 3 > -2x - 11$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
-4x - 3 &> -2x - 11 && \text{dado}\\
-2x &> -8 && \text{sumamos } 2x + 3\\
x &< 4 && \text{dividimos entre } -2\text{;}\\
& && \text{invertimos el signo de desigualdad}
\end{aligned}
$$

FIGURA 3

Entonces, las soluciones de la desigualdad están formadas por todos los números reales x tales que $x < 4$. Este es el intervalo $(-\infty, 4)$ trazado en la figura 3. ■

EJEMPLO 2 **Solución de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad continua $-5 \le \dfrac{4-3x}{2} < 1$

SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-5 \le \frac{4-3x}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{4-3x}{2} < 1$$

Podemos trabajar por separado con cada desigualdad o resolver de forma simultánea ambas desigualdades, como sigue (tenga en mente que nuestra meta es aislar x):

$$\begin{aligned}
-5 \le \frac{4-3x}{2} &< 1 && \text{dado}\\
-10 \le 4-3x &< 2 && \text{multiplicamos por 2}\\
-14 \le \quad -3x &< -2 && \text{restamos 4}\\
\tfrac{14}{3} \ge \quad x &> \tfrac{2}{3} && \text{dividimos entre } -3\text{; se invierten los signos de desigualdad}\\
\tfrac{2}{3} < \quad x &\le \tfrac{14}{3} && \text{desigualdad equivalente}
\end{aligned}$$

FIGURA 4

Así, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$ trazado en la figura 4. ■

EJEMPLO 3 **Solución de una desigualdad racional**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1}{x-2} > 0$

SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x - 2$, es también positivo. Así, $x - 2 > 0$ o, lo que es equivalente, $x > 2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ trazado en la figura 5. ■

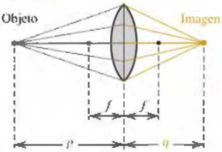
FIGURA 5

EJEMPLO 4 **Uso de la fórmula de una lente**

Como se ilustra en la figura 6, si una lente convexa tiene longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente a la imagen está relacionada con p y f mediante la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

FIGURA 6



Si $f = 5$ cm, ¿qué tan cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen esté a más de 12 centímetros de la lente?

SOLUCIÓN Como $f = 5$, podemos escribir la fórmula dada como

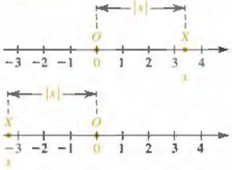
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}$$

Deseamos determinar los valores de q tales que $q > 12$. Primero resolvemos la ecuación para q:

$$
\begin{aligned}
5q + 5p &= pq && \text{multiplicamos por el mcm, } 5pq \\
q(5 - p) &= -5p && \text{reunimos los términos } q \text{ en un lado y factorizamos} \\
q &= -\frac{5p}{5-p} = \frac{5p}{p-5} && \text{dividimos entre } 5 - p
\end{aligned}
$$

Para resolver la desigualdad $q > 12$, procedemos como sigue:

FIGURA 7



$$
\begin{aligned}
\frac{5p}{p-5} &> 12 && q = \frac{5p}{p-5} \\
5p &> 12(p - 5) && \text{permisible, porque } p > f \text{ implica que } p - 5 > 0 \\
-7p &> -60 && \text{multiplicamos los factores y reunimos los términos } p \text{ en un lado} \\
p &< \tfrac{60}{7} && \text{dividimos entre } -7\text{; invertimos la desigualdad}
\end{aligned}
$$

Al combinar la última desigualdad con el hecho de que p es mayor que 5, obtenemos la solución

$$5 < p < \tfrac{60}{7}$$ ■

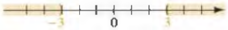
Si un punto X en una recta de coordenadas tiene coordenada x, como se aprecia en la figura 7, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. En la sección 1.1 se vio que la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

FIGURA 8

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|$$

Deducimos que las soluciones de una desigualdad como $|x| < 3$ están formadas por las coordenadas de todos los puntos cuya distancia desde O es menor que 3. Este es el intervalo abierto $(-3, 3)$ tazado en la figura 8. Por lo tanto,

FIGURA 9



$$|x| < 3 \quad \text{es equivalente a} \quad -3 < x < 3$$

Del mismo modo, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor que 3; es decir,

$$|x| > 3 \quad \text{es equivalente a } x < -3 \ \text{ o } \ x > 3$$

La gráfica de las soluciones a $|x| > 3$ está trazada en la figura 9. A menudo se usa el **símbolo de unión** $\cup$ y se escribe

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

para denotar todos los números reales que están ya sea en $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$.

La notación

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

representa el conjunto de todos los números reales excepto 2.

El **símbolo de intersección** $\cap$ se usa para denotar los elementos que son *comunes* a dos conjuntos. Por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3)$$

porque la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ está formada por todos los números reales x tales que $x < 3$ y $x > -3$.

La exposición anterior puede generalizarse para obtener las siguientes propiedades de los valores absolutos.

Propiedades de valores absolutos ($b > 0$)	1) $\|a\| < b$ es equivalente a $-b < a < b$. 2) $\|a\| > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$.

En el ejemplo siguiente se usa la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

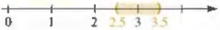
EJEMPLO 5 **Solución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $|x - 3| - 0.1 < 0.4$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
|x - 3| &< 0.5 && \text{aislamos } |x - 3| \\
-0.5 < x - 3 &< 0.5 && \text{propiedad 1} \\
2.5 < x &< 3.5 && \text{aislamos } x \text{ sumando 3}
\end{aligned}
$$

FIGURA 10



Así, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica se traza en la figura 10. ■

En el siguiente ejemplo usamos la propiedad 2 con $a = 2x + 3$ y $b = 9$.

EJEMPLO 6 **Solución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $|2x + 3| > 9$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&|2x + 3| > 9 && \text{dado} \\
2x + 3 < -9 \quad &\text{o} \quad 2x + 3 > 9 && \text{propiedad 2} \\
2x < -12 \quad &\text{o} \quad 2x > 6 && \text{restamos 3} \\
x < -6 \quad &\text{o} \quad x > 3 && \text{dividimos entre 2}
\end{aligned}
$$

FIGURA 11

En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ están formadas por los números en $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. La gráfica se traza en la figura 13. ■

La ley de tricotomía de la sección 1.1 establece que, para cualesquiera números reales a y b, exactamente uno de los siguientes casos es verdadero:

$$a > b, \qquad a < b \qquad \text{o} \qquad a = b$$

De esta manera, después de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 6, se obtienen con facilidad las soluciones para $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$, es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Observe que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es necesariamente el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Cuando usamos la notación $a < x < b$, debemos tener $a < b$. Así, *no es correcto escribir la solución* $x < -6$ o $x > 3$ (en el ejemplo 6) *como* $3 < x < -6$. Otro error en la notación de desigualdades es escribir $a < x > b$, ya que cuando se usan varios símbolos de desigualdad en una expresión, *éstos deben apuntar en la misma dirección*.

Para resolver una desigualdad que contiene polinomios de grado mayor que 1, cada polinomio debe expresarse como un producto de factores lineales $ax + b$ o factores cuadráticos irreducibles $ax^2 + bx + c$. Si cualquiera de estos factores no es cero en un intervalo, entonces es positivo en todo el intervalo o negativo en todo el intervalo. Por consiguiente, si se escoge cualquier k del intervalo y si el factor es positivo (o negativo) para $x = k$, entonces es positivo (o negativo) en todo el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se denomina **valor de prueba** del factor en el número de prueba k. Este concepto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 **Solución de una desigualdad cuadrática**

Resuelva la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para usar valores de prueba, *es esencial tener 0 en un lado del signo de desigualdad.* Así, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{igualamos a 0 un lado}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorizamos}$$

FIGURA 12

Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes en una recta de coordenadas (vea la figura 12) determinan los intervalos que no se cruzan

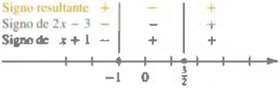
$$(-\infty, -1), \quad \left(-1, \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right)$$

Los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ en cada intervalo se pueden determinar usando un valor de prueba tomado de cada intervalo. Para ilustrar esto, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores tanto de $x + 1$ como de $2x - 3$ son negativos, y por lo tanto son negativos en todo $(-\infty, -1)$. Un procedimiento parecido para los dos intervalos restantes da la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* de la última fila se refiere al signo obtenido al aplicar las leyes de los signos al producto de los factores. Note que el signo resultante es positivo o negativo dependiendo de si el número de signos negativos de los factores es par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	−	+	+
Signo de $2x - 3$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

A veces es conveniente representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ al usar una recta de coordenadas y un *diagrama de signos*, del tipo que se presenta en la figura 13. Las líneas verticales indican que los factores son cero, y los signos de los factores se muestran encima de la recta de coordenadas. Los signos resultantes se indican en color naranja.

FIGURA 13



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los cuales el producto de los factores es *negativo*, es decir, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$. ■

En la página 45 se analiza el teorema del factor cero, que trata sobre *igualdades*. Es un error común extender este teorema a las *desigualdades*. La siguiente advertencia muestra esta extensión incorrecta aplicada a la desigualdad del ejemplo 7.

¡Atención!

$(x + 1)(2x - 3) < 0$ ***no*** es equivalente a $x + 1 < 0$ o $2x - 3 < 0$

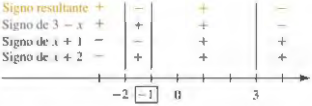
En ejemplos posteriores (aquí y en el capítulo 3) se utilizará ya sea una tabla de signos o un diagrama de signos, pero no ambos. Cuando trabaje con ejercicios, elija el método de solución que le resulte más cómodo.

EJEMPLO 8 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0$

SOLUCIÓN Como 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, podemos ir directamente al diagrama de signos de la figura 14, donde las líneas verticales indican los ceros (-2, -1 y 3) de los factores.

FIGURA 14



El cuadro alrededor de -1 indica que -1 hace que un factor del denominador de la desigualdad original sea igual a 0. Como el factor cuadrático es siempre positivo, no tiene efecto en el signo del cociente, y por lo tanto puede omitirse del diagrama.

Los diversos signos de los factores se pueden hallar usando valores de prueba. De manera opcional, sólo se necesita recordar que cuando aumenta x, el signo de un factor lineal $ax + b$ cambia de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo y el signo cambia de positivo a negativo si a es negativo.

Para determinar dónde el cociente es menor o igual que 0, primero se observa en el diagrama de signos que es *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y deben *incluirse* en la solución. Por último, el cociente es *indefinido en* $x = -1$, de modo que -1 debe *excluirse* de nuestra solución. Así, las soluciones de la desigualdad dada son determinadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty)$$

■

EJEMPLO 9 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \geq 0$

SOLUCIÓN La desigualdad se vuelve a escribir como

$$\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0$$

observamos que $x - 1$ es un factor del numerador y del denominador. Así, *suponiendo que* $x - 1 \neq 0$ (es decir, $x \neq 1$), este factor se cancela y la búsqueda de soluciones se reduce al caso

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1$$

Enseguida se observa que este cociente es 0 si $2x + 1 = 0$ (es decir, si $x = -\frac{1}{2}$). Por lo tanto, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Para encontrar las soluciones restantes se construye el diagrama de signos de la figura 15. No se incluye $(2x + 1)^2$ en el diagrama de signos, porque esta expresión es siempre positiva si $x \neq -\frac{1}{2}$ y entonces no tiene efecto en el signo del cociente. Al consultar el signo resultante y recordar que $-\frac{1}{2}$ es una solución, pero 1 *no* lo es, vemos que las soluciones de la desigualdad están dadas por

FIGURA 15

Signo resultante	+	−	+
Signo de x	−	−	+
Signo de $x + 1$	−	+	+
	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	

$$(-\infty, -1) \cup \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

EJEMPLO 10 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$.

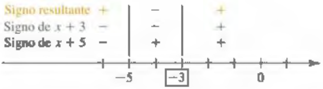
SOLUCIÓN Un error común al resolver este tipo de desigualdades es multiplicar primero ambos lados por $x + 3$. Si se hace así, se tendrían que considerar dos casos, porque $x + 3$ puede ser positivo o negativo (suponiendo que $x + 3 \neq 0$) y podríamos invertir la desigualdad. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el lado derecho y continuar a partir de ahí:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x+3} &\leq 2 && \text{dado}\\
\frac{x+1}{x+3} - 2 &\leq 0 && \text{igualamos a 0 un lado}\\
\frac{x+1-2(x+3)}{x+3} &\leq 0 && \text{combinamos en una fracción}\\
\frac{-x-5}{x+3} &\leq 0 && \text{simplificamos}\\
\frac{x+5}{x+3} &\geq 0 && \text{multiplicamos por } -1
\end{aligned}$$

Observe que la dirección de la desigualdad cambió en el último paso, porque se multiplica por un número negativo. Esta multiplicación se realizó por comodidad, con la finalidad de que todos los factores tengan coeficientes positivos de x.

Los factores $x + 5$ y $x + 3$ son 0 en $x = -5$ y $x = -3$, respectivamente. Esto lleva al diagrama de signos de la figura 16, donde los signos se determinaron como en ejemplos previos. A partir del diagrama observamos que el signo resultante, y por lo tanto el signo del cociente, es positivo en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 en $x = -5$ (incluido -5) y no está definido en $x = -3$ (excluido -3). Por consiguiente, la solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

FIGURA 16



Un método alterno de solución es comenzar por multiplicar ambos lados de la desigualdad dada por $(x + 3)^2$, *suponiendo que* $x \neq -3$. En este caso $(x + 3)^2 > 0$ y la multiplicación es permisible; no obstante, después de resolver la desigualdad resultante, el valor de $x = -3$ debe excluirse. Resuelva de esta manera para comprobar que se obtiene la misma solución ■

EJEMPLO 11 **Determinación de rangos terapéuticos**

Para que un medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el flujo sanguíneo debe exceder de cierto valor, que se denomina *nivel mínimo eficaz*. Suponga que la concentración c (en mg/L) de un medicamento particular en un lapso de t horas después de ingerirlo está dada por

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}$$

Si el nivel mínimo eficaz es 4 mg/L, determine cuándo se excede este nivel.

SOLUCIÓN El nivel mínimo eficaz, 4 mg/L, se excede si $c > 4$. Por lo tanto, debemos resolver la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2 + 4} > 4$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t, ambos lados se pueden multiplicar por $t^2 + 4$ y proseguir como sigue:

$$
\begin{aligned}
20t &> 4t^2 + 16 && \text{permisible, porque } t^2 + 4 > 0 \\
-4t^2 + 20t - 16 &> 0 && \text{igualamos a 0 un lado} \\
t^2 - 5t + 4 &< 0 && \text{dividimos entre el factor común } -4 \\
(t - 1)(t - 4) &< 0 && \text{factorizamos}
\end{aligned}
$$

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Éstos son los tiempos en los que c *es igual a* 4. Al igual que en ejemplos anteriores, una tabla de signos o diagrama de signos (con $t \geq 0$) se pueden usar para mostrar que $(t - 1)(t - 4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. Por lo tanto, el nivel mínimo eficaz se excede si $1 < t < 4$. ■

Como en el siguiente capítulo se introducen las gráficas en un plano de coordenadas, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora graficadora o software para resolver desigualdades en x. Estos métodos se considerarán más adelante en el libro.

Algunas propiedades básicas de las desigualdades se definieron al principio de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales son útiles para resolver ciertas desigualdades. Después de la gráfica se proporcionan ejemplos de las propiedades.

Propiedades adicionales de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
1) Si $0 < a < b$, por lo tanto $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.	Si $0 < \dfrac{1}{x} < 4$, por lo tanto $\dfrac{1}{1/x} > \dfrac{1}{4}$, o $x > \dfrac{1}{4}$.
2) Si $0 < a < b$, por lo tanto $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, por lo tanto $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$ o $0 < x < 16$.
3) Si $0 < a < b$, por lo tanto $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, por lo tanto $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$, o $< \lvert x \rvert < 2$.

DEMOSTRACIÓN

1) Si $0 < a < b$, entonces al multiplicar por $1/(ab)$ obtenemos

$$a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}, \quad \text{o} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}; \qquad \text{es decir, } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

2) Si $0 < a < b$, entonces al multiplicar por a obtenemos $a \cdot a < a \cdot b$ y al multiplicar por b obtenemos $b \cdot a < b \cdot b$, así, $a^2 < ab < b^2$ y por lo tanto $a^2 < b^2$.

3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$, o bien, lo que es equivalente,

$$\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) > 0$$

Al dividir ambos lados de la última desigualdad entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ obtenemos $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; es decir, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$. ■

1.6 Ejercicios

Ejer. 1-4: Exprese la desigualdad como un intervalo y trace su gráfica.

1 $x < -2$

2 $x \geq 4$

3 $5 > x \geq -2$

4 $3 \leq x \leq 7$

Ejer. 5-6: Exprese el intervalo como una desigualdad en la variable x.

5 $(-5, 4]$

6 $(-6, \infty)$

Ejer. 7-50: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en función de los intervalos siempre que sea posible.

7 $2x + 5 < 3x - 7$

8 $x - 6 > 5x + 3$

9 $3 \leq \dfrac{2x - 9}{5} < 7$

10 $-2 < \dfrac{4x + 1}{3} \leq 0$

11 $\dfrac{4}{3x + 2} \geq 0$

12 $\dfrac{3}{2x + 5} \leq 0$

13 $\dfrac{-7}{4 - 3x} > 0$

14 $\dfrac{-3}{2 - x} < 0$

15 $\dfrac{5}{(1 - x)^2} > 0$

16 $\dfrac{3}{x^2 + 4} < 0$

17 $\lvert x + 3 \rvert < 0.01$

18 $\lvert x - 4 \rvert \leq 0.03$

19 $\lvert 3x - 7 \rvert \geq 5$

20 $2\lvert -11 - 7x \rvert - 2 > 10$

21 $\lvert 7x + 2 \rvert > -2$

22 $\lvert 6x - 5 \rvert \leq -2$

23 $\lvert 3x - 9 \rvert > 0$

24 $\lvert 5x + 2 \rvert \leq 0$

25 $-2 < \lvert x \rvert < 4$

26 $1 < \lvert x \rvert < 5$

27 $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

28 $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

29 $x^2 - x - 6 < 0$

30 $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

31 $x(2x + 3) \geq 5$

32 $8x - 15 > x^2$

33 $25x^2 - 16 < 0$

34 $25x^2 - 16x < 0$

35 $\dfrac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

36 $\dfrac{(x^2 + 1)(x - 3)}{x^2 - 9} \geq 0$

37 $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

38 $\dfrac{(x + 3)^2(2 - x)}{(x + 4)(x^2 - 4)} \leq 0$

39 $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

40 $\dfrac{x + 6}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

41 $\dfrac{-3x}{x^2 - 9} > 0$

42 $\dfrac{5x}{16 - x^2} < 0$

43 $\dfrac{x + 1}{2x - 3} > 2$

44 $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$

45 $\dfrac{1}{x - 2} \geq \dfrac{3}{x + 1}$

46 $\dfrac{2}{2x + 3} \leq \dfrac{2}{x - 5}$

47 $\dfrac{x}{3x - 5} \leq \dfrac{2}{x - 1}$

48 $\dfrac{x}{2x - 1} \geq \dfrac{3}{x + 2}$

49 $x^3 > x$

50 $x^4 \geq x^2$

Ejer. 51-52: Resuelva el inciso a) y use la respuesta para determinar las respuestas de los incisos b) y c).

51 **a)** $|x + 5| = 3$ **b)** $|x + 5| < 3$

c) $|x + 5| > 3$

52 **a)** $|x - 4| < 3$ **b)** $|x - 4| = 3$

c) $|x - 4| > 3$

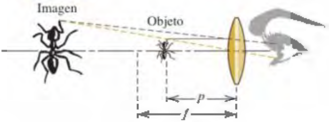
Ejer. 53-54: Exprese el enunciado en función de una desigualdad que tenga un valor absoluto.

53 El peso w de un luchador debe estar entre 2 y 141 libras.

54 El radio r de una bola de metal debe medir entre 0.01 centímetros y 1 centímetro.

55 **Amplificación lineal** En la figura se muestra una lente de aumento simple formada por una lente convexa. El objeto a amplificarse está ubicado de manera que la distancia p desde la lente es menor que la longitud focal f. La amplificación lineal M es la razón entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. En física se demuestra que $M = f/(f - p)$. Si $f = 6$ cm, ¿a qué distancia de la lente debe colocarse el objeto para que su imagen aparezca por lo menos tres veces más grande? (Compare con el ejemplo 4.)

EJERCICIO 55



56 **Concentración de medicamento** Para tratar la arritmia (pulso irregular del corazón) se introduce un medicamento en el torrente sanguíneo por una vena. Suponga que la concentración c del medicamento después de t horas está dada por $c = 3.5t/(t + 1)$ mg/L. Si el nivel mínimo eficaz es 1.5 mg/L, determine cuándo se excede este nivel.

57 **Gastos en los negocios** Una compañía constructora trata de decidir cuál de dos modelos de una grúa comprar. El modelo A cuesta \$100,000 y su mantenimiento anual cuesta \$8,000. El modelo B tiene un costo inicial de \$80,000 y su mantenimiento cuesta \$11,000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes que sea más económico que el modelo B?

58 **Compra de un automóvil** Un consumidor trata de decidir si compra el automóvil A o el B. El automóvil A cuesta \$20,000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón, y el seguro cuesta \$1,000 al año. El automóvil B cuesta \$24,000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón y el seguro cuesta \$1,200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15,000 millas por año y que el precio del combustible permanece constante en \$3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el costo total del automóvil B sea menor que el del automóvil A.

59 **Récord de salto vertical** El *Libro Guinness de Récords Mundiales* informa que los perros pastor alemán pueden dar saltos verticales de más de 10 pies cuando escalan paredes. Si la distancia s (en pies) desde el suelo después de t segundos está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos el perro está a más de 9 pies del suelo?

60 **Altura de un objeto lanzado** Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 ft/s, entonces su distancia s desde el suelo después de t segundos está dada por $s = -16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1536 pies sobre el suelo?

61 **Distancia de frenado** La distancia d de frenado (en pies) de cierto automóvil que viaja a v mi/h está dada por la ecuación $d = v + (v^2/20)$. Determine las velocidades que den como resultado distancias de frenado menores de 75 pies.

62 **Rendimiento de combustible** El número de millas M que cierto automóvil compacto puede viajar con un galón de gasolina está relacionado con su velocidad v (en mi/h) por

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \quad \text{para } 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades M será por lo menos 45?

63 **Disminución de estatura** La estatura de una persona por lo general disminuye 0.024 pulgadas cada año después de los 30 años.

a) Si una mujer mide 5 pies 9 pulgadas a la edad de 30 años, prediga su estatura a la edad de 70.

b) Un hombre de 50 años de edad mide 5 pies 6 pulgadas. Determine una desigualdad para el rango de estaturas (en pulgadas) que este hombre experimentará entre las edades de 30 y 70.

64 **Velocidad de aterrizaje de los aviones** En el diseño de cierto avión pequeño de turbohélice, la velocidad de aterrizaje V (en ft/s) es determinada por la fórmula $W = 0.00334V^2S$, donde W es el peso bruto (en libras) del avión y S el área superficial (en ft^2) de las alas. Si el peso bruto de la nave es entre 7,500 y 10,000 libras y $S = 210$ ft^2, determine el rango de las velocidades de aterrizaje en millas por hora.

Ejer. 65-66: Use una tabla de valores como apoyo para resolver la desigualdad en el intervalo dado.

65 $\dfrac{(2-x)(3x-9)}{(1-x)(x+1)} \geq 0, \qquad [-2, 3.5]$

66 $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 < 0, \qquad [-3.5, 5]$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1-2: Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifique el resultado.

1 $|x + 3|$ si $x \leq -3$

2 $|(x-2)(x-3)|$ si $2 < x < 3$

Ejer. 3-14: Simplifique la expresión y racionalice el denominador cuando sea apropiado.

3 $\left(\dfrac{a^{2/3}b^{3/2}}{a^2b}\right)^6$

4 $(-2p^2q)^3\left(\dfrac{p}{4q^2}\right)^2$

5 $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{z}}\right)^4 \div \left(\dfrac{x^{1/3}y^2}{z}\right)^3$

6 $\left(\dfrac{-64x^3}{z^6y^9}\right)^{2/3}$

7 $[(a^{2/3}b^{-2})^3]^{-1}$

8 $x^{-2} - y^{-1}$

9 $\sqrt[3]{27x^5y^3z^4}$

10 $\sqrt[3]{(-4a^3b^2c)^2}$

11 $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)$

12 $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^6)^4}}$

13 $\dfrac{\sqrt{12x^4y}}{\sqrt{3x^2y^5}}$

14 $\dfrac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

Ejer. 15-22: Exprese como un polinomio.

15 $(3x^3 - 4x^2 + x - 6) + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5)$

16 $(x + 4)(x + 3) - (2x - 3)(x - 5)$

17 $(3a - 5b)(4a + 7b)$

18 $(4r^2 - 3s)^2$

19 $(13a^2 + 5b)(13a^2 - 5b)$

20 $(2a + b)^3$

21 $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$

22 $(a + b + c + d)^2$

Ejer. 23-30: Factorice el polinomio.

23 $60xw + 50w$

24 $16a^4 + 24a^2b^2 + 9b^4$

25 $8x^3 + 64y^3$

26 $u^3v^4 - u^6v$

27 $p^8 - q^8$

28 $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

29 $x^2 - 49y^2 - 14x + 49$

30 $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

Ejer. 31-36: Simplifique la expresión.

31 $\dfrac{6}{4x-5} - \dfrac{15}{10x+1}$

32 $\dfrac{7}{x+2} + \dfrac{3x}{(x+2)^2} - \dfrac{5}{x}$

33 $\dfrac{x + x^{-2}}{1 + x^{-2}}$

34 $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

35 $\dfrac{\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{x+2}}{x - 3 - \dfrac{6}{x+2}}$

36 $\dfrac{(4 - x^2)\left(\frac{1}{3}\right)(6x + 1)^{-2/3}(6) - (6x + 1)^{1/3}(-2x)}{(4 - x^2)^2}$

Ejer. 37-60: Resuelva la ecuación o desigualdad. Exprese las soluciones en función de los intervalos cuando sea posible.

37 $\dfrac{3x + 1}{5x + 7} = \dfrac{6x + 11}{10x - 3}$

38 $2x^2 + 7x - 15 = 0$

39 $x(3x + 4) = 2$

40 $4x^4 - 37x^2 + 75 = 0$

41 $20x^3 + 8x^2 - 55x - 22 = 0$

42 $|4x - 1| = 7$

43 $2|2x + 1| + 1 = 15$

44 $\dfrac{1}{x} + 6 = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

45 $\sqrt{7x + 2} + x = 6$

46 $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

47 $10 - 7x < 4 + 8x$

48 $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2x + 3}{5} < \dfrac{3}{2}$

49 $\dfrac{7}{10x + 3} < 0$

50 $|4x + 7| < 21$

51 $2|3 - x| + 1 > 5$

52 $|16 - 3x| \geq 5$

53 $10x^2 + 11x > 6$

54 $x(x - 3) \leq 18$

55 $\dfrac{x^2(3 - x)}{x + 2} \leq 0$

56 $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} \leq 0$

57 $\dfrac{3}{2x + 3} < \dfrac{1}{x - 2}$

58 $\dfrac{x + 2}{x^2 - 25} \leq 0$

59 $x^3 > x^2$

60 $(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) < 0$

Ejer. 61-64: Despeje la variable especificada.

61 $P + N = \dfrac{C + 2}{C}$ para C

62 $A = B\sqrt[3]{\dfrac{C}{D}} - E$ para D

63 $F = \dfrac{\pi PR^4}{8VL}$ para R (ley de Poiseuille para fluidos)

64 $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$ para r (volumen del tronco de un cono)

Ejer. 65-68: Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

65 $(5 + 8i)^2$

66 $\dfrac{1}{9 - \sqrt{-4}}$

67 $\dfrac{6 - 3i}{2 + 7i}$

68 $\dfrac{24 - 8i}{4i}$

69 **Ingreso por inversiones** Un inversionista tiene una opción de dos inversiones: un fondo de bonos y un fondo de acciones. El fondo de bonos ofrece 7.186% de interés anual, y no paga impuestos federales ni estatales. Suponga que el inversionista paga un impuesto sobre la renta federal a una tasa de 28% y un impuesto sobre la renta estatal a una tasa de 7%. Determine cuál debe ser el rendimiento anual sobre el fondo de acciones gravable para que los dos fondos paguen la misma cantidad de ingresos por intereses netos al inversionista.

70 **Mezcla de oro y plata** Un anillo que pesa 80 gramos está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua, se ha determinado que el anillo tiene un volumen de 5 cm^3. El oro pesa 19.3 g/cm^3 y la plata pesa 10.5 g/cm^3. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

71 **Preparación de alimentos en un hospital** La dietista de un hospital quiere preparar un platillo con 10 onzas de carne y verduras que proporcionará 7 gramos de proteínas. Si una onza de verduras proporciona 1/2 gramo de proteína y una onza de carne proporciona 1 gramo de proteína, ¿cuánto debe usar de cada una?

72 **Calentamiento solar** Un panel solar grande de calefacción requiere 120 galones de un fluido que es 30% anticongelante y viene en solución al 50% o al 20%. ¿Cuántos galones de cada uno deben usarse para preparar una solución de 120 galones?

73 **Fabricación de latón** Una empresa desea hacer una aleación de latón, que se compone de 65% cobre y 35% zinc. ¿Cuánto cobre debe mezclarse con 140 kg de zinc para hacer latón?

74 **Llenado de un contenedor** Un extrusor puede llenar un contenedor vacío en 2 horas, y un equipo de envasado puede vaciar un contenedor lleno en 5 horas. Si un contenedor está medio lleno cuando un extrusor comienza a llenarlo y un equipo comienza a vaciarlo, ¿cuánto tiempo tomará llenar el contenedor?

75 **Viaje en carretera** Una carretera en sentido norte-sur cruza otra carretera en sentido este-oeste en un punto P. Un automóvil cruza P a las 10 A.M., y viaja hacia el este a una velocidad constante de 20 mi/h. En el mismo instante, otro automóvil está a 2 millas al norte de P, viajando al sur a 50 mi/h.

a) Encuentre una fórmula para la distancia d entre los automóviles t horas después de las 10:00 A.M.

b) ¿Aproximadamente a qué hora los automóviles se encontrarán a 104 millas de distancia entre sí?

76 **Cercado de una perrera** El dueño de una perrera tiene 270 pies de material para cercar y dividir un área rectangular en 10 jaulas iguales, como se muestra en la figura. Encuentre dimensiones que permitan un medida de 100 ft^2 para cada una de las jaulas.

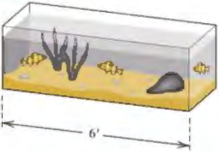
EJERCICIO 76

77 **Dimensiones de un acuario** Se construirá una pecera sin tapa con costados de 6 pies de largo y extremos cuadrados, como se aprecia en la figura.

a) Calcule la altura del acuario si el volumen será 48 ft^3.

b) Calcule la altura si se usarán 44 ft^2 de vidrio.

EJERCICIO 77



78 **Ley de Boyle** La ley de Boyle para cierto gas expresa que si la temperatura es constante, entonces $pv = 200$, donde p es la presión (en lb/pulg^2) y v es el volumen (en pulg^3). Si $25 \leq v \leq 50$, ¿cuál es el intervalo correspondiente para p?

79 **Comisión de ventas** Un recién graduado de la universidad tiene ofertas para un empleo de ventas en dos empresas de computadoras. El empleo A paga \$50,000 al año más 10% de comisión. El empleo B paga sólo \$40,000 al año, pero el porcentaje de comisión es 20%. ¿Cuántas ventas al año debe hacer el vendedor para que el segundo empleo sea más lucrativo?

80 **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido en el aire a 0 °C (o 273 K) es 1087 ft/s, pero esta velocidad se incrementa conforme aumenta la temperatura. La velocidad v del sonido a una temperatura T en K está dada por $v = 1087\sqrt{T/273}$. ¿A qué temperaturas la velocidad del sonido rebasa los 1100 ft/s?

81 **Plantar un huerto de manzanas** El propietario de un huerto de manzanas estima que si se plantan 24 árboles por acre, entonces cada árbol maduro producirá 600 manzanas por año. Por cada árbol adicional plantado por acre, el número de manzanas producidas por cada árbol disminuye en 12 por año. ¿Cuántos árboles debe plantar por acre para obtener por lo menos 16,416 manzanas al año?

82 **Rentas de departamentos** Una empresa de bienes raíces posee 218 departamentos en edificios, que se ocupan por completo cuando la renta es de \$940 al mes. La empresa estima que por cada \$25 de aumento en la renta se desocupan 5 departamentos. ¿Qué renta debe cobrarse para pagar las facturas mensuales, que suman un total de \$205,920?

83 Escoja la ecuación que describa mejor la tabla de datos.

x	y
1	2.1213
2	3.6742
3	4.7434
4	5.6125
5	6.3640

1) $y = 1.5529x + 0.5684$

2) $y = \dfrac{3}{x} + x^2 - 1$

3) $y = 3\sqrt{x - 0.5}$

4) $y = 3x^{1/3} + 1.1213$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 **Tarjeta de crédito con puntos en efectivo** Por cada \$10 que se cargan a una tarjeta de crédito en particular, se otorga 1 punto. Al final del año, 100 puntos se pueden intercambiar por \$1 en efectivo. ¿Qué porcentaje de descuento representa este dinero en efectivo en función de la cantidad de dinero que se carga a la tarjeta de crédito?

2 Determine las condiciones bajo las cuales $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

3 Demuestre que la suma de los cuadrados $x^2 + 25$ puede factorizarse al sumar y restar un término en particular y seguir el método mostrado en el ejemplo 2c) de la sección 1.3.

4 ¿Cuál es la diferencia entre las expresiones $\dfrac{1}{x+1}$ y $\dfrac{x-1}{x^2-1}$?

5 Escriba el cociente de dos polinomios arbitrarios de segundo grado en x, y evalúe el cociente con varios valores grandes de x. ¿Qué conclusión general puede formular acerca de estos cocientes?

6 Simplifique la expresión $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$. Ahora evalúe ambas expresiones con un valor de x ($x \neq \pm 2$). Comente lo que demuestra (o no) esta evaluación y lo que demuestra (o no) su simplificación.

7 **Truco para una fiesta** Para adivinar la edad y estatura de su pareja, haga que él o ella haga lo siguiente:

1 Anote la edad de él/ella.
2 Multiplíquela por 2.
3 Sume 5.
4 Multiplique la suma por 50.
5 Reste 365.
6 Sume la estatura de él/ella (en pulgadas).
7 Sume 115.

Los primeros dos dígitos del resultado son iguales a la edad de él o ella y los últimos dos dígitos son iguales a su estatura. Explique por qué esto es verdadero.

8 **Problema de circuitos** En un problema de circuitos determinado, el voltaje de salida está definido por

$$V_{sal} = I_{ent}\left(-\frac{RXi}{R - Xi}\right),$$

donde $I_{ent} = \dfrac{V_{ent}}{Z_{ent}}$ y $Z_{ent} = \dfrac{R^2 - X^2 - 3RXi}{R - Xi}$. Encuentre una fórmula para V_{sal} en función de V_{ent} cuando R es igual a X.

9 Cuando se factoriza la suma o diferencia de cubos, $x^3 \pm y^3$, ¿el factor $(x^2 \mp xy + y^2)$ es factorizable sobre los números reales?

10 ¿Cuál es el promedio de las dos soluciones de la ecuación cuadrática arbitraria $ax^2 + bx + c = 0$? Comente cómo este conocimiento ayuda a comprobar fácilmente las soluciones de una ecuación cuadrática.

11 **a)** Encuentre una expresión de la forma $p + qi$ para el inverso multiplicativo de $\dfrac{a + bi}{c + di}$, donde a, b, c y d son números reales.

b) ¿La expresión que encontró se aplica a números reales de la forma a/c?

c) ¿Hay alguna restricción en su respuesta para el inciso a)?

12 Al resolver la desigualdad $\dfrac{x - 1}{x - 2} \geq 3$, ¿qué hay de malo en emplear como primer paso $x - 1 \geq 3(x - 2)$?

13 Considere la desigualdad $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$. Suponga que la igualdad asociada $ax^2 + bx + c = 0$ tiene discriminante D. Categorice las soluciones de la desigualdad con base en los signos de a y D.

14 **Nivel de congelación en una nube** Consulte los ejercicios 73-75 en la sección 1.4.

a) Aproxime la altura del nivel de congelación en una nube si la temperatura del suelo es 80 °F y el punto de rocío es 68 °F.

b) Encuentre una fórmula para la altura h del nivel de congelación en una nube para la temperatura del suelo G y el punto de rocío D.

15 Explique por qué no debe tratar de resolver una de estas ecuaciones.

$$\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x + 5} = 0$$
$$\sqrt[3]{2x - 3} + \sqrt[3]{x + 5} = 0$$

16 Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x} = cx - 2/c$$

para x, donde $c = 2 \times 10^{300}$. Comente por qué una de sus soluciones positivas es extraña.

17 **Relación de récords de béisbol** Con base en el número de carreras anotadas (S) y carreras permitidas (A), el porcentaje ganador de Pitágoras estima cuál debe ser el porcentaje ganador de un equipo de béisbol. Esta fórmula, desarrollada por el experto en estadísticas Bill James tiene la forma

$$\frac{S^x}{S^x + A^x}$$

James determinó que $x = 1.83$ da los resultados más precisos.

El equipo de los Yanquis de Nueva York de 1927 se considera uno de los mejores equipos de la historia. Tuvieron un récord de 110 victorias y 44 derrotas. Anotaron 975 carreras, mientras que permitieron sólo 599.

a) Encuentre el récord de ganados-perdidos de Pitágoras.

b) Estime el valor de x (al 0.01 más cercano) que predice mejor el récord real de ganados y perdidos de los Yanquis de 1927.

18 **Área superficial de un tanque** Se sabe que un tanque esférico contiene 10,000 galones de agua. ¿Qué necesita conocer para determinar el área superficial del tanque? Estime su área superficial.

CAPÍTULO 1 EXAMEN

1 Si x es positivo y y es negativo, ¿cuál es el signo de $\dfrac{y^{99}}{y-x}$?

2 Exprese la afirmación "el cociente de x y y no es mayor que 5" como una desigualdad.

3 Si x es negativo, reescriba $|-x^2-3|$ sin utilizar el símbolo de valor absoluto, y simplifique el resultado.

4 Si la distancia de la Tierra al Sol es de 91,500,000 millas y la velocidad de la luz es de 186,000 millas por segundo, aproxime el número de segundos que toma la luz para viajar desde el Sol a la Tierra.

5 Simplifique $\dfrac{x^2y^{-3}}{z}\left(\dfrac{3x^0}{zy^2}\right)^{-2}$. Escriba su respuesta con exponentes positivos.

6 Simplifique $x^{-2/3}x^{3/4}$. Escriba su respuesta usando la notación radical.

7 Simplifique $\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{3}}$ al racionalizar el numerador.

8 Exprese el producto $(x+2)(x^2-3x+5)$ como un polinomio.

9 Si $2x^2(2x+3)^4$ está escrito como un polinomio, ¿cuál es el término principal?

10 Factorice el polinomio $2x^2+7x-15$.

11 Factorice completamente el polinomio $3x^3-27x$.

12 Factorice $64x^3+1$.

13 Factorice $x-5$ como una diferencia de cubos.

14 Factorice $2x^2+4x-3xy-6y$.

15 Factorice $x^{93}-1$.

16 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{12}{x^2-2x}$.

17 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}{\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}}$.

18 Simplifique y reduzca la expresión $\dfrac{(x+h)^2+7(x+h)-(x^2+7x)}{h}$.

19 Racionalice el denominador de la expresión $\dfrac{6h^2}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$.

20 Simplifique la expresión $(x+2)^3(4)(x-3)^3+(x-3)^4(3)(x+2)^2$ escribiéndola como el producto de tres factores.

21 Simplifique la expresión $\dfrac{(x^2-3)^2(2x)-x^2(2)(x^2-3)(2x)}{[(x^2-3)^2]^2}$.

22 Resuelva la ecuación $\dfrac{5x}{x-3}+\dfrac{7}{x}=\dfrac{45}{x^2-3x}$ para x.

23 Resuelva la ecuación $A=\dfrac{3B}{2B-5}$ para B en función de A.

24 Una acción aumenta 20% un año y 30% el año siguiente. Su valor actual es \$2,720. Defina una variable, escriba una ecuación y resuelva la ecuación para determinar su valor original.

25 Use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $3x^2+\sqrt{60}xy+5y^2=0$ para x en función de y.

26 Resuelva la ecuación $(x-y+z)^3=9$ para x en función de y y z.

27 La altura sobre el suelo h de un objeto, t segundos después de su lanzamiento, está dada por $h=-16t^2+320t$. ¿Cuándo estará el objeto a 1,584 pies sobre el suelo?

28 Si x es cualquier número real y la expresión x^{4n+3} se simplifica y escribe en la forma $a+bi$, encuentre los valores de a y b.

29 Encuentre las tres soluciones de la ecuación $x^3=64$.

30 Resuelva la ecuación $A=B\sqrt{x^2+r^2}$ para x.

31 Encuentre las soluciones de la ecuación $3x^{1/2}(x+2)^{4/3}(x-5)^{1/3}(x^{2/3}-4)=0$.

32 Una bola tiene un volumen de 20,000 pulg^3, que se incrementa en un 25% a 25,000 pulg^3. Encuentre el cambio correspondiente en el radio, al décimo de un porciento más cercano.

33 Una mujer podría jubilarse a los 55 años (plan A) y recibir \$3,300 al mes por el resto de su vida. O bien, podría retirarse a los 65 años (plan B) y recibir \$4,200 al mes. Escriba una desigualdad que relacione los pagos totales de los planes y resuélvala para determinar cuánto tiempo tomará que los pagos totales del plan B sean como mínimo iguales a los pagos totales del plan A.

34 Resuelva la desigualdad $-\frac{1}{4}|3-2x|+6\geq 2$ para x y escriba su respuesta en notación de intervalos.

35 Despeje x en la desigualdad $x(2x+1)\geq 3$ y anote su respuesta en una notación de intervalos.

36 Despeje x en la desigualdad $\dfrac{(x+1)^2(x-7)}{(7-x)(x-4)}\leq 0$ y escriba su respuesta en la notación de intervalos.

37 Resuelva la desigualdad $\dfrac{2}{x-3}\leq\dfrac{2}{x+1}$ para x y escriba su respuesta en notación de intervalos.

38 La suma de la longitud y el ancho de un rectángulo es 14. Calcule los valores del ancho para el cual el área del rectángulo es por lo menos 45.

2

Funciones y gráficas

2.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

2.2 Gráficas de ecuaciones

2.3 Rectas

2.4 Definición de función

2.5 Gráficas de funciones

2.6 Funciones cuadráticas

2.7 Operaciones con funciones

El término matemático *función* (o su equivalente latino) data del siglo XVII, cuando el cálculo estaba en las primeras etapas de desarrollo. Este importante concepto es ahora la espina dorsal de cursos avanzados de matemáticas y es indispensable en todos los campos de las ciencias.

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las funciones usando métodos algebraicos y gráficos que incluyen la localización de puntos, la determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales. Estas técnicas son adecuadas para obtener bosquejos aproximados de gráficas que ayudan a entender las propiedades de las funciones; los métodos modernos usan software complejo y matemáticas avanzadas para generar representaciones gráficas sumamente precisas de las funciones.

2.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

En la sección 1.1 estudiamos la forma de asignar un número real (coordenada) a cada punto sobre una recta. Ahora mostraremos cómo asignar un **par ordenado** (a, b) de números reales a cada punto en un plano. Aunque también se ha empleado la notación (a, b) para denotar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión, puesto que en esta exposición siempre está claro si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Introdujimos un **sistema de coordenadas rectangulares** o **cartesianas*** en un plano por medio de dos rectas perpendiculares coordenadas, llamadas **ejes coordenados**, que se cruzan en el origen O, como se muestra en la figura 1. A menudo se hace referencia a la recta horizontal como **eje *x*** y a la vertical como **eje *y***, y los marcamos como x y y, respectivamente. El plano es entonces un **plano coordenado** o **plano *xy***. Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro partes denominadas **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto** cuadrantes, marcados como I, II, III y IV, respectivamente (vea la figura 1). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.

A cada punto P en un plano xy se le asigna un par ordenado (a, b), como se aprecia en la figura 1. Llamamos a a la **coordenada *x*** (o **abscisa**) de P, y b a la **coordenada *y*** (u ordenada). Se dice que *P tiene coordenadas (a, b)* y se hace referencia al *punto* (a, b) o *punto* $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado determina un punto P con coordenadas a y b. Un **punto se traza** al marcarlo, como se ilustra en la figura 2.

FIGURA 1

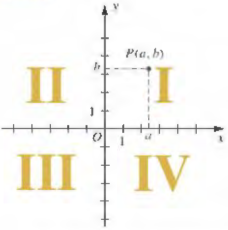
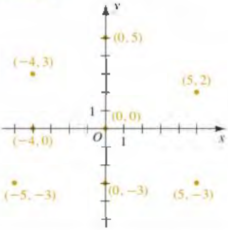


FIGURA 2



Para determinar la distancia entre dos puntos de un plano coordenado usamos la siguiente fórmula:

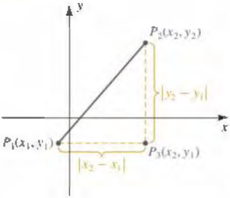
Fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera y en un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

* El término *cartesianas* se usa en honor al matemático y filósofo René Descartes (1596–1650), quien fue uno de los primeros en emplear estos sistemas de coordenadas.

FIGURA 3



DEMOSTRACIÓN Si $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ilustra en la figura 3, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2$$

En la figura vemos que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|$$

Como $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, podemos escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Tomando la raíz cuadrada de cada lado de la última ecuación y partiendo del hecho de que $d(P_1, P_2) \geq 0$, obtenemos la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 se encuentran en la misma recta horizontal y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

Del mismo modo, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma recta vertical y

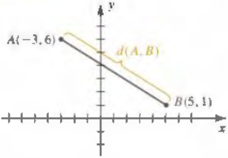
$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}$$

Estos son casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aun cuando nos referimos a los puntos que se muestran en la figura 3, la prueba es independiente de las posiciones de P_1 y P_2. ■

Cuando aplique la fórmula de la distancia, observe que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$, y, por lo tanto, el orden en el que se restan las coordenadas x y las coordenadas y de los puntos es intrascendente. La distancia entre dos puntos se puede considerar como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

FIGURA 4



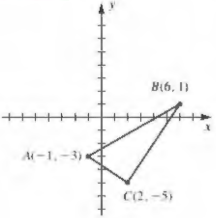
EJEMPLO 1 **Cómo determinar la distancia entre puntos**

Localice los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y encuentre la distancia $d(A, B)$.

SOLUCIÓN Los puntos están trazados en la figura 4. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43 \end{aligned}$$ ■

FIGURA 5



EJEMPLO 2 **Demostración de que un triángulo es un triángulo rectángulo**

a) Trace $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ y demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

b) Determine el área del triángulo ABC.

SOLUCIÓN

a) Los puntos están trazados en la figura 5. Geométricamente, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. Por la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(6 + 1)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \\ d(B, C) &= \sqrt{(2 - 6)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \\ d(A, C) &= \sqrt{(2 + 1)^2 + (-5 + 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

(continúa)

Como $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición que debe satisfacerse es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2$$

Al sustituir los valores encontrados usando la fórmula de la distancia, obtenemos

$$[d(A, B)]^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = 65$$

y $$[d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 52 + 13 = 65$$

Área de un triángulo:
$A = \frac{1}{2}bh$

Así, el triángulo es un triángulo rectángulo con hipotenusa AB.

b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. Al consultar la figura 5, establecemos que

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \qquad \text{y} \qquad h = d(A, C) = \sqrt{13}$$

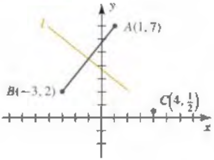
Por consiguiente, el área del triángulo ABC es

$$\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\sqrt{52}\,\sqrt{13} = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\,\sqrt{13} = 13$$ ■

EJEMPLO 3 **Aplicación de la fórmula de la distancia**

Dados $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C(4, \frac{1}{2})$, demuestre que C está en la mediatriz del segmento AB.

FIGURA 6



SOLUCIÓN Los puntos A, B, C y la *mediatriz* l se ilustran en la figura 6. De la geometría plana, l puede caracterizarse por cualquiera de las siguientes condiciones:

1) l es la recta perpendicular al segmento AB en su punto medio.

2) l es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos extremos del segmento AB.

Usaremos la condición 2 para demostrar que C está en l al verificar que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$$d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 7\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\tfrac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{169}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

$$d(B, C) = \sqrt{[4-(-3)]^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{7^2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{49 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

Por lo tanto, C es equidistante de A y B y la verificación está completa. ■

EJEMPLO 4 **Determinación de una fórmula que describe una mediatriz**

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, encuentre una fórmula que exprese el hecho de que un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB.

SOLUCIÓN Por la condición 2 del ejemplo 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; esto es,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}$$

Para obtener una fórmula más sencilla, elevamos ambos lados al cuadrado y simplificamos los términos de la ecuación resultante, como sigue:

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = [x-(-3)]^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$
$$-2x + 1 - 14y + 49 = 6x + 9 - 4y + 4$$
$$-8x - 10y = -37$$
$$8x + 10y = 37$$

Observe que, en particular, la última fórmula es verdadera para las coordenadas del punto $C(4, \frac{1}{2})$ del ejemplo 3, porque si $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$, la sustitución en $8x + 10y$ da

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 37$$

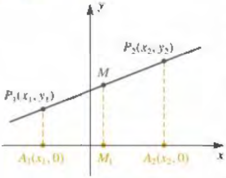
En el ejemplo 9 de la sección 2.3, encontraremos una fórmula para la mediatriz de un segmento usando la condición 1 del ejemplo 3. ■

El punto medio de un segmento de recta lo determinamos usando la siguiente fórmula:

Fórmula del punto medio El punto medio M del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

FIGURA 7



DEMOSTRACIÓN Las rectas que pasan por P_1 y P_2 paralelas al eje y se intersecan con el eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. Según la geometría plana, la recta que pasa por el punto medio M, paralela al eje y, biseca al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (vea la figura 7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto, $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a la mitad de A_1 a A_2, la coordenada x de M_1 es igual a la coordenada x de A_1 más la mitad de la distancia de A_1 a A_2, esto es,

$$\text{coordenada } x \text{ de } M_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

La expresión del lado derecho de la última ecuación se simplifica a

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

Este cociente es el *promedio* de los números x_1 y x_2. Deducimos que la coordenada x de M es también $(x_1 + x_2)/2$. Del mismo modo, la coordenada y de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas se cumplen para todas las posiciones de P_1 y P_2. ■

Para aplicar la fórmula del punto medio, puede ser suficiente recordar que

la coordenada x del punto medio = el *promedio* de las coordenadas x,

y que

la coordenada y del punto medio = el *promedio* de las coordenadas y.

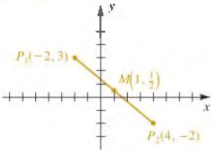
EJEMPLO 5 **Obtención de un punto medio**

Encuentre el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$, y verifique que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

SOLUCIÓN Por la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

(*continúa*)

FIGURA 8



$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Los tres puntos P_1, P_2 y M se grafican en la figura 8. Por la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1+2)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$

Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$. ■

Una **herramienta para graficar** es una aplicación en una calculadora o computadora, equipada con software apropiado, la cual permite elaborar gráficas. La **ventana de visualización** de dicha herramienta es simplemente la porción del plano xy que se muestra en la pantalla. Los márgenes (lados) de la ventana de visualización se ajustan manualmente si se asigna un valor x mínimo (Xmin), un valor x máximo (Xmax), la diferencia entre las marcas de graduación sobre el eje x (Xscl), un valor y mínimo (Ymin), un valor y máximo (Ymax) y la diferencia entre las marcas de graduación sobre el eje y (Yscl). En los ejemplos, a menudo usamos los valores estándar (o predeterminados) para la ventana de visualización, los cuales dependen de las dimensiones (medidas en pixeles) de la pantalla de la herramienta para graficar. Si deseamos una vista diferente de la gráfica, usamos la frase

"using [Xmin, Xmax, Xscl] by [Ymin, Ymax, Yscl]"

para indicar el cambio en la ventana de visualización. Si omitimos Xscl o Yscl, el valor predeterminado es 1.

EJEMPLO 6 **Trazo de puntos en una calculadora graficadora**

Las estimaciones de la población de Estados Unidos para el 1 de julio de varios años aparecen en la tabla.

a) Grafique los datos.

b) Use la fórmula del punto medio para estimar la población en 2007.

c) Determine el incremento porcentual en la población de 2008 a 2009.

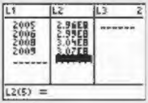
Año	Población
2005	295,753,151
2006	298,593,212
2008	304,374,846
2009	307,006,550

SOLUCIÓN

Introducir los datos.

a) Escriba los años en L1 (lista 1) y las poblaciones en L2.

STAT 1 2005 ENTER
2006 ENTER 2008 ENTER 2009 ENTER
△ (4 veces) ▷ 295,753,151 ENTER
298,593,212 ENTER 304,374,846 ENTER
307,006,550 ENTER



Activar STAT PLOT 1.

2nd STAT PLOT 1 ENTER

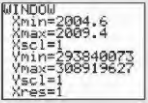
Trazar los datos.

Asegúrese de apagar o borrar todas las asignaciones Y. Si usa ZOOM STAT, la calculadora seleccionará automáticamente la ventana de visualización para que se exhiban todos los datos.

ZOOM 9

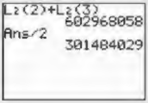
Comprobar los valores en pantalla.

WINDOW



b) Para estimar la población en 2007, determinaremos el promedio de las estimaciones de población de 2006 y 2008.

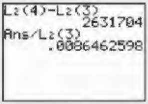
2nd QUIT
2nd L2 (2) + 2nd L2
(3)
ENTER ÷ 2 ENTER



El valor determinado, 301,484,029, es una buena aproximación a la estimación real de 2007, que fue 301,579,895.

c) Para determinar el incremento porcentual de la población de 2008 a 2009, debemos dividir la diferencia en las poblaciones entre la población de 2008.

CLEAR 2nd L2 (4)
− 2nd L2 (3) ENTER
÷ 2nd L2 (3) ENTER



Hubo un incremento de alrededor de 0.86% de 2008 a 2009. ■

2.1 Ejercicios

1 Grafique los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano de coordenadas.

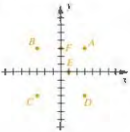
2 Grafique los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$ y $E(2, -3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos de recta AB, BC, CD, DE y EA.

3 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$ y $E(-2, -2)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a), donde a es un número real.

4 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$ y $E(-3, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejer. 5–6: Encuentre las coordenadas de los puntos A–F.

5



6

Ejer. 7–8: Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano de coordenadas que satisfaga la condición dada.

7 **a)** $x = -2$ **b)** $y = 5$ **c)** $x \geq 0$

d) $xy > 0$ **e)** $y < 0$ **f)** $x = 0$

8 **a)** $y = -2$ **b)** $x = 4$ **c)** $x/y < 0$

d) $xy = 0$ **e)** $y > 1$ **f)** $y = 0$

Ejer. 9–14: a) Calcule la distancia $d(A, B)$ entre A y B. b) Encuentre el punto medio del segmento AB.

9 $A(4, -3)$, $B(6, 2)$ **10** $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$

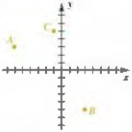
11 $A(-7, 0)$, $B(-2, -4)$ **12** $A(5, 2)$, $B(5, -2)$

13 $A(7, -3)$, $B(3, -3)$ **14** $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejer. 15–16: Demuestre que el triángulo con vértices A, B y C es un triángulo rectángulo y determine su área.

15

16



17 Demuestre que $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$ son vértices de un cuadrado.

18 Demuestre que $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$ son vértices de un paralelogramo.

19 Dado $A(-3, 8)$, encuentre las coordenadas del punto B tales que $C(5, -10)$ sea el punto medio del segmento AB.

20 Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$, encuentre el punto en el segmento AB que esté a tres cuartos de la distancia de A a B.

Ejer. 21–22: Demuestre que C está en la mediatriz del segmento AB.

21 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, $C(3, -6)$

22 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(7, 7)$

Ejer. 23–24: Encuentre una fórmula que exprese el hecho de que un punto arbitrario $P(x, y)$ está en la mediatriz l del segmento AB.

23 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$ **24** $A(-4, 2)$, $B(5, -4)$

25 Encuentre una fórmula que exprese el hecho de que $P(x, y)$ está a una distancia 5 del origen. Describa el conjunto de todos esos puntos.

26 Encuentre una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está a una distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(h, k)$. Describa el conjunto de todos esos puntos.

27 Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

28 Encuentre todos los puntos sobre el eje x que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

29 Encuentre el punto con coordenadas de la forma $(2a, a)$ que está en el tercer cuadrante y se sitúa a una distancia 5 de $P(1, 3)$.

30 Encuentre todos los puntos con coordenadas de la forma (a, a) que estén a una distancia 3 de $P(-2, 1)$.

31 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 3)$ y $Q(5, 2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$?

32 Dados $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, encuentre una fórmula que no contenga radicales y que exprese el hecho de que la suma de las distancias de a $P(x, y)$ a A y B, respectivamente, sea 5.

33 Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es equidistante de los vértices. (*Sugerencia:* marque los vértices del triángulo $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $C(0, b)$.)

34 Demuestre que las diagonales de cualquier paralelogramo se bisecan entre sí. (*Sugerencia:* marque tres de los vértices del paralelogramo $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(0, c)$.)

Ejer. 35–36: Trace la gráfica de los puntos en la ventana de visualización dada.

35 $A(-5, -3.5)$, $B(-2, 2)$, $C(1, 0.5)$, $D(4, 1)$ y $E(7, 2.5)$ en $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$.

36 $A(-10, 4)$, $B(-7, -1.1)$, $C(0, -6)$, $D(3, -5.1)$ y $E(9, 2.1)$ en $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$.

37 **Familias con computadora** La siguiente tabla indica el número de familias en Estados Unidos con computadora para los años seleccionados.

Año	Familias (en miles)
1984	87,073
1993	98,736
2003	113,126
2009	119,296

a) Grafique los datos en la ventana de visualización [1982, 2012] por $[80 \times 10^3, 120 \times 10^3, 10 \times 10^3]$.

b) Comente cómo está cambiando el número de familias.

38 **Periódicos publicados** La siguiente tabla lista el número de periódicos publicados diariamente en Estados Unidos durante varios años.

a) Grafique los datos en la ventana de visualización [1895, 2005, 10] por [0, 3000, 1000].

b) Use la fórmula del punto medio para estimar el número de periódicos en 1930. Compare su respuesta con el verdadero valor, que es 1942.

Año	Periódicos
1900	2226
1920	2042
1940	1878
1960	1763
1980	1745
2000	1480

2.2 Gráficas de ecuaciones

Con frecuencia se usan gráficas para ilustrar cambios en cantidades. Una gráfica en la sección financiera de un periódico puede mostrar la fluctuación del promedio Dow-Jones durante un mes determinado; un meteorólogo podría usar una gráfica para indicar la forma en que la temperatura varió a lo largo de un día; un cardiólogo emplea gráficas (electrocardiogramas) para analizar irregularidades en el corazón; un ingeniero o físico puede recurrir a una gráfica para ilustrar la forma en que aumenta la presión de un gas confinado cuando se calienta. Estas ayudas visuales por lo general revelan con más facilidad el comportamiento de cantidades que una extensa tabla de valores numéricos.

Dos cantidades se relacionan a veces por medio de una ecuación o fórmula que contiene dos variables. En esta sección se examina cómo representar geométricamente esas ecuaciones por medio de una gráfica en un plano de coordenadas. La gráfica puede usarse entonces para descubrir propiedades de las cantidades que no son evidentes a partir sólo de la ecuación. La siguiente tabla introduce el concepto básico de la gráfica de una ecuación con dos variables x y y. Desde luego, también se usan otras letras para las variables.

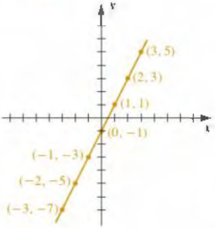
Terminología	Definición	Ejemplo
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado (a, b) que hace verdadero un enunciado si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 5x - 1$, porque sustituir $x = 2$ y $y = 3$ da LI: $3^2 = 9$ LD: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$.

Para cada solución (a, b) de una ecuación en x y y hay un punto $P(a, b)$ en un plano de coordenadas. Al conjunto de todos estos puntos se le llama **gráfica** de la ecuación. Para *trazar la gráfica de una ecuación*, mostramos las características significativas de la gráfica en un plano de coordenadas. En casos sencillos, una gráfica se puede trazar al marcar algunos puntos, si acaso. Para una ecuación complicada, marcar los puntos puede brindar muy poca información acerca de la gráfica. En estos casos, con frecuencia se emplean métodos de cálculo o gráficas por computadora. Iniciaremos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 **Trazo de una gráfica sencilla al marcar puntos**

Trace la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Deseamos encontrar los puntos (x, y) en un plano de coordenadas que corresponden a las soluciones de la ecuación. Conviene elaborar una lista de coordenadas de varios puntos en una tabla, donde para cada x se obtiene el valor para y a partir de $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Los puntos con estas coordenadas parecen estar en una recta y se puede trazar la gráfica de la figura 1. Por lo general, los puntos marcados no son suficientes para ilustrar la gráfica de una ecuación, pero en este caso elemental es posible que estemos razonablemente seguros de que la gráfica es una recta. En la siguiente sección estableceremos este hecho. ■

Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo 1, porque se pueden asignar valores a x que son numéricamente tan grandes como se desee. No obstante, al dibujo de la figura 1 lo denominamos *gráfica de la ecuación* o *trazo de la gráfica*. En general, el trazo de una gráfica debería ilustrar sus características esenciales para que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes por sí mismas. Por ejemplo, en la figura 1, el **comportamiento final** —la forma de la gráfica cuando x toma valores positivos y negativos grandes (es decir, la forma de los extremos derecho e izquierdo)— es evidente para usted. Para el trabajo escrito, se usa la **notación de flecha** de la siguiente tabla cuando se describen las funciones o ecuaciones y su comportamiento final.

Notación	Terminología
$x \to a^-$	x se aproxima a a desde la izquierda (mediante valores *menores* que a).
$x \to a^+$	x se aproxima a a desde la derecha (mediante valores *mayores* que a).
$x \to a$	x se aproxima a a desde cualquiera de los lados de a (x se acerca cada vez más al número a).
$f(x) \to \infty$	$f(x)$ (o y) aumenta sin límite (puede ser un número positivo tan grande como se desee).
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ (o y) disminuye sin límite (puede ser un número negativo tan grande como se desee).

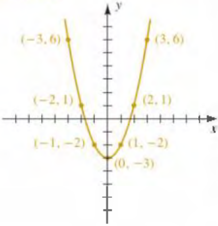
Los símbolos ∞ (se lee "infinito") y $-\infty$ (se lee "menos infinito") no representan números reales; sólo especifican ciertos tipos de comportamiento de funciones y variables.

Si una gráfica termina en algún punto (como sería el caso de una semirrecta o segmento de recta), se coloca un punto en el *punto extremo* apropiado de la gráfica. Como observación general final, *si las marcas de graduación en los ejes coordenados no están rotuladas* (como en la figura 1), *entonces cada marca representa una unidad*. Sólo colocamos una leyenda cuando se usen unidades diferentes en los ejes. En las gráficas *arbitrarias*, donde las unidades de medida no son relevantes, omitimos las marcas de graduación por completo (vea, por ejemplo, las figuras 5 y 6).

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de una ecuación**

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

FIGURA 2



SOLUCIÓN Al sustituir valores por x y encontrar los valores y correspondientes usando $y = x^2 - 3$, obtenemos una tabla de coordenadas de varios puntos en la gráfica:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

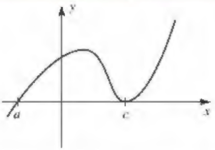
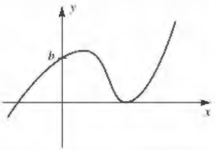
Los valores mayores de $|x|$ producen valores mayores de y. Por ejemplo, los puntos $(4, 13)$, $(5, 22)$ y $(6, 33)$ están en la gráfica, al igual que $(-4, 13)$, $(-5, 22)$ y $(-6, 33)$. Al marcar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva poco pronunciada que pase por estos puntos (con los valores de x en orden creciente), obtenemos el trazo de la figura 2.

Observamos que cuando $x \to 2$, $y \to 1$. (De modo similar, conforme $x \to 2^-$, o $x \to 2^+$, $y \to 1$.) Además, vemos que cuando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$, ya que los valores de y aumentan sin límite a medida que x adquiere un valor positivo cada vez mayor o un valor negativo cada vez mayor.

La gráfica de la figura 2 es una **parábola** y el eje y es el **eje de la parábola**. El punto más bajo $(0, -3)$ es el **vértice** de la parábola, y afirmamos que la parábola *abre hacia arriba*. Si se invierte la gráfica, entonces la parábola *abre hacia abajo*, y el vértice es el punto más alto en la gráfica. En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma $y = ax^2 + c$ con $a \neq 0$ es una parábola con vértice $(0, c)$, que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Si $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen, $(0, 0)$. Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda (vea el ejemplo 5) o en otras direcciones.

Utilizaremos la terminología siguiente para describir el lugar donde la gráfica de una ecuación en x y y interseca el eje x o el eje y.

Intersecciones de la gráfica de una ecuación en x y en y

Terminología	Definición	Interpretación gráfica	Cómo determinarlas
Intersecciones en x (o abscisa al origen)	Las coordenadas x de puntos donde la gráfica interseca al eje x		Convierta $y = 0$ y despeje x. Aquí, a y c son intersecciones en x.
Intersecciones en y (u ordenada al origen)	Las coordenadas y de puntos donde la gráfica interseca al eje y		Sea $x = 0$ y despeje y. Aquí, b es la intersección en y.

Una intersección con el eje x a veces se conoce como *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación. Cuando se usa un dispositivo de gráficas para encontrar una intersección en x, se dice que estamos usando una *raíz funcional*.

EJEMPLO 3 **Cómo determinar las intersecciones con el eje x y con el eje y**

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN La gráfica está trazada en la figura 2 (ejemplo 2). Obtenemos las intersecciones como se indica en la tabla anterior.

1) intersecciones con el eje x:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 3 && \text{dado} \\
0 &= x^2 - 3 && \text{sea } y = 0 \\
x^2 &= 3 && \text{ecuación equivalente} \\
x &= \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73 && \text{obtenemos la raíz cuadrada}
\end{aligned}
$$

Así, las intersecciones con el eje x son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Los puntos en los que la gráfica cruza el eje x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

2) intersecciones con el eje y:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 3 && \text{dado} \\
y &= 0 - 3 = -3 && \text{sea } x = 0
\end{aligned}
$$

Así, la intersección con el eje y es -3, y el punto en el que la gráfica cruza el eje y es $(0, -3)$. ■

EJEMPLO 4 **Cómo trazar la gráfica de una ecuación y encontrar las intersecciones en x y y**

Trace la gráfica de $y = x^2 - 3$ y encuentre (o estime) sus intersecciones con los ejes x y y.

SOLUCIÓN

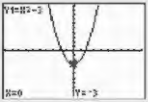
Antes de continuar, desactive la función STAT PLOT 1. Aparece "Done" en la pantalla inicial al terminar la ejecución.

2nd STAT PLOT 4 ENTER

Hacer asignaciones de Y. Y= X,T,θ,n x^2 – 3

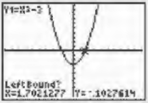
Trazar la gráfica en una ventana de visualización estándar. ZOOM 6

Encontrar la intersección en y. 2nd CALC 1 0 ENTER

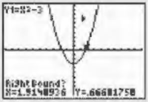


Estimar las intersecciones en x. 2nd CALC 2

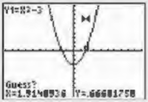
Encontraremos la intersección en x positivo. En respuesta a "Left Bound?", mueva a la derecha el cursor para que la coordenada y sea un número negativo pequeño y luego pulse ENTER.



En respuesta a "Right Bound?", mueva a la derecha el cursor para que la coordenada y sea un número positivo pequeño y luego pulse ENTER.

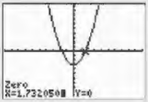


En respuesta a "Guess?", sólo pulse ENTER, porque ya está muy cerca de la intersección en x.



(*continúa*)

Del ejemplo previo, sabemos que las intersecciones en x son aproximadamente ± 1.73.



Nota de calculadora: si usted conoce una aproximación de la intersección en x, entonces puede introducir valores de x para sus respuestas. Las respuestas siguientes producen el mismo resultado que el anterior.

Left bound?	1 ENTER
Right bound?	2 ENTER
Guess?	1.5 ENTER

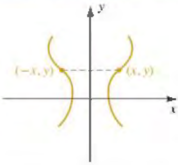
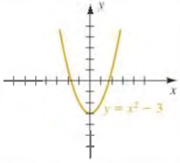
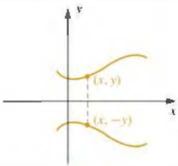
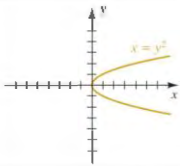
■

Si el plano de coordenadas de la figura 2 se dobla a lo largo del eje y, la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha y decimos que *la gráfica es simétrica respecto al eje y*. Una gráfica es simétrica respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ esté en la gráfica cuando (x, y) se halle en la gráfica. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo 2 tiene esta propiedad, puesto que la sustitución de $-x$ por x da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

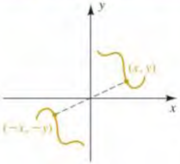
Esta sustitución es una aplicación de la prueba 1 de simetría en la siguiente tabla. Otros dos tipos de simetría y las pruebas apropiadas también se muestran aquí. Las gráficas de $x = y^2$ y $4y = x^3$ de la columna de ejemplo se estudian en los ejemplos 5 y 6, respectivamente.

Simetrías de las gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
La gráfica es simétrica respecto al eje y.		**1)** La sustitución de $-x$ por x lleva a la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica respecto al eje x.		**2)** La sustitución de $-y$ por y lleva a la misma ecuación.	

(continúa)

Simetrías de las gráficas de ecuaciones en x y y

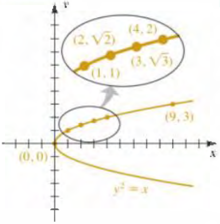
Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
La gráfica es simétrica respecto al origen.		**3)** La sustitución simultánea de $-x$ por x y de $-y$ por y lleva a la misma ecuación.	

Si una gráfica es simétrica respecto a un eje, es suficiente determinar la gráfica en la mitad del plano de coordenadas, puesto que podemos trazar el resto de la gráfica al tomar una *imagen espejo*, o *reflexión*, por el eje apropiado.

EJEMPLO 5 **Una gráfica que es simétrica respecto al eje x**

Trace la gráfica de la ecuación $y^2 = x$.

FIGURA 3



SOLUCIÓN Como la sustitución de $-y$ por y no modifica la ecuación, la gráfica es simétrica respecto al eje x (vea la prueba de simetría 2). En consecuencia, si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces el punto $(x, -y)$ está en la gráfica. Por lo tanto, es suficiente encontrar puntos con coordenadas y no negativas y luego reflejarlas por el eje x. La ecuación $y^2 = x$ es equivalente a $y = \pm\sqrt{x}$. Las coordenadas y de puntos *por encima* del eje x (y es *positiva*) están dadas por $y = \sqrt{x}$, mientras que las coordenadas y de puntos *por debajo* del eje x (y es *negativa*) están dadas por $y = -\sqrt{x}$. Las coordenadas de algunos puntos sobre la gráfica aparecen a continuación. La gráfica se traza en la figura 3.

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

La gráfica es una parábola que se abre a la derecha, con su vértice en el origen. En este caso, el eje x es el eje de la parábola. ■

EJEMPLO 6 **Una gráfica que es simétrica respecto al origen**

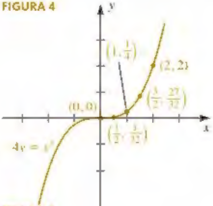
Trace la gráfica de la ecuación $4y = x^3$.

SOLUCIÓN Sustituimos simultáneamente $-x$ por x y $-y$ por y, entonces

$$4(-y) = (-x)^3 \text{ o bien, lo que es equivalente,} \qquad -4y = -x^3$$

Al multiplicar ambos lados por -1, vemos que la última ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación $4y = x^3$. Por lo tanto, por simetría de la prueba 3, la gráfica es simétrica respecto al origen y el punto (x, y) está en la gráfica, y entonces

FIGURA 4

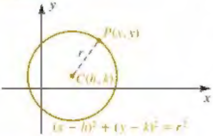


el punto $(-x, -y)$ está en la gráfica. La tabla siguiente contiene coordenadas de algunos puntos en la gráfica.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2	$\frac{125}{32}$

Debido a la simetría, podemos ver que los puntos $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$, $(-2, -2)$, etcétera, también están en la gráfica, la cual se muestra en la figura 4. ■

FIGURA 5



Si $C(h, k)$ es un punto en un plano de coordenadas, entonces una circunferencia con centro C y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano que estén a r unidades de C. Como se puede ver en la figura 5, un punto $P(x, y)$ está en la circunferencia siempre y cuando $d(C, P) = r$, o bien, por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

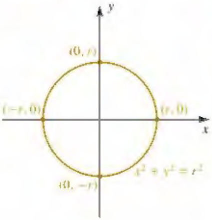
Esta ecuación es equivalente a la siguiente, a la que llamaremos **ecuación estándar de una circunferencia**.

Ecuación estándar de una circunferencia con centro (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de una circunferencia de radio r con centro en el origen (vea la figura 6). Si $r = 1$, a la gráfica se le llama **circunferencia unitaria**.

FIGURA 6



EJEMPLO 7 **Cómo encontrar la ecuación de una circunferencia**

Encuentre una ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

SOLUCIÓN La circunferencia se muestra en la figura 7. Como D está en la circunferencia, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

Usando la ecuación estándar de una circunferencia con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$$

Si los términos se elevan al cuadrado y simplificamos la última ecuación, ésta puede escribirse como

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$$ ■

Al igual que en la solución del ejemplo 7, elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y simplificar lleva a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

FIGURA 7

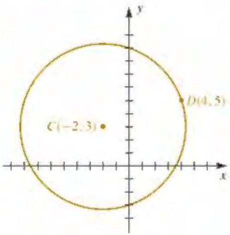
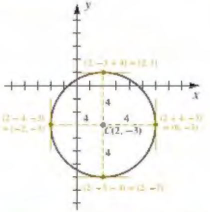
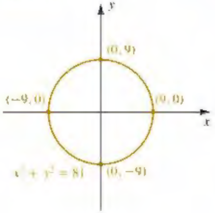


FIGURA 8



Recuerde que una ***recta tangente*** *a una circunferencia es aquella que contiene exactamente un punto de la circunferencia. Toda circunferencia tiene cuatro puntos de tangencia asociados con rectas horizontales y verticales. Es útil marcar estos puntos cuando se traza la gráfica de una circunferencia.*

FIGURA 9



donde a, b y C son números reales. Recíprocamente, si comenzamos con esta ecuación, siempre es posible, al *completar cuadrados*, obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d$$

Este método se ilustrará en el ejemplo 8. Si $d > 0$, la gráfica es una circunferencia con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$, la gráfica consta de sólo el punto (h, k). Por último, si $d < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales, y por lo tanto no hay gráfica.

EJEMPLO 8 **Cómo determinar el centro y el radio de una circunferencia**

Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y = 9$$

SOLUCIÓN Como es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, comenzamos con la división de la ecuación dada entre 3, para obtener

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$$

Ahora, reescribimos la ecuación como sigue, donde los espacios subrayados representan los números que habrán de determinarse:

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

Luego se completan los cuadrados para las expresiones entre paréntesis, teniendo cuidado de sumar los números apropiados a *ambos* lados de la ecuación. Para completar el cuadrado para una expresión de la forma $x^2 + ax$, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es, $(a/2)^2$) a ambos lados de la ecuación. Del mismo modo, para $y^2 + by$, sumamos $(b/2)^2$ a ambos lados. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Estas sumas llevan a

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9} \quad \text{completamos los cuadrados}$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16. \quad \text{ecuación equivalente}$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación estándar de una circunferencia, vemos que $h = 2$ y $k = -3$ y concluimos que la circunferencia tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$. Un dibujo de esta circunferencia se muestra en la figura 8. ■

En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una circunferencia, es decir, una **semicircunferencia**. El siguiente ejemplo indica cómo encontrar ecuaciones de semicircunferencias con centros en el origen.

EJEMPLO 9 **Cómo encontrar ecuaciones de semicircunferencia**

Encuentre ecuaciones para la mitad superior, la mitad inferior, la mitad derecha y la mitad izquierda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 81$.

SOLUCIÓN La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es una circunferencia de radio 9 con centro en el origen (vea la figura 9). Para encontrar ecuaciones para las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x:

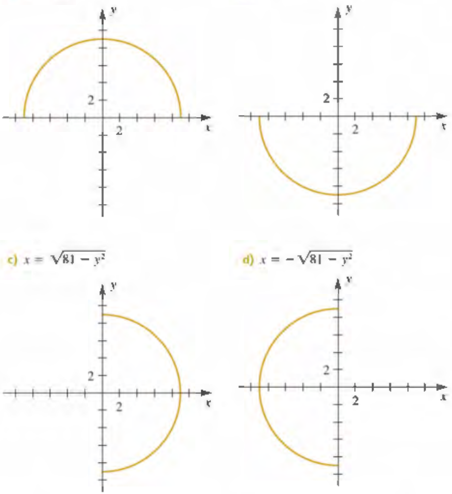
$$x^2 + y^2 = 81 \quad \text{dado}$$
$$y^2 = 81 - x^2 \quad \text{restamos } x^2$$
$$y = \pm\sqrt{81 - x^2} \quad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$

(continúa)

Como $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, deducimos que la mitad superior de la circunferencia tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa), como se ilustra en la figura 10 a) y b).

FIGURA 10

a) $y = \sqrt{81 - x^2}$ b) $y = -\sqrt{81 - x^2}$ c) $x = \sqrt{81 - y^2}$ d) $x = -\sqrt{81 - y^2}$



Del mismo modo, para encontrar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, despejamos x de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ en función de y, para obtener

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Como $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, deducimos que la mitad derecha de la circunferencia tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por la ecuación $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa), como se ilustra en la figura 10 c) y d). ■

En muchas aplicaciones es esencial encontrar los puntos en los que se intersecan en x y y las gráficas de dos ecuaciones. Para aproximar esos puntos de intersección con un dispositivo o herramienta de gráficas, suele ser necesario despejar y de cada ecuación en función de x. Por ejemplo, suponga que una ecuación es

$$4x^3 - 3x + 2y + 6 = 0$$

Al despejar y obtenemos

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3$$

La gráfica de la ecuación se encuentra entonces al realizar la asignación

$$Y_1 = -2x^2 + \tfrac{3}{2}x - 3$$

en el dispositivo de gráficas. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor y.) También despejamos y de la segunda ecuación en función de x y realizamos la asignación

$$Y_2 = \text{una expresión en } x$$

Al pulsar las teclas adecuadas, se obtienen dibujos de las gráficas, a las cuales se llamará gráficas de Y_1 y Y_2. Luego usamos una función de la calculadora graficadora, por ejemplo *intersect*, para estimar las coordenadas de los puntos de intersección.

En el siguiente ejemplo mostramos esta técnica para las gráficas de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 10 **Estimación de puntos de intersección de gráficas**

Use una calculadora graficadora para estimar los puntos de intersección de las gráficas de $y = x^2 - 3$ y $y = 2x - 1$.

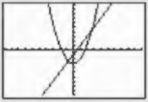
SOLUCIÓN

Realizar asignaciones de Y.

[Y=] [X,T,θ,n] [x^2] [−] 3 [ENTER]
2 [X,T,θ,n] [−] 1 [ENTER]

Cómo graficar en una ventana de visualización estándar.

[ZOOM] [6]

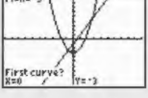


A partir de las gráficas de Y_1 y Y_2 observamos que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el tercer cuadrante. Encontraremos P_1.

Encuentre un punto de intersección.

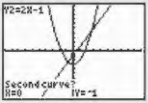
[2nd] [CALC] [5]

En respuesta a "First curve?", sólo oprima la tecla [ENTER] para indicar que Y_1 es la primera curva.

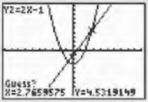


(continúa)

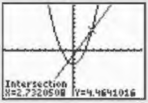
En respuesta a "Second curve?", sólo pulse ENTER para indicar que Y_2 es la segunda curva.



En respuesta a "Guess?", mueva el cursor cerca de P_1 y luego pulse la tecla ENTER.



Las coordenadas de P_1 se estiman como (2.73, 4.46). Luego usamos de nuevo la función intersect para obtener $(-0.73, -2.46)$ como coordenadas aproximadas de P_2.



Nota de calculadora: una respuesta alterna a "Guess?" es introducir una estimación del valor x del punto de intersección. La siguiente respuesta produce el mismo resultado que el anterior:

Guess? 3 ENTER

EJEMPLO 11 **Estimación de puntos de intersección de gráficas**

Use una calculadora graficadora para estimar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 4y = 12$.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 9, despejamos y en $x^2 + y^2 = 25$ en función de x para obtener

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2},$$

y realizamos las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad Y_2 = -Y_1$$

(A menudo asignamos Y_2 en función de Y_1 para evitar el tecleo repetitivo.)

La ecuación de la segunda circunferencia puede considerarse una ecuación cuadrática de la forma $ay^2 + by + c = 0$ en y al reacomodar los términos como sigue:

$$y^2 - 4y + (x^2 - 12) = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -4$ y $c = x^2 - 12$ ($x^2 - 12$ se considera el término constante, ya que no contiene una variable y) obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(x^2 - 12)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(x^2 - 12)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - (x^2 - 12)}}{2} = 2 \pm \sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

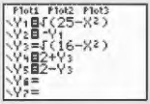
(No es necesario simplificar la ecuación más de lo que ya se ha hecho, pero la forma simplificada es más fácil de introducir en una calculadora graficadora.)

Ahora realizamos las asignaciones

$$Y_3 = \sqrt{16 - x^2}, \quad Y_4 = 2 + Y_3 \quad \text{y} \quad Y_5 = 2 - Y_3.$$

Hacer asignaciones de Y.

Y= 2nd √ 25 − X,T,θ,n x²) ▽ (−) VARS ▷ 1 1 ▽
2nd √ 16 − X,T,θ,n x²) ▽
2 + VARS ▷ 1 3 ▽
2 − VARS ▷ 1 3
△ (3 veces) ◁ ENTER

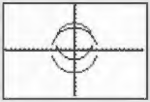


Desactivar Y_1.

Usaremos una ventana de visualización cuadrada, de modo que las circunferencias se vean como tales y no como óvalos.

Cómo graficar en una ventana de visualización rectangular.

ZOOM 5



A partir de las gráficas de las circunferencias, observamos que hay dos puntos de intersección: P_1 en el primer cuadrante y P_2 en el segundo. De nuevo, encontramos P_1.

Encontrar un punto de intersección.

2nd CALC 5

En respuesta a "First curve?", oprima la tecla ENTER para indicar que Y_1 es la primera curva. En respuesta a "Second curve?", oprima ▽ para saltarse Y_2 como la selección para la segunda curva, puesto que no interseca a Y_1. Ahora pulse ENTER para seleccionar Y_4 como la segunda curva. En respuesta a "Guess?", mueva el cursor cerca de P_1 y luego pulse ENTER o sólo escriba 3.5 para un cálculo y pulse ENTER.

Así, se estiman las coordenadas de P_1 como (3.8, 3.25). Como ambas circunferencias son simétricas respecto al eje y, P_2 es aproximadamente (−3.8, 3.25). ■

Debe observarse que las soluciones aproximadas encontradas en los ejemplos 10 y 11 no satisfacen las ecuaciones dadas, debido a la imprecisión de las estimaciones realizadas a partir de la gráfica. En un capítulo posterior explicaremos la forma de encontrar los valores *exactos* para los puntos de intersección.

2.2 Ejercicios

Ejer. 1–20: Trazar la gráfica de la ecuación y marcar las intersecciones en x y y.

1 $y = 2x - 3$

2 $y = 4x + 2$

3 $y = -x + 2$

4 $y = -2x - 3$

5 $y = -2x^2$

6 $y = \frac{1}{3}x^2$

7 $y = 2x^2 - 1$

8 $y = -x^2 + 2$

9 $x = \frac{1}{4}y^2$

10 $x = -2y^2$

11 $x = -y^2 + 5$

12 $x = 2y^2 - 4$

13 $y = -\frac{1}{4}x^3$

14 $y = \frac{1}{2}x^3$

15 $y = x^3 - 8$

16 $y = -x^3 + 1$

17 $y = \sqrt{x}$

18 $y = \sqrt{-x}$

19 $y = \sqrt{x} - 4$

20 $y = \sqrt{x - 4}$

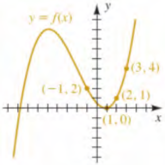
Ejer. 21–22: Use pruebas de simetría para determinar cuáles gráficas en los ejercicios indicados son simétricas respecto a a) el eje y, b) el eje x y c) el origen.

21 Los ejercicios con número impar de 1 a 20

22 Los ejercicios con número par de 1 a 20

Ejer. 23–34: Complete los enunciados.

23



a) Como $x \to -1^-, f(x) \to$ ____

b) Como $x \to 2^+, f(x) \to$ ____

c) Como $x \to 3, f(x) \to$ ____

d) Como $x \to \infty, f(x) \to$ ____

e) Como $x \to -\infty, f(x) \to$ ____

24

a) Como $x \to 2^-, f(x) \to$ ____

b) Como $x \to -1^+, f(x) \to$ ____

c) Como $x \to 0, f(x) \to$ ____

d) Como $x \to \infty, f(x) \to$ ____

e) Como $x \to -\infty, f(x) \to$ ____

Ejer. 25–36: Trace las gráficas de la circunferencia y la semicircunferencia.

25 $x^2 + y^2 = 11$

26 $x^2 + y^2 = 5$

27 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

28 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

29 $(x + 3)^2 + y^2 = 16$

30 $x^2 + (y - 2)^2 = 25$

31 $4x^2 + 4y^2 = 1$

32 $9x^2 + 9y^2 = 4$

33 $y = -\sqrt{16 - x^2}$

34 $y = \sqrt{4 - x^2}$

35 $x = \sqrt{9 - y^2}$

36 $x = -\sqrt{25 - y^2}$

Ejer. 37–48: Encuentre una ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones expresadas.

37 Centro $C(2, -3)$, radio 5

38 Centro $C(-5, 1)$, radio 3

39 Centro $C(\frac{1}{4}, 0)$, radio $\sqrt{5}$

40 Centro $C(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3})$, radio $3\sqrt{2}$

41 Centro $C(-4, 6)$, que pasa por el punto $P(3, 1)$

42 Centro en el origen, pasando por el punto $P(4, -7)$

43 Centro $C(-3, 6)$, tangente al eje y

44 Centro $C(4, -3)$, tangente al eje x

45 Tangente a ambos ejes, centro en el segundo cuadrante, radio 2

46 Tangente a ambos ejes, centro en el cuarto cuadrante, radio 3

47 Puntos extremos de un diámetro $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$

48 Puntos extremos de un diámetro $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$

Ejer. 49–58: Encuentre el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación dada.

49 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

50 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

51 $x^2 + y^2 + 4y - 7 = 0$

52 $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

53 $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$

54 $4x^2 + 4y^2 + 16x + 24y + 31 = 0$

55 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

56 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

57 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 21 = 0$

58 $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$

Ejer. 59–62: Encuentre ecuaciones para la mitad superior, la mitad inferior, la mitad derecha y la mitad izquierda de la circunferencia.

59 $x^2 + y^2 = 25$

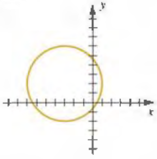
60 $(x + 3)^2 + y^2 = 64$

61 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$

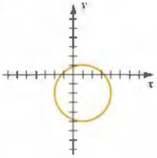
62 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

Ejer. 63–66: Encuentre una ecuación para la circunferencia o semicircunferencia.

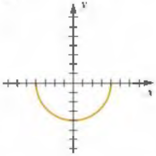
63



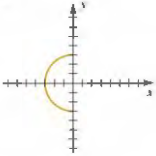
64



65



66



Ejer. 67–68: Determine si el punto P está dentro, fuera o sobre la circunferencia con centro C y radio r.

67 **a)** $P(2, 3)$, $C(4, 6)$, $r = 4$

b) $P(4, 2)$, $C(1, -2)$, $r = 5$

c) $P(-3, 5)$, $C(2, 1)$, $r = 6$

68 **a)** $P(3, 8)$, $C(-2, -4)$, $r = 13$

b) $P(-2, 5)$, $C(3, 7)$ $r = 6$

c) $P(1, -2)$, $C(6, -7)$, $r = 7$

Ejer. 69–70: Para la circunferencia dada, encuentre a) intersecciones en x y b) intersecciones en y.

69 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

70 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

71 Encuentre la ecuación de la circunferencia que es concéntrica (tiene el mismo centro) con $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y pasa por $P(2, 6)$.

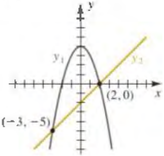
72 **Alcances de transmisores de radio** La señal de una estación de radio tiene un alcance circular de 50 millas. Una segunda estación de radio, situada a 100 millas al este y 80 al norte de la primera estación, tiene un alcance de 80 millas. ¿Hay lugares donde las señales de ambas estaciones de radio se puedan recibir? Explique su respuesta.

73 Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Dentro de esta circunferencia hay una circunferencia C_2 de radio 2 en el primer cuadrante que es tangente a C_1. La coordenada y del centro de C_2 es 2. Encuentre la coordenada x del centro de C_2.

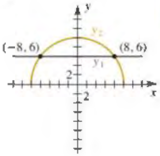
74 Una circunferencia C_1 de radio 5 tiene su centro en el origen. Fuera de esta circunferencia está una circunferencia de radio 2 en el primer cuadrante, que es tangente a C_1. La coordenada y del centro de C_2 es 3. Encuentre la coordenada x del centro de C_2.

Ejer. 75–78: Expresar, en forma de intervalo, los valores de x tales que $y_1 < y_2$. Suponga que todos los puntos de la intersección se muestran en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

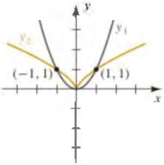
75



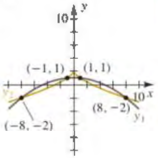
76



77



78



79 Grafique la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ usando las ecuaciones $Y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ y $Y_2 = -Y_1$ en la ventana de visualización dada. Luego, explique cómo afecta la ventana de visualización a la gráfica y determine la ventana de visualización que produzca la gráfica que más se parezca a una circunferencia.

1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ **2)** $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

3) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$ **4)** $[-5, 5]$ por $[-2, 2]$

80 Grafique la ecuación $|x| + |y| = 5$, usando las ecuaciones $Y_1 = 5 - |x|$ y $Y_2 = -Y_1$ en la ventana de visualización $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$.

a) Encuentre el número de intersecciones en x y y.

b) Use la gráfica para determinar la región donde $|x| + |y| < 5$.

Ejer. 81–82: Grafique la ecuación y estime las intersecciones en x.

81 $y = x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{43}{25}x + \frac{24}{25}$

82 $y = x^4 + 0.85x^3 - 2.46x^2 - 1.07x + 0.51$

Ejer. 83–86: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, y estime las coordenadas de sus puntos de intersección.

83 $y = x^3 + x$; $x^2 + y^2 = 1$

84 $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $x^2 + y^2 = 1$

85 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = 1$

86 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$; $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

87 **Distancia entre automóviles** La distancia D (en millas) entre dos automóviles que se encuentran en la misma carretera, en el tiempo t (en minutos), está descrita por la ecuación $D = |2t - 4|$ en el intervalo $[0, 4]$. Grafique D y describa el movimiento de los automóviles.

88 **Agua en una piscina** La cantidad de agua A en una piscina en el día x está dada por $A = 12{,}000x - 2000x^2$, donde A está en galones y $x = 0$ corresponde al mediodía de un domingo. Trace la gráfica de A en el intervalo $[0, 6]$ y describa la cantidad de agua en la piscina.

89 **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v en el aire varía con la temperatura. Puede calcularse en pies/s usando la ecuación $v = 1087\sqrt{\dfrac{T + 273}{273}}$, donde T es la temperatura (en °C).

a) Aproxime v cuando $T = 20$ °C.

b) Determine la temperatura al grado más cercano, tanto algebraica como gráficamente, cuando la velocidad del sonido es 1,000 pies/s.

90 El área A de un triángulo equilátero con un lado de longitud s es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Suponga que A debe ser igual a 100 pies² con un error de como máximo ± 1 pie². Determine gráficamente con qué precisión se debe medir s para satisfacer este requisito de error. (*Sugerencia:* grafica $y = A$, $y = 99$ y $y = 101$.)

2.3 Rectas

Uno de los conceptos básicos en geometría es el de una *recta*. En esta sección el análisis se restringirá a rectas que se encuentran en un plano de coordenadas, lo que permitirá usar métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de los principales objetivos pueden expresarse como sigue:

1) Dada una recta l en un plano de coordenadas, encontrar una ecuación cuya gráfica corresponda a l.

2) Dada una ecuación de la recta L en un plano de coordenadas, trazar la gráfica de la ecuación.

El siguiente concepto es fundamental para el estudio de las rectas.

Definición de pendiente de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos sobre l. La ***pendiente m*** de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente de l no está definida.

La letra griega Δ (delta) se usa en matemáticas para denotar "cambio en". Así, podemos pensar en la pendiente m como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}.$$

Los puntos típicos P_1 y P_2 sobre la recta l se muestran en la figura 1. El numerador $y_2 - y_1$ en la fórmula para m es el cambio vertical en la dirección de P_1 a P_2 y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador $x_2 - x_1$ es el cambio horizontal de P_1 a P_2, y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y si existe una pendiente. En la figura 1a) la pendiente es positiva, y se dice que la recta es *ascendente*. En la figura 1b) la pendiente es negativa, y la recta es *descendente*.

En el proceso para hallar la pendiente de una recta, no importa cuál punto se marque como P_1 y cuál como P_2 porque

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

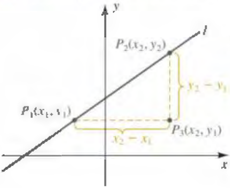
Si los puntos se marcan de modo que $x_1 < x_2$, como en la figura 1, entonces $x_2 - x_1 > 0$, y por lo tanto la pendiente es positiva, negativa o cero, en caso de que $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$ o $y_2 = y_1$, respectivamente.

La definición de pendiente no depende de los dos puntos que se escojan en l. Si se usan otros puntos $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$, entonces, como en la figura 2, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como las razones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

FIGURA 1

a) Pendiente positiva (la recta asciende)



b) Pendiente negativa (la recta desciende)

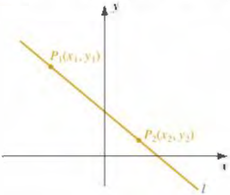
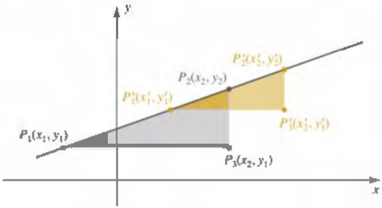


FIGURA 2



EJEMPLO 1 **Determinación de pendientes**

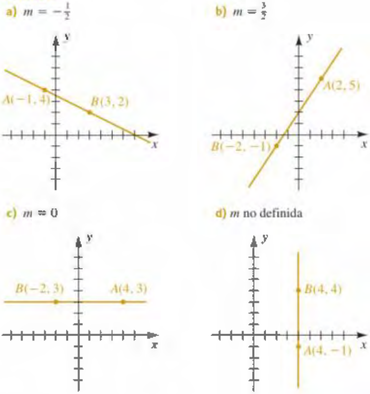
Trace la recta que pasa por cada par de puntos y encuentre su pendiente m:

a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ **b)** $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$

c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ **d)** $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

SOLUCIÓN Las rectas se trazan en la figura 3. Utilizamos la definición de pendiente para determinar la pendiente de cada recta.

FIGURA 3



a) $m = \dfrac{2-4}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

b) $m = \dfrac{5-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

c) $m = \dfrac{3-3}{-2-4} = \dfrac{0}{-6} = 0$

d) La pendiente no está definida porque la recta es paralela al eje y. Observe que si se usa la fórmula para m, el denominador es cero. ■

EJEMPLO 2 **Trazo de una recta con una pendiente determinada**

Trace la recta que pasa por $P(2, 1)$ que tiene

a) pendiente $\frac{5}{3}$ **b)** pendiente $-\frac{5}{3}$

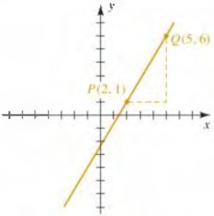
SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b y b es positiva, entonces por cada cambio de b unidades en la dirección horizontal positiva, la recta asciende o desciende $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa, respectivamente.

a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, se puede obtener otro punto sobre la recta iniciando en P y al moverse tres unidades a la derecha y cinco unidades *hacia arriba*. Esto da el punto $Q(5, 6)$, y la recta es determinada como en la figura 4a).

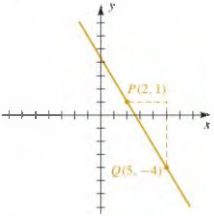
b) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = -\frac{5}{3}$, al desplazarse tres unidades a la derecha y cinco unidades *hacia abajo*, obtenemos la recta que pasa por $Q(5, -4)$, como en la figura 4b). ■

FIGURA 4

a) $m = \frac{5}{3}$

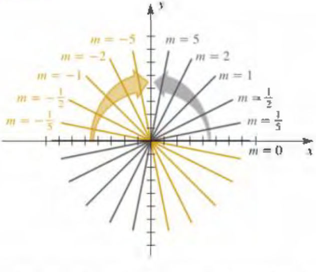


b) $m = -\frac{5}{3}$



El diagrama de la figura 5 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que se encuentra en el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si esta recta se hace girar alrededor de *O en sentido contrario a las manecillas del reloj* (como se indica con la flecha gris), la pendiente es positiva y aumenta, llegando al valor 1 cuando la recta biseca al primer cuadrante y continúa aumentando a medida que la recta se acerca al eje y. Si dicha recta con pendiente $m = 0$ se hace girar *en el sentido de las manecillas del reloj* (como se indica con la flecha color naranja), la pendiente es negativa, llegando al valor -1 cuando la recta biseca al segundo cuadrante, y se hace grande y negativa a medida que la recta se acerca al eje y.

FIGURA 5



Las rectas que son horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, como se indica en la siguiente tabla.

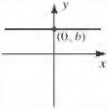
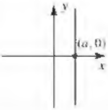
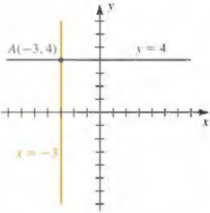
Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación	Pendiente
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$ la intersección en y es b	La pendiente es 0
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$ la intersección en x es a	La pendiente no está definida

FIGURA 6



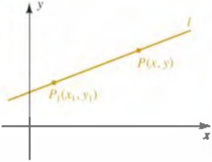
Un error común es considerar la gráfica de $y = b$ como si sólo consistiera de un punto $(0, b)$. Si se expresa la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, vemos que el valor x es irrelevante; así, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para *toda* x y por lo tanto es una recta horizontal. Del mismo modo, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y), donde y es un número real.

EJEMPLO 3 **Cómo determinar ecuaciones de rectas horizontales y verticales**

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 4)$ que sea paralela a
a) el eje x **b)** el eje y

SOLUCIÓN Las dos rectas están trazadas en la figura 6. Como se indicó en la tabla anterior, las ecuaciones son $y = 4$ para el inciso a) y $x = -3$ para el inciso b). ■

FIGURA 7



A continuación se buscará la ecuación de una recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m. Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$ (vea la figura 7), entonces P está en l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Note que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación y, por lo tanto, los puntos en l son precisamente los puntos que corresponden a las soluciones. Esta ecuación para l se conoce como **forma punto-pendiente**.

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Una ecuación para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La forma punto-pendiente es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay numerosas ecuaciones equivalentes. A veces se simplifica la ecuación obtenida usando la forma punto-pendiente para

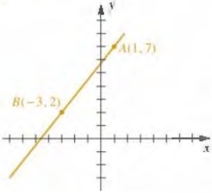
$$ax + by = c \qquad \text{o} \qquad ax + by + d = 0$$

donde a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$

EJEMPLO 4 **Cómo determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La recta se muestra en la figura 8. La fórmula para la pendiente m da

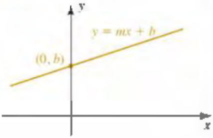
$$m = \frac{7-2}{1-(-3)} = \frac{5}{4}$$

Las coordenadas de A o de B se pueden usar para (x_1, y_1) en la forma punto pendiente. Al usar $A(1, 7)$ obtenemos

$$\begin{aligned} y - 7 &= \tfrac{5}{4}(x-1) && \text{forma punto pendiente} \\ 4(y-7) &= 5(x-1) && \text{multiplicamos por 4} \\ 4y - 28 &= 5x - 5 && \text{multiplicamos los factores} \\ -5x + 4y &= 23 && \text{restamos } 5x \text{ y se suma 28} \\ 5x - 4y &= -23 && \text{multiplicamos por } -1 \end{aligned}$$

La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$. ■

FIGURA 9



La forma punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la intersección en y de la gráfica, como se indica en la figura 9. Como la ecuación $y = mx + b$ muestra la pendiente m y la intersección b en y sobre l, se le llama **forma pendiente ordenada al origen** de la ecuación de una recta. Por el contrario, si se comienza con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0)$$

Al comparar esta ecuación con la forma punto pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$. Se ha demostrado el siguiente resultado.

Forma pendiente ordenada al origen de la ecuación de una recta	La gráfica de $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m e intersección con el eje y en b.

EJEMPLO 5 **Expresión de una ecuación en la forma pendiente ordenada al origen**

Exprese la ecuación $2x - 5y = 8$ en la forma pendiente ordenada al origen.

SOLUCIÓN El objetivo es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Podemos proceder como sigue:

$$
\begin{aligned}
2x - 5y &= 8 && \text{ecuación}\\
-5y &= -2x + 8 && \text{restamos } 2x\\
y &= \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) && \text{dividimos entre } -5\\
y &= \tfrac{2}{5}x + \left(-\tfrac{8}{5}\right) && \text{ecuación equivalente}
\end{aligned}
$$

La última ecuación es la forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ e intersección con el eje y de $b = -\frac{8}{5}$. ■

De la forma punto pendiente se deduce que toda recta es la gráfica de una ecuación

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son números reales y a y b son ambos diferentes de cero. A esta ecuación se le llama **ecuación lineal** en x y y. En cambio, se demostrará, que la gráfica de $ax + by = c$, con a y b diferentes de cero ambas, es siempre una recta. Si $b \neq 0$, se puede despejar y y obtener

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b}$$

que, por la forma pendiente ordenada al origen, es una ecuación de una recta con pendiente $-a/b$ e intersección c/b en y. Si $b = 0$ pero $a \neq 0$, podemos despejar x, obteniendo $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con intersección c/a en x. Esta discusión establece el siguiente resultado.

Forma general de la ecuación de una recta	La gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y, recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para mayor sencillez, usemos la terminología *la recta* $ax + by = c$ en vez de *la recta con ecuación* $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una ecuación lineal**

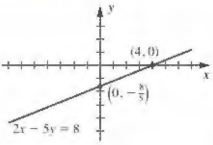
Trace la gráfica de $2x - 5y = 8$.

SOLUCIÓN Sabemos que la gráfica es una recta, y que es suficiente determinar dos puntos en la gráfica. Se encontrarán los puntos de intersección con los ejes x y y al sustituir $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada, $2x - 5y = 8$.

intersección en x: Si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o $x = 4$

intersección en y: Si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o $y = -\frac{8}{5}$

FIGURA 10

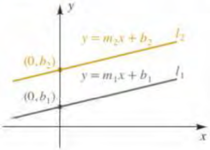


Al marcar los puntos $(4, 0)$ y $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$ y trazar la recta que pase por ellos obtenemos la gráfica de la figura 10. ■

El siguiente teorema especifica la relación entre **rectas paralelas** (rectas en un plano que no se intersecan) y pendiente.

Teorema de pendientes de rectas paralelas	Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

FIGURA 11



DEMOSTRACIÓN Sean l_1 y l_2 rectas distintas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Si las intersecciones en y son b_1 y b_2 (vea la figura 11), entonces, por la forma pendiente ordenada al origen, las rectas tienen ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2$$

Las rectas se intersecan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores y son iguales para alguna x, es decir, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

o bien,
$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$$

De la última ecuación se puede despejar x si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se intersecan si y sólo si $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, *no* se intersecan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$. ■

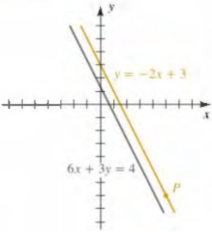
EJEMPLO 7 **Cómo encontrar la ecuación de una recta paralela a una recta dada**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Primero se expresa la ecuación dada en la forma pendiente ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 4 && \text{dado} \\ 3y &= -6x + 4 && \text{restamos } 6x \\ y &= -2x + \tfrac{4}{3} && \text{dividimos entre 3} \end{aligned}$$

FIGURA 12



La última ecuación está en la forma pendiente ordenada al origen, $y = mx + b$, con pendiente $m = -2$ e intersección con el eje y en $\frac{4}{3}$. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2. Usando el punto $P(5, -7)$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -2(x - 5) && \text{forma ordenada al origen} \\ y + 7 &= -2x + 10 && \text{simplificamos} \\ y &= -2x + 3 && \text{restamos 7} \end{aligned}$$

La última ecuación está en la forma pendiente ordenada al origen y muestra que la recta paralela que se ha encontrado tiene intersección y en 3. Esta recta y la recta dada se muestran en la figura 12.

Como solución alterna, podríamos usar el hecho de que las rectas de la forma $6x + 3y = k$ tienen la misma pendiente que la recta dada y, por lo tanto, son paralelas a ella. Al sustituir $x = 5$ y $y = -7$ en la ecuación $6x + 3y = k$ obtenemos $6(5) + 3(-7) = k$ o bien, lo que es equivalente, $k = 9$. La ecuación $6x + 3y = 9$ es equivalente a $y = -2x + 3$. ■

Si las pendientes de dos rectas no verticales no son iguales, entonces las rectas no son paralelas y se intersecan exactamente en un punto.

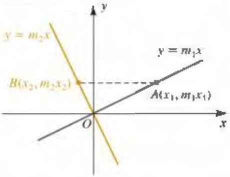
El siguiente teorema proporciona información acerca de **rectas perpendiculares** (rectas que se cruzan formando un ángulo recto).

Teorema de las pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1$$

FIGURA 13



DEMOSTRACIÓN Para mayor sencillez, considere el caso especial de dos rectas que se intersecan en el origen O, como se ilustra en la figura 13. Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Si, como en la figura, escogemos los puntos $A(x_1, m_1x_1)$ y $B(x_2, m_2x_2)$ diferentes de O en las rectas, entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Por el teorema de Pitágoras, sabemos que el ángulo AOB es un ángulo recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

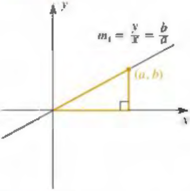
Elevar al cuadrado, simplificar y factorizar los términos da

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$
$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0$$

Como x_1 y x_2 no son cero, se pueden dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, obteniendo $m_1m_2 + 1 = 0$. Así, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

El mismo tipo de prueba puede hacerse si las rectas se intersecan en *cualquier* punto (a, b). ■

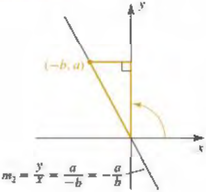
FIGURA 14



Una forma cómoda de recordar las condiciones sobre las pendientes de rectas perpendiculares es notar que m_1 y m_2 deben ser *el negativo del recíproco* entre sí, es decir, $m_1 = -1/m_2$ y $m_2 = -1/m_1$.

Se puede visualizar el resultado del último teorema como sigue. Trace un triángulo como en la figura 14; la recta que contiene su hipotenusa tiene pendiente $m_1 = b/a$. Ahora haga girar 90°el triángulo, como en la figura 15. La recta ahora tiene pendiente $m_2 = a/(-b)$, que es el negativo del recíproco de m_1.

FIGURA 15



EJEMPLO 8 **Cómo encontrar la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada**

Encuentre la forma pendiente ordenada al origen para la recta que pasa por $P(5, -7)$, que es perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 7 consideramos la recta $6x + 3y = 4$ y encontramos que su pendiente es -2. Por consiguiente, la pendiente de la recta requerida es el negativo del recíproco $-[1/(-2)]$, o $\frac{1}{2}$. El uso de $P(5, -7)$ da lo siguiente:

$$y - (-7) = \tfrac{1}{2}(x - 5) \quad \text{forma punto pendiente}$$
$$y + 7 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2} \quad \text{simplificamos}$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{19}{2} \quad \text{escribimos en la forma pendiente ordenada al origen}$$

FIGURA 16

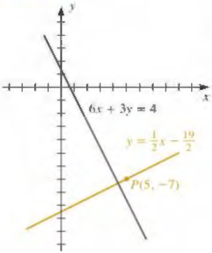
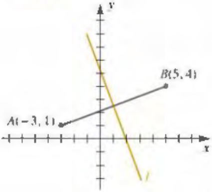


FIGURA 17



La última ecuación está en la forma pendiente ordenada al origen y muestra que la recta perpendicular tiene intersección con el eje y en $-\frac{19}{2}$. Esta recta y la recta dada se trazan en la figura 16.

EJEMPLO 9 **Cómo encontrar la ecuación de una mediatriz**

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encuentre la forma general de la mediatriz l del segmento de recta AB.

SOLUCIÓN El segmento de recta AB y su mediatriz l se muestran en la figura 17. Calculamos lo siguiente, donde M es el punto medio de AB:

Coordenadas de M:	$\left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$	fórmula del punto medio
Pendiente de AB:	$\dfrac{4-1}{5-(-3)} = \dfrac{3}{8}$	fórmula de la pendiente
Pendiente de l:	$-\dfrac{1}{\frac{3}{8}} = -\dfrac{8}{3}$	negativo recíproco de $\frac{3}{8}$

Al usar el punto $M(1, \frac{5}{2})$ y la pendiente $-\frac{8}{3}$ se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes de l:

$y - \frac{5}{2} = -\frac{8}{3}(x-1)$	forma punto pendiente
$6y - 15 = -16(x-1)$	multiplicamos por el mcd, 6
$6y - 15 = -16x + 16$	multiplicamos
$16x + 6y = 31$	escribimos en forma general

Dos variables x y y están **relacionadas linealmente** si $y = ax + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas aplicados. El siguiente ejemplo proporciona una ilustración.

EJEMPLO 10 **Cómo relacionar la temperatura del aire con la altitud**

La relación entre la temperatura del aire T (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar) es aproximadamente lineal para $0 \leq h \leq 20{,}000$. Si la temperatura al nivel del mar es 60 °F, un aumento de 5,000 pies en altitud reduce la temperatura del aire alrededor de 18 °F.

a) Exprese T en términos de h y trace la gráfica en un sistema de coordenadas hT.

b) Aproxime la temperatura del aire a una altitud de 15,000 pies.

c) Aproxime la altitud a la que la temperatura sea 0°.

SOLUCIÓN

a) Si T está linealmente relacionada con h, entonces

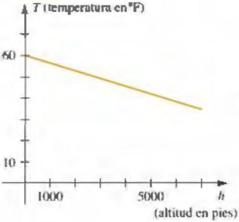
$$T = ah + b$$

para algunas constantes a y b (a representa la pendiente y b la intersección en T). Como $T = 60°$ cuando $h = 0$ ft (nivel del mar), la intersección en T es 60, y la temperatura T para $0 \leq h \leq 20{,}000$ está dada por

$$T = ah + 60$$

(continúa)

FIGURA 18



De los datos dados, observamos que cuando la altitud $h = 5000$ ft, la temperatura $T = 60° - 18° = 42°$. En consecuencia, se puede determinar a como sigue:

$$42 = a(5000) + 60 \qquad \text{sea } T = 42 \text{ y } h = 5000$$
$$a = \frac{42 - 60}{5000} = -\frac{9}{2500} \qquad \text{despejamos } a$$

Al sustituir para a en $T = ah + 60$ nos da la fórmula siguiente para T:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60$$

La gráfica aparece en la figura 18, con diferentes escalas en los ejes.

b) Usando la última fórmula para T obtenida en el inciso a), encontramos que la temperatura (en °F) cuando $h = 15{,}000$ es

$$T = -\tfrac{9}{2500}(15{,}000) + 60 = -54 + 60 = 6$$

c) Para determinar la altitud h que corresponde a $T = 0°$, se procede como sigue:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{del inciso a)}$$
$$0 = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{sea } T = 0$$
$$\tfrac{9}{2500}h = 60 \qquad \text{sumamos } \tfrac{9}{2500}h$$
$$h = 60 \cdot \tfrac{2500}{9} \qquad \text{multiplicamos por } \tfrac{2500}{9}$$
$$h = \frac{50{,}000}{3} \approx 16{,}667 \text{ ft} \qquad \text{simplificamos y aproximamos}$$

■

Un **modelo matemático** es una descripción matemática de un problema. Para nuestros fines, estas descripciones serán gráficas y ecuaciones. En el último ejemplo, la ecuación $T = -\frac{9}{2500}h + 60$ *modela* la relación entre temperatura del aire y altitud.

En el siguiente ejemplo se encuentra un modelo de la forma $y = mx + b$, llamada *recta de regresión lineal*. Esta recta se puede considerar como *la recta de mejor ajuste*, es decir, la única recta que describe mejor el comportamiento de los datos.

EJEMPLO 11 **Cómo encontrar la recta de mejor ajuste**

a) Encuentre la recta de mejor ajuste que aproxime los datos siguientes sobre tiempos de récord mundial para carreras de 100 metros planos para mujeres.

Año (x)	Corredora	Tiempo en segundos (y)
1952	Marjorie Jackson	11.4
1960	Wilma Rudolph	11.3
1972	Renate Stecher	11.07
1984	Evelyn Ashford	10.76

b) Grafique los datos y la recta de regresión.

c) En 1968, Wyomia Tyus tenía el récord en 11.08 segundos. ¿Qué tiempo pronostica el modelo para 1968? Esta pregunta requiere **interpolación**, ya que se debe estimar un valor entre valores conocidos. ¿Qué tiempo predice el modelo para 1988? Esta pregunta requiere **extrapolación**, porque se debe estimar un valor fuera de valores conocidos.

d) Interprete la pendiente de la recta.

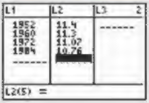
SOLUCIÓN

Introducir datos.

a) Ingrese los años en L1 y los tiempos en L2.

Borre en este momento todas las asignaciones de Y y las listas. Una lista se puede borrar al colocar el cursor en el nombre de la lista y pulsar las teclas CLEAR y ∇.

STAT 1 1952 ENTER
1960 ENTER 1972 ENTER 1984 ENTER
△ (4 veces) ▷ 11.4 ENTER
11.3 ENTER 11.07 ENTER 10.76 ENTER



Encontrar la recta de mejor ajuste (la ecuación de regresión) y guardarla en Y_1.

STAT ▷ 4
VARS ▷ 1 1 ENTER

En la pantalla vemos que la recta de mejor ajuste tiene la ecuación (aproximada) $y = -0.02x + 50.71$. En la calculadora TI−83/4 Plus, para ver los valores para r^2 y r ejecute la instrucción DiagnosticOn de CATALOG.

b)

Activar STAT PLOT 1.

2nd STAT PLOT 1 ENTER

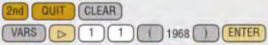
Graficar los datos en la recta de regresión.

ZOOM 9

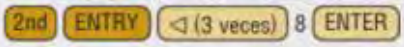
(*continúa*)

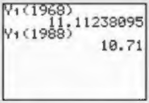
c)

Determinar Y_1(1968).



Determinar Y_1(1988).





Del modelo, obtenemos una estimación de 11.11 segundos para 1968; el tiempo real fue 11.08 segundos. Para $x = 1988$, obtenemos $y = 10.71$. En 1988, Florence Griffith-Joyner rompió el récord mundial con un tiempo de 10.49 segundos (récord que aún mantiene), un tiempo mucho menor que esa predicción.

d) La pendiente de la recta de regresión es alrededor de -0.02, lo cual indica que el tiempo de récord mundial está decreciendo 0.02 segundos por año.

2.3 Ejercicios

Ejer. 1–6: Trace la recta que pasa por A y B y encuentre su pendiente m.

1 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$ **2** $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$

3 $A(3, 4)$, $B(-6, 4)$ **4** $A(4, -3)$, $B(4, 2)$

5 $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$ **6** $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejer. 7–10: Use pendientes para demostrar que los puntos son vértices del polígono especificado.

7 $A(-2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(4, 0)$, $D(-4, -2)$; paralelogramo

8 $A(0, 3)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -6)$, $D(-8, 2)$; trapecio

9 $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

10 $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11 Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$, encuentre el cuarto vértice.

12 Los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ denotan los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejer. 13–14: Trace la gráfica de $y = mx$ para los valores dados de m.

13 $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$ **14** $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

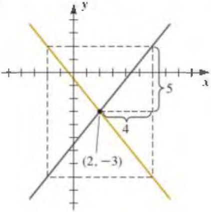
Ejer. 15–16: Trace la gráfica de la recta que pasa por P para cada valor de m.

15 $P(3, 1)$; $m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

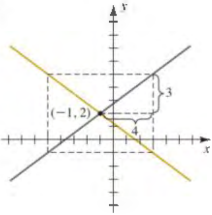
16 $P(-2, 4)$; $m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejer. 17-18: Escriba las ecuaciones de las rectas.

17



18



Ejer. 19−20: Trace las gráficas de las rectas en el mismo plano de coordenadas.

19 $y = x + 3$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$

20 $y = -2x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejer. 21−32: Encuentre la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto A que satisfaga la condición dada.

21 $A(3, -1)$

a) paralelo al eje y

b) perpendicular al eje y

22 $A(-4, 2)$

a) paralelo al eje x

b) perpendicular al eje x

23 $A(5, -3)$; pendiente -4

24 $A(-1, 4)$; pendiente $\frac{2}{3}$

25 $A(4, 1)$; pendiente $-\frac{1}{3}$

26 $A(0, -2)$; pendiente 5

27 $A(4, -5)$; que pase por $B(-3, 6)$

28 $A(-1, 6)$; intersección 5 en x

29 $A(3, -1)$; paralelo a la recta $5x - 2y = 4$

30 $A(-3, 5)$; paralelo a la recta $x + 3y = 1$

31 $A(7, -3)$; perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

32 $A(5, 4)$; perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejer. 33−36: Encuentre la forma pendiente ordenada al origen de la recta que satisface las condiciones dadas.

33 Intersección 4 en x, intersección -3 en y

34 Intersección -6 en x, intersección -1 en y

35 Que pase por los puntos $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

36 Que pase por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, 7)$

Ejer. 37−38: Encuentre la forma general de la ecuación para la mediatriz del segmento AB.

37 $A(3, -1)$, $B(-2, 6)$

38 $A(4, 2)$, $B(-2, -6)$

Ejer. 39−40: Encuentre una ecuación para la recta que biseca los cuadrantes dados.

39 II y IV

40 I y III

Ejer. 41−44: Use la forma pendiente ordenada al origen para encontrar la pendiente y la intersección en y de la recta dada y trace su gráfica.

41 $2x = 15 - 3y$

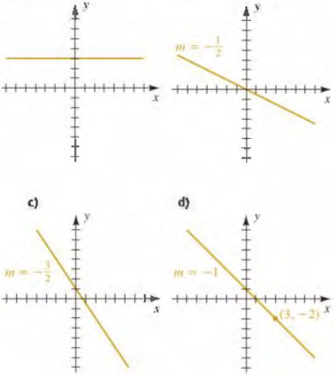
42 $7x = -4y - 8$

43 $4x - 3y = 9$

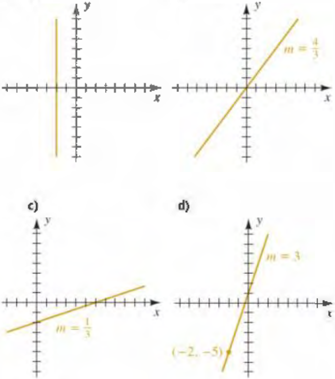
44 $x - 5y = -15$

Ejer. 45−46: Encuentre la ecuación de la recta que se muestra en la figura.

45 **a)** **b)**



46 **a)** **b)**



Ejer. 47–48: Si una recta l tiene puntos de intersección a y b con los ejes x y y, respectivamente, entonces su *forma canónica* o *simétrica* (puntos de intersección) es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Encuentre la forma canónica para la recta dada.

47 $4x - 2y = 6$

48 $x - 3y = -2$

49 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(3, -2)$ y es tangente a la recta $y = 5$.

50 Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3, 4)$.

51 **Crecimiento fetal** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de edad se puede aproximar con la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L es la longitud (en centímetros) y t la edad (en semanas). La longitud prenatal se puede determinar por ultrasonido. Aproxime la edad de un feto cuya longitud es de 28 centímetros.

52 **Estimación de salinidad** La salinidad del océano se refiere a la cantidad de sales minerales disueltas que se encuentra en una muestra de agua de mar. La salinidad S se puede estimar a partir de la cantidad C de cloruro en agua de mar usando la fórmula $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C se miden por peso en partes por millón. Aproxime C si S es 0.35.

53 **Peso de una ballena jorobada** El peso esperado W (en toneladas) de una ballena jorobada se puede aproximar por su longitud L (en pies) con la fórmula $W = 1.70L - 42.8$ para $30 \leq L \leq 50$.

a) Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.

b) Si el error al estimar la longitud pudiera ser de hasta dos pies, ¿cuál es el error correspondiente para el peso estimado?

54 **Crecimiento de una ballena azul** Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 24 pies de largo y pesan tres toneladas. Las ballenas jóvenes son amamantadas durante siete meses y, llegado el tiempo de destete, suelen medir 53 pies de largo y pesar 23 toneladas. Sean L y W la longitud (en pies) y el peso (en toneladas), respectivamente, de una ballena que tiene t meses de edad.

a) Si L y t se relacionan linealmente, exprese L en función de t.

b) ¿Cuál es el incremento diario en el tamaño de un ballenato? (Considere un mes = 30 días.)

c) Si W y t se relacionan linealmente, exprese W en función de t.

d) ¿Cuál es el incremento diario en el peso del ballenato?

55 **Estadísticas de béisbol** Suponga que un jugador de béisbol de las Grandes Ligas ha conectado 15 cuadrangulares en los primeros 14 juegos y mantiene este paso en toda la temporada de 162 juegos.

a) Exprese el número y de cuadrangulares en función del número x de juegos jugados.

b) ¿Cuántos cuadrangulares conectará el jugador en la temporada?

56 **Producción de queso** Un fabricante de queso produce 18,000 libras de queso del 1 de enero al 24 de marzo. Suponga que este ritmo de producción continúa durante el resto del año.

a) Exprese el número y de libras de queso producidas en función del número x del día en un año de 365 días.

b) Prediga, a la libra más cercana, el número de libras producidas para el año.

57 **Peso en la infancia** Un bebé pesa 10 libras al nacer, y tres años más tarde el peso del niño es de 30 libras. Suponga que el peso W (en libras) en la infancia está linealmente relacionado con la edad t (en años).

a) Exprese W en términos de t.

b) ¿Cuál es el valor de W en el sexto cumpleaños del niño?

c) ¿A qué edad pesará el niño 70 libras?

d) Trace, en un plano tW, una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \leq t \leq 12$.

58 **Pago de un préstamo** Un estudiante universitario recibe de un familiar un préstamo sin intereses de \$8,250. Pagará \$125 al mes hasta liquidar el préstamo.

a) Exprese la cantidad P (en dólares) pendiente de pago en función del tiempo t (en meses).

b) ¿Después de cuántos meses el estudiante deberá \$5,000?

c) Trace en un Plano tP una gráfica que muestre la relación entre P y t para la duración del préstamo.

59 **Vaporización de agua** La cantidad de calor H (en joules) necesaria para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura T (en °C) de la atmósfera. A 10 °C esta conversión requiere 2,480 joules, y cada aumento en temperatura de 15 °C disminuye la cantidad de calor necesaria 40 joules. Exprese H en términos de t.

60 **Potencia aeróbica** En fisiología del ejercicio, la potencia aeróbica P se define en términos de máxima inhalación de oxígeno. Para altitudes de hasta 1,800 metros, la potencia aeróbica es óptima, es decir, 100%. A más de 1,800 metros, P disminuye linealmente desde el máximo de 100% a un valor cercano a 40% a 5,000 metros.

a) Exprese la potencia aeróbica P en términos de la altitud h (en metros) para $1,800 \leq h \leq 5,000$.

b) Estime la potencia aeróbica en la Ciudad de México (altitud: 2,200 metros), sede de los Juegos Olímpicos de 1968.

61 **Isla de calor urbano** El fenómeno de una isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura fue de 13.5 °C en 1915, y desde entonces ha aumentado 0.032 °C por año.

a) Suponiendo que la temperatura T (en °C) está linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que $t = 0$ corresponde a 1915, exprese T en términos de t.

b) Prediga el promedio de temperatura en el año 2020.

62 **Aumento de la temperatura del suelo** En 1870, el promedio de temperatura del suelo en París fue de 11.8 °C. Desde entonces, ha subido a un ritmo casi constante, llegando a 13.5 °C en 1969.

a) Exprese la temperatura T (en °C) en función del tiempo t (en años), donde $t = 0$ corresponde al año 1870 y $0 \leq t \leq 99$.

b) ¿Durante qué año el promedio de temperatura del suelo fue de 12.5 °C?

63 **Gastos en un negocio** El propietario de una franquicia de helados debe pagar a la empresa matriz $1,000 por mes más 5% de los ingresos mensuales R. El costo de operación de la franquicia incluye un costo fijo de $2,600 por mes por conceptos como utilidades y mano de obra. El costo de helados y abastecimientos es de 50% de los ingresos.

a) Exprese el gasto mensual E del propietario en términos de R.

b) Exprese la utilidad mensual P en términos de R.

c) Determine el ingreso mensual necesario para no perder ni ganar.

64 **Dosis de medicamento** Los productos farmacéuticos deben especificar la dosis recomendada para adultos y niños. Dos fórmulas para modificar los niveles de medicamento para adultos y niños son

$$\text{Regla de Cowling: } y = \tfrac{1}{24}(t + 1)a$$

y

$$\text{Regla de Friend: } y = \tfrac{2}{25}ta,$$

donde a denota la dosis de adulto (en miligramos) y t la edad del niño (en años).

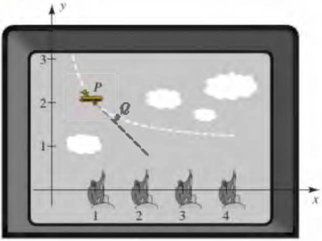
a) Si $a = 100$, trace la gráfica de las dos ecuaciones lineales en el mismo plano de coordenadas para $0 \leq t \leq 12$.

b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

65 **Videojuego** En el videojuego que se muestra en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria dada por $y = 1 + (1/x)$ y dispara balas en la dirección tangente a gorilas colocados a lo largo del eje x en $x = 1, 2, 3, 4$.

Mediante un cálculo, la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en $P(1, 2)$ es $m = -1$ y en $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$ es $m = -\frac{4}{9}$.

EJERCICIO 65



Determine si un gorila será blanco de balas cuando el avión esté en

a) P **b)** Q

66 **Escalas de temperatura** La relación entre las lecturas de temperatura F en la escala Fahrenheit y C en la escala Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a) Encuentre la temperatura a la que la lectura sea igual en ambas escalas.

b) ¿Cuándo la lectura Fahrenheit es el doble de la Celsius?

67 **Cortante vertical del viento** Una cortante vertical del viento se presenta cuando la velocidad del viento varía a diferentes alturas sobre el suelo. Dicha cortante es de gran importancia para pilotos durante despegues y aterrizajes. Si la velocidad del viento es v_1 a una altura h_1 y v_2 a una altura h_2, entonces el promedio de la cortante de viento s está dado por la fórmula de la pendiente

$$s = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1}.$$

Si la velocidad del viento al nivel del suelo es 22 mi/h y se ha determinado que s es 0.07, encuentre la velocidad del viento a 185 pies sobre el suelo.

68 **Cortante vertical del viento** En el estudio de la cortante vertical del viento, a veces se usa la fórmula

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^P$$

donde P es una variable que depende del terreno y estructuras cerca del nivel del suelo. En Montreal se determinó que el promedio de valor diurno para P con vientos del norte de alrededor de 29 mi/h es 0.13. Si un viento del norte a 32 mi/h se mide a 20 pies sobre el suelo, aproxime el promedio de la cortante de viento (vea el ejercicio 67) entre 20 y 200 pies.

Ejer. 69–70: Los puntos dados se encontraron usando métodos empíricos. Determine si se encuentran en la misma recta $y = ax + b$ y, si es así, encuentre los valores de a y b.

69 $A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$, $C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$

70 $A(-0.22, 1.6968)$, $B(-0.12, 1.6528)$, $C(1.3, 1.028)$, $D(1.45, 0.862)$

Ejer. 71–72: Trace la gráfica de las rectas en el mismo plano de coordenadas y encuentre las coordenadas de los puntos de intersección (las coordenadas son enteros.)

71 $x - 3y = -58$; $3x - y = -70$

72 $x + 10y = 123$; $2x - y = -6$

Ejer. 73–74: Grafique las rectas en el mismo plano de coordenadas y encuentre las coordenadas de los puntos de intersección. Identifique el polígono determinado por las rectas.

73 $2x - y = -1$; $x + 2y = -2$; $3x + y = 11$

74 $10x - 42y = -7.14$; $8.4x + 2y = -3.8$; $0.5x - 2.1y = 2.73$; $16.8x + 4y = 14$

Ejer. 75–76: Para la tabla de datos, determine una recta en la forma $y = ax + b$ que modele aproximadamente los datos. Trace la recta junto con los datos sobre los mismos ejes de coordenadas. ***Nota:*** **para ejercicios que requieran un modelo aproximado, las respuestas pueden variar dependiendo de los puntos de datos seleccionados.**

75

x	y
0.6	1.3
1.8	3.3
3	6.2
4.6	8.5

76

x	y
0.4	2.88
2.2	1.88
3.6	1.12
4.4	0.68

77 **Registro de distancias en salto triple** Las distancias de registro mundial (en metros) para el salto triple se muestran en la tabla.

Año	Distancia
1911	15.52
1932	15.72
1955	16.56
1975	17.89
1995	18.29

a) Grafique los datos.

b) Encuentre una recta de la forma $D = aY + b$ que aproxime estos datos, donde D es la distancia y Y el año. Grafique esta recta junto con los datos en los mismos ejes de coordenadas.

c) Use la recta para pronosticar la distancia récord en 1985 y compárela con el récord actual de 17.97 metros.

d) Interprete la pendiente de esta recta.

78 **Tiempos récord en la milla** Los récord mundiales en tiempo (en segundos) para la carrera de una milla aparecen en la tabla.

Año	Tiempo
1913	254.4
1934	246.8
1954	238.0
1975	229.4
1999	223.1

a) Grafique los datos.

b) Encuentre una recta de la forma $T = aY + b$ que aproxime estos datos, donde T es el tiempo y Y el año. Grafique esta recta junto con los datos en los mismos ejes de coordenadas.

c) Use la recta para pronosticar el tiempo récord en 1985 y compárela con el récord actual de 226.3 segundos.

d) Interprete la pendiente de esta recta.

2.4 Definición de función

La noción de **correspondencia** se presenta con frecuencia en nuestra vida cotidiana. Algunos ejemplos se dan a continuación.

EJEMPLO **Correspondencia**

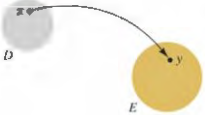
- A cada libro de una biblioteca le corresponde el número de páginas en el libro.
- A cada ser humano corresponde una fecha de nacimiento.

- Si la temperatura del aire se registra durante todo el día, entonces a cada instante le corresponde una temperatura.

Cada correspondencia en los ejemplos anteriores comprende dos conjuntos, D y E. En el primer ejemplo, D denota el conjunto de libros de una biblioteca y E el conjunto de enteros positivos. A cada libro x en D le corresponde un entero positivo y en E, es decir, el número de páginas del libro.

A veces las correspondencias se describen por medio de diagramas del tipo que se muestra en la figura 1, donde los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de regiones en un plano. La flecha curvada indica que el elemento y de E corresponde al elemento x de D. Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. En realidad, con frecuencia se tiene $D = E$. Es importante observar que *a cada x en D corresponde exactamente una y en E*, pero el mismo elemento de E puede corresponder a elementos distintos de D. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener la misma fecha de cumpleaños y la temperatura puede ser igual a diferentes horas.

FIGURA 1



En casi todo el libro, D y E serán conjuntos de números. Para ilustrar, D y E denotarán al conjunto $\mathbb{R}$ de números reales y a cada número real x se le asignará su cuadrado x^2. Esto da una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

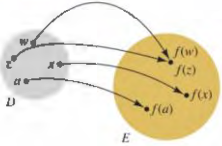
Cada uno de los ejemplos de correspondencia mencionados es una *función*, que se define como sigue:

Definición de función	Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x en D exactamente un elemento y en E.

*Para muchos casos, simplemente recuerde que el **dominio** es el conjunto de valores de x y el **rango** es el conjunto de valores y.*

El elemento x en D es el **argumento** de f. El conjunto D es el dominio de la función. El elemento y en E es el **valor** de f en x (o la imagen de x bajo f) y se denota por $f(x)$, léase "f de x." El **rango** de f es el subconjunto R de E formado por todos los valores posibles de $f(x)$ para x en D. Observe que puede haber elementos en el conjunto E que no están en el rango R de f.

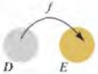
FIGURA 2



Considere el diagrama de la figura 2. Las flechas curvadas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E corresponden a los elementos w, z, x y a de D. *A cada elemento de D se asigna exactamente un valor de función en E;* no obstante, diferentes elementos de D, por ejemplo, w y z en la figura 2, pueden tener el mismo valor en E.

Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \qquad f\colon D \to E \qquad \text{y}$$



significan que f es una función de D a E y se dice que f mapea (relaciona) D *a* E. Al inicio, las notaciones f y $f(x)$ pueden ser confusas. Recuerde que f se usa para representar la función; no está en D ni en E, pero $f(x)$ es un elemento del rango R; el elemento que la función f asigna al elemento x, que está en el dominio D.

Dos funciones f y g de D a E son **iguales**, y se escribe

$$f = g \text{ siempre que } f(x) = g(x) \text{ para toda } x \text{ en } D$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$ y $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar valores de la función**

Sea f la función con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$.

a) Encuentre $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a + b)$ y $f(a) + f(b)$, donde a y b son números reales.

b) ¿Cuál es el rango de f?

SOLUCIÓN

a) Se encuentran los valores de f al sustituir x en la ecuación $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f(-6) &= (-6)^2 = 36 \\ f(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^2 = 3 \\ f(a+b) &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ f(a) + f(b) &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Observe que, en general, $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

b) Por definición, el rango de f está formado por todos los números de la forma $f(x) = x^2$ para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de todo número real es no negativo, el rango está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. Además, todo número real no negativo c es un valor de f, porque $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. En consecuencia, el rango de f es el conjunto de todos los números reales no negativos. ■

Si una función está definida como en el ejemplo 1, los símbolos empleados para la función y la variable no importan; es decir, expresiones como $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$ definen todas ellas la misma función. Esto es cierto porque si a es cualquier número del dominio, entonces el mismo valor a^2 se obtiene cualquiera que sea la expresión que se use.

En el resto de nuestro trabajo, la frase *f es una función* significa que el dominio y el rango son conjuntos de números reales. Si una función está definida por medio de una expresión, como en el ejemplo 1, y el dominio D no se expresa, entonces se considera que D es el total de números reales x tales que $f(x)$ es real. Esto a veces recibe el nombre de **dominio implícito** de f. Para ilustrar, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces el dominio implícito es el conjunto de números reales x tales que $\sqrt{x - 2}$ es real; esto significa que $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$. Así, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que *f está definida en x* o que *$f(x)$ existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, *f está definida en S*. La terminología *f no está definida en x* significa que x no está en el dominio de f.

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar valores de la función**

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$.

a) Encuentre el dominio de g.

b) Determine $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$ y $-g(a)$.

SOLUCIÓN

a) La expresión $\sqrt{4+x}/(1-x)$ es un número real si y sólo si el radicando $4+x$ es no negativo y el denominador $1-x$ es diferente de 0. Entonces, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4+x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1-x \neq 0$$

o bien, lo que es equivalente,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1$$

Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como $[-4, 1) \cup (1, \infty)$.

b) Para encontrar valores de g, sustituimos por x:

$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

■

FIGURA 3

Las funciones son comunes en la vida cotidiana y aparecen en gran variedad de formas. Por ejemplo, el menú en un restaurante (figura 3) se puede considerar que es una función f de un conjunto de artículos y un conjunto de precios. Observe que f está dado en formato de tabla. Aquí f(hamburguesa) = 1.69, f(papas fritas) = 0.99 y f(bebida) = 0.79.

Un ejemplo de una función dada por una regla se puede encontrar en las tablas de impuestos federales (figura 4). Específicamente, en 2009, para una persona soltera con ingreso gravable de $120,000, el impuesto por pagar se determinaba mediante la regla

$16,750.00 más 28% de la cantidad sobre $82,250.

FIGURA 4

Tarifa de impuesto federal 2006

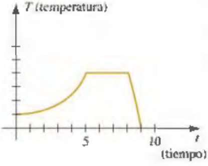
Tarifa X–Usar si su categoría de contribuyente es persona soltera

Si el ingreso gravable es mayor que:	*Pero no mayor que:*	*El impuesto es:*	*de la cantidad sobre:*
$0	$8,350	--------- 10%	$0
8,350	33,950	$835.00 + 15%	8,350
33,950	82,250	$4,675.00 + 25%	33,950
82,250	171,550	16,750.00 + 28%	82,250
171,550	372,950	41,754.00 + 33%	171,550
372,950	-------	108,216.00 + 35%	372,950

En este caso, el impuesto sería

$$\$16{,}750.00 + 0.28(\$120{,}000 - \$82{,}250) = \$27{,}320.00.$$

FIGURA 5



Con frecuencia se usan gráficas para describir la variación de cantidades físicas. Por ejemplo, un científico puede usar la gráfica de la figura 5 para indicar la temperatura T de cierta solución en varios tiempos T durante un experimento. El diagrama muestra que la temperatura aumentó de forma gradual desde el tiempo $t = 0$ al tiempo $t = 5$, no cambió (se mantuvo) entre $t = 5$ y $t = 8$, y luego disminuyó rápidamente de $t = 8$ a $t = 9$.

Asimismo, si f es una función, se puede usar una gráfica para indicar el cambio en $f(x)$ cuando x varia en el dominio de f. En específico, se tiene la siguiente definición.

Definición de la gráfica de una función

La **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f.

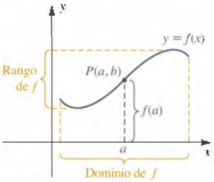
A veces se coloca la leyenda $y = f(x)$ a un diagrama de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto en la gráfica, entonces la coordenada b en y es el valor de la función $f(a)$, como se ilustra en la figura 6. La figura muestra el dominio de f (el conjunto de valores posibles de x) y el rango de f (los valores correspondientes de y). Aun cuando se ha descrito el dominio y el rango de intervalos cerrados, los intervalos pueden ser infinitos u otros conjuntos de números reales.

Como hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f, sólo *un* punto de la gráfica de f tiene coordenada a en x. En general, la siguiente prueba se usa para determinar si una gráfica es la gráfica de una función.

Prueba de recta vertical

La gráfica de un conjunto de puntos en un plano de coordenadas es la gráfica de una función si toda recta vertical la cruza como máximo en un punto.

FIGURA 6



Por lo tanto, *toda recta vertical cruza en un punto como máximo la gráfica de una función*. En consecuencia, la gráfica de una función no puede ser una figura, como por ejemplo una circunferencia, en la que una recta vertical puede cruzar la gráfica en más de un punto.

Las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se denominan **ceros** de la función. La intersección con el eje y de la gráfica es $f(0)$, si ésta existe.

EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una función**

Sea $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

a) Trace la gráfica de f.

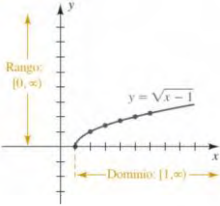
b) Encuentre el dominio y el rango de f.

SOLUCIÓN

a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 1}$. La siguiente tabla es una lista de coordenadas de varios puntos sobre la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

FIGURA 7



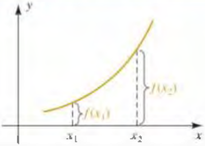
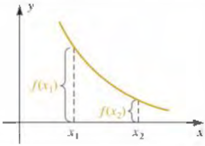
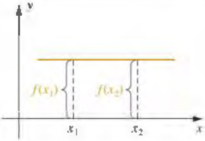
Al trazar puntos, se obtiene el diagrama que se muestra en la figura 7. Observe que la intersección en x es 1 y no hay intersección en y.

b) Observe la figura 7, note que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o bien, lo que es equivalente, el intervalo $[1, \infty)$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ o, lo que es equivalente, $[0, \infty)$. ■

La **función raíz cuadrada**, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica semejante a la de la figura 7, pero el punto extremo está en $(0, 0)$. El valor y de un punto sobre esta gráfica es el número que aparece en la pantalla de una calculadora cuando se le pide una raíz cuadrada. Esta relación gráfica puede ayudarle a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ *no* es ± 3 en esta gráfica específica. Del mismo modo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se conocen en ocasiones como la **función al cuadrado**, la **función al cubo** y la **función de raíz cúbica**, respectivamente.

En el ejemplo 3, cuando aumenta x, el valor de la función $f(x)$ también aumenta y se dice que la gráfica de f *sube* (vea la figura 7). Una función de este tipo se dice que es *creciente*. Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye cuando aumenta x. En este caso, la gráfica *cae* y f es una función *decreciente*. En general, se consideran funciones que aumentan o disminuyen en un intervalo I, como se describe en la siguiente tabla, donde x_1 y x_2 denotan números en I.

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Terminología	Definición	Interpretación gráfica
f es **creciente** en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **decreciente** en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$	
f es **constante** en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2	

Un ejemplo de una *función creciente* es la **función identidad**, cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de una *función decreciente* es $f(x) = -x$, una ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1. Si $f(x) = c$ para todo número real x, entonces f se denomina *función constante*.

Usamos de manera indistinta las frases *f es creciente* y *$f(x)$ es creciente*. Haremos lo mismo con los términos *decreciente* y *constante*.

EJEMPLO 4 **Cómo encontrar mediante una gráfica el dominio, el rango y donde una función aumenta o disminuye**

Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

a) Trace la gráfica de f.

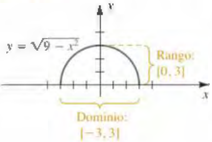
b) Encuentre el dominio y el rango de f.

c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN

a) Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Sabemos del trabajo realizado con circunferencias en la sección 2.2, que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. Al despejar y en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ obtenemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Se deduce que la gráfica de f es la *mitad superior* de la circunferencia, como se ilustra en la figura 8.

FIGURA 8



b) En referencia a la figura 8, vemos que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$, y el rango de f es el intervalo $[0, 3]$.

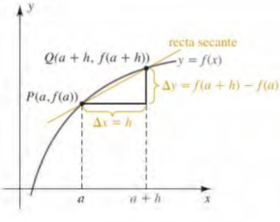
c) La gráfica sube cuando asciende x de -3 a 0, de modo que f es creciente en el intervalo cerrado $[-3, 0]$. Por lo tanto, como se muestra en la gráfica precedente, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (observe que *posiblemente* $x_1 = -3$ o $x_2 = 0$).

La gráfica baja a medida que x se incrementa de 0 a 3, de manera que f decrece en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, el diagrama muestra que si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ (observe que *posiblemente* $x_1 = 0$ o $x_2 = 3$). ■

Un problema del siguiente tipo es de especial interés en cálculo.

Problema: encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q que se muestran en la figura 9.

FIGURA 9



La pendiente m_{PQ} está dada por

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La última expresión (con $h \neq 0$) por lo general se denomina **cociente de diferencias**. Ahora se verá el álgebra que interviene en la simplificación de un cociente de diferencias. (Al final del capítulo vea un problema relacionado en el ejercicio para análisis 5.)

EJEMPLO 5 **Simplificación de un cociente de diferencias**

Simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

usando la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x + h)^2 + 6(x + h) - 4] - [x^2 + 6x - 4]}{h} && \text{definición de } f \\
&= \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 6x + 6h - 4) - (x^2 + 6x - 4)}{h} && \text{expandimos el numerador} \\
&= \frac{(\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{6x} + 6h - \cancel{4}) - (\cancel{x^2} + \cancel{6x} - \cancel{4})}{h} && \text{restamos los términos} \\
&= \frac{2xh + h^2 + 6h}{h} && \text{simplificamos} \\
&= \frac{h(2x + h + 6)}{h} && \text{factorizamos } h \\
&= 2x + h + 6 && \text{cancelamos } h \neq 0
\end{aligned}$$

■

El siguiente tipo de función es uno de los fundamentales en álgebra.

Definición de función lineal Una función f es una **función lineal** si

$$f(x) = ax + b,$$

donde x es cualquier número real, y a y b son constantes.

La gráfica de f de la definición anterior es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente ordenada al origen, es una recta con pendiente a e intersección b en y. Así, *la gráfica de una función lineal es una recta*. Como $f(x)$ existe para toda x, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Como se ilustra en el ejemplo siguiente, si $a \neq 0$, entonces el rango de f también es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una función lineal**

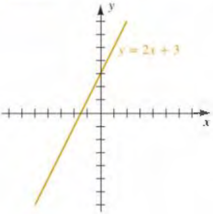
Sea $f(x) = 2x + 3$.

a) Trace la gráfica de f.

b) Encuentre el dominio y el rango de f.

c) Determine si f es creciente o decreciente.

FIGURA 10



SOLUCIÓN

a) Como $f(x)$ tiene la forma $ax + b$, con $a = 2$ y $b = 3$, f es una función lineal. La gráfica de $y = 2x + 3$ es la recta con pendiente 2 e intersección 3 en y, que se ilustra en la figura 10.

b) De la gráfica vemos que x y y pueden ser cualesquiera números reales, de modo que el dominio y el rango de f son $\mathbb{R}$.

c) Como la pendiente de a es positiva, la gráfica de f crece cuando aumenta x; esto es, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Así, f es creciente en todo su dominio. ■

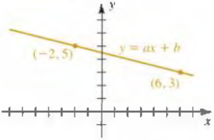
En aplicaciones, a veces es necesario determinar una función lineal específica a partir de los datos dados, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 **Cómo encontrar una función lineal**

Si f es una función lineal tal que $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$, encuentre $f(x)$, donde x es cualquier número real.

SOLUCIÓN Por la definición de función lineal, $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. Además, los valores de la función dada nos indican que los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 3)$ están en la gráfica de f, es decir, sobre la recta $y = ax + b$ que se ilustra en la figura 11. La pendiente a de esta recta es

FIGURA 11



$$a = \frac{5-3}{-2-6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

y por consiguiente $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b$$

Para hallar el valor de b, podemos partir del hecho de que $f(6) = 3$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(6) &= -\tfrac{1}{4}(6) + b && \text{sea } x = 6 \text{ en } f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b \\ 3 &= -\tfrac{3}{2} + b && f(6) = 3 \\ b &= 3 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{2} && \text{despejamos } b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función lineal que satisface $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$ es

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{9}{2}$$

■

Numerosas fórmulas que se presentan en matemáticas y ciencias determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ para el área A de una circunferencia de radio r asigna a cada número real positivo r exactamente un valor de A. Esto determina una función f tal que $f(r) = \pi r^2$ y se puede escribir $A = f(r)$. La letra r, que representa un número arbitrario del dominio de f, se denomina **variable inde-**

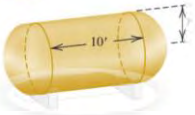
pendiente. La letra A, que representa un número del rango de f, es una **variable dependiente**, porque su valor depende del número asignado a r. Si dos variables r y A están relacionadas de este modo, se dice que *A es una función de r*. En aplicaciones, la variable independiente y la variable dependiente en ocasiones se conocen como la **variable de entrada** y la **variable de salida**, respectivamente. Como otro ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad uniforme de 50 mi/h, entonces la distancia d (millas) recorrida en un tiempo t (horas) está dada por $d = 50t$, por lo tanto, *la distancia d es una función del tiempo t*.

EJEMPLO 8 **Cómo expresar el volumen de un tanque como función de su radio**

Un tanque de acero para gas propano se construye en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. El radio r está por determinarse. Exprese el volumen V (en pies^3) del tanque como función de r (en pies).

SOLUCIÓN El tanque se ilustra en la figura 12. El volumen de la parte cilíndrica del tanque se puede calcular al multiplicar su altura 10 por el área πr^2 de la base del cilindro. Esto da

FIGURA 12



$$\text{Volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2$$

Los dos extremos semiesféricos, tomados juntos, forman una esfera de radio r. Aplicando la fórmula para el volumen de una esfera, obtenemos

$$\text{Volumen de los dos extremos} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Así, el volumen V del tanque es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2$$

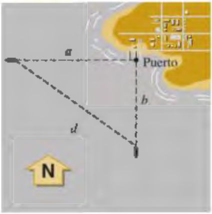
Esta fórmula expresa V como función de r. En forma factorizada,

$$V(r) = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r + 15)$$

EJEMPLO 9 **Cómo expresar una distancia como función del tiempo**

Dos barcos zarpan al mismo tiempo, uno de ellos navegando al oeste a razón de 17 mi/h y el otro al sur a 12 mi/h. Si t es el tiempo (en horas) después de su salida, exprese la distancia d entre los barcos como función de t.

FIGURA 13



SOLUCIÓN Para ayudar a visualizar el problema, comenzamos por elaborar un dibujo y marcarlo como se observa en la figura 13. Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{o} \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como distancia = (velocidad)(tiempo) y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \qquad \text{y} \qquad b = 12t$$

La sustitución en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ da

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \approx (20.8)t.$$

Es posible usar pares ordenados para obtener una aproximación alterna a funciones. Primero se observa que una función f de D a E determina el siguiente conjunto W de pares ordenados:

$$W = \{(x, f(x)): x \text{ está en } D\}$$

Por lo tanto, W está formado por todos los pares ordenados tales que el primer número x está en D y el segundo número es el valor de la función $f(x)$. En el ejemplo 1, donde $f(x) = x^2$, W es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x^2). Es importante observar que, *para cada x, hay exactamente un par ordenado (x, y) en W que tiene x en la primera posición.*

En forma recíproca, si comenzamos con un conjunto W de pares ordenados tales que cada x en D aparece exactamente una vez en la primera posición de un par ordenado, entonces W determina una función. De manera específica, para cada x en D hay exactamente un par (x, y) en W, y al hacer que y corresponda a x, obtenemos una función con dominio D. El rango está formado por todos los números reales y que aparecen en la segunda posición de los pares ordenados.

Del análisis precedente se deduce que el siguiente enunciado también podría usarse como definición de función.

Definición alterna de función Una **función** con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada x en D, hay exactamente un par ordenado (x, y) en W que tiene a x en la primera posición.

En términos de la definición anterior, los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ determinan la función del ejemplo 3 dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Sin embargo, observe que si

$$W = \{(x, y): x^2 = y^2\},$$

entonces W *no* es una función, puesto que para una x determinada puede haber más de un par en W con x en la primera posición. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces $(2, 2)$ y $(2, -2)$ están en W.

En el siguiente ejemplo ilustramos la forma en que algunos de los conceptos que se presentan en esta sección pueden estudiarse con ayuda de una calculadora graficadora. En adelante, cuando se realicen asignaciones en una de estas calculadoras, a menudo hacemos referencia a variables como Y_1 y Y_2 como las *funciones* Y_1 y Y_2.

EJEMPLO 10 **Análisis de la gráfica de una función**

Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$.

a) Encuentre $f(-2)$.

b) Trace la gráfica de f.

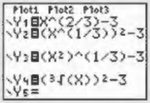
c) Determine el dominio y rango de f.

d) Establezca los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

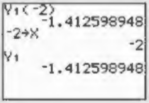
e) Estime las intersecciones en x de la gráfica a una precisión de una posición decimal.

SOLUCIÓN

a) Abajo aparecen cuatro representaciones de f, todas ellas válidas en la calculadora TI−83/4 Plus. En algunos otros modelos anteriores de calculadoras graficadoras, usted puede obtener sólo el lado derecho de la gráfica de la figura 14. Si eso ocurre, cambie su representación de f.



A continuación se muestran dos métodos para determinar el valor de una función. En el primero, simplemente se encuentra el valor de $Y_1(-2)$. En el segundo, se guarda -2 en X y luego se determina el valor de Y_1.



VARS ▷ 1 1 (-2) ENTER

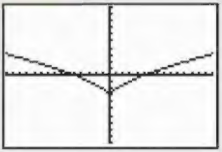
b) El uso de la ventana de visualización $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$ para graficar Y_1 da una pantalla semejante a la de la figura 14. La parte en forma de v de la gráfica de f en $x = 0$ se llama **cúspide**.

c) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque se puede introducir cualquier valor para x. La figura indica que $y \geq -3$, de modo que concluimos que el rango de f es $[-3, \infty)$.

d) En la figura, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

e) Con el uso de la función de raíz, se encuentra que la intersección positiva en x de la figura 14 es aproximadamente 5.2. Como f es simétrica respecto al eje y, la intersección negativa en x es de alrededor de -5.2.

FIGURA 14 $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



Como ayuda de referencia, algunas gráficas comunes y sus ecuaciones aparecen en el apéndice I. Muchas de éstas son gráficas de funciones.

2.3 Ejercicios

1 Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.

2 Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, encuentre $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

3 Si $\sqrt{x-2} + 3x$, encuentre $f(3)$, $f(6)$ y $f(11)$.

4 Si $\dfrac{x}{x-3}$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Ejer. 5–10: Si a y h son números reales, encuentre

a) $f(a)$ b) $f(-a)$ c) $-f(a)$ d) $f(a+h)$

e) $f(a)+f(h)$ f) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si $h \neq 0$

5 $f(x) = 5x - 2$

6 $f(x) = 1 - 4x$

7 $f(x) = -x^2 + 3$

8 $f(x) = 3 - x^2$

9 $f(x) = x^2 - x + 3$

10 $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejer. 11–14: Si a es un número real positivo, encuentre

a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ b) $\dfrac{1}{g(a)}$ c) $g(\sqrt{a})$ d) $\sqrt{g(a)}$

11 $g(x) = 4x^2$

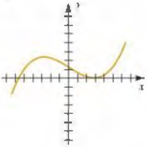
12 $g(x) = 2x - 7$

13 $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

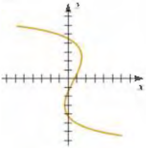
14 $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ejer. 15–16: Explique por qué la gráfica es o no la gráfica de una función.

15

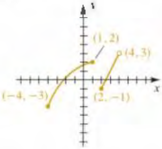


16

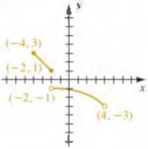


Ejer. 17–18: Determine el dominio D y el rango R de la función que se muestra en la figura.

17



18



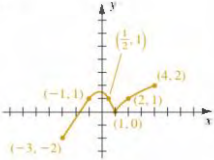
Ejer. 19–20: Para la gráfica de la función f trazada en la figura, determine

a) el dominio b) el rango c) $f(1)$

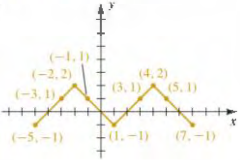
d) toda x tal que $f(x) = 1$

e) toda x tal que $f(x) > 1$

19



20



Ejer. 21–32: Encuentre el dominio de f.

21 $f(x) = \sqrt{2x+7}$

22 $f(x) = \sqrt{4-3x}$

23 $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

24 $f(x) = \sqrt{x^2-25}$

25 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-9x}$

26 $f(x) = \dfrac{4x}{6x^2+13x-5}$

27 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2-5x+4}$

28 $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

29 $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}}$

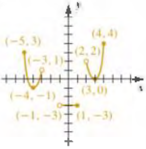
30 $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x+3}}$

31 $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}$

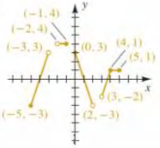
32 $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-6)}$

Ejer. 33–34: a) Encuentre el dominio D y rango R de f. b) Encuentre los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

33



34



35 Trace la gráfica de una función que sea creciente en $(-\infty, -3]$ y $[2, \infty)$ y decreciente en $[-3, 2]$.

36 Trace la gráfica de una función que sea decreciente en $(-\infty, -2]$ y $[1, 4]$ y creciente en $[-2, 1]$ y $[4, \infty)$.

Ejer. 37–46: a) Trace la gráfica de f. b) Encuentre el dominio D y rango de R. c) Encuentre los intervalos en los que f sea creciente, decreciente o constante.

37 $f(x) = -2x + 1$ 38 $f(x) = 2x - 1$

39 $f(x) = 4 - x^2$ 40 $f(x) = x^2 - 1$

41 $f(x) = \sqrt{x - 1}$ 42 $f(x) = \sqrt{4 - x}$

43 $f(x) = -4$ 44 $f(x) = 3$

45 $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$ 46 $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Ejer. 47–48: Simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \text{ si } h \neq 0.$$

47 $f(x) = x^2 - 6x$ 48 $f(x) = -2x^2 + 5$

Ejer. 49–50: Simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ si } h \neq 0.$$

49 $f(x) = x^2 + 5$ 50 $f(x) = 1/x^2$

Ejer. 51–52: Simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a.$$

51 $f(x) = \sqrt{x - 3}$ (*Sugerencia:* elimine los radicales del numerador.)

52 $f(x) = x^3 - 2$

Ejer. 53–54: Si una función lineal f satisface las condiciones dadas, encuentre $f(x)$.

53 $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

54 $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

Ejer. 55–64: Determine si el conjunto W de pares ordenados es una función en el sentido de la definición alterna de función de la página 130.

55 $W = \{(x, y): 3y = x^2 + 7\}$

56 $W = \{(x, y): x = 3y + 2\}$

57 $W = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$

58 $W = \{(x, y): y^2 - x^2 = 4\}$

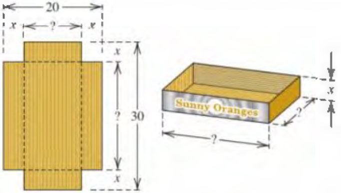
59 $W = \{(x, y): y = 5\}$ 60 $W = \{(x, y): x = 3\}$

61 $W = \{(x, y): xy = 0\}$ 62 $W = \{(x, y): x + y = 0\}$

63 $W = \{(x, y): |y| = |x|\}$ 64 $W = \{(x, y): y < x\}$

65 **Manufactura de una caja** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20×30 pulgadas, una caja abierta se construirá al cortar un cuadrado idéntico de área x^2 de cada esquina y voltear los lados hacia arriba (vea la figura). Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

EJERCICIO 65



66 **Construcción de un tanque de almacenamiento** Consulte el ejemplo 8. Un tanque de acero para almacenar gas propano se ha de construir en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura con una semiesfera unida en cada extremo. El radio r está por determinarse. Exprese el área de la superficie S del tanque como función de r.

67 **Dimensiones de un edificio** Una unidad pequeña de oficinas debe contener 500 pies cuadrados de superficie de piso. Un modelo simplificado se ilustra en la figura.

a) Exprese la longitud y del edificio como función del ancho x.

b) Si las paredes cuestan \$100 por pie lineal, exprese el costo C de las paredes como función del ancho x. (No considere el espacio de la pared sobre las puertas ni el grosor de las paredes.)

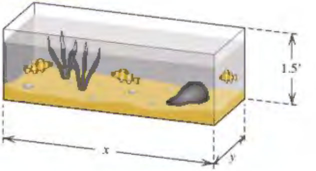
EJERCICIO 67

68 **Dimensiones de un acuario** Un acuario de 1.5 pies de altura debe tener un volumen de 6 ft^3. Sea x la longitud de la base y y el ancho (vea la figura).

a) Exprese y como función de x.

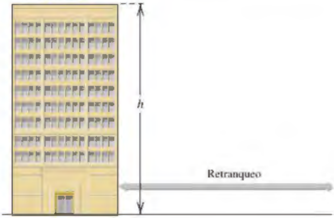
b) Exprese el número total S de pies cuadrados de vidrio necesario como función de x.

EJERCICIO 68



69 **Reglamento de construcción** El ayuntamiento de una ciudad está proponiendo un nuevo reglamento de construcción, el cual requiere que el retranqueo S para cualquier edificio desde una residencia sea de un mínimo de 100 pies, más otros 6 pies por cada pie de altura arriba de 25 pies. Encuentre una función lineal para S en términos de h.

EJERCICIO 69



70 **Impuesto a la energía** Un impuesto a la energía propuesto T a la gasolina, que afectaría el costo de conducir un vehículo, se calculará al multiplicar el número x de galones de gasolina que una persona compra por 125,000 (el número de las BTU por galón de gasolina) y luego multiplicar el total de las BTU por el impuesto, 34.2 centavos por millón de BTU. Encuentre una función lineal para T en términos de x.

71 **Crecimiento en la infancia** Para niños entre 6 y 10 años, la estatura y (en pulgadas) suele ser una función lineal de la edad t (en años). La estatura de cierto niño es de 48 pulgadas a los 6 años y 50.5 pulgadas a los 7 años de edad.

a) Exprese y como función de t.

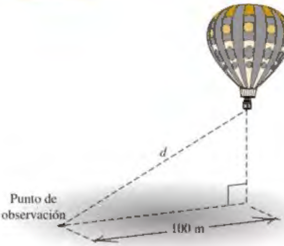
b) Trace la recta del inciso a) e interprete la pendiente.

c) Pronostique la estatura del niño a la edad de 10 años.

72 **Contaminación radiactiva** Se ha estimado que 1,000 curies de sustancia radiactiva, introducida en un punto en la superficie del mar abierto, se extendería sobre un área de 40,000 km^2 en 40 días. Suponiendo que el área cubierta por la sustancia radiactiva es una función lineal del tiempo t y es siempre de forma circular, exprese el radio r de la contaminación como una función de t.

73 **Distancia a un globo de aire caliente** Un globo de aire caliente se lanza a la 1:00 P.M. y asciende verticalmente a una velocidad de 2 m/s. Un punto de observación está situado a 100 metros de un punto en el suelo, directamente debajo del globo (vea la figura). Si t denota el tiempo (en segundos) después de la 1:00 P.M., exprese la distancia d entre el globo y el punto de observación como función de t.

EJERCICIO 73

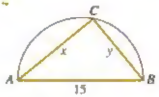


74 El triángulo ABC está inscrito en una semicircunferencia de diámetro 15 (vea la figura).

a) Si x denota la longitud del lado AC, exprese la longitud y del lado BC como función de x. (*Sugerencia:* el ángulo ACB es un ángulo recto.)

b) Exprese el área $\mathscr{A}$ del triángulo ABC como función de x, y exprese el dominio de esta función.

EJERCICIO 74

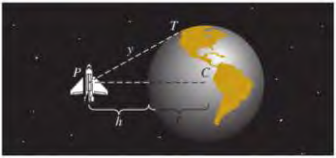


75 **Distancia a la Tierra** De un punto exterior P que está a h unidades de una circunferencia de radio r, una recta tangente se traza a la circunferencia (vea la figura). Denote con y la distancia desde el punto P al punto de tangencia T.

a) Exprese y como función de h. (*Sugerencia:* si C es el centro de la circunferencia, entonces PT es perpendicular a CT.)

b) Si r es el radio de la Tierra y h la altitud de un transbordador espacial, entonces y es la distancia máxima a la Tierra a la que un astronauta puede ver desde el transbordador. En particular, si $h = 200$ mi y $r \approx 4000$ mi, aproxime y.

EJERCICIO 75

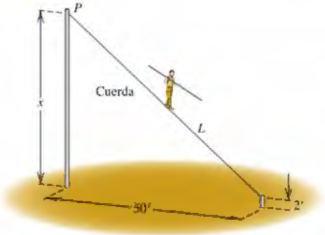


76 **Longitud de una cuerda floja** La figura ilustra el aparato para un equilibrista. Dos postes se colocan a 50 pies uno del otro, pero el punto de unión P para la cuerda no se ha determinado.

a) Exprese la longitud L de la cuerda como función de la distancia x de P al suelo.

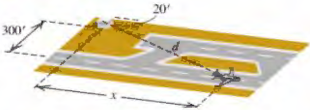
b) Si la caminata total debe ser de 75 pies, determine la distancia de P al suelo.

EJERCICIO 76



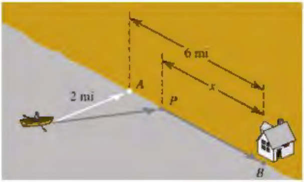
77 **Pista de un aeropuerto** Las posiciones relativas de una pista para aviones y una torre de control de 20 pies de altura se ven en la figura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pies de la base de la torre. Si x denota la distancia que un avión se ha movido por la pista, exprese la distancia d entre el avión y la parte superior de la torre de control como función de x.

EJERCICIO 77



78 **Tiempo de llegada a un destino** Un hombre en un bote de remos que está a 2 millas del punto A más cercano a una orilla recta desea llegar a su casa situada en un punto B que está 6 millas más abajo sobre la orilla (vea la figura). Él planea remar a un punto P que está entre A y B y a x millas de la casa; y luego caminará el resto de la distancia. Suponga que puede remar a 3 mi/h y puede caminar a 5 mi/h. Si T es el tiempo total necesario para llegar a la casa, exprese T como función de x.

EJERCICIO 78



Ejer. 79–82: a) Trace la gráfica de f en el intervalo dado $[a, b]$. b) Estime el rango de f en $[a, b]$. c) Estime los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

79 $f(x) = \dfrac{x^{1/3}}{1 + x^4}$; $[-2, 2]$

80 $f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1$; $[-1, 1]$

81 $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$; $[-0.7, 1.4]$

82 $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{\ \ + \ \ ^4}$; $[-4, 4]$

Ejer. 83–84: En los ejercicios 43-44 de la sección 1.4 usamos métodos algebraicos para encontrar soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones. Ahora resuelva gráficamente la ecuación, al asignar la expresión del lado izquierdo a Y_1 y el número del lado derecho a Y_2, y luego encuentre las coordenadas x de todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

83 **a)** $x^{5/3} = 32$ **b)** $x^{4/3} = 16$ **c)** $x^{2/3} = -64$

d) $x^{3/4} = 125$ **e)** $x^{3/2} = -27$

84 **a)** $x^{3/5} = -27$ **b)** $x^{2/3} = 25$ **c)** $x^{4/3} = -49$

d) $x^{3/2} = 64$ **e)** $x^{3/4} = -8$

85 **Pantalla de calculadora** La pantalla de una calculadora graficadora determinada mide 95 pixeles de ancho y 63 pixeles de alto.

a) Calcule el número total de pixeles en la pantalla.

b) Si una función se grafica en el modo de puntos sin conexión, determine el número máximo de pixeles que comúnmente se oscurecerían en la pantalla de la calculadora para mostrar la función.

86 **Distancias de frenado** La tabla siguiente lista la distancia de frenado práctica D (en pies) para automóviles a velocidades S (en millas por hora) en superficies a nivel, como la usa la Asociación Estadounidense de Funcionarios de Autopistas Estatales y Transporte.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

a) Trace los datos.

b) Determine si la distancia de frenado es una función lineal de la velocidad.

c) Comente las implicaciones prácticas de estos datos para conducir con seguridad un automóvil.

87 **Precios de automóviles nuevos** En 1993 y 2000, los precios medios pagados por un automóvil nuevo fueron \$16,871 y \$20,356, respectivamente. Suponga que el precio promedio aumentó linealmente.

a) Encuentre una función f que modele el precio promedio pagado por un automóvil nuevo. Trace la gráfica de f junto con los dos puntos de datos.

b) Interprete la pendiente de la gráfica de f.

c) Aproxime gráficamente el año en que el precio promedio pagado sería de \$25,000.

2.5 Gráficas de funciones

En esta sección estudiamos apoyos para trazar gráficas de ciertos tipos de funciones. En particular, una función f se llama **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no se cambia si $-x$ es sustituida por x y, por lo tanto, por la prueba de simetría 1 de la sección 2.2, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

Una función f se denomina **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. Si se aplica la prueba de simetría 3 de la sección 2.2 a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función impar es simétrica respecto a ambos ejes.

Estos datos se resumen en las primeras dos columnas de la siguiente tabla.

Funciones pares e impares

Terminología	Definición	Ejemplo	Tipo de simetría de gráfica
f es una **función *par***.	$f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio.	$y = f(x) = x^2$	respecto al eje y
f es una **función *impar***.	$f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio.	$y = f(x) = x^3$	respecto a ambos ejes

EJEMPLO 1 **Cómo determinar si una función es par o impar**

Determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ **b)** $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

c) $f(x) = x^3 + x^2$

SOLUCIÓN En cada caso el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para determinar si f es par o impar, comenzamos por examinar $f(-x)$ donde x es cualquier número real.

a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 && \text{sustituimos } -x \text{ por } x \text{ en } f(x) \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 5 && \text{simplificamos} \\ &= f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = f(x)$, f es una función par.

b)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) && \text{sustituimos } -x \text{ por } x \text{ en } f(x) \\ &= -2x^5 + 7x^3 - 4x && \text{simplificamos} \\ &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) && \text{factorizamos } -1 \\ &= -f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, f es una función impar.

c)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 && \text{sustituimos } -x \text{ por } x \text{ en } f(x) \\ &= -x^3 + x^2 && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$ (observe que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f no es par ni impar. ■

En el ejemplo siguiente se considera la **función valor absoluto** f, definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de la función valor absoluto**

Sea $f(x) = |x|$.

a) Determine si f es par o impar.

b) Trace la gráfica de f.

c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

SOLUCIÓN

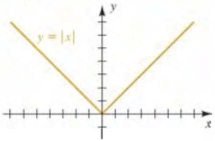
a) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de x existe para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

b) Como f es par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, y por lo tanto la parte del primer cuadrante de la gráfica coincide con la recta $y = x$. Trazar esta semirrecta y usar simetría da la figura 1.

FIGURA 1



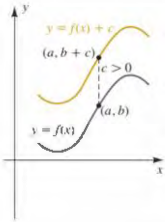
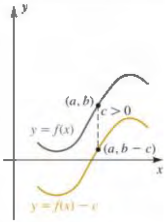
c) Con referencia a la gráfica, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y es creciente en $[0, \infty)$. ■

Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil trazar las gráficas de

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c$$

para cualquier número real positivo c. Al igual que en la siguiente gráfica, para $y = f(x) + c$, sumamos c a la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica de f *hacia arriba* una distancia c. Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, restamos c de cada coordenada y; por lo tanto, la gráfica de f se desplaza *hacia abajo* una distancia c. Éstos se denominan **desplazamientos verticales** de las gráficas.

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	$y = f(x) + c$ con $c > 0$	$y = f(x) - c$ con > 0
Efecto en la gráfica	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia c.	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia c.
Interpretación gráfica		

EJEMPLO 3 Desplazamiento vertical de una gráfica

Trace la gráfica de f:

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = x^2 + 4$ **c)** $f(x) = x^2 - 4$

SOLUCIÓN Se trazarán todas las gráficas en el mismo plano de coordenadas.

a) Dado que

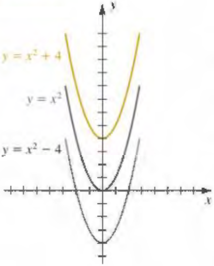
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

la función f es par, y por lo tanto su gráfica es simétrica respecto al eje y. Varios puntos en la gráfica de $y = x^2$ son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 9)$. El trazo de una curva suave que pase por estos puntos y su reflejo por el eje y da el trazo de la figura 2. La gráfica es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba.

b) Para trazar la gráfica de $y = x^2 + 4$, sumamos 4 a la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = x^2$; esto es, la gráfica del inciso a) se desplaza 4 unidades hacia arriba, como se observa en la figura.

c) Para trazar la gráfica de $y = x^2 - 4$, se disminuyen las coordenadas y de $y = x^2$ por 4; es decir, la gráfica del inciso a) se desplaza 4 unidades hacia abajo. ■

FIGURA 2

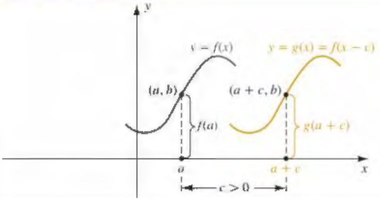
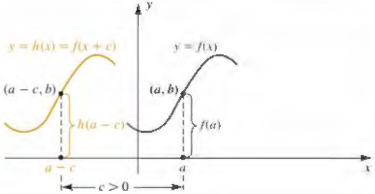


También podemos considerar **desplazamientos horizontales** de las gráficas. En específico, si $c > 0$, considere las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x) = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano de coordenadas, como se ilustra en la siguiente tabla. Dado que

$$g(a + c) = f([a + c] - c) = f(a),$$

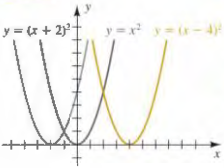
vemos que el punto con coordenada a en x en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada $a + c$ en x en la gráfica de $y = g(x) = f(x - c)$. Esto implica que la gráfica de $y = g(x) = f(x - c)$ se puede obtener al desplazar la gráfica de $y = f(x)$ *a la derecha* una distancia c. Asimismo, la gráfica de $y = h(x) = f(x + c)$ se puede obtener al desplazar la gráfica de f *a la izquierda* una distancia c, como se muestra en la tabla.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = g(x)$ $= f(x - c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la *derecha* una distancia c.	
$y = h(x)$ $= f(x + c)$ con $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la *izquierda* una distancia c.	

Los desplazamientos horizontales y verticales también se conocen como *traslaciones*.

FIGURA 3



EJEMPLO 4 **Desplazamiento horizontal de una gráfica**

Trace la gráfica de f:
a) $f(x) = (x - 4)^2$ **b)** $f(x) = (x + 2)^2$

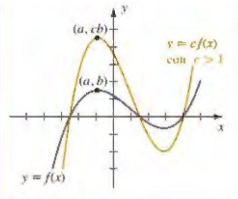
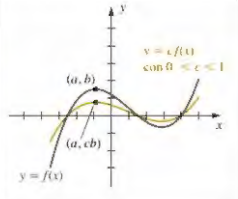
SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2$ se traza en la figura 3.

a) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ 4 unidades a la derecha da la gráfica de $y = (x - 4)^2$, que se muestra en la figura.

b) Desplazar la gráfica de $y = x^2$ 2 unidades a la izquierda lleva a la gráfica de $y = (x + 2)^2$, que se muestra en la figura. ■

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c, se pueden *multiplicar* las coordenadas y de puntos sobre la gráfica de $y = f(x)$ por c. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, se duplican las coordenadas y; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, se multiplica cada coordenada y por $\frac{1}{2}$. Este procedimiento se conoce como **alargamiento vertical** de la gráfica de f (si $c > 1$) o **contracción vertical de la gráfica** (si $0 < c < 1$) y se resume en la siguiente tabla.

Alargamiento o contracción vertical de la gráfica de $y = f(x)$

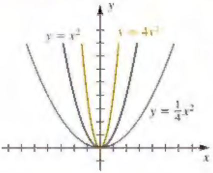
<table>
<tr><td>Ecuación</td><td>$y = cf(x)$ con $c > 1$</td><td>$y = cf(x)$ con $0 < c < 1$</td></tr>
<tr><td>Efecto en la gráfica</td><td>La gráfica de f
se prolonga verticalmente
un factor c.</td><td>La gráfica de f
se contrae verticalmente
un factor $1/c$.</td></tr>
<tr><td>Interpretación gráfica</td><td></td><td></td></tr>
</table>

EJEMPLO 5 Alargamiento o contracción vertical de una gráfica

Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = 4x^2$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^2$

FIGURA 4



La sustitución de y con $-y$ refleja la gráfica de $y = f(x)$ por el eje x.

SOLUCIÓN

a) Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$ podemos consultar la gráfica de $y = x^2$ de la figura 4 y multiplicar por 4 la coordenada y de cada punto. Esto alarga verticalmente la gráfica de $y = x^2$ en un factor 4 y produce una parábola más angosta que es más pronunciada en el vértice, como se ilustra en la figura.

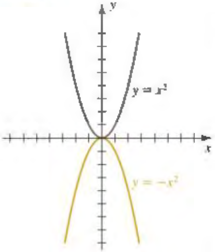
b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede trazar al multiplicar las coordenadas y de puntos en la gráfica de $y = x^2$ por $\frac{1}{4}$. Esto comprime verticalmente la gráfica de $y = x^2$ en un factor $1/\frac{1}{4} = 4$ y forma una parábola más ancha y plana en el vértice, como se aprecia en la figura 4. ■

Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ al multiplicar por -1 la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x)$. Así, todo punto (a, b) sobre la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentra por encima del eje x determina un punto $(a, -b)$ sobre la gráfica de $y = -f(x)$ que se encuentra por debajo del eje x. Del mismo modo, si (c, d) está por debajo del eje x (esto es, $d < 0$), entonces $(c, -d)$ se encuentra por encima del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ por el eje x.

EJEMPLO 6 Reflejar una gráfica que pase por el eje x

Trace la gráfica de $y = -x^2$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN La gráfica puede determinarse al trazar puntos, pero como la gráfica de $y = x^2$ resulta conocida, se traza como en la figura 5 y luego se multiplican por -1 las coordenadas y de los puntos. Este procedimiento da la reflexión a lo largo del eje x que se indica en la figura.

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de la función $f(x)$ para

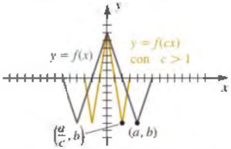
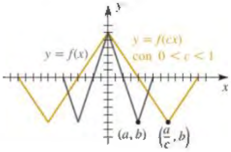
$$a \le x \le b$$

son los mismos que los valores de la función $f(cx)$ para

$$a \le cx \le b, \text{ o bien, lo que es equivalente, } \frac{a}{c} \le x \le \frac{b}{c}$$

Esto implica que la gráfica de f se **comprime horizontalmente** (si $c > 1$) o se **alarga horizontalmente** (si $0 < c < 1$), como se resume en la siguiente tabla.

Contracción o alargamiento horizontales de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto en gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$ con $c > 1$	La gráfica de f se contrae horizontalmente un factor c.	
$y = f(cx)$ con $0 < c < 1$	La gráfica de f se alarga horizontalmente un factor $1/c$.	

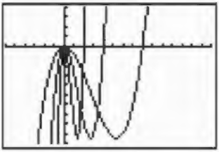
La sustitución de x con $-x$ refleja la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y.

Si $c < 0$, entonces la gráfica de $y = f(cx)$ puede obtenerse por medio de una reflexión de la gráfica de $f(|c|x)$ sobre el eje y. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, se refleja la gráfica de $y = f(2x)$ sobre el eje y. Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una **reflexión** de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y.

EJEMPLO 7 **Alargamiento o contracción horizontales de una gráfica**

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, trace las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(\frac{1}{2}x)$

FIGURA 6
$[-6, 15]$ *por* $[-10, 4]$



SOLUCIÓN Tenemos lo siguiente:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$
$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$
$$y = f\left(\tfrac{1}{2}x\right) = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 - 4\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 = \tfrac{1}{8}x^3 - x^2 = \tfrac{1}{8}x^2(x - 8)$$

Note que las intersecciones en x de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, que son $\frac{1}{2}$ de las intersecciones en x de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto indica una compresión horizontal por un factor 2.

Las intersecciones en x de la gráfica de $y = f(\frac{1}{2}x)$ son 0 y 8, que son dos veces las intersecciones en x para $y = f(x)$. Esto indica un alargamiento horizontal un factor $1/\frac{1}{2} = 2$.

Las gráficas, obtenidas con ayuda de una calculadora graficadora con ventana de visualización $[-6, 15]$ por $[-10, 4]$, se muestran en la figura 6. ■

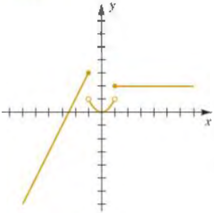
Las funciones se describen a veces con más de una expresión, como en los siguientes ejemplos. A estas funciones se les llama **funciones definidas por partes** (también llamadas funciones definidas por tramos o partes).

EJEMPLO 8 **Trazo de la gráfica de una función definida por tramos**

Trace la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

FIGURA 7



SOLUCIÓN Si $x \leq -1$, entonces $f(x) = 2x + 5$ y la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 5$ y está representada por la parte de la gráfica a la izquierda de la recta $x = -1$ de la figura 7. El pequeño punto indica que el punto $(-1, 3)$ está en la gráfica.

Si $|x| < 1$ (o bien, lo que es equivalente, $-1 < x < 1$), se usa x^2 para encontrar valores de f, y por lo tanto, esta parte de la gráfica de f coincide con la parábola $y = x^2$, como se indica en la figura. Observe que los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ *no* están en la gráfica.

Por último, si $x \geq 1$, los valores de f son siempre 2. Así, la gráfica de f para $x \geq 1$ es la semirrecta horizontal de la figura 7.

Nota: cuando termine de trazar la gráfica de una función por tramos, verifique que pase la prueba de la recta vertical. ■

El siguiente ejemplo muestra la forma en que se grafica la función definida por tramos del último ejemplo en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 9 **Trazo de la gráfica de una función definida por tramos**

Trace la gráfica de la función f si

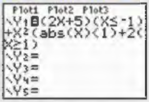
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos por hacer la asignación

$$Y_1 = \underbrace{(2x + 5)(x \le -1)}_{\text{primera parte}} + \underbrace{x^2(\text{abs}(x) < 1)}_{\text{segunda parte}} + \underbrace{2(x \ge 1)}_{\text{tercera parte}}.$$

Realizar las asignaciones de Y.

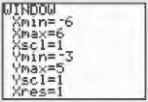
Y= CLEAR
(2 X,T,θ,n + 5)
(X,T,θ,n 2nd TEST 6 −1)
+ X,T,θ,n x^2
(MATH ▷ 1 X,T,θ,n)
2nd TEST 5 1)
+ 2
(X,T,θ,n 2nd TEST 4 1)



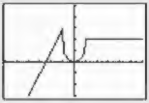
Cuando la variable x tome valores de Xmin a Xmax, la desigualdad $x \le 1$ en la primera parte tendrá un valor de 1 (si $x \le -1$) o 0 (si $x > -1$). Este valor se multiplica por el valor de $2x + 5$ y se asigna a Y_1. En la segunda parte, observe que *tanto* $-1 < x$ *como* $x < 1$ (equivalente a $|x| < 1$) deben ser verdaderos para el valor de x^2 a asignar a Y_1. La idea general es que cada parte esté "activa" sólo cuando x tome los valores del dominio asociado.

Ajustar la pantalla.

WINDOW −6 ▽ 6 ▽ 1 ▽
−3 ▽ 5 ▽ 1 ▽



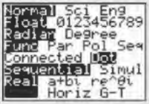
Graficar la función en el *modo conectado* estándar permite ver las características más importantes de la gráfica. En modo conectado, la calculadora incluye rectas entre los puntos extremos de las partes. Presione GRAPH.

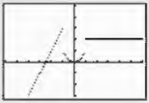


Para eliminar estas rectas, podemos cambiar a *modo Dot (puntos sin conexión)* y rehacer la gráfica. Observe que la calculadora graficadora no hace distinción entre incluir y excluir un punto extremo (algunos paquetes de software sí lo hacen).

Cambiar a modo Dot.

MODE ▽ (4 times) ▷ ENTER GRAPH





(*continúa*)

Nota: otro método para representar la función f es asignar cada parte a un valor Y como sigue:

$$Y_1 = (2x + 5)(x \leq -1), Y_2 = x^2(\text{abs}(x) < 1), Y_3 = 2(x \geq 1)$$

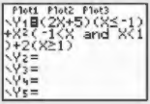
No obstante, graficar las tres pantallas es un proceso más bien lento. La rapidez puede mejorar al graficar $Y_4 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ para obtener la gráfica de f (asegúrese de desactivar Y_1, Y_2 y Y_3.) Para desactivar Y_1 en la calculadora TI−83/4 Plus, coloque el cursor en el signo = a la derecha de Y_1 y presione ENTER.

Otro método para representar la función f es asignar a cada parte un valor Y usando la división, como sigue

$$Y_1 = (2x + 5)/(x \leq -1), \quad Y_2 = x^2/(\text{abs}(x) < 1), \quad Y_3 = 2/(x \geq 1)$$

Al graficar los tres valores Y, se obtiene una vez más la gráfica de f. La ventaja de este método es evidente cuando se usa el modo conectado. ¡Inténtelo!

Nota de calculadora: recuerde que $|x| < 1$, o bien, $-1 < x < 1$ también puede escribirse como "$-1 < x$ y $x < 1$". Los operadores "and" y "or" se encuentran bajo el menú TEST LOGIC en la TI−83/4 Plus. Podemos usar "and" para hacer una asignación alterna para la función del ejemplo 9, como muestra la figura.



Es una idea equivocada y común pensar que si una persona asciende a un grupo de impuestos más alto, *todo* su ingreso se grava a una tasa más alta. El siguiente ejemplo de una gráfica de una función por partes ayuda a disipar esa noción.

EJEMPLO 10 **Aplicación usando una función definida por partes**

Trace una gráfica de la tasa x del impuesto federal 2006 que se muestra en la figura 8. Sea x el ingreso gravable y T el monto del impuesto. (Suponga que el dominio es el conjunto de números reales no negativos.)

SOLUCIÓN La tabla del impuesto puede representarse mediante una función por partes como sigue:

FIGURA 8

Tasa de impuesto federal 2006

Tarifa X –Usar si su estatus de presentación es soltero

Si el ingreso gravable es más de:	Pero no más de:	El impuesto es:	del monto sobre:
$0	$8,350	………10%	$0
8,350	33,950	$835.00 + 15%	8,350
33,950	82,250	$4,675.00 + 25%	33,950
82,250	171,550	16,750.00 + 28%	82,250
171,550	372,950	41,754.00 + 33%	171,550
372,950	………	108,216.00 + 35%	372,950

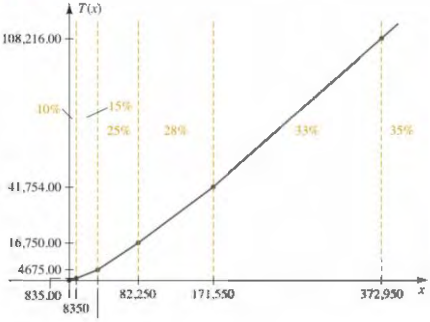
$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0.10x & \text{si} \quad 0 < x \leq 8350 \\ 835.00 + 0.15(x - 8350) & \text{si} \quad 8350 < x \leq 33{,}950 \\ 4{,}675.00 + 0.25(x - 33{,}950) & \text{si} \quad 33{,}950 < x \leq 82{,}250 \\ 16{,}750.00 + 0.28(x - 82{,}250) & \text{si} \quad 82{,}250 < x \leq 171{,}550 \\ 41{,}754.00 + 0.33(x - 171{,}550) & \text{si} \quad 171{,}550 < x \leq 372{,}950 \\ 108{,}216.00 + 0.35(x - 372{,}950) & \text{si} \quad x > 372{,}950 \end{cases}$$

Note que la asignación para el grupo de 15% de impuestos *no* es $0.15x$, sino 10% de los primeros \$8,350 en ingreso gravable más 15% del monto *sobre* \$8,350; esto es,

$$0.10(8350) + 0.15(x - 8350) = 835.00 + 0.15(x - 8350)$$

Las otras partes se pueden establecer de un modo semejante. La gráfica de T se muestra en la figura 9; observe que la pendiente de cada parte representa la tasa de impuesto.

FIGURA 9



Si x es un número real, se define el símbolo $[\![x]\!]$ como sigue:

$$[\![x]\!] = n, \text{ donde } n \text{ es el máximo entero tal que } n \leq x$$

Si identificamos $\mathbb{R}$ con puntos en una recta de coordenadas, entonces n es el primer entero a la *izquierda* de (o *igual* a) x.

EJEMPLOS **El símbolo $[\![x]\!]$**

Para graficar $[\![x]\!]$, grafique Y_1 = int(X) en modo Dot. En la TI−83/4 Plus, int está bajo MATH, NUM.

- $[\![0.5]\!] = 0$
- $[\![1.8]\!] = 1$
- $[\![\sqrt{5}]\!] = 2$
- $[\![3]\!] = 3$
- $[\![-3]\!] = -3$
- $[\![-2.7]\!] = -3$
- $[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$
- $[\![-0.5]\!] = -1$

La **función parte entera o función mayor entero** f está definida por $f(x) = [\![x]\!]$.

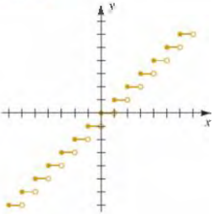
EJEMPLO 11 **Trazo de la gráfica de la función parte entera máxima**

Trace la gráfica de la función parte entera máxima.

SOLUCIÓN Las coordenadas x y y de algunos puntos en la gráfica se pueden listar como sigue:

(continúa)

FIGURA 10



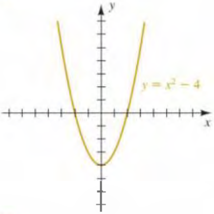
Valores de x	$f(x) = [\![x]\!]$
.	.
.	.
.	.
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
.	.
.	.
.	.

Siempre que x se encuentre entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal. Parte de la gráfica se traza en la figura 10. La gráfica continúa indefinidamente a la derecha y a la izquierda. ■

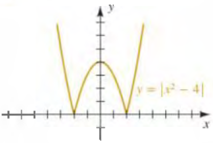
El siguiente ejemplo contiene valores absolutos.

FIGURA 11

a)



b)



EJEMPLO 12 **Trazo de la gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto**

Trace la gráfica de $y = |x^2 - 4|$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2 - 4$ se trazó en la figura 2 y se vuelve a trazar en la figura 11a). En ella se observa lo siguiente:

1) Si $x \leq -2$ o $x \geq 2$, entonces $x^2 - 4 \geq 0$ y, por lo tanto, $|x^2 - 4| = x^2 - 4$.

2) Si $-2 < x < 2$, entonces $x^2 - 4 < 0$ y, por lo tanto, $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$.

Deducimos de 1) que las gráficas de $y = |x^2 - 4|$ y $y = x^2 - 4$ coinciden para $|x| \geq 2$. Vemos de 2) que si $|x| < 2$, entonces la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^2 - 4$ por el eje x. Esto da el trazo de la figura 11b). ■

En general, si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, -d)$ con d positiva, entonces la gráfica de $y = |f(x)|$ contiene el punto $Q(c, d)$, es decir, Q es la reflexión de P sobre el eje x. Los puntos con valores y no negativos son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$.

En el capítulo 1 empleamos métodos algebraicos para resolver desigualdades que contienen valores absolutos de polinomios de grado 1, como

$$|2x - 5| < 7 \qquad \text{y} \qquad |5x + 2| \geq 3$$

Desigualdades mucho más complejas se pueden investigar con ayuda de una calculadora graficadora, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

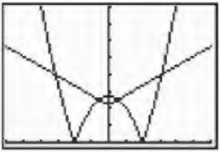
EJEMPLO 13 **Cómo resolver gráficamente una desigualdad de valor absoluto**

Estime las soluciones de

$$|0.14x^2 - 13.72| > |0.58x| + 11$$

FIGURA 12

$[-30, 30, 5]$ por $[0, 40, 5]$



SOLUCIÓN Para resolver la desigualdad, se realizan las asignaciones

$$Y_1 = \text{ABS}(0.14x^2 - 13.72) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{ABS}(0.58x) + 11$$

y se estiman los valores de x para los cuales la gráfica de Y_1 está *encima* de la gráfica de Y_2 (porque se desea que Y_1 sea *mayor* que Y_2). Después de quizá varios intentos, escogemos la ventana de visualización $[-30, 30, 5]$ por $[0, 40, 5]$, obteniendo gráficas semejantes a las de la figura 12. Como hay simetría respecto al eje y, es suficiente determinar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas para $x > 0$. Usando la función de intersección, obtenemos $x \approx 2.80$ y $x \approx 15.52$. Con referencia a la figura 12, obtenemos la solución (aproximada)

$$(-\infty, -15.52) \cup (-2.80, 2.80) \cup (15.52, \infty).$$

Graficación de $y = f(|x|)$

Más adelante en el libro y en cálculo, usted encontrará funciones como

$$g(x) = \ln |x| \qquad \text{y} \qquad h(x) = \operatorname{sen}|x|$$

Ambas funciones son de la forma $y = f(|x|)$. El efecto de sustituir $|x|$ por x se puede describir como sigue: si la gráfica de $y = f(x)$ contiene un punto $P(c, d)$ con c positiva, entonces la gráfica de $y = f(|x|)$ contiene el punto $Q(-c, d)$, es decir, Q es el reflejo de P sobre el eje y. Los puntos sobre el eje y ($x = 0$) son los mismos para las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$. Los puntos con valores de x negativos sobre la gráfica de $y = f(x)$ no están en la gráfica de $y = f(|x|)$, porque el resultado del valor absoluto es siempre no negativo.

Los procesos de desplazamiento, alargamiento, contracción y reflexión de una gráfica se pueden llamar de manera colectiva *transformación* de una gráfica, y la gráfica resultante recibe el nombre de **transformación** de la gráfica original. Un resumen gráfico de los tipos de transformaciones que se encuentran en esta sección aparece en el apéndice II.

2.5 Ejercicios

Ejer. 1–2: Suponga que f es una función par y g una función impar. Complete la tabla, si es posible.

1

x	-2	2
$f(x)$		7
$g(x)$		-6

2

x	-3	3
$f(x)$		-5
$g(x)$		6

Ejer. 3–12: Determine si f es par, impar o ninguna de éstas.

3 $f(x) = 5x^3 + 2x$

4 $f(x) = |x| - 3$

5 $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 5$

6 $f(x) = 7x^5 + 2x^3$

7 $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

8 $f(x) = \sqrt{5}$

9 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

10 $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

11 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

12 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

Ejer. 13–26: Trace, en el mismo plano de coordenadas, las gráficas de f para los valores dados de c. (Haga uso de simetría, desplazamiento, alargamiento, contracción o reflexión.)

13 $f(x) = |x| + c$; $\quad c = -3, 1, 3$

14 $f(x) = |x - c|$; $\quad c = -3, 1, 3$

15 $f(x) = -x^2 + c$; $\quad c = -4, 2, 4$

16 $f(x) = 2x^2 - c$; $\quad c = -4, 2, 4$

17 $f(x) = 2\sqrt{x} + c$; $\quad c = -3, 0, 2$

18 $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$; $\quad c = -3, 0, 2$

19 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c}$; $\quad c = -3, 0, 4$

20 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2$; $\quad c = -3, 0, 4$

21 $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$; $\quad c = -2, 1, 3$

22 $f(x) = (x + c)^3$; $\quad c = -2, 1, 2$

23 $f(x) = cx^3$; $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$

24 $f(x) = (cx)^3 + 1$; $c = -1, 1, 4$

25 $f(x) = \sqrt{cx} - 1$; $c = -1, \frac{1}{9}, 4$

26 $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$

Ejer. 27–32: Si el punto P está sobre la gráfica de una función f, encuentre el punto correspondiente sobre la gráfica de la función dada.

27 $P(0, 5)$; $y = f(x + 2) - 1$

28 $P(3, -1)$; $y = 2f(x) + 4$

29 $P(3, -2)$; $y = 2f(x - 4) + 1$

30 $P(-5, 8)$; $y = \frac{1}{2} f(x - 3) + 3$

31 $P(4, 9)$; $y = \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$

32 $P(-2, 1)$; $y = -3f(2x) - 5$

Ejer. 33–40: Explique la forma en que la gráfica de la función se compara con la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, para la ecuación $y = 2f(x + 3)$, la gráfica de f está desplazada 3 unidades a la izquierda y alargada verticalmente un factor de 2.

33 $y = f(x - 2) + 3$

34 $y = 3f(x - 1)$

35 $y = f(-x) - 4$

36 $y = -f(x + 2)$

37 $y = -\frac{1}{2} f(x)$

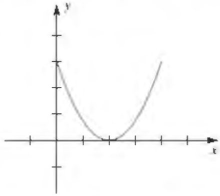
38 $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 3$

39 $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$

40 $y = \frac{1}{3}|f(x)|$

Ejer. 41–42: La gráfica de una función f con dominio $[0, 4]$ se muestra en la figura. Trace la gráfica de la ecuación dada.

41



a) $y = f(x + 3)$ **b)** $y = f(x - 3)$

c) $y = f(x) + 3$ **d)** $y = f(x) - 3$

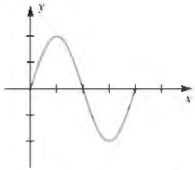
e) $y = -3f(x)$ **f)** $y = -\frac{1}{3} f(x)$

g) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ **h)** $y = f(2x)$

i) $y = -f(x + 2) - 3$ **j)** $y = f(x - 2) + 3$

k) $y = |f(x)|$ **l)** $y = f(|x|)$

42



a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x + 2)$

c) $y = f(x) - 2$ **d)** $y = f(x) + 2$

e) $y = -2f(x)$ **f)** $y = -\frac{1}{2} f(x)$

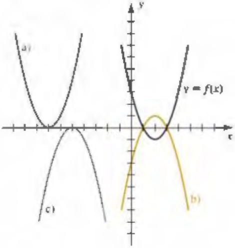
g) $y = f(-2x)$ **h)** $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

i) $y = -f(x + 4) - 2$ **j)** $y = f(x - 4) + 2$

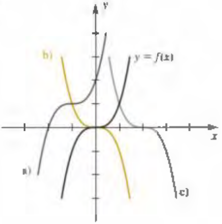
k) $y = |f(x)|$ **l)** $y = f(|x|)$

Ejer. 43–46: La gráfica de una función f se muestra, junto con gráficas de otras tres funciones a), b) y c). Use propiedades de simetría, desplazamientos y reflexiones para encontrar ecuaciones para las gráficas a), b) y c) en términos de f.

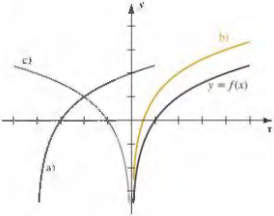
43



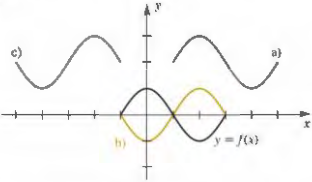
44



45



46



Ejer. 47–52: Trace la gráfica de f.

47 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48 $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -2 & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$

49 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } |x| \le 2 \\ -4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50 $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ -2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

51 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

52 $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Ejer. 53–54: El símbolo $[\![x]\!]$ denota valores de la función parte entera o mayor entero. Trace la gráfica de f.

53 **a)** $f(x) = [\![x - 3]\!]$ **b)** $f(x) = [\![x]\!] - 3$

c) $f(x) = 2[\![x]\!]$ **d)** $f(x) = [\![2x]\!]$

e) $f(x) = [\![-x]\!]$

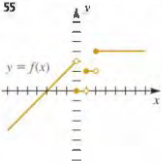
54 **a)** $f(x) = [\![x + 2]\!]$ **b)** $f(x) = [\![x]\!] + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!]$ **d)** $f(x) = [\![\frac{1}{2}x]\!]$

e) $f(x) = -[\![-x]\!]$

Ejer. 55–56: Complete los enunciados.

55



a) Como $x \to 1^-$, $f(x) \to$ ____

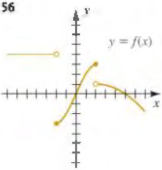
b) Como $x \to 1^+$, $f(x) \to$ ____

c) Como $x \to -2$, $f(x) \to$ ____

d) Como $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

e) Como $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

56



a) Como $x \to 2^-$, $f(x) \to$ ____

b) Como $x \to 2^+$, $f(x) \to$ ____

c) Como $x \to -1$, $f(x) \to$ ____

d) Como $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

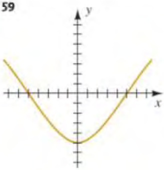
e) Como $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____

Ejer. 57 – 58: Explique por qué la gráfica de la ecuación no es la gráfica de una función.

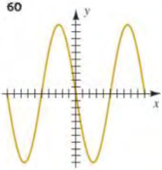
57 $x = y^2$ **58** $x = -|y|$

Ejer. 59 – 60: Para la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la figura, trace la gráfica de una función $y = |f(x)|$.

59



60



Ejer. 61 – 64: Trace la gráfica de la ecuación.

61 $y = |4 - x^2|$ **62** $y = |x^3 - 1|$

63 $y = |\sqrt{x} - 2|$ **64** $y = ||x| - 1|$

65 Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-2, 6]$ y rango $R = [-4, 8]$. Encuentre el dominio D y rango R para cada función. Suponga que $f(2) = 8$ y $f(6) = -4$.

a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $y = f(x - 3) + 1$ **d)** $y = f(x + 2) - 3$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

66 Sea $y = f(x)$ una función con dominio $D = [-6, -2]$ y rango $R = [-10, -4]$. Encuentre el dominio D y rango R para cada función.

a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ **b)** $y = f(2x)$

c) $y = f(x - 2) + 5$ **d)** $y = f(x + 4) - 1$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

67 **Tasas del impuesto sobre la renta** Cierto país grava los primeros \$20,000 de los ingresos de una persona a una tasa de 15%, y todos los ingresos superiores a \$20,000 los grava a 20%. Encuentre una función T por partes que especifique el impuesto total sobre un ingreso de x dólares.

68 **Tasas del impuesto a la propiedad** Cierto estado grava los primeros \$600,000 sobre el valor de la propiedad a una tasa de 1%; todo valor superior a \$600,000 se grava a 1.25%. Encuentre una función T definida por partes que especifique el impuesto total sobre una propiedad valuada en x dólares.

69 **Pago de regalías** Un libro se vende en \$12. El autor recibe regalías de 10% sobre los primeros 10,000 ejemplares vendidos, de 12.5% sobre los 5,000 ejemplares siguientes y de 15% sobre cualquier número de ejemplares adicionales. Encuentre una función R definida por partes que especifique el total de regalías si se venden x ejemplares.

70 **Tarifas de electricidad** Una compañía de suministro de electricidad cobra a sus clientes \$0.0577 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1,000 kWh consumidos, \$0.0532 por los siguientes 4,000 kWh y \$0.0511 por cualquier kWh por encima de 5,000. Encuentre una función definida por partes C para la factura de x kWh de un cliente.

Ejer. 71 – 74: Estime las soluciones de la desigualdad.

71 $|1.3x + 2.8| < 1.2x + 5$

72 $|0.3x| - 2 > 2.5 - 0.63x^2$

73 $|1.2x^2 - 10.8| > 1.36x + 4.08$

74 $|\sqrt{16 - x^2} - 3| < 0.12x^2 - 0.3$

Ejer. 75 – 80: Grafique f en la ventana de visualización $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$. Utilice la gráfica de f para predecir la gráfica de g. Verifique su predicción mediante la representación gráfica de g en la misma ventana de visualización.

75 $f(x) = 0.5x^3 - 4x - 5$; $g(x) = 0.5x^3 - 4x - 1$

76 $f(x) = 0.25x^3 - 2x + 1$; $g(x) = -0.25x^3 + 2x - 1$

77 $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$

78 $f(x) = |x + 2|$; $g(x) = |x - 3| - 3$

79 $f(x) = x^3 - 5x$; $g(x) = |x^3 - 5x|$

80 $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 5$; $g(x) = 0.5x^2 + 2x - 5$

81 **Cargo por alquiler de automóviles** Hay dos opciones disponibles de alquiler de automóviles para un viaje de cuatro días. La opción I es de \$45 por día, con 200 millas libres y \$0.40 por cada milla adicional. La opción II es de \$58.75 por día, con un cargo de \$0.25 por milla.

a) Determine el costo de un viaje de 500 millas para ambas opciones.

b) Modele los datos con una función de costo para cada opción de cuatro días.

c) Elabore una tabla que enumere el kilometraje y el cargo por cada opción para viajes entre 100 y 1200 millas, usando incrementos de 100 millas.

d) Utilice la tabla para determinar los kilómetros en los que cada opción es preferible.

82 **Flujo de tránsito** Los automóviles cruzan un puente que mide una milla de largo. Cada automóvil mide 12 pies de largo y se requiere que permanezca a una distancia del automóvil que está delante de él de por lo menos d pies (vea la figura).

a) Muestre que el mayor número de automóviles que pueden estar en el puente a la vez es $[\![5280/(12 + d)]\!]$, donde $[\![\ ]\!]$ denota la función parte entera o mayor entero.

b) Si la velocidad de cada automóvil es v mi/h, muestre que la tasa de flujo máximo de tránsito F (en automóviles por hora) está dado por $F = [\![5280v/(12 + d)]\!]$.

EJERCICIO 82

2.6 Funciones cuadráticas

Si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, un eje vertical que se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ (vea, por ejemplo, las figuras 4 y 5 de la sección 2.5). En esta sección se demuestra que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener por desplazamientos vertical u horizontal de la gráfica de $y = ax^2$ y, por lo tanto, también es una parábola. Una aplicación importante de estas ecuaciones es describir la trayectoria o recorrido de un objeto cerca de la superficie de la Tierra, cuando la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitacional. Por ejemplo, si un "jardinero" de un equipo de béisbol lanza una pelota hacia el cuadro, como se ilustra en la figura 1, y si la resistencia del aire y otras fuerzas externas son insignificantes, entonces la trayectoria de la pelota es una parábola. Si se introducen ejes de coordenadas apropiados, entonces la trayectoria coincide con la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ para alguna a, b y c. A la función determinada por esta ecuación se le llama *función cuadrática*.

FIGURA 1

Definición de función cuadrática Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$, y la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, del análisis sobre desplazamientos verticales de la sección 2.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ sobre el eje y. El siguiente ejemplo lo muestra de manera específica.

FIGURA 2

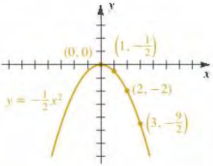
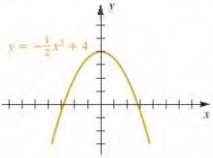


FIGURA 3



EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una función cuadrática**

Trace la gráfica de f si

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

SOLUCIÓN

a) Como f es par, la gráfica de f (es decir, de $y = -\frac{1}{2}x^2$) es simétrica respecto al eje y. Es semejante en forma, pero más ancha que la parábola $y = -x^2$, trazada en la figura 5 de la sección 2.5. Varios puntos sobre la gráfica son $(0, 0)$, $(1, -\frac{1}{2})$, $(2, -2)$ y $(3, -\frac{9}{2})$. Al marcar los puntos y usar simetría, obtenemos el trazo de la figura 2.

b) Para determinar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ se desplaza hacia arriba una distancia de 4 unidades, obteniendo el trazo de la figura 3. ■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, al completar el cuadrado, se puede cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Expresión de una función cuadrática como $f(x) = a(x - h)^2 + k$**

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN 1 Antes de completar el cuadrado, *es esencial que se factorice el coeficiente de x^2 de los dos primeros términos de $f(x)$*, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{dado} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{factorizamos 3 de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro de los paréntesis al sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, o 16. No obstante, si sumamos 16 a la expresión dentro de los paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad estamos sumando 48 a $f(x)$. Por consiguiente, debemos compensar al restar 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{dado} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{completamos el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

SOLUCIÓN 2 Comenzamos por dividir ambos lados entre el coeficiente de x^2.

$$\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{dado} \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 + 8x + \frac{50}{3} && \text{dividimos entre 3} \\ &= x^2 + 8x \underline{+ 16} + \frac{50}{3} \underline{- 16} && \text{sumamos y restamos 16, el número que completa el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= (x + 4)^2 + \frac{2}{3} && \text{ecuación equivalente} \\ f(x) &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{multiplicamos por 3} \end{aligned}$$

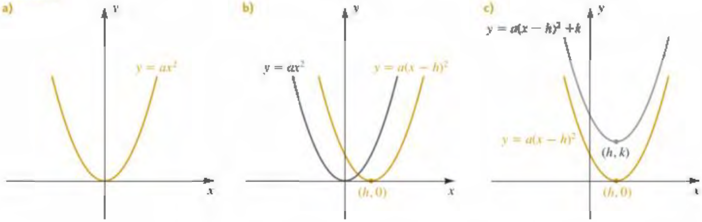
■

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el ejemplo 2, vemos que la gráfica de f es la misma que la gráfica de una ecuación de la forma estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

La gráfica de esta ecuación se puede obtener de la gráfica de $y = ax^2$ que se muestra en la figura 4a) por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical, como sigue. Primero, como en la figura 4b), obtenemos la gráfica de $y = a(x - h)^2$ al desplazar la gráfica de $y = ax^2$ ya sea a la izquierda o a la derecha, dependiendo del signo de h (la figura ilustra el caso con $h > 0$). A continuación, como en la figura 4 c), la gráfica en el inciso b) se desplaza verticalmente una distancia $|k|$ (la figura ilustra el caso con $k > 0$). Deducimos que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical.*

FIGURA 4



El trazo en la figura 4 c) muestra una posible gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el punto más bajo en la parábola y la función f tiene un **valor mínimo** $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto en la parábola. En este caso, la función f tiene un **valor máximo** $f(h) = k$.

Hemos obtenido el siguiente resultado.

Ecuación estándar de una parábola con eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

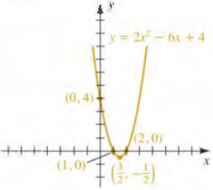
para $a \neq 0$ es una parábola que tiene vértice $V(h, k)$ y un eje vertical. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Por comodidad, con frecuencia se hace referencia a la *parábola* $y = ax^2 + bx + c$ cuando se considera la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar una ecuación estándar de una parábola**

Exprese $y = 2x^2 - 6x + 4$ como ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

FIGURA 5



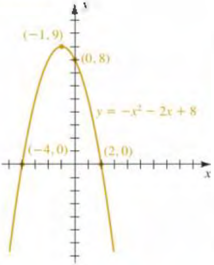
SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 6x + 4 && \text{dado} \\
&= 2(x^2 - 3x +) + 4 && \text{factorizamos 2 de } 2x^2 - 6x \\
&= 2\left(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4}\right) + \left(4 - \tfrac{9}{2}\right) && \text{completamos el cuadrado para } x^2 - 3x \\
&= 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} && \text{ecuación equivalente}
\end{aligned}
$$

La última ecuación tiene la forma de la ecuación estándar de una parábola con $a = 2$, $h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$. En consecuencia, el vértice $V(h, k)$ de la parábola es $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Como $a = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba.

Para determinar la intersección en y de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, establecemos $x = 0$ y obtenemos $y = 4$. Para las intersecciones en x, establecemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$ o la ecuación equivalente $2(x - 1)(x - 2) = 0$, obteniendo $x = 1$ y $x = 2$. Al marcar el vértice y usar las intersecciones en x y y se obtendrán suficientes puntos para un trazo de forma razonablemente precisa (vea la figura 5). ■

FIGURA 6



EJEMPLO 4 Cómo encontrar una ecuación estándar de una parábola

Exprese $y = -x^2 - 2x + 8$ como ecuación estándar de una parábola con eje vertical. Encuentre el vértice y trace la gráfica.

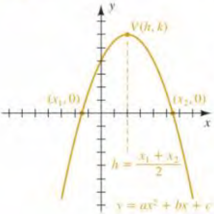
SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 - 2x + 8 && \text{dado} \\
&= -(x^2 + 2x +) + 8 && \text{factorizamos } -1 \text{ de } -x^2 - 2x \\
&= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1) && \text{completamos el cuadrado para } x^2 + 2x \\
&= -(x + 1)^2 + 9 && \text{ecuación equivalente}
\end{aligned}
$$

Esta es la ecuación estándar de una parábola con $h = -1$, $k = 9$ y, por lo tanto, el vértice es $(-1, 9)$. Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

La intersección en y de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante, 8. Para encontrar las intersecciones en x, resolvemos $-x^2 - 2x + 8 = 0$, o bien, lo que es equivalente, $x^2 + 2x - 8 = 0$. La factorización da $(x + 4)(x - 2) = 0$, y por lo tanto las intersecciones son $x = -4$ y $x = 2$. Usando esta información nos da el trazo de la figura 6. ■

FIGURA 7



Si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene puntos de intersección x_1 y x_2 con el eje x, como se ilustra en la figura 7 para el caso $a < 0$, entonces el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$ que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Por lo tanto, la coordenada h sobre el eje x del vértice (h, k) es $h = (x_1 + x_2)/2$. Algunos casos especiales se ilustran en las figuras 5 y 6.

En el ejemplo siguiente se encuentra la ecuación de una parábola a partir de los datos dados.

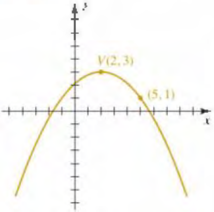
EJEMPLO 5 Cómo encontrar la ecuación de una parábola con un vértice dado

Encuentre una ecuación de una parábola que tiene vértice $V(2, 3)$ y un eje vertical y pasa por el punto $(5, 1)$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra el vértice V, el punto $(5, 1)$, y una posible posición de la parábola. Usando la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

FIGURA 8



con $h = 2$ y $k = 3$ tenemos

$$y = a(x - 2)^2 + 3$$

Para determinar a, se usa el hecho de que $(5, 1)$ está en la parábola y, por lo tanto, es una solución de la última ecuación. Así,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3 \qquad \text{o} \qquad a = -\tfrac{2}{9}$$

En consecuencia, la ecuación para la parábola es

$$y = -\tfrac{2}{9}(x - 2)^2 + 3$$

El siguiente teorema proporciona una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

Teorema para localizar el vértice de una parábola El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene coordenada x

$$-\frac{b}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Comenzamos por escribir $y = ax^2 + bx + c$ como

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \quad\right) + c$$

Ahora completamos el cuadrado al sumar $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión entre paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Observe que si $b^2/(4a^2)$ se suma *dentro* del paréntesis, entonces, debido al factor a del *exterior*, en realidad hemos sumado $b^2/(4a)$ a y. Por lo tanto, debemos compensar al restar $b^2/(4a)$. La última ecuación se puede escribir como

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Esta es la ecuación de una parábola que tiene vértice (h, k) con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$.

No es necesario recordar la fórmula para la coordenada y del vértice de la parábola en el resultado anterior. Una vez que se encuentra la coordenada x, podemos calcular y al sustituir $-b/(2a)$ para x en la ecuación de la parábola.

EJEMPLO 6 **Cómo encontrar el vértice de una parábola**

Encuentre el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 consideramos esta parábola y se calculó el vértice al completar el cuadrado. Usaremos la fórmula del vértice con $a = 2$ y $b = -6$, al obtener la coordenada x

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

A continuación encontramos la coordenada y al sustituir $\frac{3}{2}$ por x en la ecuación dada:

$$y = 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4 = -\tfrac{1}{2}$$

Entonces, el vértice es $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (vea la figura 5). ■

Puesto que la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ para $a \neq 0$ es una parábola, se puede usar la fórmula del vértice como ayuda para encontrar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. En específico, dado que la coordenada x del vértice V es $-b/(2a)$, la coordenada y de V es el valor de la función $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola se abre hacia abajo si $a < 0$ y hacia arriba si $a > 0$, este valor de función es el valor máximo o mínimo, respectivamente, de f. Podemos resumir estos datos de la siguiente manera.

Teorema sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es

1) el valor máximo de f si $a < 0$

2) el valor mínimo de f si $a > 0$

Usaremos este teorema en los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7 **Cómo encontrar un valor máximo (o mínimo)**

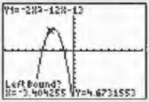
Encuentre el vértice de la parábola $y = f(x) = -2x^2 - 12x - 13$.

SOLUCIÓN Como el coeficiente de x^2 es -2 y $-2 < 0$, la parábola se abre hacia abajo y el valor y del vértice es un valor *máximo*. Asignamos $-2x^2 - 12x - 13$ a Y_1 y se grafica Y_1 en una ventana de visualización estándar.

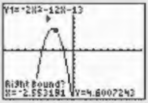
Cómo encontrar un valor máximo.

2nd CALC 4

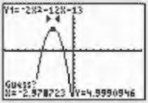
Use la tecla izquierda del cursor para mover el cursor intermitente a la izquierda del vértice y presione ENTER.



Ahora mueva el cursor a la derecha del vértice y presione ENTER.



Como ejercicio, coloque el cursor entre los límites izquierdo y derecho y presione ENTER.

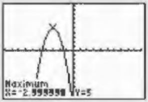


Nota de calculadora: alternativamente, podemos introducir valores de x para obtener respuestas. Las siguientes respuestas producen un máximo de 5 en $x = -3$.

¿A la izquierda? −4 ENTER

¿A la derecha? −2 ENTER

¿Ensayo? −3 ENTER



La calculadora indica que el vértice es alrededor de $(-3, 5)$. (Usted puede obtener resultados diferentes dependiendo de las posiciones del cursor.)

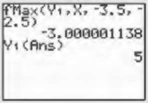
También es posible obtener un valor máximo desde la pantalla inicial de la siguiente manera. (Suponga que ha visto la gráfica y se estimó que la coordenada x del vértice se encuentra entre -3.5 y -2.5.) Primero se calcula el valor x del vértice.

Uso del operador de máxima función.

MATH 7 VARS ▷ 1 1 ,
X,T,θ,n , −3.5 , −2.5) ENTER

A continuación calculamos el valor y del vértice usando el resultado de fMax (está guardado en ANS).

VARS ▷ 1 1
(2nd ANS) ENTER

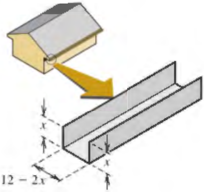


Observe los resultados "extraños" dados por fMax. (El profesor no se impresiona mucho si el alumno dice que el vértice es $(-3.000001138, 5)$. En este caso una calculadora es útil, pero es fácil calcular que

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(-2)} = -3 \quad \text{y} \quad f(-3) = 5,$$

lo cual da un vértice de $(-3, 5)$ (y una respuesta que agradará al profesor).

FIGURA 9



EJEMPLO 8 **Cómo encontrar el valor máximo de una función cuadrática**

Una larga hoja rectangular metálica, de 12 pulgadas de ancho, se convertirá en un canal al doblar hacia arriba dos de los lados, de modo que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuántas pulgadas deben doblarse hacia arriba para que el canal tenga su mayor capacidad?

SOLUCIÓN El canal se ilustra en la figura 9. Si x denota el número de pulgadas hacia arriba en cada lado, el ancho de la base del canal es $12 - 2x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando el área de la sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12 - 2x$ tiene su valor máximo. Esta área se denota con $f(x)$ y tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x \end{aligned}$$

que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a = -2$, $b = 12$ y $c = 0$. Como f es una función cuadrática y $a = -2 < 0$, se deduce del teorema anterior que el valor máximo de f se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3$$

Por lo tanto, cada lado debe doblarse 3 pulgadas hacia arriba para lograr la máxima capacidad.

Como alternativa de solución, podemos notar que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene intersecciones en $x = 0$ y $x = 6$. Por lo tanto, el promedio de las intersecciones,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

es la coordenada x de la parábola y el valor que aporta la capacidad máxima. ■

En el capítulo 1 resolvimos algebraicamente ecuaciones cuadráticas y desigualdades. El siguiente ejemplo indica la forma en que éstas se pueden resolver con ayuda de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 9 **Análisis del vuelo de un proyectil**

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde una altura de 600 pies sobre el suelo. Su altura $h(t)$ en pies sobre el suelo después de T segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600$$

a) Determine una ventana de visualización razonable que incluya todas las características pertinentes de la gráfica de h.

b) Estime cuándo la altura del proyectil será de 5,000 pies sobre el suelo.

c) Determine cuándo la altura del proyectil será de más de 5,000 pies sobre el suelo.

d) ¿Cuánto tiempo estará en vuelo el proyectil?

SOLUCIÓN

a) La gráfica de h es una parábola que se abre hacia abajo. Para estimar Ymax (note que x y y se usan indistintamente con t y h), se aproxima el valor máximo de h. Usando

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

vemos que la altura máxima es aproximadamente $h(25) = 10{,}675$.

El proyectil se eleva aproximadamente durante los primeros 25 segundos y debido a que su altura en $t = 0$, 600 pies es pequeña en comparación con los 10,675, tardará sólo un poco más de 25 segundos adicionales en caer al suelo. Como h y t son positivos, una ventana de visualización razonable es

$$[0, 60, 5] \text{ por } [0, 11{,}000, 1000]$$

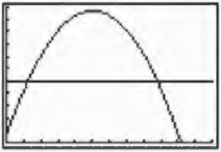
Nota de calculadora: una vez que determinamos los valores de Xmin y Xmax, se usa la función ZoomFit (acercamiento) para graficar una función sobre el intervalo [Xmin, Xmax]. En este ejemplo, se asigna 0 a Xmin y 51 a Xmax y luego se selecciona ZoomFit bajo el menú ZOOM.

b) Deseamos estimar dónde se interseca la gráfica de h con la recta horizontal $h(t) = 5000$, para lo cual se hacen las asignaciones

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600 \qquad \text{y} \qquad Y_2 = 5000$$

FIGURA 10

[0, 60, 5] por [0, 11,000, 1000]



y se obtiene una pantalla semejante a la que se muestra en la figura 10. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 muestra sólo la altura en el tiempo t —*no* es la trayectoria del proyectil, que es vertical. Usando una función de intersección, encontramos que el menor valor de t para el que $h(t) = 5000$ es alrededor de 6.3 segundos.

Como el vértice está sobre el eje de la parábola, el otro tiempo en el que $h(t)$ es 5,000 es aproximadamente $25.1 - 6.3$, es decir, 18.8, segundos *después* de que $t = 25.1$, es decir, en $t \approx 25.1 + 18.8 = 43.9$ segundos.

c) El proyectil está a más de 5,000 pies sobre el suelo cuando la gráfica de la parábola de la figura 10 está encima de la recta horizontal, es decir, cuando

$$6.3 < t < 43.9$$

d) El proyectil estará en vuelo hasta que $h(t) = 0$. Esto corresponde a la intersección en x de la figura 10. Usando una función de raíz o cero, se obtiene $t \approx 50.9$ segundos. (Observe que como la intersección en y no es cero, es incorrecto simplemente duplicar el valor de t del vértice para encontrar el tiempo total del vuelo; no obstante, esto *sería* aceptable para problemas en los que $h(0) = 0$.) ■

Al trabajar con funciones cuadráticas, con frecuencia resulta de mayor interés encontrar el vértice y las intersecciones en x. Por lo general, una función cuadrática determinada se asemeja con mucho a una de las tres formas que se indican en la siguiente tabla.

Relación entre formas de función cuadrática y su vértice e intersecciones en x

Forma	Vértice (h, k)	Intersecciones en x (si los hay)
1) $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$	h y k como en la forma	$x = h \pm \sqrt{-k/a}$ (vea abajo)
2) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $\quad k = f(h)$	$x = x_1, x_2$
3) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$h = -\dfrac{b}{2a}$, $\quad k = f(h)$	$x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (vea abajo)

Si los radicandos en 1) o 3) son negativos, entonces no hay intersecciones en x. Para encontrar éstas con la forma 1), se usa la ecuación cuadrática especial de la página 46. Si tenemos una función cuadrática de la forma 3) y deseamos encontrar el vértice y las intersecciones en x, quizá sea mejor encontrar primero las intersecciones en x usando la fórmula cuadrática. Luego podemos determinar con facilidad la coordenada x del vértice, h, ya que

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = h \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desde luego, si la función en la forma 3) se factoriza fácilmente, no es necesario utilizar la fórmula cuadrática.

En un capítulo posterior se estudiarán las parábolas.

2.5 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre la ecuación estándar de cualquier parábola que tenga vértice V.

1 $V(-3, 1)$

2 $V(5, -4)$

3 $V(0, -2)$

4 $V(-7, 0)$

Ejer. 5–12: Exprese $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

5 $f(x) = -x^2 - 4x - 5$

6 $f(x) = x^2 - 6x + 11$

7 $f(x) = 2x^2 - 16x + 35$

8 $f(x) = 5x^2 + 20x + 14$

9 $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

10 $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

12 $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{21}{5}$

Ejer. 13–22: a) Use la fórmula cuadrática para encontrar los ceros (intersecciones en x) de f. b) Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$. c) Trace la gráfica de f.

13 $f(x) = x^2 - 6x$

14 $f(x) = -x^2 - 6x$

15 $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

16 $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

17 $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$

18 $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

19 $f(x) = x^2 + 4x + 9$

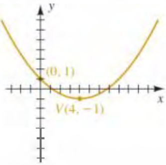
20 $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$

21 $f(x) = -2x^2 + 16x - 26$

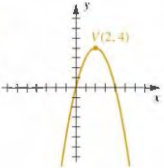
22 $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

Ejer. 23–26: Encuentre la ecuación estándar de la parábola que se muestra en la figura.

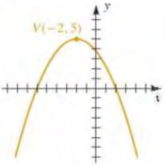
23



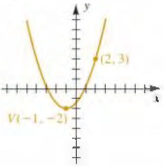
24



25



26

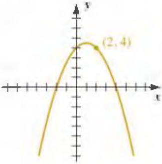


Ejer. 27–28: Encuentre una ecuación de la forma

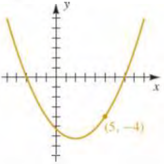
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

de la parábola que se muestra en la figura. Vea la tabla de la página 159.

27



28



Ejer. 29–34: Encuentre la ecuación estándar de una parábola que tiene un eje vertical y satisface las condiciones dadas.

29 Vértice $(0, -2)$, que pasa por $(3, 25)$

30 Vértice $(0, 7)$, que pasa por $(2, -1)$

31 Vértice $(3, 1)$, intersecciones 0 en x

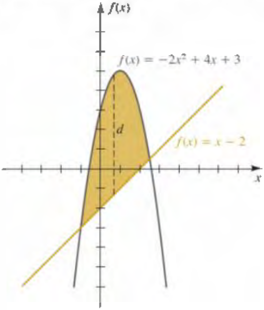
32 Vértice $(4, -7)$, intersecciones -4 en x

33 Intersecciones -3 y 5 en x, el punto más alto tiene coordenada y en 4

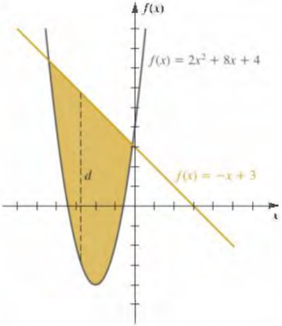
34 Intersecciones 8 y 0 en x, el punto más bajo tiene coordenada y en -48

Ejer. 35–36: Encuentre la máxima distancia vertical d entre la parábola y la recta para la región de color naranja.

35



36



Ejer. 37–38: Existe ozono en todos los niveles de la atmósfera terrestre. La densidad del ozono varía en forma estacional y de latitud. En Edmonton, Canadá, la densidad $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 y 35 kilómetros se determinó experimentalmente. Para cada $D(h)$ y estación, aproxime la altitud a la que la densidad del ozono es máxima.

37 $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

38 $D(h) = -0.078h^2 + 3.811h - 32.433$ (primavera)

39 **Tasa de crecimiento infantil** La rapidez de crecimiento y (en libras por mes) de un niño está relacionada con el peso actual x (en libras) por la fórmula $y = cx(21 - x)$, donde c es una constante positiva y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se presenta la máxima tasa de crecimiento?

40 **Rendimiento de gasolina** El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina a una velocidad de v mi/h, está dado por

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \quad \text{para} \quad 0 < v < 70.$$

a) Encuentre la velocidad más económica para un viaje.

b) Encuentre el máximo valor de M.

41 **Altura de un proyectil** Un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio, con una velocidad inicial de 144 ft/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el suelo después de t segundos está dada por la ecuación

$$s(t) = -16t^2 + 144t + 100.$$

a) Encuentre su máxima distancia desde el suelo.

b) Encuentre la altura del edificio.

42 **Vuelo de un proyectil** Un objeto se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 ft/s y su distancia $s(t)$ en pies desde el suelo después de t segundos está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + v_0 t$.

a) Si el objeto choca contra el suelo después de 12 segundos, encuentre su velocidad inicial v_0.

b) Encuentre su distancia máxima sobre el suelo.

43 Encuentre dos números reales positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea un máximo.

44 Encuentre dos números reales positivos cuya diferencia sea 60 y cuyo producto sea un mínimo.

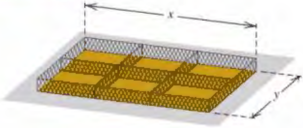
45 **Construcción de jaulas** Mil pies de cerca de celosía se usarán para construir seis jaulas para animales, como se ve en la figura.

a) Exprese el ancho y como función de la longitud x.

b) Exprese el área encerrada total A de las jaulas como función de x.

c) Encuentre las dimensiones que maximizan el área encerrada.

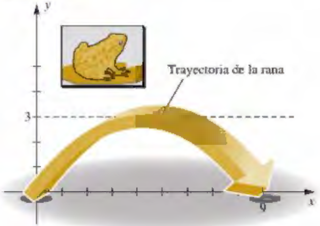
EJERCICIO 45



46 **Instalación de una cerca en un campo** Un agricultor desea colocar una cerca alrededor de un campo rectangular y luego dividir el campo en tres terrenos rectangulares al colocar dos cercas paralelas a uno de los lados. Si el agricultor puede comprar sólo 1,000 yardas de cerca, ¿qué dimensiones darán el área rectangular máxima?

47 **Animales saltarines** Los vuelos de animales saltarines por lo general tienen trayectorias parabólicas. La figura de la siguiente columna ilustra el salto de una rana sobrepuesto en un plano de coordenadas. La longitud del salto es de 9 pies y la máxima altura desde el suelo es 3 pies. Encuentre una ecuación estándar para la trayectoria de la rana.

EJERCICIO 47



48 **La bala de cañón humana** En la década de 1940, la exhibición de la bala de cañón humana fue ejecutada regularmente por Emmanuel Zacchini para el circo The Ringling Brothers and Barnum & Bailey. La punta del cañón se elevaba 15 pies del suelo y la distancia horizontal total recorrida era de 175 pies. Cuando el cañón se apuntaba a un ángulo de 45°, una ecuación del vuelo parabólico (vea la figura) tenía la forma $y = ax^2 + x + c$.

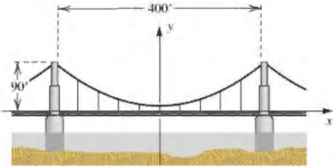
a) Use la información dada para hallar una ecuación del vuelo.

b) Encuentre la altura máxima alcanzada por la bala de cañón humana.

EJERCICIO 48

49 **Forma de un puente colgante** Una sección de un puente colgante tiene su peso uniformemente distribuido entre torres gemelas que están a 400 pies entre sí y se elevan 90 pies sobre la calzada horizontal (vea la figura). Un cable tendido entre los remates de las torres tiene la forma de una parábola y su punto central está 10 pies sobre la calzada. Suponga que se introducen ejes de coordenadas, como se muestra en la figura.

EJERCICIO 49



a) Encuentre una ecuación para la parábola.

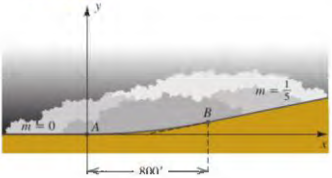
b) Nueve cables verticales igualmente espaciados se usan para sostener el puente (vea la figura). Encuentre la longitud total de estos soportes.

50 **Diseño de una carretera** Unos ingenieros de tránsito diseñan un tramo de carretera que conectará una calzada horizontal con una que tiene una pendiente de 20% (es decir, pendiente $\frac{1}{5}$), como se ilustra en la figura. La transición suave debe tener lugar sobre una distancia horizontal de 800 pies, con una pieza parabólica de carretera empleada para conectar los puntos A y B. Si la ecuación del segmento parabólico es de la forma $y = ax^2 + x + c$, se puede demostrar que la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ sobre la parábola está dada por $m = 2ax + b$.

a) Encuentre una ecuación de la parábola que tenga una recta tangente con pendiente 0 en A y $\frac{1}{5}$ en B.

b) Encuentre las coordenadas de B.

EJERCICIO 50



51 **Entrada parabólica** Una entrada tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 pies de alto en el centro y 6 pies de ancho en la base. Si una caja rectangular de 8 pies de alto debe caber por la entrada, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?

52 **Trayectoria de una pelota de béisbol** Suponga que una pelota de béisbol que cae en el terreno de juego sigue una trayectoria parabólica con la ecuación

$$y = -\frac{3}{4000}x^2 + \frac{3}{10}x + 3,$$

donde x y y se miden ambas en pies.

a) Calcule la altura máxima de la pelota de béisbol.

b) ¿La pelota de béisbol pasará por encima de una cerca de 8 pies que está a 385 pies de distancia de la base?

53 **Descuento por cantidad** Una empresa vende calzado deportivo a distribuidores, a razón de \$40 el par si su pedido es de menos de 50 pares. Si un distribuidor solicita 50 o más pares (hasta 600), el precio por par se reduce a razón de 4 centavos por el número solicitado. ¿De qué cantidad debe ser el pedido para generar la máxima cantidad de dinero para la empresa?

54 **Descuento por grupo** Una agencia de viajes ofrece viajes en grupo a razón de \$60 por persona para los primeros 30 participantes. Para grupos más grandes, de hasta 90, cada persona recibe un descuento de \$0.50 por cada participante que rebase 30. Por ejemplo, si participan 31 personas, entonces el costo por persona es \$59.50. Determine el tamaño del grupo que producirá la máxima cantidad de dinero para la agencia.

55 **Tarifa de TV por cable** Una empresa de televisión por cable actualmente presta servicio a 8,000 familias y cobra \$50 al mes. Un estudio de marketing indica que cada reducción de \$5 en el cobro mensual resultará en 1,000 nuevos clientes. Sea $R(x)$ el ingreso mensual total cuando el cobro mensual es x dólares.

a) Determine la función de ingresos R.

b) Trace la gráfica de R y encuentre el valor x que resulte en el máximo ingreso mensual.

56 **Renta de un departamento** Una empresa de bienes raíces es propietaria de 218 departamentos en edificios, que se ocupan en su totalidad cuando la renta es de \$940 al mes. La empresa estima que por cada \$25 de aumento en renta, se desocuparán cinco departamentos. ¿Cuál debe ser el importe de la renta para que la empresa reciba el máximo de ingreso mensual?

Ejer. 57–58: Grafique $y = x^4 - x^{1/3}$ y f en el mismo plano de coordenadas, y estime los puntos de intersección.

57 $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$

58 $f(x) = -x^2 + 0.5x + 0.4$

59 Grafique, en el mismo plano de coordenadas, $y = ax^2 + x + 1$ para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4, y describa la forma en que el valor de a afecta la gráfica.

60 Grafique, en el mismo plano de coordenadas, $y = x^2 + bx + 1$ para $b = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3, y describa la forma en que el valor de b afecta la gráfica.

61 Precipitación en Seattle El promedio de precipitación mensual (en pulgadas) para Seattle se lista en la siguiente tabla. (*Nota:* no se proporciona el promedio de abril.)

a) Marque los puntos del promedio de precipitación mensual.

b) Modele los datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Grafique f y los datos en los mismos ejes de coordenadas.

c) Use f para pronosticar el promedio de lluvia en abril. Compare su pronóstico con el valor real de 2.55 pulgadas.

Mes	Precipitación
Ene.	5.79
Feb.	4.02
Mar.	3.71
Abr.	
May.	1.70
Jun.	1.46
Jul.	0.77
Ago.	1.10
Sept.	1.72
Oct.	3.50
Nov.	5.97
Dic.	5.81

62 Homicidios con arma de fuego Los números anuales de homicidios con pistola (en miles) de 1982 a 1993 aparecen en la siguiente tabla. (Después de este periodo, dicho número disminuyó y se estabilizó en valores semejantes a los de mediados de la década de 1980.)

Año	Homicidos
1982	8.3
1983	8.0
1984	7.6
1985	7.9
1986	8.3
1987	8.0
1988	8.3
1989	9.2
1999	10.0
1991	11.6
1992	12.5
1993	13.3

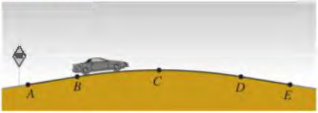
a) Grafique los puntos de datos. Comente cualesquiera tendencias generales en los datos.

b) Modele estos datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

c) Trace la gráfica de f junto con los datos.

63 Curvas verticales en cresta Cuando los ingenieros diseñan carreteras, deben diseñar cuestas para asegurar que los conductores tengan una correcta visibilidad. Las cuestas se conocen como *curvas verticales en cresta* que modifican la pendiente de una carretera. Los ingenieros usan una forma parabólica para una cuesta de carretera, con el vértice localizado en lo alto de la cresta. Dos carreteras con diferentes pendientes se enlazarán con una curva en cresta parabólica. La carretera pasa por los puntos $A(-800, -48)$, $B(-500, 0)$, $C(0, 40)$, $D(500, 0)$ y $E(800, -48)$, como se aprecia en la figura. La carretera es lineal entre A y B, parabólica entre B y D, y luego lineal entre D y E.

EJERCICIO 63



a) Encuentre una función f definida por partes que modele la carretera entre los puntos A y E.

b) Grafique f en la ventana de visualización $[-800, 800, 100]$ por $[-100, 200, 100]$.

64 Curvas verticales en columpio Revise el ejercicio 63. Los valles o inflexiones en carreteras se conocen como *curvas verticales en columpio*, que también se modelan usando parábolas. Dos carreteras con diferentes pendientes que se encuentran en una curva en columpio necesitan enlazarse. La carretera pasa por los puntos $A(-500, 243\frac{1}{3})$, $B(0, 110)$, $C(750, 10)$, $D(1500, 110)$ y $E(2000, 243\frac{1}{3})$, como se muestra en la figura. La carretera es lineal entre A y B, parabólica entre B y D, y lineal entre D y E.

EJERCICIO 64

a) Encuentre una función f definida por partes que modele la carretera entre los puntos A y E.

b) Grafique f en la ventana de visualización $[-500, 2000, 500]$ por $[0, 800, 100]$.

65 Trayectoria parabólica Bajo condiciones ideales, un objeto lanzado desde el nivel del suelo seguirá una trayectoria parabólica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, donde a y b son constantes y x representa la distancia horizontal recorrida por el objeto.

a) Determine a y b para que el objeto alcance una altura máxima de 100 pies y recorra una distancia horizontal de 150 pies antes de regresar al suelo.

b) Grafique $f(x) = ax^2 + bx$ en la ventana de visualización $[0, 180, 50]$ por $[0, 120, 50]$.

c) Trace la gráfica de $y = kax^2 + bx$, donde $k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$, en la misma ventana de visualización de $[0, 600, 50]$ por $[0, 400, 50]$. ¿En qué forma la constante k afecta la trayectoria del objeto?

2.7 Operaciones con funciones

Las funciones suelen definirse usando sumas, diferencias, productos y cocientes de varias expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

Se llama h a *la suma* de f y g y se denota por $f + g$. Entonces,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1}.$$

En general, si f y g son *cualesquiera* funciones, usamos la terminología y notación dadas en la siguiente tabla.

Si bien es cierto que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, recuerde que, en general, $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Terminología	Valor de función
suma $f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
cociente $\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Los dominios de $f + g$, $f - g$ y fg son la intersección I de los dominios de f y g, es decir, los números que son *comunes* a ambos dominios. El dominio de f/g es el subconjunto de I formado por toda x en I tal que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar valores de función de $f + g$, $f - g$, fg y f/g**

Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^3$, encuentre $(f + g)(2)$, $(f - g)(2)$, $(fg)(2)$ y $(f/g)(2)$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 3(2) - 2 = 4$ y $g(2) = 2^3 = 8$, tenemos

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12$$
$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4$$
$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(8) = 32$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

■

EJEMPLO 2 **Encontrar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$**

Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, encuentre $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$, y exprese los dominios de las funciones respectivas.

SOLUCIÓN El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. La intersección de estos dominios es $[-2, 2]$, que es el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg. Para el dominio de f/g, excluimos cada número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x + 1 = 0$ (es decir, $x = -\frac{1}{3}$). Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= \sqrt{4-x^2} + (3x+1), && -2 \le x \le 2 \\
(f-g)(x) &= \sqrt{4-x^2} - (3x+1), && -2 \le x \le 2 \\
(fg)(x) &= \sqrt{4-x^2}\,(3x+1), && -2 \le x \le 2 \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1}, && -2 \le x \le 2 \text{ y } x \neq -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

■

Una función f es una **función polinomial** si $f(x)$ es un polinomio, es decir, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son de la forma cx^k, donde c es un número real y k un entero no negativo. Observe que las funciones cuadráticas consideradas en la sección anterior son funciones polinomiales.

Una **función algebraica** es una función que se puede expresar en términos de sumas diferencias, productos, cocientes o raíces finitas, de funciones polinomiales.

EJEMPLO **Función algebraica**

■ $$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}$$

Las funciones que no son algebraicas son **trascendentes**. Las funciones exponenciales y logarítmicas consideradas en el capítulo 4 son ejemplos de funciones trascendentes.

En el resto de esta sección estudiaremos cómo se usan dos funciones f y g para obtener las *funciones compuestas* $f \circ g$ y $g \circ f$ (léase "f composición g" y "g composición f", respectivamente). Las funciones de este tipo son muy importantes en el cálculo. La función $f \circ g$ se define como sigue.

Definición de función compuesta

La **función compuesta** $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

$$(f \circ g)(g) = (g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

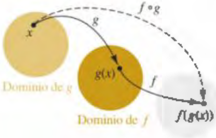
La figura 1 es un diagrama que ilustra las relaciones entre f, g y $f \circ g$. Observe que para x en el dominio de g, *primero determinamos $g(x)$* (que debe estar en el dominio de f) y luego, *en segundo lugar, encontramos $f(g(x))$*.

*Un número x está en el dominio de $(f \circ g)(x)$ si y sólo si **tanto** $g(x)$ como $f(g(x))$ están definidas.*

Para la función compuesta $g \circ f$, se invierte este orden, primero se obtiene $f(x)$ y después se calcula $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en el dominio de f tal que $f(x)$ está en el dominio de g.

Como la notación $g(x)$ se lee "g de x", a veces decimos que *g es una función de x*. Para la función compuesta $f \circ g$, la notación $f(g(x))$ se lee "f de g de x", y podríamos considerar a f una función de $g(x)$. En este sentido, *una función compuesta es una función de una función* o, en forma más precisa, una función de los valores de otra función.

FIGURA 1



EJEMPLO 3 **Encontrar funciones compuestas**

Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$.

a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

c) Encuentre $f(g(2))$ en dos formas diferentes: primero usando por separado las funciones f y g, y luego usando la función compuesta $f \circ g$.

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\ &= f(3x+5) && \text{definición de } g\\ &= (3x+5)^2 - 1 && \text{definición de } f\\ &= 9x^2 + 30x + 24 && \text{simplificamos}\end{aligned}$$

El dominio de f y g es $\mathbb{R}$. Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el valor de la función $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el dominio de $f \circ g$ también es $\mathbb{R}$. Note que *tanto $g(x)$ como $f(g(x))$* están definidas para todos los números reales.

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\ &= g(x^2 - 1) && \text{definición de } f\\ &= 3(x^2 - 1) + 5 && \text{definición de } g\\ &= 3x^2 + 2 && \text{simplificamos}\end{aligned}$$

Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el valor de la función $f(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}$. Observe que *tanto $f(x)$ como $g(f(x))$* están definidas para todos los números reales.

c) Para determinar $f(g(2))$ usando por separado $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}g(2) &= 3(2) + 5 = 11\\ f(g(2)) &= f(11) = 11^2 - 1 = 120\end{aligned}$$

Para encontrar $f(g(2))$ usando $f \circ g$, vea el inciso a), donde obtuvimos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 9x^2 + 30x + 24.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f(g(2)) &= 9(2)^2 + 30(2) + 24\\ &= 36 + 60 + 24 = 120\end{aligned}$$

Note que en el ejemplo 3, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no son siempre iguales, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

Si dos funciones f y g tienen ambas un dominio $\mathbb{R}$, entonces el dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ también es $\mathbb{R}$. Esto se ilustró en el ejemplo 3. El siguiente ejemplo muestra que el dominio de una función compuesta puede diferir de aquellos de las dos funciones dadas.

EJEMPLO 4 **Cómo encontrar funciones compuestas**

Sea $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

SOLUCIÓN Primero se observamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el dominio de g es el conjunto de todos los números reales no negativos, es decir, el intervalo $[0, \infty)$. Procedemos como sigue.

a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\ &= f\left(\sqrt{x}\right) && \text{definición de } g\\ &= \left(\sqrt{x}\right)^2 - 16 && \text{definición de } f\\ &= x - 16 && \text{simplificamos}\end{aligned}$$

Si consideramos sólo la expresión final, $x - 16$, podríamos pensar que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}$, porque $x - 16$ está definido para todo número real x. No obstante, éste no es el caso. Por definición, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en $[0, \infty)$ (el dominio de g) tal que $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f). Como $g(x) = \sqrt{x}$ está en $\mathbb{R}$ para toda x en $[0, \infty)$, se deduce que el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$. Observe que *tanto* $g(x)$ *como* $f(g(x))$ están definidas para x en $[0, \infty)$.

b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\ &= g(x^2 - 16) && \text{definición de } f\\ &= \sqrt{x^2 - 16} && \text{definición de } g\end{aligned}$$

Por definición, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de toda x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f) tal que $f(x) = x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$ (el dominio de g). El enunciado "$x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$" es equivalente a cada una de las desigualdades

$$x^2 - 16 \geq 0, \qquad x^2 \geq 16, \qquad |x| \geq 4$$

Así, el dominio de $g \circ f$ es la unión $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Note que *tanto* $f(x)$ *como* $g(f(x))$ están definidas para x en $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. También observe que este dominio es diferente de los dominios de f y g. ■

El siguiente ejemplo ilustra cómo en ocasiones se pueden obtener valores especiales de funciones compuestas a partir de tablas.

EJEMPLO 5 **Cómo encontrar valores de una función compuesta a partir de tablas**

Varios valores de dos funciones f y g aparecen en las siguientes tablas.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	3	2

Encuentre $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ f)(2)$ y $(g \circ g)(2)$.

SOLUCIÓN Al usar la definición de función compuesta y al consultar las tablas anteriores, obtenemos

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$
$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1$$
$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(1) = 4$$

En algunos problemas aplicados es necesario expresar una cantidad y como función del tiempo t. El ejemplo siguiente ilustra que a veces es más fácil introducir una tercera variable x, expresar x como función de t (es decir, $x = g(t)$), expresar y como función de x (es decir, $y = f(x)$), y finalmente formar la función compuesta dada por $y = f(x) = f(g(t))$.

EJEMPLO 6 **Cómo determinar el volumen de un globo usando una función compuesta**

Un meteorólogo infla con helio un globo esférico. Si el radio del globo cambia a razón de 1.5 cm/s, exprese su volumen V como función del tiempo t (en segundos).

SOLUCIÓN Establecemos x como el radio del globo. Si suponemos que el radio es inicialmente 0, entonces después de t segundos

$$x = 1.5t \quad \text{radio del globo después de } t \text{ segundos}$$

Para ilustrar, después de 1 segundo, el radio es 1.5 centímetros; después de 2 segundos es 3.0 centímetros; después de 3 segundos es 4.5 centímetros, y así sucesivamente.

A continuación escribimos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3. \quad \text{volumen de una esfera de radio } x$$

Esto ofrece una relación de función compuesta en la que V es una función de x, y x una función de t. Por sustitución, obtenemos

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{3}{2}t\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{27}{8}t^3\right)$$

Al simplificar, obtenemos la siguiente fórmula para V como función de t:

$$V(t) = \tfrac{9}{2}\pi t^3$$

Si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \qquad \text{y} \qquad u = g(x)$$

entonces la sustitución de u en $y = f(u)$ da

$$y = f(g(x))$$

Para ciertos problemas en cálculo, este procedimiento *se invierte*, es decir, dada $y = h(x)$ para alguna función h, se encuentra una *función compuesta* $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tal que $h(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO 7 **Cómo encontrar una función compuesta**

Exprese $y = (2x + 5)^8$ como una función compuesta.

SOLUCIÓN Suponga que, para un número real x, deseamos evaluar la expresión $(2x + 5)^8$ usando una calculadora. Primero se calcularía el valor de $2x + 5$ y luego el resultado se elevaría a la octava potencia. Esto sugiere establecer

$$u = 2x + 5 \qquad \text{y} \qquad y = u^8,$$

que es una función compuesta para $y = (2x + 5)^8$. ■

El método empleado en el ejemplo anterior se puede extender a otras funciones. En general, suponga que tenemos $y = h(x)$. Para escoger la expresión *interior* $u = g(x)$ en una función compuesta, se formula la pregunta siguiente: si se usa una calculadora, ¿qué parte de la expresión $h(x)$ se evaluaría primero? Esto con frecuencia conduce a una elección apropiada para $u = g(x)$. Después de escoger u, se regresa a $h(x)$ para determinar $y = f(u)$. El siguiente ejemplo contiene problemas comunes.

EJEMPLO **Representación de una función compuesta**

Valor de la función	Elección para $u = g(x)$	Elección para $y = f(u)$
■ $y = (x^3 - 5x + 1)^4$	$u = x^3 - 5x + 1$	$y = u^4$
■ $y = \sqrt{x^2 - 4}$	$u = x^2 - 4$	$y = \sqrt{u}$
■ $y = \dfrac{2}{3x + 7}$	$u = 3x + 7$	$y = \dfrac{2}{u}$

La elección de funciones para una función compuesta nunca es única. Por ejemplo, considere la primera expresión de los ejemplos precedentes:

$$y = (x^3 - 5x + 1)^4$$

Si n es cualquier entero diferente de cero, podríamos escoger

$$u = (x^3 - 5x + 1)^n \qquad \text{y} \qquad y = u^{4/n}$$

Entonces, hay un número *ilimitado* de elegir funciones para una función compuesta. Por lo general, el objetivo es elegir una función tal que la expresión para y sea sencilla, como se hizo en el ejemplo.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que una calculadora graficadora puede ayudarnos a determinar el dominio de una función compuesta. Usamos las mismas funciones que aparecen en el ejemplo 4.

EJEMPLO 8 **Análisis gráfico de una función compuesta**

Sea $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre $f(g(3))$.

b) Trace $y = (f \circ g)(x)$ y use la gráfica para encontrar el dominio de $f \circ g$.

SOLUCIÓN

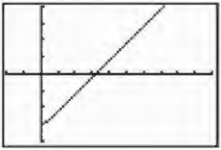
a) Iniciamos con las asignaciones

$$Y_1 = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = (Y_1)^2 - 16$$

Observe que hemos sustituido Y_1 por x en $f(x)$ y asignado esta expresión a Y_2, en forma muy semejante a como sustituimos $g(x)$ por x en el ejemplo 4.

Luego guardamos el valor 3 en la memoria de x, y luego pedimos el valor de Y_2. Vemos que el valor de Y_2 en 3 es -13; es decir, $f(g(3)) = -13$.

FIGURA 2
$[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$



b) Para determinar una ventana de visualización para la gráfica de $f \circ g$, primero observamos que $f(x) \geq -16$ para toda x, y por lo tanto elegimos Ymín *menor* que -16; por ejemplo, Ymín $= 20$. Si deseamos que la ventana de visualización tenga una dimensión vertical de 40, debemos escoger Ymax $= 20$.

Si la pantalla del usuario está en una proporción 1:1 (horizontal: vertical), entonces una opción razonable para [Xmin, Xmax] sería $[-10, 30]$, una dimensión horizontal de 40. Si la pantalla está en una proporción 3:2, establezca que [Xmin, Xmax] sea $[-10, 50]$, una dimensión horizontal de 60.

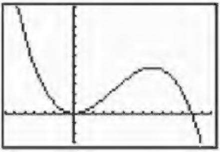
Al seleccionar Y_2 y luego exhibir la gráfica de Y_2 usando la pantalla $[-10, 50, 5]$ por $[-20, 20, 5]$ da una gráfica semejante a la de la figura 2. Apreciamos que la gráfica es una semirrecta con punto final $(0, -16)$. Por lo tanto, el dominio de Y_2 es toda $x \geq 0$.

El siguiente ejemplo demuestra cómo usar una calculadora graficadora para graficar funciones compuestas de la forma $af(bx)$. Usaremos la función del ejemplo 7 de la sección 2.5.

EJEMPLO 9 **Gráficas de funciones compuestas**

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, trace la gráfica de $y = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

FIGURA 3
$[-7, 14]$ por $[-3, 11]$



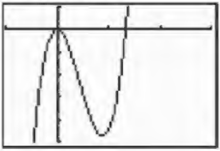
SOLUCIÓN Del análisis sobre contracción y alargamiento de las gráficas en la sección 2.5, reconocemos que la gráfica de f estará comprimida verticalmente un factor de 2 y alargada horizontalmente un factor de 3. Para relacionar este problema con funciones compuestas, podemos considerar

$$y = -\tfrac{1}{2}f\left(\tfrac{1}{3}x\right) \quad \text{como} \quad y = -\tfrac{1}{2}f(g(x)), \qquad \text{donde } g(x) = \tfrac{1}{3}x.$$

La última ecuación para y sugiere las asignaciones

$$Y_1 = \tfrac{1}{3}x, \quad Y_2 = (Y_1)^3 - 4(Y_1)^2, \quad \text{y} \qquad Y_3 = -\tfrac{1}{2}Y_2.$$

FIGURA 4
$[-1, 3]$ por $[-5, 1]$



Note que $Y_2 = f(Y_1) = f(g(x))$. Seleccionamos sólo Y_3 para graficar y escogemos una ventana de visualización $[-7, 14]$ por $[-3, 11]$, para obtener la figura 3.

Hay dos ventajas de asignar las funciones en la forma citada líneas antes:

1) En realidad no tenemos que calcular la función polinomial a graficar, como se hizo en el ejemplo 7 de la sección 2.5.

2) Con sólo cambiar los coeficientes en Y_1 y Y_3, podemos examinar fácilmente su efecto sobre la gráfica de Y_3.

Como ejemplo del párrafo 2), debe intentar graficar $y = \frac{1}{2}f(3x)$ cambiando Y_1 a $3x$, Y_3 a $\frac{1}{2}Y_2$, y la ventana de visualización a $[-1, 3]$ por $[-5, 1]$ y, luego graficar Y_3, para obtener la figura 4.

2.7 Ejercicios

Ejer. 1–2: Encuentre

a) $(f + g)(3)$ **b)** $(f - g)(3)$

c) $(fg)(3)$ **d)** $(f/g)(3)$

1 $f(x) = x + 3, \quad g(x) = x^2$

2 $f(x) = -x^2, \quad g(x) = 2x - 1$

Ejer. 3–8: Encuentre

a) $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, y $(f/g)(x)$

b) el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg

c) el dominio de f/g

3 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 2x^2 - 1$

4 $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 4$

5 $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

6 $f(x) = \sqrt{5-2x}$, $g(x) = \sqrt{x+3}$

7 $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

8 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{7x}{x+4}$

Ejer. 9–10: Encuentre

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ g)(x)$

9 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x^2$

10 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x - 2$

Ejer. 11–20: Encuentre

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

c) $f(g(-2))$ **d)** $g(f(3))$

11 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 3x + 4$

12 $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 6x - 3$

13 $f(x) = 3x^2 + 4$, $g(x) = 5x$

14 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4x^2$

15 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$

16 $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = 3x^2 - x + 2$

17 $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^3 - 5x$

18 $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x$

19 $f(x) = |x|$, $g(x) = -7$

20 $f(x) = -5$, $g(x) = x^2$

Ejer. 21–34: Encuentre a) $(f \circ g)(x)$ **y el dominio de** $f \circ g$ **y b)** $(g \circ f)(x)$ **y el dominio de** $g \circ f$.

21 $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

22 $f(x) = \sqrt{x-15}$, $g(x) = x^2 + 2x$

23 $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

25 $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

26 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

27 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

28 $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x-5}$

29 $f(x) = \dfrac{2x+3}{5}$, $g(x) = \dfrac{5x-3}{2}$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = x - 1$

31 $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

32 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$

33 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

34 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

Ejer. 35–36: Resuelva la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$.

35 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x + 3$

36 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = 2x - 5$

37 Algunos valores de dos funciones f y g aparecen en las siguientes tablas:

x	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	7	6	5	4

x	5	6	7	8	9
$g(x)$	7	8	6	5	4

Si es posible, encuentre

a) $(f\circ g)(6)$ **b)** $(g\circ f)(6)$ **c)** $(f\circ f)(6)$

d) $(g\circ g)(6)$ **e)** $(f\circ g)(9)$

38 Algunos valores de dos funciones T y S aparecen en las siguientes tablas:

t	0	1	2	3	4
$T(t)$	2	3	1	0	5

x	0	1	2	3	4
$S(x)$	1	0	3	2	5

Si es posible, encuentre

a) $(T\circ S)(1)$ **b)** $(S\circ T)(1)$ **c)** $(T\circ T)(1)$

d) $(S\circ S)(1)$ **e)** $(T\circ S)(4)$

39 Si $D(t) = \sqrt{400 + t^2}$ y $R(x) = 20x$, encuentre $(D\circ R)(x)$.

40 Si $S(r) = 4\pi r^2$ y $D(t) = 2t + 5$, encuentre $(S\circ D)(t)$.

41 Si f es una función impar y g es una función par, ¿fg es par, impar o ninguna de estas opciones?

42 Hay una función con dominio $\mathbb{R}$ que es par e impar. Encuentre esa función.

43 **Funciones de nóminas** Establezca la función SSTAX de impuesto al seguro social como SSTAX$(x) = 0.0765x$, donde $x \geq 0$ es el ingreso semanal. Establezca ROUND2 como la función que redondea un número a dos posiciones decimales. Encuentre el valor de (ROUND2 $\circ$ SSTAX)(525).

44 **Funciones de cómputo** Establezca que la función CHR sea definida por CHR(65) = "A", CHR(66) = "B", …, CHR(90) = "Z". Luego, establezca que la función ORD sea definida por ORD("A") = 65, ORD("B") = 66, …, ORD("Z") = 90. Encuentre

a) (CHR $\circ$ ORD) **b)** CHR(ORD("A") + 3)

45 **Propagación de un incendio** Un incendio se ha iniciado en un campo abierto y seco, y se extiende en forma de círculo. Si el radio de este círculo aumenta a razón de 5 ft/min, exprese el área total A del incendio como función del tiempo t (en minutos).

46 **Dimensiones de un globo** Se infla un globo esférico a razón de $\frac{9}{2}\pi$ ft^3/min. Exprese este radio r como una función del tiempo t (en minutos), asumiendo que $r = 0$ cuando $t = 0$.

47 **Dimensiones de una pila de arena** El volumen de una pila cónica de arena aumenta a razón de 243π ft^3/min y su altura es siempre igual al radio r de la base. Exprese r como función del tiempo t (en minutos), suponiendo que $r = 0$ cuando $t = 0$.

48 **Diagonal de un cubo** Una diagonal d de un cubo es la distancia entre dos vértices opuestos. Exprese d como función de la arista x del cubo. (*Sugerencia:* primero exprese la diagonal y de una cara como función de x.)

49 **Altitud de un globo** Un globo de aire caliente asciende verticalmente desde el nivel del suelo cuando una cuerda atada a la base del globo se suelta a razón de 5 ft/s (vea la figura). La polea que suelta la cuerda está a 20 pies de la plataforma donde los pasajeros abordan el globo. Exprese la altitud h del globo como función del tiempo t.

EJERCICIO 49

50 **Equilibrista** Refiérase al ejercicio 76 de la sección 2.4. Comenzando en el punto más bajo, el equilibrista asciende por la cuerda a un ritmo constante de 2 ft/s. Si la cuerda está unida a una altura de 30 pies por el poste, exprese la altura h del equilibrista sobre el suelo como función del tiempo t. (*Sugerencia:* denote con d la distancia total recorrida a lo largo de la cuerda. Primero exprese d como función de t y luego h como función de d.)

51 **Despegue de un avión** Refiérase al ejercicio 77 de la sección 2.4. Cuando el avión ha avanzado 500 pies por la pista, alcanza una velocidad de 150 pies/s (o sea 102 mi/h), que mantendrá hasta el despegue. Exprese la distancia d del avión desde la torre de control como función del tiempo t (en segundos). (*Sugerencia:* en la figura, primero escriba x como función de t.)

52 **Corrosión de un cable** Un cable de 100 pies de largo y diámetro de 4 pulgadas se sumerge en agua de mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye a razón de 750 pulgadas cuadradas por año. Exprese el diámetro d del cable como función del tiempo t (en años). (No preste atención a la corrosión en los extremos del cable.)

Ejer. 53–60: Encuentre una forma de función compuesta para y.

53 $y = (x^2 + 5x)^{1/3}$

54 $y = \sqrt[4]{x^4 - 16}$

55 $y = \dfrac{1}{(x-3)^6}$

56 $y = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

57 $y = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

58 $y = \dfrac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

59 $y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

60 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

61 Si $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, aproxime $(f \circ g)(0.0001)$. Para evitar calcular un valor cero para $(f \circ g)(0.0001)$, vuelva a escribir la fórmula de $f \circ g$ como

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+1}.$$

62 Si $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x+2}$ y $g(x) = \left(\sqrt{3x} - x^3\right)^{3/2}$, aproximadamente

$$\frac{(f+g)(1.12) - (f/g)(1.12)}{[(f \circ f)(5.2)]^2}.$$

63 Refiérase al ejercicio 65 de la sección 2.5. Realice las asignaciones de $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(Y_1+2)(6-Y_1)} - 4$. Determine asignaciones para Y_3 (y Y_4 si es necesario) que permitan trazar la gráfica de cada función en a)–h) y luego la gráfica de la función. (Compruebe el dominio y el rango con la respuesta proporcionada previamente.)

a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $y = f(x-3) + 1$ **d)** $y = f(x+2) - 3$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

64 Refiérase al ejercicio 66 de la sección 2.5. Realice las asignaciones $Y_1 = x$ y $Y_2 = 3\sqrt{(-Y_1-6)(Y_1+2)} - 10$. Determine asignaciones para Y_3 y Y_4 que permitan graficar cada función, y luego trace la gráfica de la función.

a) $y = \frac{1}{2}f(x)$ **b)** $y = f(2x)$

c) $y = f(x-2) + 5$ **d)** $y = f(x+4) - 1$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(x)$

g) $y = f(|x|)$ **h)** $y = |f(x)|$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

1 Describa el conjunto de todos los puntos en un plano de coordenadas tal que $x/y < 0$.

2 Demuestre que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentre su área.

3 Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, encuentre

a) la distancia $d(P, Q)$

b) el punto medio del segmento PQ

c) el punto R tal que Q es el punto medio de PR

4 Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a una distancia de 13 desde $P(12, 8)$.

5 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $Q(-2, a)$ es menor que 3?

6 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(7, -4)$ y pasa por el punto $P(-2, 5)$.

7 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene puntos extremos de un diámetro $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

8 Encuentre una ecuación para la mitad izquierda de la circunferencia dada por $(x+2)^2 + y^2 = 7$.

9 Encuentre la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-6, 8)$.

10 Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son vértices de un trapecio.

11 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ que sea

a) paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

b) perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

12 Exprese $8x + 3y - 15 = 0$ en la forma pendiente ordenada al origen.

13 Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(-5, -1)$ y es tangente a la recta $x = 4$.

14 Encuentre la ecuación de la recta que tiene intersección -3 en x y pasa por el centro de la circunferencia que tiene ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.

15 Encuentre la forma general de la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -7)$ con pendiente 4.

16 Dados $A(-1, 2)$ y $B(3, -4)$, encuentre la forma general de la ecuación para la mediatriz del segmento AB.

Ejer. 17–18: Encuentre el centro y radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17 $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$

18 $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 41 = 0$

19 Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$ encuentre

a) $f(1)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(0)$ **d)** $f(-x)$

e) $-f(x)$ **f)** $f(x^2)$ **g)** $[f(x)]^2$

Ejer. 20–21: Encuentre *el signo* de $f(4)$ sin encontrar en realidad $f(4)$.

20 $f(x) = \dfrac{-32(x^2 - 4)}{(9 - x^2)^{5/3}}$

21 $f(x) = \dfrac{-2(x^2 - 20)(3 - x)}{(6 - x^2)^{4/3}}$

22 Encuentre el dominio y el rango de f si

a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{(x + 4)^2}$

Ejer. 23–24: Encuentre $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ si $h \neq 0$.

23 $f(x) = -x^2 + x + 5$

24 $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

25 Encuentre una función lineal f tal que $f(1) = 3$ y $f(4) = 8$.

26 Determine si f es par, impar o ninguna de estas opciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{\pi x^2 - x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5}$

Ejer. 27–40: Trace la gráfica de la ecuación y rotule las intersecciones en x y y.

27 $x + 5 = 0$ **28** $2y - 7 = 0$

29 $2y + 5x - 8 = 0$ **30** $x = 3y + 4$

31 $9y + 2x^2 = 0$ **32** $3x - 7y^2 = 0$

33 $y = \sqrt{1 - x}$ **34** $y = (x - 1)^3$

35 $y^2 = 16 - x^2$

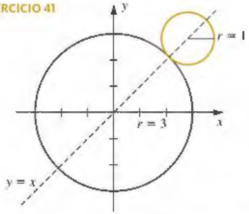
36 $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$

37 $x^2 + y^2 - 8x = 0$ **38** $x = -\sqrt{9 - y^2}$

39 $y = (x - 3)^2 - 2$ **40** $y = -x^2 - 2x + 3$

41 Encuentre el centro de la circunferencia pequeña.

EJERCICIO 41



42 Explique cómo se compara la gráfica de $y = -f(x - 2)$ con la gráfica de $y = f(x)$.

Ejer. 43–52: a) Trace la gráfica de f. b) Encuentre el dominio D y rango R de f. c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente, decreciente o constante.

43 $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2}$ **44** $f(x) = 1000$

45 $f(x) = |x + 3|$ **46** $f(x) = -\sqrt{10 - x^2}$

47 $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$ **48** $f(x) = \sqrt{2 - x}$

49 $f(x) = 9 - x^2$ **50** $f(x) = x^2 + 6x + 16$

51 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **52** $f(x) = 1 + 2[\![x]\!]$

53 Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, haciendo uso de desplazamiento, alargamiento o reflexión:

a) $y = \sqrt{x}$ **b)** $y = \sqrt{x + 4}$

c) $y = \sqrt{x} + 4$ **d)** $y = 4\sqrt{x}$

e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ **f)** $y = -\sqrt{x}$

54 La gráfica de una función f con dominio $[-3, 3]$ se muestra en la figura. Trace la gráfica de la ecuación dada.

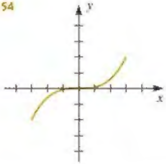
a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x) - 2$

c) $y = f(-x)$ **d)** $y = f(2x)$

e) $y = f(\frac{1}{2}x)$ **f)** $y = |f(x)|$

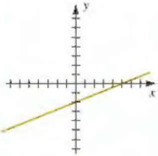
g) $y = f(|x|)$

EJERCICIO 54



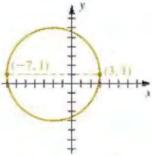
Ejer. 55–58: Encuentre una ecuación para la gráfica que se muestra en la figura.

55



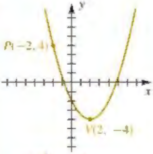
$2x - 5y = 10$

56



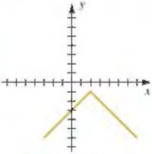
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

57



$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4$

58



$y = -|x - 2| - 1$

Ejer. 59–62: Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

59 $f(x) = 3x^2 - 24x + 46$ Mín. $f(4) = -2$

60 $f(x) = -2x^2 - 12x - 24$ Máx. $f(-3) = -6$

61 $f(x) = -12(x + 4)^2 + 20$ Máx. $f(-4) = 20$

62 $f(x) = 3(x + 2)(x - 10)$ Mín. $f(4) = -108$

63 Exprese la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x - h)^2 + k$. $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$

64 Encuentre la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que tiene vértice $V(3, -2)$ y pasa por $(1, -5)$.

$y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2 - 2$

65 Si $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre el dominio de

a) fg **b)** f/g

$[0, 3]$ $(0, 3]$

66 Si $f(x) = 8x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, encuentre

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(2)$

-3 $\sqrt{11}$

Ejer. 67–68: Encuentre a) $(f \circ g)(x)$ y b) $(g \circ f)(x)$.

67 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = 3x + 2$

$18x^2 + 9x - 1$; $6x^2 - 15x + 5$

68 $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $g(x) = 1/x^2$ $\sqrt{\frac{3 + 2x^2}{x^2}}$; $\frac{1}{3x + 2}$

Ejer. 69–70: Encuentre a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$, y b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

69 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

$\sqrt{28 - x}$, $[3, 28]$; $\sqrt{\sqrt{25 - x^2} - 3}$, $[-4, 4]$

70 $f(x) = \dfrac{x}{3x + 2}$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$

$\frac{1}{x + 3}$, $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$; $\frac{6x + 4}{x}$, $\mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}, 0\}$

71 Encuentre una forma de función compuesta para $y = \sqrt{x^2 - 5x}$.

$u = x^2 - 5x$, $y = \sqrt{u}$

72 **Rampa para silla de ruedas** La ley para estadounidenses con discapacidad de 1990 garantiza a todas las personas el derecho de acceso a lugares públicos. El acceso a un edificio suele requerir la construcción de una rampa para sillas de ruedas, las cuales deben medir aproximadamente 1 pulgada de ascenso vertical por cada 12 a 20 pulgadas de distancia horizontal. Si la base de una puerta exterior está situada a 3 pies sobre una banqueta, determine el rango de longitudes apropiadas para una rampa de silla de ruedas.

Entre 36.1 y 60.1 pies.

73 **Lanzamiento de disco** Con base en records olímpicos, la distancia ganadora para el lanzamiento de disco se puede aproximar mediante la ecuación $d = 181 + 1.065t$, donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1948.

a) Pronostique la distancia ganadora para los Juegos Olímpicos de 2016.

b) Estime el año olímpico en el que la distancia ganadora será de 265 pies.

74 **Plusvalía de las viviendas** Hace seis años se compró una vivienda en \$179,000. Este año fue valuada en \$215,000. Suponga que su valor V después de su compra es una función lineal del tiempo t (en años).

a) Exprese V en términos de t.

b) ¿Cuántos años después de la fecha de compra la vivienda valía \$193,000?

75 **Escalas de temperatura** El punto de congelación del agua es 0 °C, o 32 °F y el punto de ebullición es 100 °C o 212 °F.

a) Exprese la temperatura Fahrenheit F como función lineal de la temperatura Celsius C.

b) ¿Qué aumento de temperatura en °F corresponde a un incremento de temperatura de 1 °C?

76 **Rendimiento de gasolina** Suponga que el costo de conducir un automóvil es una función lineal del número x de millas recorridas y que la gasolina cuesta \$3 por galón. Cierto automóvil rinde actualmente 20 millas por galón y una afinación que mejorará 10% su consumo de gasolina cuesta \$120.

a) Exprese el costo C_1 de conducir sin una afinación en términos de x.

b) Exprese el costo C_2 de conducir con una afinación en términos de x.

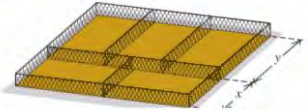
c) ¿Cuántas millas debe recorrer el automóvil después de afinarlo de modo que el costo de la afinación se justifique?

77 **Dimensiones de un corral** Un corral está formado por cinco rectángulos congruentes, como muestra la figura.

a) Exprese la longitud y como una función de la longitud x.

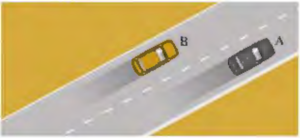
b) Si los lados cuestan \$10 por pie de longitud, exprese el costo C del corral como una función de la longitud x.

EJERCICIO 77



78 **Distancia entre automóviles** Al mediodía, el automóvil A está a 10 pies a la derecha y 20 pies adelante del automóvil B, como se aprecia en la figura. Si el automóvil A avanza a 88 ft/s (o 60 mi/h) mientras el automóvil B avanza a 66 ft/s (o 45 mi/h), exprese la distancia d entre los automóviles como una función de t, donde t denota el número de segundos transcurridos después del mediodía.

EJERCICIO 78

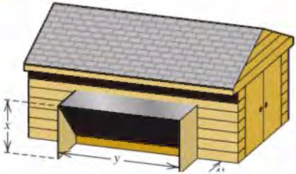


79 **Construcción de un cobertizo de almacenamiento** Un cobertizo de almacenamiento abierto con forma rectangular, que consta de dos lados verticales de 4 pies de ancho y un techo plano, se colocará unido a una estructura existente, como se ve en la figura. El techo plano está hecho de hojalata y cuesta \$5 por pie cuadrado, y los dos lados están hechos de madera contrachapada que cuesta \$2 por pie cuadrado.

a) Si se tienen disponibles \$400 para construcción, exprese la longitud y como una función de la altura x.

b) Exprese el volumen V dentro del cobertizo como una función de x.

EJERCICIO 79



80 **Construcción de un contenedor cilíndrico** Una empresa planea fabricar un contenedor que tiene forma de cilindro circular recto, abierto en la parte superior, y tiene capacidad de 24π pulg³. Si el costo del material para el fondo del cilindro es \$0.30/pulg² y el de los costados curvos es \$0.10/pulg², exprese el costo total C del material como función del radio r de la base del contenedor.

81 **Llenado de una piscina** Una sección transversal de una piscina rectangular con dimensiones de 80 por 40 pies se muestra en la figura. La piscina se llena con agua a razón de 10 ft^3/min.

EJERCICIO 81

a) Exprese el volumen V del agua de la piscina como función del tiempo t.

b) Exprese V como función de la profundidad h en el lado profundo para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.

c) Exprese h como función de t para $0 \leq h \leq 6$ y luego para $6 < h \leq 9$.

82 **Filtración de agua** Suponga que 5 $pulg^3$ de agua se vierten en un filtro cónico y posteriormente se reciben en una taza, como se muestra en la figura. Sea x la altura del agua en el filtro y y la altura del agua en la taza.

a) Exprese el radio r que se muestra en la figura como función de x. (*Sugerencia:* use triángulos semejantes.)

b) Exprese la altura y del agua en la taza como función de x. (*Sugerencia:* ¿cuál es la suma de los dos volúmenes que se muestran en la figura?)

JERCICIO 82

83 **Tronco de un cono** La forma de la primera nave espacial del programa Apolo era un cono circular recto, un sólido formado al truncar un cono por un plano paralelo a su base. Para el tronco que se muestra en la figura, los radios a y b ya se han determinado.

EJERCICIO 83

a) Use triángulos semejantes para expresar y como función de h.

b) Deduzca una fórmula para el volumen del tronco como función de h.

c) Si $a = 6$ ft y $b = 3$ ft, ¿para qué valor de h el volumen del tronco es 600 ft^3?

84 **Tarifas por el consumo del agua** Cierta ciudad cobra \$3.61 por cada 1,000 galones de agua utilizada hasta 5,000 galones y \$4.17 por 1,000 galones de agua utilizada que rebasen los 5,000 galones. Encuentre una función definida por partes B que especifique la factura total del uso de x galones de agua.

85 **Registro de salto de longitud** En 1991, Mike Powell de Estados Unidos estableció el récord mundial de salto de longitud en 8.95 metros. Suponga que la trayectoria de su salto era parabólica y que el punto máximo que alcanzó fue de 1 metro. Encuentre una ecuación para la trayectoria.

86 **Rectángulo de alambre** Un trozo de alambre de 24 pulgadas de largo se dobla para formar un rectángulo que tiene ancho x y longitud y.

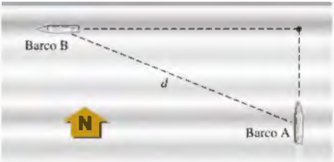
a) Exprese y como función de x.

b) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

c) Demuestre que el área A es mayor si el rectángulo es un cuadrado.

87 **Distancia entre barcos** A la 1:00 P.M. el barco A está a 30 millas al sur del barco B y navega al norte a razón de 15 mi/h. Si el barco B navega al oeste a razón de 10 mi/h, encuentre el tiempo en que la distancia d entre los barcos es mínima (vea la figura).

EJERCICIO 87



88 **Dimensiones de una pista de carreras** El interior de una pista de carreras de media milla está formado por un rectángulo con semicírculos en dos extremos opuestos. Encuentre las dimensiones que maximicen el área del rectángulo.

89 **Saltos verticales** Cuando un jugador de baloncesto salta para "clavar" el balón en la canasta, la distancia del jugador $f(t)$ (en pies) desde el piso después de t segundos está dada por la fórmula $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$, donde g es la constante gravitacional.

a) Si $g = 32$, encuentre el tiempo, es decir, el número total de segundos que el jugador está suspendido en el aire.

b) Encuentre el salto vertical del jugador, es decir, la máxima distancia entre los pies del jugador y el piso.

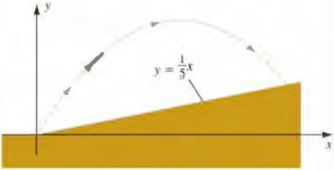
c) En la Luna, $g = \frac{32}{6}$. Repita los incisos a) y b) para el jugador en la Luna.

90 **Trayectoria de un cohete** Un cohete se dispara hacia una colina, siguiendo una trayectoria dada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$. La colina tiene pendiente $\frac{1}{5}$, como se ilustra en la figura.

a) ¿En dónde cae el cohete?

b) Determine la altura máxima del cohete *sobre el suelo*.

EJERCICIO 90



CAPÍTULO 2 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 Compare las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Escriba una generalización basada en lo que investigue acerca de gráficas de ecuaciones de la forma $y = x^{p/q}$, donde $x \geq 0$ y p y q son enteros positivos.

2 Escriba una expresión para $g(x)$ si la gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ por reflexión de f alrededor de

a) el eje x **b)** el eje y

c) la recta $y = 2$ **d)** la recta $x = 3$

3 Considere la gráfica de $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f está dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Discuta la forma general de g, incluyendo su dominio y rango. Comente las ventajas y desventajas de graficar g como una composición de las funciones $h(x) = \sqrt{x}$ y $f(x)$. (*Sugerencia:* las siguientes expresiones se pueden usar para f: $x^2 - 2x - 8$, $-x^2 + 2x + 8$, $x^2 - 2x + 2$, $-x^2 + 2x - 2$.)

4 Simplifique el cociente de diferencias de los ejercicios 49 y 50 de la sección 2.4 para una función cuadrática arbitraria de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5 Refiérase el ejemplo 5 de la sección 2.4. En términos geométricos, ¿qué representa la expresión $2x + h + 6$ en la gráfica de f? ¿Qué piensa usted que representa si $h = 0$?

6 La fórmula del punto medio podría considerarse la fórmula de "medio camino" porque da el punto que es $\frac{1}{2}$ de la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$. Desarrolle una fórmula "*m-n-ésima*" que dé el punto $R(x_3, y_3)$ que esté a m/n de la distancia entre P y Q (suponga que m y n son enteros positivos con $m < n$).

7 Considere las gráficas de ecuaciones de la forma cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que tiene dos intersecciones en x. Denote con d la distancia del eje de la parábola a cualquiera de las intersecciones en x y denote con h el valor de la coordenada y del vértice. Explore la relación entre d y h para varias ecuaciones específicas y luego desarrolle una fórmula para esta relación.

8 **Factura por un servicio** Un método común de expedir una factura por llamadas de servicio es cobrar una cuota fija más una cuota adicional por cada cuarto de hora empleado en la llamada. Invente una función para una empresa de reparación de lavadoras de ropa que cobra \$40 más \$20 por cada cuarto de hora o fracción; por ejemplo, una llamada de 30 minutos para una reparación costaría \$80, en tanto que una llamada de 31 minutos para una reparación costaría \$100. Los datos de entrada a su función pueden ser cualquier entero positivo. (*Sugerencia:* vea el ejercicio 54e) de la sección 2.5.)

9 **Densidad de la capa de ozono** Se determinó de manera experimental que la densidad D (en 10^{-3} cm/km) de la capa de ozono a altitudes x entre 3 y 15 kilómetros, durante el invierno en Edmonton, Canadá, era

$$D = 0.0833x^2 - 0.4996x + 3.5491.$$

Exprese x como función de D.

10 **Precipitación en Minneapolis** El promedio de la precipitación mensual en pulgadas en Minneapolis aparece en la tabla.

Mes	Precipitación
Ene.	0.7
Feb.	0.8
Mar.	1.5
Abr.	1.9
May.	3.2
Jun.	4.0
Jul.	3.3
Ago.	3.2
Sept.	2.4
Oct.	1.6
Nov.	1.4
Dic.	0.9

a) Grafique el promedio de la precipitación mensual.

b) Modele estos datos con una función por partes f que sea primero cuadrática y luego lineal.

c) Grafique f junto con los datos.

CAPÍTULO 2 EXAMEN

1 El punto $B(1, 2)$ está a una décima parte del punto $A(-3, 4)$ hasta el punto $P(x, y)$. Encuentre x y y.

2 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(2, 3)$ y $Q(6, a)$ es mayor que 5?

3 Encuentre la ecuación estándar de la circunferencia con centro $(4, 5)$ que tiene una intersección 0 en x.

4 Encuentre las otras intersecciones de la circunferencia con centro $(4, 5)$ que tiene una intersección 0 en x.

5 Una circunferencia tiene centro $(4, 5)$. Encuentre la forma pendiente ordenada al origen de la recta tangente a la circunferencia en el origen.

6 Encuentre la forma pendiente ordenada al origen de la recta que es perpendicular a la recta $2x - 7y = 3$ y tiene intersección 4 en x.

7 Una pizza cuesta \$9.00 más \$0.80 por cada ingrediente adicional. La tasa del impuesto sobre ventas es de 10%. Encuentre una función para el costo total $T(x)$, donde x es el número de ingredientes adicionales.

8 Encuentre el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{(x + 2)(x - 2)}$. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

9 Simplifique el cociente de diferencias $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ para la función $f(x) = x^2 + 5x - 7$. Luego, prediga el cociente de diferencias para $f(x) = x^2 - 7x + 5$ con base en su primera respuesta.

10 Una caja cerrada tiene una base cuadrada de lado y y una altura de 2 pies. Exprese el área de la superficie S de la caja en función de su volumen V.

11 Si el punto $P(3, -2)$ está en la gráfica de una función f, busque el punto correspondiente en la gráfica de $y = 2|f(x - 3)| - 1$.

12 Una persona vende gorras en \$12. Su comisión es de 10% sobre las primeras 1,000 gorras vendidas y de 15% sobre cualquier gorra adicional que venda. Encuentre una función definida por partes C que especifique la comisión total si se venden x gorras.

13 Encuentre la ecuación estándar de una parábola con eje vertical y vértice $V(-2, 1)$. ¿Qué restricción se debe hacer en el coeficiente a si la gráfica de la parábola no tiene intersecciones en x?

14 Encuentre el valor mínimo de la parábola que tiene intersecciones -2 y 4 en x y pasa por el punto $(3, -15)$.

15 Encuentre el valor mínimo del producto p de dos números, uno de los cuales es 9 menos que el doble del otro.

16 Un parque ofrece viajes para grupos de 100 a 300 personas por viaje. El costo del boleto por cada persona que rebase los 100 se reduce un centavo de los \$4 normales que se cobran por persona. Encuentre el número de personas en un grupo que produce el costo total máximo por el grupo y el número de personas que produce el costo total mínimo por el grupo.

17 Encuentre el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$.

18 Un fabricante produce cinco artículos por hora. El costo de producción de y artículos está dado por $C = y^2 - 2y + 10$, donde C está en miles de dólares. Encuentre una función compuesta C en términos de t horas y luego úsela para encontrar el costo mínimo.

3

Funciones polinomiales y racionales

3.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2

3.2 Propiedades de la división

3.3 Ceros de polinomios

3.4 Ceros complejos y racionales de polinomios

3.5 Funciones racionales

3.6 Variación

Las funciones polinomiales son las más elementales en matemáticas, porque están definidas sólo en términos de suma, resta y multiplicación. En sus aplicaciones, a veces es necesario trazar sus gráficas y encontrar (o aproximar) sus ceros. En la primera parte de este capítulo se estudian resultados que son útiles para obtener esta información. Luego, se centra la atención en los cocientes de funciones polinomiales, es decir, en las funciones racionales. La última sección sobre variación contiene aplicaciones de funciones polinomiales y racionales sencillas.

3.1 Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Si f es una función polinomial de grado n con coeficientes reales, entonces

$$f(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n \neq 0$. Los casos especiales que vemos en la siguiente tabla ya se estudiaron antes.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f (con intersección a_0 en y)
0	$f(x) = a_0$	Una recta horizontal
1	$f(x) = a_1x + a_0$	Una recta con pendiente a_1
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	Una parábola con un eje vertical

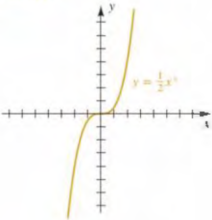
En esta sección se estudian las gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2. Todas las funciones polinomiales son **funciones continuas**; es decir, sus gráficas se pueden trazar sin interrupción alguna.

Si f tiene grado n *y todos los coeficientes excepto a_n son cero*, entonces

$$f(x) = ax^n \quad \text{para algunas} \quad a = a_n \neq 0$$

En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una recta que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Dos ilustraciones con $n = 3$ **(polinomios cúbicos)** se proporcionan en el siguiente ejemplo.

FIGURA 1



EJEMPLO 1 Trazo de gráficas de $y = ax^3$

Trace la gráfica de f si

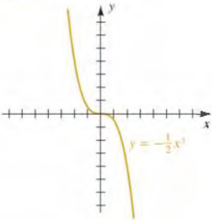
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

SOLUCIÓN

a) La siguiente tabla contiene varios puntos sobre la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

FIGURA 2



Como f es una función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen y, por lo tanto, puntos como $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ están también sobre la gráfica. La gráfica se traza en la figura 1.

b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, la gráfica se puede obtener del inciso a) al multiplicar todas las coordenadas y por -1 (esto es, reflejando la gráfica del inciso a) a través del eje x). Esto nos da el dibujo de la figura 2. ■

Si $f(x) = ax^n$ y n es entero positivo *impar*, entonces f es una función impar y la gráfica de f es simétrica respecto al origen, como se ilustra en las figuras 1 y 2. Para $a > 0$, la gráfica es semejante en forma a aquella de la figura 1; sin embargo, a medida que aumenta n o a, la gráfica asciende más rápidamente para $x > 1$. Para el comportamiento final, cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$; y cuando $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. Si $a < 0$, la gráfica se refleja a través del eje x, como en la figura 2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es una función par y la gráfica de f es simétrica respecto al eje y, como se ilustra en la figura 3 para el caso $a = 1$ y $n = 4$. Note que cuando aumenta el exponente, la gráfica se hace más plana en el origen. También sube más rápidamente para $x > 1$. Para el comportamiento final, conforme $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$. Si $a < 0$, la gráfica se refleja a través del eje x. También note que la gráfica *interseca* el eje x en el origen, pero no lo *cruza* (cambia de signo).

FIGURA 3

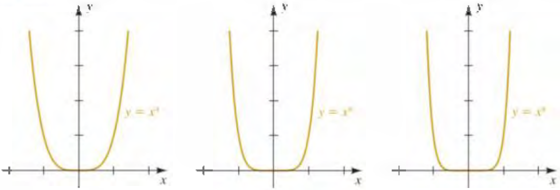
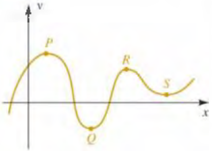


FIGURA 4

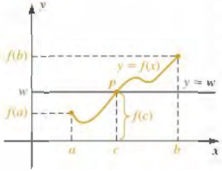


Un análisis completo de las gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2 requiere métodos que se usan en cálculo. A medida que aumenta el grado, las gráficas suelen complicarse más, aunque tienen un aspecto uniforme con varios puntos altos y bajos, por ejemplo, P, Q, R y S en la figura 4. Esos puntos a veces se denominan **puntos críticos** para la gráfica. Debe observarse que un polinomio de grado n tiene como máximo $n - 1$ puntos críticos. Cada valor de la función (coordenada y) correspondiente a un punto alto o bajo se denomina **extremo** de la función f. En un extremo, f cambia de una función creciente a una función decreciente o viceversa.

El teorema de valor intermedio especifica otra propiedad importante de las funciones polinomiales.

Teorema del valor intermedio para funciones polinomiales	Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

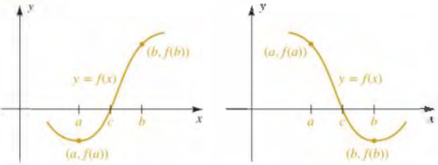
FIGURA 5



El teorema del valor intermedio para funciones polinomiales establece que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, hay por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = w$. Si se considera que la gráfica de f se extiende continuamente del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$, como se ilustra en la figura 5, entonces para cualquier número w entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ interseca a la gráfica en por lo menos un punto P. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

Una consecuencia del teorema de valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios (uno positivo y uno negativo), hay por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$; esto es, *f tiene un* **cero** *en c*. Así, si el punto $(a, f(a))$ se encuentra debajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ está por encima del eje x, o viceversa, la gráfica cruza el eje x por lo menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la figura 6.

FIGURA 6



EJEMPLO 2 **Uso del teorema del valor intermedio**

Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Al sustituir 1 y 2 por x obtenemos los siguientes valores de función:

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$
$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios ($f(1) = -4 < 0$ y $f(2) = 17 > 0$), vemos que $f(c) = 0$ para por lo menos un número real c entre 1 y 2. ■

El ejemplo 2 ilustra un método para localizar ceros polinomiales reales. Con el uso de *aproximaciones sucesivas*, podemos aproximar cada cero en cualquier grado de precisión al localizarlo en intervalos cada vez menores.

Si c y d son *sucesivas* en ceros reales de $f(x)$, es decir, no hay otros ceros entre c y d, entonces $f(x)$ *no cambia de signo en el intervalo* (c, d). Así, si se escoge cualquier número k tal que $c < k < d$ y si $f(k)$ es positiva, entonces $f(x)$ es positiva en todo (c, d). Del mismo modo, si $f(k)$ es negativa, entonces $f(x)$ es negativa en todo (c, d). Se asignará a $f(k)$ el nombre de **valor de prueba** para $f(x)$ en el intervalo (c, d). También se pueden usar valores de prueba en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$ o (a, ∞), siempre que $f(x)$ no tenga ceros en estos intervalos. El uso de valores de prueba al graficar es semejante a la técnica empleada para desigualdades en la sección 1.6.

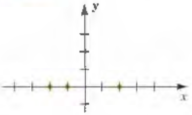
EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 3**

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{dado} \\ &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) && \text{agrupamos los términos} \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{factorizamos } x^2 \text{ y } -4 \\ &= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{factorizamos } (x + 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

FIGURA 7



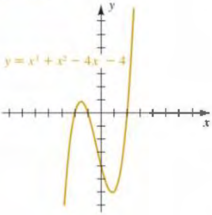
De la última ecuación vemos que los ceros de $f(x)$ (los puntos de intersección de la gráfica con el eje x) son -2, -1 y 2. Los puntos correspondientes en la gráfica (vea la figura 7) dividen el eje x en cuatro partes y se consideran los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty)$$

Al igual que con el trabajo con desigualdades de la sección 1.6, el signo de $f(x)$ en cada uno de estos intervalos se puede determinar usando una tabla de signos. La gráfica de f se encuentra encima del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$ y debajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$.

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Posición de la gráfica	Debajo del eje x	Encima del eje x	Debajo del eje x	Encima del eje x

FIGURA 8



Al consultar el signo de $f(x)$ en la gráfica, concluimos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-2, -1) \cup (2, \infty)$$

y

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$$

El uso de esta información lleva al trazo de la figura 8. Para encontrar los puntos críticos en la gráfica, sería necesario usar equipo de cómputo (como se hace en el ejemplo 6) o métodos desarrollados en cálculo. ■

La gráfica de toda función con polinomios de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la figura 8 o tiene una versión invertida de esa gráfica si el coeficiente de x^3 es negativo, pero a veces la gráfica puede tener sólo una intersección en x o la forma puede expandirse, como en las figuras 1 y 2.

EJEMPLO 4 **Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 4**

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Para iniciar, factorizamos $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 && \text{dado} \\ &= x^2(x^2 - 4x + 3) && \text{factorizamos } x^2 \\ &= x^2(x - 1)(x - 3) && \text{factorizamos } x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

A continuación se construye el diagrama de signos de la figura 9, donde las verticales indican los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Como el factor x^2 siempre es positivo si $x \neq 0$, no tiene efecto en el signo del producto y, por lo tanto, se puede omitir del diagrama.

(continúa)

FIGURA 9

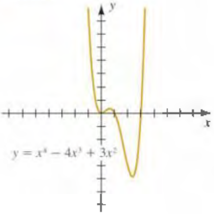
Al observar el signo de $f(x)$ en el diagrama, vemos que

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$$

y $$f(x) < 0 \quad \text{si } x \text{ está en } (1, 3).$$

Note que el signo de $f(x)$ no cambia en $x = 0$. El uso de estos datos lleva al trazo de la figura 10. ■

FIGURA 10



En el siguiente ejemplo se construye una gráfica de un polinomio conociendo sólo su signo.

EJEMPLO 5 **Trazo de la gráfica de un polinomio conociendo su signo**

Dado el diagrama de signos de la figura 11, trace una posible gráfica del polinomio f.

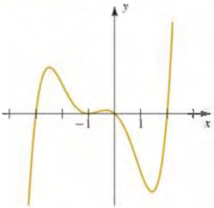
FIGURA 11

SOLUCIÓN Como el signo de $f(x)$ es *negativo* en el intervalo $(-\infty, -3)$, la gráfica de f debe estar *debajo* del eje x, como muestra la figura 12. En el intervalo $(-3, -1)$, el signo de $f(x)$ es *positivo*, de modo que la gráfica de f está *por encima* del eje x.

El signo de $f(x)$ también es *positivo* en el siguiente intervalo, $(-1, 0)$. Por lo tanto, la gráfica de f debe tocar el eje x en el intersección -1 en x y luego permanecer *encima* del eje x. (La gráfica de f es *tangente* al eje x en $x = -1$.)

En el intervalo $(0, 2)$, el signo de $f(x)$ es *negativo*, de modo que la gráfica de f está *debajo* del eje x. Por último, el signo de $f(x)$ es *positivo* en el intervalo $(2, \infty)$ y la gráfica de f está *encima* del eje x. ■

FIGURA 12



En el último ejemplo se usa la función

$$f(x) = (x + 3)(x + 1)^2(x)(x - 2)$$

Note la forma en que la gráfica de f se relaciona con las soluciones de las siguientes desigualdades.

Desigualdad	Solución	Posición de la gráfica en relación con el eje x
1) $f(x) > 0$	$(-3, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$	Encima
2) $f(x) \geq 0$	$[-3, 0] \cup [2, \infty)$	Encima o sobre él
3) $f(x) < 0$	$(-\infty, -3) \cup (0, 2)$	Debajo
4) $f(x) \leq 0$	$(-\infty, -3) \cup \{-1\} \cup [0, 2]$	Debajo o sobre él

Observe que todo número real debe estar en la solución de la desigualdad 1) o la desigualdad 4); lo mismo puede decirse de las desigualdades 2) y 3).

En el siguiente ejemplo se usa una calculadora graficadora para estimar coordenadas de puntos importantes en una gráfica.

EJEMPLO 6 **Estimación de ceros y puntos de inflexión**

a) Estime los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ a tres posiciones decimales.

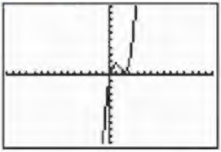
b) Estime las coordenadas de los puntos críticos en la gráfica.

SOLUCIÓN

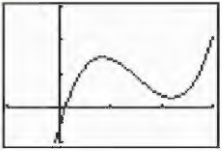
a) Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una ventana de visualización estándar para obtener un trazo semejante al de la figura 13a). Como todas las raíces reales parecen estar entre 0 y 3, se trazará de nuevo la gráfica usando la ventana $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$. Esto nos da una pantalla semejante a la de la figura 13b), que muestra que hay sólo un punto de intersección con el eje x y, por lo tanto, una sola raíz real. Usando la opción "zero" o "root" se estima la raíz real como 0.127.

FIGURA 13

a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



b) $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$



b) Con el uso de la función "maximum", se estima que el punto alto es (0.867, 1.497) y con la función de "minimum" se estima que el punto bajo es (2.200, 0.312). ■

En la sección 1.6 se resuelven desigualdades semejantes a la del siguiente ejemplo, pero nos apoyamos en gran medida en el hecho de que se podía factorizar de algún modo la expresión. Ahora usamos una calculadora graficadora para resolver una desigualdad que contiene una expresión (un polinomio cúbico) que no se factoriza fácilmente.

EJEMPLO 7 **Resolución gráfica de una desigualdad**

Estime las soluciones de la desigualdad

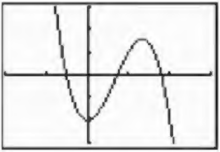
$$6x^2 - 3x^3 < 2$$

SOLUCIÓN Restamos 2 de ambos lados y consideramos la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0$$

(*continúa*)

FIGURA 14
$[-2, 3]$ por $[-3, 3]$



Asignamos $6x^2 - 3x^3 - 2$ a Y_1 y usamos la ventana $[-2, 3]$ por $[-3, 3]$ para obtener una pantalla semejante a la figura 14. Vemos que hay tres puntos de intersección con el eje x. Si se denotan con x_1, x_2 y x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$, entonces las soluciones a la desigualdad están dadas por

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

ya que estos son los intervalos donde Y_1 es menor que 0 (la gráfica está debajo del eje x). Usando la función zero o root para cada intersección en x, se encuentra que

$$x_1 \approx -0.515, \qquad x_2 \approx 0.722, \qquad x_3 \approx 1.793. \qquad \blacksquare$$

3.1 Ejercicios

Ejer. 1–4: Trace la gráfica de f para el valor indicado de c o a.

1 $f(x) = 2x^3 + c$

a) $c = 3$ b) $c = -3$

2 $f(x) = -2x^3 + c$

a) $c = -2$ b) $c = 2$

3 $f(x) = ax^3 + 2$

a) $a = 2$ b) $a = -\frac{1}{3}$

4 $f(x) = ax^3 - 3$

a) $a = -2$ b) $a = \frac{1}{8}$

Ejer. 5–10: Use el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre a y b.

5 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $a = 3$, $b = 4$

6 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3$; $a = -3$, $b = -2$

7 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $a = 2$, $b = 3$

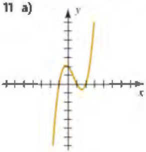
8 $f(x) = 2x^4 + 3x - 2$; $a = 0$, $b = 1$

9 $f(x) = x^5 + x^3 - 3x + 1$; $a = -2$, $b = -1$

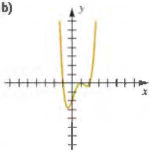
10 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 9x - 6$; $a = 3$, $b = 4$

Ejer. 11–12: Relacione cada gráfica con una ecuación.

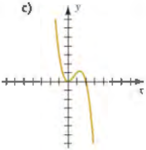
11 a)



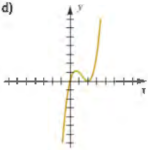
b)



c)



d)



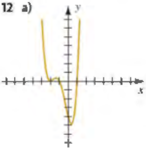
a) $f(x) = x(x - 2)^2$

b) $f(x) = -x^2(x - 2)$

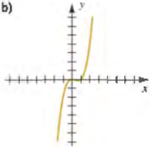
c) $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

d) $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$

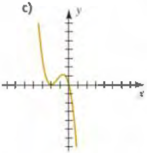
12 a)



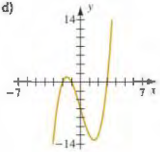
b)



c)



d)



a) $f(x) = x^2(x - 1)$

b) $f(x) = -x(x + 2)^2$

c) $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3)$

d) $f(x) = (x + 2)^2(x + 1)(x - 1)$

Ejer. 13–14: Utilice la notación de flecha para describir el comportamiento final de la función. No trace las gráficas.

13 a) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 6$

b) $f(x) = -3x^5 - x^3 - 8$

c) $f(x) = 2x^6 + 5x^2 - 3x$

d) $f(x) = -2x^6 + x^2 - 4$

14 a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5$

b) $f(x) = -3x^4 - x^3 + 9$

c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x$

d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6$

Ejer. 15–30: Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y trace la gráfica de f.

15 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

16 $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 - 3$

17 $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

18 $f(x) = x^5 + 1$

19 $f(x) = x^4 - 4x^2$

20 $f(x) = 9x - x^3$

21 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

22 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

23 $f(x) = \frac{1}{8}(x + 2)(x - 3)(x - 4)$

24 $f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)(x - 6)$

25 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

26 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

27 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

28 $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$

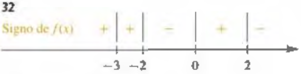
29 $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)$

30 $f(x) = x^3(x + 1)^2(x - 2)(x - 4)$

Ejer. 31–32: Trace la gráfica de una función polinomial en el diagrama de signos dado.

31

32



33 a) Trace una gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

donde $a < 0 < b < c$.

b) ¿Cuál es la intersección con el eje y?

c) ¿Cuál es la solución de $f(x) < 0$?

d) ¿Cuál es la solución de $f(x) \geq 0$?

34 a) Trace la gráfica de

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)(x - c),$$

donde $a < b < 0 < c$.

b) ¿Cuál es la intersección con el eje y?

c) ¿Cuál es la solución a $f(x) > 0$?

d) ¿Cuál es la solución a $f(x) \leq 0$?

35 Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia impar de x es 0. Demuestre que f es una función par.

36 Sea $f(x)$ un polinomio tal que el coeficiente de toda potencia par de x es 0. Demuestre que f es una función impar.

37 Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, encuentre un número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(-1, 4)$.

38 Si $f(x) = kx^3 + x^2 - kx + 2$, encuentre un número k tal que la gráfica de f contenga el punto $(2, 12)$.

39 Si un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ es 2, encuentre otros dos ceros.

40 Si un cero de $f(x) = x^3 - 3x^2 - kx + 12$ es -2, encuentre otros dos ceros.

41 **Un polinomio de Legendre** El polinomio de tercer grado de Legendre $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ se presenta en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Encuentre todos los valores de x tales que $P(x) > 0$ y toda x tal que $P(x) < 0$, y trace la gráfica de P.

42 **Un polinomio de Chebyshev** El polinomio de cuarto grado de Chebyshev $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ se presenta en estudios de estadística. Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$. (*Sugerencia:* sea $z = x^2$ y use la fórmula cuadrática.)

43 **Construcción de una caja** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20×30 pulgadas, se fabricará una caja abierta al cortar cuadrados idénticos de área x^2 de cada esquina y voltear hacia arriba los lados (vea el ejercicio 65 de la sección 2.4).

a) Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.

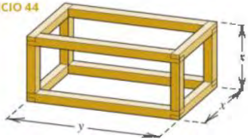
b) Encuentre todos los valores positivos de x tales que $V(x) > 0$ y trace la gráfica de V para $x > 0$.

44 **Construcción de una reja de madera** El bastidor para una reja de embarque se construirá con 24 pies de madera de 2×2 (vea la figura).

a) Si la reja debe tener extremos cuadrados de x pies de lado, exprese el volumen exterior V de la reja como función de x (no considere el grosor de la madera).

b) Trace la gráfica de V para $x > 0$.

EJERCICIO 44



45 **Determinación de temperaturas** Un meteorólogo determina que la temperatura T (en °F) para cierto periodo de 24 horas en invierno estuvo dada por la fórmula $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \leq t \leq 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 A.M.

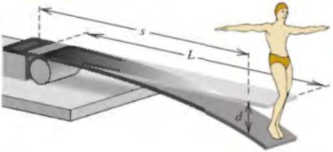
a) ¿Cuándo $T > 0$ y cuándo $T < 0$?

b) Trace la gráfica de T.

c) Demuestre que la temperatura fue 32 °F en algún momento entre las 12 del mediodía y la 1:00 P.M. (*Sugerencia:* use el teorema del valor intermedio.)

46 **Flexión de trampolines** Un clavadista está de pie en el extremo de un trampolín antes de lanzarse al agua. La flexión d del trampolín en una posición a s pies del extremo estacionario está dada por $d = cs^2(3L - s)$ para $0 \leq s \leq L$, donde L es la longitud de la tabla y c una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas de la tabla (vea la figura). Suponga que la tabla mide 10 pies de largo.

EJERCICIO 46



a) Si la flexión en el extremo de la tabla es 1 pie, encuentre c.

b) Demuestre que la flexión es $\frac{1}{2}$ pie en algún punto entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.

47 **Población de venados** Un rebaño de 100 venados se introduce en una pequeña isla. Al principio, el rebaño aumenta rápidamente, pero con el tiempo los recursos se consumen y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

a) Determine los valores de t para los cuales $N(t) > 0$ y trace la gráfica de N.

b) ¿La población se extingue? Si es así, ¿cuándo?

48 **Población de venados** Remítase el ejercicio 47. Se puede demostrar por medio del cálculo que la tasa R (en venados por año) a la que cambia la población de venados, en el tiempo t, está dada por $R = -4t^3 + 42t$.

a) ¿Cuándo deja de crecer la población?

b) Determine los valores positivos de t para los cuales $R > 0$.

49 **a)** Construya una tabla que contenga los valores de los polinomios de cuarto grado

$$f(x) = 2x^4,$$
$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1,$$
$$h(x) = 2x^4 + 5x^2 - 1,$$

y

$$k(x) = 2x^4 - x^3 + 2x,$$

cuando $x = \pm 20, \pm 40$ y ± 60

b) Cuando crece $|x|$, ¿cómo son los valores de cada función al compararlos entre sí?

c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia en el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

50 **a)** Grafique los polinomios cúbicos

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3, \\ g(x) &= -3x^3 - 2x^2 + 1, \\ h(x) &= 3x^3 + x^2 - 1, \end{aligned}$$

y

$$k(x) = -3x^3 - 2x^2 + 2x,$$

en el mismo plano de coordenadas usando cada una de las siguientes ventanas de visualización:

1) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

2) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

3) $[-50, 50, 10]$ por $[-500, 5000, 1000]$

4) $[100, 100, 10]$ por $[-5 \times 10^5, 5 \times 10^5, 10^4]$

b) Cuando la ventana de visualización aumenta de tamaño, ¿cómo son las gráficas de las cuatro funciones al compararlas entre sí?

c) ¿Cuál término tiene la mayor influencia sobre el valor de cada función cuando $|x|$ es grande?

51 **a)** Grafique cada uno de los siguientes polinomios cúbicos f en la ventana de visualización $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

1) $f(x) = x^3 - x + 1$

2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

3) $f(x) = 0.1x^3 - 1$

4) $f(x) = -x^3 + 4x + 2$

b) Comente la forma de la gráfica de f cuando crece $|x|$.

c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

52 **a)** Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones polinomiales f de cuarto grado en la pantalla $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$.

1) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$

2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - x + 1$

4) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$

b) Comente la forma de la gráfica de f cuando crece $|x|$.

c) Haga una generalización acerca del comportamiento final de la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Ejer. 53–56: Grafique f y estime sus ceros.

53 $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

54 $f(x) = -x^4 + 4x - 1$

55 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

56 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Ejer. 57–60: Grafique f y estime todos los valores de x tales que $f(x) > k$.

57 $f(x) = x^3 + 5x - 2$; $\quad k = 1$

58 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5$; $\quad k = 3$

59 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26$; $\quad k = -1$

60 $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2$; $\quad k = -2$

Ejer. 61–62: Grafique f y g sobre el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección.

61 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8$;
$g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

62 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
$g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

63 **Beneficiarios de servicio médico** La función f dada por

$$f(x) = -0.000\,015z^3 - 0.005z^2 + 0.75z + 23.5,$$

donde $z = x - 1973$, aproxima el número total de beneficiarios de servicio médico en millones, de $x = 1973$ a $x = 2005$. Hubo 23,545,363 beneficiarios en 1973 y 42,394,926 en 2005.

a) Grafique f y comente la forma en que el número de beneficiarios de servicio médico ha cambiado en este periodo.

b) Diseñe un modelo lineal semejante a f que aproxime el número de beneficiarios. ¿Cuál modelo es más realista?

64 **Participantes del programa Con Ventaja** La función f dada por

$$f(x) = -0.11x^4 - 46x^3 + 4000x^2 - 76{,}000x + 760{,}000$$

aproxima el número total de niños en edad preescolar que participaron en el programa gubernamental entre 1966 y 2005, donde $x = 0$ corresponde al año 1966.

a) Grafique f en el intervalo $[0, 40]$. Comente cómo ha cambiado el número de participantes entre 1966 y 2005.

b) Aproxime el número de niños inscritos en 1986.

c) Estime gráficamente los años en los que hubo 500,000 niños inscritos.

3.2 Propiedades de la división

En esta sección empleamos $f(x)$, $g(x)$, etcétera, para denotar polinomios en x. Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$. Por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$, pero podemos usar el proceso llamado **división larga** para encontrar un *cociente* y un *residuo*, como en los siguientes ejemplos, donde se han insertado términos con coeficientes cero.

EJEMPLOS **División larga de polinomios**

■
$$\begin{array}{rrl}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} & \\
x^2 + 3x + 1 & \overline{)\,x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16} & \\
 & \underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
 & -3x^3 - x^2 & \text{restamos} \\
 & \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
 & 8x^2 + 3x - 16 & \text{restamos} \\
 & \underline{8x^2 + 24x + 8} & 8(x^2 + 3x + 1) \\
 & \underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{restamos}
\end{array}$$

El proceso de división larga concluye cuando se llega a un polinomio (el residuo) que es 0 o tiene un menor grado que el divisor. El resultado de la división larga del ejemplo precedente se puede escribir

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right)$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, obtenemos

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24)$$

Este ejemplo ilustra el siguiente teorema.

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un caso especial útil del algoritmo de división para polinomios se presenta si $f(x)$ se divide entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es un factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo $r(x)$ es menor que el grado de $x - c$ y, por lo tanto, $r(x)$ debe tener grado 0. Esto significa que el residuo es un número diferente de cero. En consecuencia, para toda $x - c$ tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

donde el residuo d es un número real (posiblemente $d = 0$). Si sustituimos c por x, obtenemos

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= 0 + d = d \end{aligned}$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema del residuo Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema del residuo**

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, use el teorema del residuo para encontrar $f(2)$.

SOLUCIÓN Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por división larga,

$$\begin{array}{rrl} & x^2 - x - 1 & \\ x - 2 \,\big) & x^3 - 3x^2 + x + 5 & \\ & \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ x + 5} & x^2(x - 2) \\ & -x^2 + x & \text{restamos} \\ & \underline{-x^2 + 2x} & -x(x - 2) \\ & -x + 5 & \text{restamos} \\ & \underline{-x + 2} & (-1)(x - 2) \\ & 3 & \text{restamos} \end{array}$$

En consecuencia, $f(2) = 3$. Este hecho se puede comprobar por sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3$$ ■

Usaremos el teorema del residuo para demostrar el siguiente resultado importante.

Teorema del factor Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$

DEMOSTRACIÓN Por el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, por lo tanto, por el teorema del residuo, $f(c) = 0$. ■

El teorema del factor es útil para encontrar factores de polinomios, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Uso del teorema del factor**

Demuestre que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, vemos del teorema del factor que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. Otro método de solución sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$. ■

EJEMPLO 3 **Encontrar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga ceros 2, -1 y 3.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. Por lo tanto,

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3),$$

donde cualquier valor diferente de cero puede ser asignado a a. Si establecemos que $a = 1$ y multiplicamos, obtenemos

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$ ■

Para aplicar el teorema del residuo es necesario dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - c$. El método de **división sintética** se puede usar para simplificar este trabajo. Las directrices siguientes expresan cómo hacerlo. El método puede justificarse por medio de una cuidadosa (y prolongada) comparación con el método de división larga.

Directrices para la división sintética de $a_nx_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ entre $x - c$

1. Comience con lo siguiente, escribiendo ceros para cualesquiera coeficientes faltantes del polinomio dado.

$$\begin{array}{r|llllll}
c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & \\ \hline
 & a_n & & & & &
\end{array}$$

2. Multiplique a_n por c y coloque el producto ca_n debajo de a_{n-1}, como lo indica la flecha en el siguiente diagrama. (Esta flecha, y otras, se usan sólo para aclarar estas directrices y no aparecerá en divisiones sintéticas *específicas*.) A continuación, encuentre la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y colóquela bajo la línea como se indica.

$$\begin{array}{r|llllllll}
c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & & & a_1 & a_0 \\
 & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \ldots & & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline
 & a_n & b_1 & b_2 & \ldots & & b_{n-3} & b_{n-1} & r
\end{array}$$

3. Multiplique b_1 por c y coloque el producto cb_1 debajo de a_{n-2}, como lo indica la segunda flecha. Luego, encuentre la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y colóquela bajo la línea, como se indica.
4. Continúe este proceso, según lo indican las flechas, hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

(*continúa*)

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-1}, \quad b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; esto es,

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

La división sintética no sustituye a una división larga, simplemente es un método más rápido, y es aplicable sólo cuando el divisor es de la forma $x - c$.

Los siguientes ejemplos ilustran la división sintética para algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 **Uso de la división sintética para encontrar un cociente y un residuo**

Use la división sintética para encontrar el cociente $q(x)$ y el residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ se divide entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Como el divisor es $x + 3 = x - (-3)$, el valor de c en la expresión $x - c$ es -3. En consecuencia, la división sintética toma esta forma:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & \underbrace{2 \quad -1 \quad 3 \quad -11}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & & \underbrace{25}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Como se indicó, los primeros cuatro números del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$, y el último número es el residuo r. Así,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{y} \quad r = 25$$

La división sintética se puede usar para encontrar valores de funciones polinomiales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Uso de la división sintética para encontrar valores de un polinomio**

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, use la división sintética para encontrar $f(4)$.

SOLUCIÓN Por el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 4$. Al dividir sintéticamente, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & \underbrace{3 \quad 12 \quad 10 \quad 45 \quad 180}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & & & \underbrace{719}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Por consiguiente, $f(4) = 719$.

La división sintética se puede usar como ayuda para encontrar ceros de polinomios. Por el método que se ilustra en el ejemplo anterior, $f(c) = 0$ si y sólo si el residuo en la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 **Uso de la división sintética para encontrar ceros de un polinomio**

Demuestre que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44$$

SOLUCIÓN Al dividir sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$ tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -3 \quad 4}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & \underbrace{0}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Por lo tanto, $f(-11) = 0$, y -11 es un cero de f. ■

El ejemplo 6 muestra que el número -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la sección 3.4 se usará división sintética para encontrar soluciones racionales de ecuaciones.

En esta etapa usted debe reconocer que los tres enunciados siguientes son equivalentes para una función polinomial f cuya gráfica es igual a aquella de la ecuación $y = f(x)$.

enunciados equivalentes para $f(a) = b$

1) El punto (a, b) está en la gráfica de f.
2) El valor de f en $x = a$ es igual a b; esto es, $f(a) = b$.
3) Si $f(x)$ se divide entre $x - a$, entonces el residuo es b.

Además, si b es igual a 0, entonces los siguientes cuatro enunciados también son equivalentes.

enunciados equivalentes adicionales para $f(a) = 0$

1) El número a es un cero de la función f.
2) El punto $(a, 0)$ está en la gráfica de f; esto es, a es una intersección en x.
3) El número a es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.
4) El binomio $x - a$ es un factor del polinomio $f(x)$.

Usted debe familiarizarse con estos enunciados hasta el punto en que si sabe que uno de ellos es verdadero, pueda recordar y aplicar fácilmente cualquier enunciado equivalente apropiado.

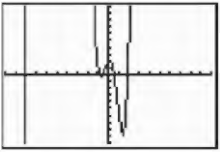
EJEMPLO 7 **Relación de una gráfica con una división**

Use la gráfica de

$$f(x) = 0.5x^5 + 3.5x^4 - 5.5x^3 - 7.5x^2 + 2x + 2$$

para aproximar (a dos posiciones decimales) el residuo si $f(x)$ se divide entre $x + 1.37$.

FIGURA 1
$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y graficamos f con una ventana de visualización estándar, como se aprecia en la figura 1. De la discusión precedente sabemos que para encontrar un residuo b mediante una gráfica, se debe encontrar el punto (a, b) que corresponde a dividir $f(x)$ entre $x - a$. En este caso $a = -1.37$, y el punto sobre la gráfica con abscisa -1.37 es aproximadamente $(-1.37, 9.24)$. En consecuencia, el residuo b es aproximadamente 9.24.

La forma más fácil de encontrar el residuo usando una calculadora graficadora es simplemente encontrar el valor de función Y_1 cuando $x = -1.37$. Sin embargo, el propósito de este ejemplo era señalar la relación gráfica con el proceso de división. ■

3.2 Ejercicios

Ejer. 1–8: Encuentre el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

1 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12;\quad p(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6;\quad p(x) = x^2 + 1$

3 $f(x) = 3x^3 + 2x - 4;\quad p(x) = 2x^2 + 1$

4 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8;\quad p(x) = 2x^2 + x$

5 $f(x) = 7x + 2;\quad p(x) = 2x^2 - x - 4$

6 $f(x) = -5x^2 + 3;\quad p(x) = x^3 - 3x + 9$

7 $f(x) = 10x + 4;\quad p(x) = 2x - 5$

8 $f(x) = 7x^2 + 3x - 10;\quad p(x) = x^2 - x + 10$

Ejer. 9–12: Use el teorema del residuo para encontrar $f(c)$.

9 $f(x) = 3x^3 - x^2 - 4;\quad c = 2$

10 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1;\quad c = 3$

11 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8;\quad c = -3$

12 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12;\quad c = -2$

Ejer. 13–18: Use el teorema del factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $f(x)$.

13 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12;\quad c = -3$

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10;\quad c = 2$

15 $f(x) = x^{12} - 4096;\quad c = -2$

16 $f(x) = x^5 + 1024;\quad c = -4$

17 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 36;\quad c = 3$

18 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2;\quad c = 2$

Ejer. 19–24: Encuentre un polinomio $f(x)$ con coeficiente principal 1 y que tenga el grado y ceros dados.

19 grado 3; ceros $-2, 0, 5$

20 grado 3; ceros $\pm 2, 3$

21 grado 3; ceros $\pm 3, 1$

22 grado 3; ceros $-3, 0, 4$

23 grado 4; ceros $-2, \pm 1, 4$

24 grado 4; ceros $-3, 0, 1, 5$

Ejer. 25–32: Use la división sintética para encontrar el cociente y residuo si el primer polinomio se divide entre el segundo.

25 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5;\quad x - 2$

26 $3x^3 + 10x^2 - 7x + 8;\quad x + 4$

27 $x^3 - 8x - 5;\quad x + 3$

28 $5x^3 - 18x^2 - 15;\quad x - 4$

29 $3x^5 + 6x^2 + 7;\quad x + 2$

30 $-2x^4 + 10x - 3;\quad x - 3$

31 $4x^4 - 5x^2 + 1;\quad x - \frac{1}{2}$

32 $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4;\quad x - \frac{1}{3}$

Ejer. 33–40: Use la división sintética para encontrar $f(c)$.

33 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4;\quad c = 3$

34 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x;\quad c = -2$

35 $f(x) = 0.3x^3 + 0.4x;\quad c = -0.2$

36 $f(x) = 0.1x^3 + 0.5x\quad c = 0.3$

37 $f(x) = 27x^5 + 2x^2 + 1\quad c = \frac{1}{3}$

38 $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7;\quad c = \frac{1}{2}$

39 $f(x) = x^2 + 3x - 5;\quad c = 2 + \sqrt{3}$

40 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8;\quad c = 1 + \sqrt{2}$

Ejer. 41–44: Use la división sintética para demostrar que c es un cero de $f(x)$.

41 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4;\quad c = -2$

42 $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3;\quad c = 3$

43 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3;\quad c = \frac{1}{2}$

44 $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1$; $c = -\frac{1}{3}$

Ejer. 45–46: Encuentre todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

45 $f(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$; $x + 2$

46 $f(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$; $x - 1$

Ejer. 47–48: Demuestre que $x - c$ no es un factor de $f(x)$ para algún número real c.

47 $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ **48** $f(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

49 Encuentre el residuo si el polinomio

$$3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$$

se divide entre $x + 1$.

Ejer. 50–52: Use el teorema del factor para verificar el enunciado.

50 $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n.

51 $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo par n.

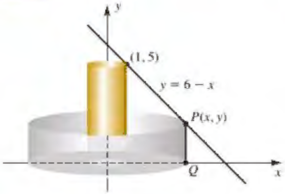
52 $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$ para todo entero positivo impar n.

53 Sea $P(x, y)$ un punto en el primer cuadrante en $y = 6 - x$, y considere el segmento de recta vertical PQ que se muestra en la figura.

a) Si PQ se hace girar alrededor del eje y, determine el volumen V del cilindro resultante.

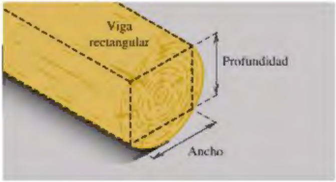
b) ¿Para qué punto $P(x, y)$ con $x \neq 1$ el volumen V del inciso a) es igual que el volumen del cilindro de radio 1 y altura 5 que se muestra en la figura?

EJERCICIO 53



54 **Resistencia de una viga** La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto de su ancho por el cuadrado de la profundidad de una sección transversal (vea la figura). Una viga de 1.5 pies de ancho se ha cortado de un tronco cilíndrico cuyo radio es de 1 pie. Encuentre el ancho de una segunda viga rectangular de igual resistencia que pueda haberse cortado del tronco.

EJERCICIO 54

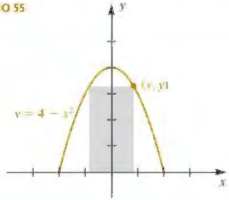


55 **Arco parabólico** Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 - x^2$. Un rectángulo se ajusta bajo el arco al seleccionar un punto (x, y) en la parábola (vea la figura).

a) Exprese el área A del rectángulo en términos de x.

b) Si $x = 1$, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Encuentre la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

EJERCICIO 55

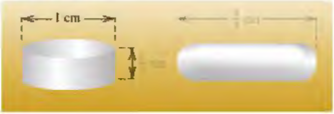


56 **Dimensiones de una cápsula** Una tableta de aspirina en forma de cilindro circular recto tiene altura de $\frac{1}{3}$ centímetro y radio de $\frac{1}{2}$ centímetro. El fabricante también desea vender la aspirina en forma de cápsula, la cual debe medir $\frac{3}{2}$ centímetros de largo, en forma de cilindro circular recto con semiesferas unidas en ambos extremos (vea la figura).

a) Si r denota el radio de un hemisferio, encuentre una fórmula para el volumen de la cápsula.

b) Encuentre el radio de la cápsula para que su volumen sea igual al de la tableta.

EJERCICIO 56



Ejer. 57–58: Use la gráfica de f para aproximar el residuo si f se divide entre $x - 0.21$.

57 $f(x) = x^6 - 7.9x^5 - 0.8x^4 + x^3 + 1.2x - 9.81$

58 $f(x) = 3.33x^6 - 2.5x^5 + 6.9x^4 - 4.1x^2 + 1.22x - 6.78$

Ejer. 59–60: Use la gráfica de f para aproximar todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

59 $f(x) = x^3 + k^2x^2 + 2kx - 2k^4$; $x - 1.6$

60 $f(x) = k^3x^3 - 2.1x^2 + k^3x - 1.2k^2$; $x + 0.4$

3.3 Ceros de polinomios

Los **ceros de un polinomio** $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Cada cero real es un punto de intersección de la gráfica de f con el eje x. En campos de aplicación, suelen emplearse calculadoras y computadoras para encontrar o aproximar ceros. Antes de usar una calculadora es conveniente conocer qué tipo de ceros esperar. Algunas preguntas que se podrían formular son

1) ¿Cuántos ceros de $f(x)$ son reales y cuántos imaginarios?

2) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son positivos y cuántos negativos?

3) ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son racionales y cuántos irracionales?

4) ¿Los ceros reales de $f(x)$ son grandes o pequeños en valor?

En esta sección y la siguiente se estudiarán resultados que ayudan a contestar algunas de estas preguntas. Estos resultados forman la base de la *teoría de ecuaciones*.

Los teoremas del factor y del residuo se pueden extender al sistema de números complejos. Así, un número complejo $c = a + bi$ es un cero de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. Excepto en casos especiales, los ceros de polinomios son muy difíciles de encontrar. Por ejemplo, no hay ceros obvios de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x - 10$. Aun cuando no se tiene una fórmula que pueda usarse para encontrar los ceros, el siguiente teorema expresa que hay *por lo menos* un cero c y, en consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor de la forma $x - c$.

Teorema fundamental del álgebra Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero complejo.

La demostración estándar de este teorema requiere resultados de un campo avanzado de las matemáticas llamado *funciones de variable compleja*. Un requisito previo para estudiar este campo es tener conocimientos sólidos de cálculo. La primera demostración del teorema fundamental del álgebra fue dada por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado por muchos como el más grande matemático de todos los tiempos.

Como caso especial del teorema fundamental del álgebra, si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero complejo. Si $a + bi$ es un cero complejo, puede ocurrir que $b = 0$, en cuyo caso el número a es un cero real.

El teorema fundamental del álgebra hace posible que, al menos en teoría, todo polinomio $f(x)$ de grado positivo se exprese como un producto de polinomios de grado 1, como en el siguiente teorema.

Teorema de factorización completa para polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos c_1, c_2, ..., c_n tales que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Cada número c_k es un cero de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $f(x)$ tiene grado $n > 0$, entonces, por el teorema fundamental del álgebra, $f(x)$ tiene un cero complejo c_1. En consecuencia, por el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor $x - c_1$; esto es,

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, entonces, por el mismo argumento, $f_1(x)$ tiene un cero complejo c_2 y por lo tanto un factor $x - c_2$. Así,

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x),$$

donde $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. En consecuencia,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x)$$

Continuando con este proceso, después de n pasos se llega a un polinomio $f_n(x)$ de grado 0. Por lo tanto, $f_n(x) = a$ para algún número a diferente de cero y se puede escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

donde cada número complejo c_k es un cero de $f(x)$. El coeficiente principal del polinomio en el lado derecho de la última ecuación es a y, por lo tanto, a es el coeficiente principal de $f(x)$.

EJEMPLOS **Teorema de factorización completa para polinomios**

Un polinomio $f(x)$	Una forma factorizada de $f(x)$	Ceros de $f(x)$
$3x^2 - (12 + 6i)x + 24i$	$3(x - 4)(x - 2i)$	$4, 2i$
$-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + i)(x - i)$	$-\frac{1}{3}, \pm i$
$5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5(x - 0)[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)]$	$0, 3 \pm 2i$
$\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 8$	$\frac{2}{3}(x + 12)(x + 1)(x - 1)$	$-12, \pm 1$

Ahora se puede demostrar lo siguiente.

Teorema sobre el número máximo de ceros de un polinomio

Un polinomio de grado $n > 0$ tiene a lo sumo n ceros complejos diferentes.

DEMOSTRACIÓN Haremos una demostración indirecta, es decir, supondremos que $f(x)$ tiene *más* de n ceros complejos diferentes y demostraremos que este supuesto lleva a una contradicción. Elegimos $n + 1$ de los ceros y se marcan como $c_1, c_2, ..., c_n$ y c. Podemos usar c_k para obtener la factorización indicada en el enunciado del teorema de factorización completa para polinomios. Al sustituir x por c y usar el hecho de que $f(c) = 0$, obtenemos

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2)\ldots(c - c_n)$$

No obstante, cada factor del lado derecho es diferente de cero, porque $c \neq c_k$ para toda k. Como el producto de números diferentes de cero no puede ser igual a cero, tenemos una contradicción. ■

EJEMPLO 1 **Encontrar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ en forma factorizada que tenga grado 3; tenga ceros 2, -1 y 3; y satisfaga $f(1) = 5$.

SOLUCIÓN Por el teorema del factor, $f(x)$ tiene factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen otros factores de grado 1, porque, por el teorema del factor, otro factor lineal $x - c$ produciría un cuarto cero de $f(x)$, contrario al teorema precedente. Por lo tanto, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a. Como $f(1) = 5$, podemos encontrar a como sigue:

$$\begin{aligned} 5 &= a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) && \text{sea } x = 1 \text{ en } f(x) \\ 5 &= a(-1)(2)(-2) && \text{simplificamos} \\ a &= \tfrac{5}{4} && \text{despejamos } a \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$f(x) = \tfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

Si multiplicamos los factores, obtenemos el polinomio

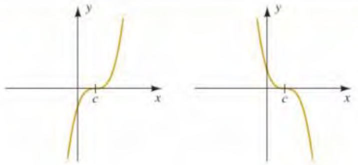
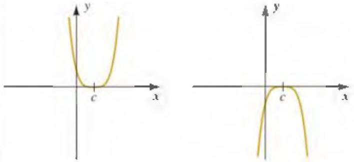
$$f(x) = \tfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{2}$$ ■

Los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el teorema de factorización completa no necesariamente son todos diferentes. Para ilustrar, $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ tiene la factorización

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 1)$$

Si un factor $x - c$ se presenta m veces en la factorización, entonces c es un **cero de multiplicidad m** del polinomio $f(x)$ o una **raíz de multiplicidad m** de la ecuación $f(x) = 0$. En la exhibición anterior, 1 es un cero de multiplicidad 2, y -3 es un cero de multiplicidad 1.

Si c es un cero real de $f(x)$ de multiplicidad m, entonces $f(x)$ tiene el factor $(x - c)^m$ y la gráfica de f tiene una intersección c en x. La forma general de la gráfica en $(c, 0)$ depende de si m es entero impar o entero par. Si m es impar, entonces $(x - c)^m$ cambia de signo cuando x aumenta por medio de c, y por lo tanto la gráfica de f cruza el eje x en $(c, 0)$, como se indica en el primer renglón de la siguiente tabla. Las figuras de la tabla no muestran la gráfica completa de f, sino sólo su forma general cerca de $(c, 0)$. Si m es par, entonces $(x - c)^m$ no cambia de signo en c y la gráfica de f cerca de $(c, 0)$ tiene el aspecto de una de las dos figuras del segundo renglón.

Factor de $f(x)$	Forma general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$
$(x - c)^m$, con m impar y $m \neq 1$	
$(x - c)^m$, con m par	

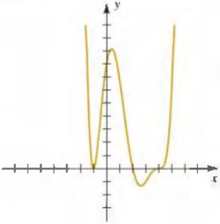
EJEMPLO 2 **Encontrar multiplicidades de ceros**

Encuentre los ceros del polinomio $f(x) = \frac{1}{16}(x - 2)(x - 4)^3(x + 1)^2$, exprese la multiplicidad de cada uno y luego trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN A partir de la forma factorizada vemos que $f(x)$ tiene tres ceros distintos, 2, 4 y -1. El cero 2 tiene multiplicidad 1, el cero 4 tiene multiplicidad 3, y el cero -1 tiene multiplicidad 2. Observe que $f(x)$ tiene grado 6.

Las intersecciones en x de la gráfica de f son los ceros reales -1, 2 y 4. Como la multiplicidad de -1 es un entero par, la gráfica interseca, pero no cruza, el eje x en $(-1, 0)$. Como las multiplicidades de 2 y 4 son impares, la gráfica cruza el eje x en $(2, 0)$ y $(4, 0)$. (Note que la gráfica es "más plana" en 4 que en 2.) La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{16}(-2)(-4)^3(1)^2 = 8$. La gráfica se muestra en la figura 1. ■

FIGURA 1



Si $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$ es un polinomio de grado n, entonces los n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ceros de $f(x)$. El conteo de un cero de multiplicidad m como m ceros indica que $f(x)$ tiene por lo menos n ceros (no necesariamente todos diferentes). Combinando este hecho con el de que $f(x)$ tiene como máximo n ceros, tenemos el siguiente resultado.

Teorema del número exacto de ceros de un polinomio

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Note la forma en que el polinomio de grado 6 del ejemplo 2 se relaciona con el último teorema. Las multiplicidades son 1, 3 y 2, de modo que f tiene precisamente $1 + 3 + 2 = 6$ ceros.

EJEMPLO 3 **Encontrar los ceros de un polinomio**

Exprese $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como producto de factores lineales y encuentre los cinco ceros de $f(x)$.

SOLUCIÓN Comenzamos por factorizar x^3:

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13)$$

Por la fórmula cuadrática, los ceros del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

En consecuencia, por el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$, y se obtiene la factorización

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

Como $x - 0$ se presenta tres veces como un factor, el número 0 es un cero de multiplicidad 3 y los cinco ceros de $f(x)$ son 0, 0, 0, $2 + 3i$ y $2 - 3i$. ■

A continuación veremos cómo utilizar la *regla de los signos de Descartes* para obtener información relacionada con los ceros de una función polinomial $f(x)$ con coeficientes reales. En el enunciado de la regla se supone que los términos de $f(x)$ están ordenados en potencias decrecientes de x y que los términos con coeficiente cero no se consideran. También se supone que el **término constante**, es decir, el término que no contiene x, es diferente de cero. Se dice que hay una **variación de signo** en $f(x)$ si dos coeficientes consecutivos tienen signos opuestos. Para ilustrar, la función polinomial $f(x)$ en el siguiente ejemplo tiene *tres* variaciones de signo, como lo indican las llaves, una variación de $2x^5$ a $-7x^4$, una segunda de $-7x^4$ a $3x^2$, y una tercera de $6x$ a -5.

EJEMPLOS **Variaciones de signo en $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$**

$$\begin{array}{ccccccccc} & \overbrace{\qquad}^{+\text{ a }-} & & \overbrace{\qquad}^{-\text{ a }+} & & \overbrace{\qquad}^{\text{sin variación}} & & \overbrace{\qquad}^{+\text{ a }-} & \\ f(x) = 2x^5 & & -7x^4 & & +3x^2 & & +6x & & -5 \end{array}$$

■

La regla de Descartes también se refiere a las variaciones de signo en $f(-x)$. Con base en el ejemplo previo, note que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^4 + 3(-x)^2 + 6(-x) - 5 \\ &= -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como se indica en los siguientes ejemplos, hay dos variaciones de signo en $f(-x)$, una de $-7x^4$ a $3x^2$ y una segunda de $3x^2$ a $-6x$.

EJEMPLOS **Variaciones de signo en $f(-x)$ si $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$**

$$\begin{array}{ccccccccc} & \overbrace{\qquad}^{\text{sin variación}} & & \overbrace{\qquad}^{-\text{ a }+} & & \overbrace{\qquad}^{+\text{ a }-} & & \overbrace{\qquad}^{\text{sin variación}} & \\ f(-x) = -2x^5 & & -7x^4 & & +3x^2 & & -6x & & -5 \end{array}$$

■

La regla de Descartes se puede expresar como sigue.

Regla de signos de Descartes

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un término constante diferente de cero.

1) El número de ceros reales *positivos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(x)$ o es menor que ese número por un entero par.

2) El número de ceros reales *negativos* de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $f(-x)$ o es menor que ese número por un entero par.

No se dará una demostración de la regla de Descartes.

EJEMPLO 4 **Uso de la regla de signos de Descartes**

Discuta el número de soluciones reales positivas y negativas y soluciones imaginarias posibles de la ecuación $f(x) = 0$, donde

$$f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$$

SOLUCIÓN El polinomio $f(x)$ es el dado en las dos demostraciones previas. Como hay tres variaciones de signo en $f(x)$, la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una solución real positiva.

Como $f(-x)$ tiene dos variaciones de signo, la ecuación tiene dos soluciones negativas o ninguna solución negativa. Debido a que $f(x)$ tiene grado 5, hay un total de cinco soluciones. Las soluciones que no son números reales positivos o negativos son imaginarias. La siguiente tabla resume las diversas posibilidades de soluciones de la ecuación que se pueden presentar.

Número de soluciones reales positivas	3	3	1	1
Número de soluciones reales negativas	2	0	2	0
Número de soluciones imaginarias	0	2	2	4
Número total de soluciones	5	5	5	5

La regla de Descartes estipula que el término constante del polinomio $f(x)$ es diferente de 0. Si el término constante es 0, como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

la potencia más baja de x se factoriza, obteniendo

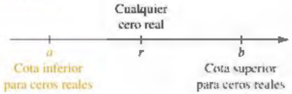
$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0$$

Así, una solución es $x = 0$, y la regla de Descartes se aplica al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para determinar la naturaleza de las tres soluciones restantes.

Cuando se aplique la regla de Descartes, se cuentan las raíces de multiplicidad k como k raíces. Por ejemplo, dado $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio $x^2 - 2x + 1$ tiene dos variaciones de signo y, por lo tanto, la ecuación tiene o dos raíces reales positivas o ninguna. La forma factorizada de la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y, por consiguiente, 1 es una raíz de multiplicidad 2.

A continuación se estudian las *cotas* para los ceros reales de un polinomio $f(x)$ que tiene coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** para los ceros si ningún cero es mayor que b. Un número real a es una **cota inferior** para los ceros si ningún cero es menor que a. Así, si r es cualquier cero real de $f(x)$, entonces $a \leq r \leq b$; esto es, r está en el intervalo cerrado $[a, b]$, como se ilustra en la figura 2. Note que las cotas superior e inferior no son únicas, puesto que cualquier número mayor que b también es una cota superior, y cualquier número menor que a también es una cota inferior.

FIGURA 2



Podemos emplear la división sintética para encontrar cotas superior e inferior para los ceros de $f(x)$. Recuerde que si dividimos $f(x)$ entre $x - c$, el tercer renglón del proceso de división contiene los coeficientes del cociente $q(x)$ junto con el residuo $f(c)$. El teorema siguiente indica la forma en que este tercer renglón se usa para encontrar cotas superior e inferior para las soluciones reales.

Primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios

Suponga que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y un coeficiente principal positivo y que $f(x)$ está dividido sintéticamente entre $x - c$.

1) Si $c > 0$ y si todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es una cota superior para los ceros reales de $f(x)$.

2) Si $c < 0$ y si los números del tercer renglón del proceso de división son alternadamente positivos y negativos (y un 0 en el tercer renglón se considera positivo o negativo), entonces c es una cota inferior para los ceros reales de $f(x)$.

EJEMPLO 5 **Encontrar cotas para las soluciones de una ecuación**

Encuentre las cotas superior e inferior para las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$.

SOLUCIÓN Dividimos $f(x)$ sintéticamente entre $x - 1$ y $x - 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

El tercer renglón de la división sintética entre $x - 1$ contiene números negativos, por lo tanto, la parte 1) del teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios no se cumple, pero como todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$ son positivos, deducimos del inciso 1) que 2 es una cota superior para

(continúa)

las soluciones reales de la ecuación. Este hecho también es evidente si la división entre $x - 2$ se expresa en la forma del algoritmo de la división

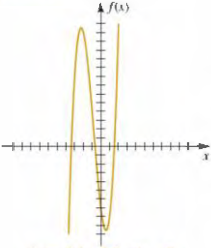
$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13,$$

porque si $x > 2$, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo (¿por qué?) y, por lo tanto, $f(x)$ no es cero.

Ahora se encuentra una cota inferior. Después de algunos intentos de ensayo y error usando $x - (-1)$, $x - (-2)$ y $x - (-3)$, vemos que la división sintética de f entre $x - (-4)$ da

-4	2	5	-8	-7
		-8	12	-16
	2	-3	4	-23

FIGURA 3



$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$

Como los números del tercer renglón son alternadamente positivos y negativos, se deduce del inciso 2) del teorema anterior que -4 es una cota inferior para las soluciones reales. Esto también se puede demostrar al expresar la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23,$$

porque si $x < -4$, entonces el lado derecho de esta ecuación es negativo (¿por qué?), y por consiguiente $f(x)$ no es cero.

Como las cotas inferior y superior para las soluciones reales son -4 y 2, respectivamente, se deduce que todas las soluciones reales están en el intervalo cerrado $[-4, 2]$.

La gráfica de f en la figura 3 muestra que los tres ceros de f están en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$, respectivamente. ■

Cuando se usa una calculadora graficadora, el siguiente teorema es útil para encontrar una pantalla que muestre todos los ceros de un polinomio.

Segundo teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios

Suponga que $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ es un polinomio con coeficientes reales. Todos los ceros reales de $f(x)$ están en el intervalo

$$(-M, M),$$

donde $M = \dfrac{\max(|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|)}{|a_n|} + 1$

En palabras, el valor de M es igual a la razón entre el máximo coeficiente (en magnitud) y el valor absoluto del coeficiente principal, más 1. Por ejemplo, usando el polinomio $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ del ejemplo 5, tenemos

$$M = \frac{|-8|}{|2|} + 1 = 4 + 1 = 5$$

Cuando se usa una calculadora graficadora *sólo* para encontrar los ceros de un polinomio $f(x)$, no es necesario ver los puntos críticos del polinomio. Por lo tanto, se podría empezar a buscar los ceros de $f(x)$ usando las dimensiones de la ventana de visualización

$$[-M, M] \text{ por } [-1, 1]$$

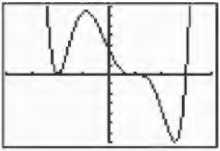
Al graficar $Y_1 = f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ (del ejemplo 5) en la ventana de visualización $[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$, como se ve en la figura 4, casi se pueden "ver muy de cerca" las soluciones aproximadas -3.4, -0.7 y 1.5.

FIGURA 4

$[-5, 5]$ por $[-1, 1, 0.5]$

EJEMPLO 6 **Encontrar un polinomio a partir de una gráfica**

FIGURA 5
$[-4, 4]$ por $[-35, 35, 5]$



En la figura 5 se muestran todos los ceros de una función polinomial f.

a) Encuentre una forma factorizada para f que tenga grado mínimo.

b) Suponiendo que el coeficiente principal de f sea 1, encuentre el punto de intersección con el eje y.

SOLUCIÓN

a) El cero en $x = -2$ debe tener una multiplicidad que es un número par, porque f no cambia de signo en $x = -2$. El cero en $x = 1$ debe tener una multiplicidad impar de 3 o mayor, porque f cambia de signo en $x = 1$ y se nivela. El cero en $x = 3$ es de multiplicidad 1, porque f cambia de signo y no se nivela. Por lo tanto, una forma factorizada de f es

$$f(x) = a(x + 2)^m(x - 1)^n(x - 3)^1$$

Como deseamos que la función tenga grado mínimo, se establece que $m = 2$ y $n = 3$, obteniendo

$$f(x) = a(x + 2)^2(x - 1)^3(x - 3),$$

que es un polinomio de sexto grado.

b) Si el coeficiente principal de f debe ser 1, entonces, a partir del teorema de factorización completa para polinomios, sabemos que el valor de a es 1. Para encontrar la intersección en y, establecemos que $x = 0$ y calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 1(0 + 2)^2(0 - 1)^3(0 - 3) = 1(4)(-1)(-3) = 12$$

Por lo tanto, la intersección en y es 12. ■

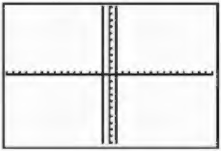
EJEMPLO 7 **Exploración de la gráfica de un polinomio**

Encuentre los ceros de $f(x) = x^3 - 1000x^2 - x + 1000$.

SOLUCIÓN Asignamos $f(x)$ a Y_1 y usamos una pantalla estándar para obtener la figura 6. Parece que el 1 es una raíz de f y se puede demostrar este hecho con división sintética:

(continúa)

FIGURA 6
$[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{1} & 1 & -1000 & -1 & 1000 \\ & & 1 & -999 & -1000 \\ \hline & 1 & -999 & -1000 & 0 \end{array}$$

Usando la **ecuación disminuida,** $x^2 - 999x - 1000 = 0$, se demuestra también que -1 es una raíz de f:

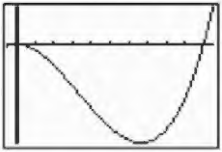
$$\begin{array}{r|rrr} \underline{-1} & 1 & -999 & -1000 \\ & & -1 & 1000 \\ \hline & 1 & -1000 & 0 \end{array}$$

Para la última división sintética, vemos que $x - 1000$ es un factor de f y, por lo tanto, la tercera raíz es 1000.

Debido a los tamaños relativos de las raíces 1 y 1000, es muy difícil obtener una ventana de visualización que muestre los tres ceros. No obstante, al ajustar Xmin en -50, Xmax en 1050 y Xscl en 100 y usar ZoomFit (seleccione 0 en la calculadora TI-83/4 Plus), obtenemos el trazo de f de la figura 7, mostrando sus ceros y puntos críticos.

Ahora compruebe los valores de Ymin y Ymax para ver la ventana de viualización necesaria.

FIGURA 7 Uso de ZoomFit
$[-50, 1050, 100]$ por $[?, ?, ?]$



■

3.3 Ejercicios

Ejer. 1–8: Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga los ceros indicados y satisfaga las condiciones dadas.

1 $-1, 2, 3$; $\quad f(-2) = 80$

2 $-5, 2, 4$; $\quad f(3) = -24$

3 $-4, 3, 0$; $\quad f(2) = -36$

4 $-3, -2, 0$; $\quad f(-4) = 16$

5 $-2i, 2i, 3$; $\quad f(1) = 20$

6 $-3i, 3i, 4$; $\quad f(-1) = 50$

7 $-i, i, 0$; $\quad f(2) = 30$

8 $-4i, 4i, 0$; $\quad f(4) = 1$

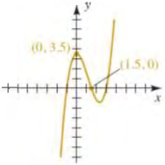
9 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficiente principal 1 tal que -4 y 3 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

10 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 con coeficiente principal 1 tal que -5 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

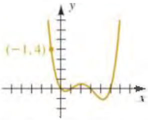
11 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 6 tal que 0 y 3 sean ceros de multiplicidad 3 y $f(2) = -24$. Trace la gráfica de f.

12 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 7 tal que -2 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, 0 es un cero de multiplicidad 3 y $f(-1) = 27$. Trace la gráfica de f.

13 Encuentre la función polinomial de tercer grado cuya gráfica se ilustra en la figura.



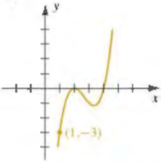
14 Encuentre la función polinomial de cuarto grado cuya gráfica se ilustra en la figura.



Ejer. 15–16: Encuentre la función polinomial de grado 3 cuya gráfica se muestra en la figura.

15

16



Ejer. 17–26: Encuentre los ceros de $f(x)$ y exprese la multiplicidad de cada cero.

17 $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$

18 $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$

19 $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

20 $f(x) = 16x^5 - 40x^4 + 25x^3$

21 $f(x) = (x^2 - 3)^3$

22 $f(x) = (4x^2 - 5)^2$

23 $f(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$

24 $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$

25 $f(x) = x^4 + 7x^2 - 144$

26 $f(x) = x^4 + 21x^2 - 100$

Ejer. 27–32: Demuestre que el número es un cero de $f(x)$ de la multiplicidad (mult.) dada y exprese $f(x)$ como un producto de factores lineales.

27 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$; -3 (mult. 2)

28 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$; 4 (mult. 2)

29 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$; -2 (mult. 3)

30 $f(x) = x^4 - 11x^3 + 36x^2 - 16x - 64$; 4 (mult. 3)

31 $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$; 1 (mult. 5)

32 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$; -1 (mult. 4)

Ejer. 33–40: Use la regla de los signos de Descartes para determinar el número de soluciones posibles positivas, negativas y complejas no reales de la ecuación.

33 $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$

34 $5x^3 - 6x - 4 = 0$

35 $4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

36 $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$

37 $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$

38 $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$

39 $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$

40 $2x^6 + 5x^5 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

Ejer. 41–46: Al aplicar el primer teorema sobre cotas para ceros reales de polinomios, determine los enteros mínimos y máximos que son cotas superiores e inferiores, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación. Con ayuda de una calculadora graficadora, comente la validez de las cotas.

41 $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

42 $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

43 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 6 = 0$

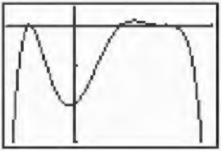
44 $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

45 $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$

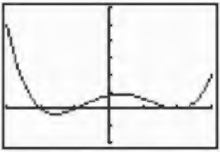
46 $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

Ejer. 47–48: Encuentre una forma factorizada para una función polinomial f que tenga un grado mínimo. Suponga que los valores de los puntos de intersección son enteros y que Xscl = Yscl = 1.

47

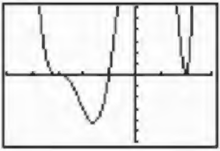


48

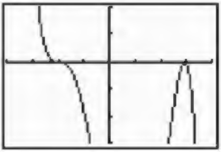


Ejer. 49–50: a) Encuentre una forma factorizada para una función polinomial f que tenga un grado mínimo. Suponga que los valores de los puntos de intersección son enteros, Xscl = 1 y Yscl = 5. b) Si el coeficiente principal de f es a, encuentre el punto de intersección con el eje y.

49 $a = 1$



50 $a = -1$



Ejer. 51–52: La función polinomial f tiene sólo ceros reales. Utilice la gráfica de f para factorizarla.

51 $f(x) = x^5 - 16.75x^3 + 12.75x^2 + 49.5x - 54$

52 $f(x) = x^5 - 2.5x^4 - 12.75x^3 + 19.625x^2 + 27.625x + 7.5$

Ejer. 53–56: ¿Hay un polinomio del grado dado n cuya gráfica contiene los puntos indicados?

53 $n = 4$;
$(-2, 0), (0, -24), (1, 0), (3, 0), (2, 0), (-1, -52)$

54 $n = 5$;
$(0, 0), (-3, 0), (-1, 0), (2, 0), (3, 0), (-2, 5), (1, 2)$

55 $n = 3$;
$(1.1, -49.815), (2, 0), (3.5, 25.245), (5.2, 0), (6.4, -29.304), (10.1, 0)$

56 $n = 4$;
$(1.25, 0), (2, 0), (2.5, 56.25), (3, 128.625), (6.5, 0), (9, -307.75), (10, 0)$

57 **Uso de datos limitados** Un científico tiene datos limitados sobre la temperatura T (en °C) durante un periodo de 24 horas. Si t denota el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a la media noche, encuentre el polinomio de cuarto grado que se ajuste la información de la siguiente tabla.

t (horas)	0	5	12	19	24
T (°C)	0	0	10	0	0

58 **Polinomio de interpolación de Lagrange** Un polinomio $f(x)$ de grado 3 con ceros en c_1, c_2 y c_3 y con $f(c) = 1$ para $c_2 < c < c_3$ es un polinomio de interpolación de Lagrange de tercer grado. Encuentre una fórmula explícita para $f(x)$ en términos de c_1, c_2, c_3 y c.

Ejer. 59–60: Grafique f para cada valor de n en el mismo plano de coordenadas y describa la forma en que la multiplicidad de un cero afecta a la gráfica de f.

59 $f(x) = (x - 0.5)^n(x^2 + 1)$; $n = 1, 2, 3, 4$

60 $f(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$; $n = 1, 2, 3, 4$

Ejer. 61–62: Grafique f, estime todos los ceros reales y determine la multiplicidad de cada cero.

61 $f(x) = x^3 + 1.3x^2 - 1.2x - 1.584$

62 $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{8}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{405}{256}x + \frac{675}{1024}$

63 **Efecto invernadero** Debido a la quema de combustibles fósiles, la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera está creciendo. Investigaciones realizadas indican que esto resultará en un *efecto invernadero* que cambiará el promedio de temperatura de la superficie terrestre. Suponiendo una vigorosa expansión del uso de carbón, la cantidad futura de concentración de dióxido de carbono $A(t)$ en la atmósfera se puede aproximar (en partes por millón) con

$$A(t) = -\frac{1}{2400}t^3 + \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{6}t + 340.$$

donde t es en años, $t = 0$ corresponde a 1980 y $0 \le t \le 60$. Use la gráfica de A para estimar el año cuando la concentración de dióxido de carbono será de 450.

64 **Efecto invernadero** El promedio de aumento en la temperatura de la superficie terrestre debido al efecto invernadero se puede aproximar con

$$T(t) = \frac{21}{5\,000\,000}t^3 - \frac{127}{1\,000\,000}t^2 + \frac{1293}{50\,000}t,$$

donde $0 \le t \le 60$ y $t = 0$ corresponde a 1980. Use la gráfica de T para estimar el año cuando el promedio de temperatura habrá subido 1 °C.

Ejer. 65–66: El promedio de temperaturas mensuales en °F para dos lugares en Canadá se enumera en las siguientes tablas.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.
Bahía Ártica	−22	−26	−18	−4
Lago Trout	−11	−6	7	25

Mes	Mayo	Junio	Julio	Agost.
Bahía Ártica	19	36	43	41
Lago Trout	39	52	61	59

Mes	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
Bahía Ártica	28	12	−8	−17
Lago Trout	48	34	16	−4

a) Si el 15 de enero corresponde a $x = 1$, el 15 de febrero a $x = 2$, ..., y el 15 de diciembre a $x = 12$, determine gráficamente cuál de los tres polinomios dados modela mejor los datos.

b) Use el teorema de valor intermedio para funciones polinomiales para aproximar un intervalo para x cuando se presenta un promedio de temperatura de 0 °F.

c) Use su selección del inciso a) para estimar x cuando la temperatura media es 0 °F.

65 **Temperaturas en la Bahía Ártica**

1) $f(x) = -1.97x^2 + 28x - 67.95$

2) $g(x) = -0.23x^3 + 2.53x^2 + 3.6x - 36.28$

3) $h(x) = 0.089x^4 - 2.55x^3 + 22.48x^2 - 59.68x + 19$

66 **Temperaturas en el Lago Trout**

1) $f(x) = -2.14x^2 + 28.01x - 55$

2) $g(x) = -0.22x^3 + 1.84x^2 + 11.70x - 29.90$

3) $h(x) = 0.046x^4 - 1.39x^3 + 11.81x^2 - 22.2x + 1.03$

Ejer. 67–68: Una esfera de madera sólida, cuya densidad es menor que la del agua, flotará. La profundidad d a la que la esfera se hundirá en el agua es determinada por la ecuación

$$\frac{4k}{3}\pi r^3 - \pi d^2 r + \frac{1}{3}\pi d^3 = 0,$$

donde r es el radio de la esfera y k una constante positiva menor o igual que 1. Si $r = 6$ cm, estime gráficamente d para cada constante k.

67 **Esfera de pino en agua** $k = 0.7$

68 **Esfera de roble en agua** $k = 0.85$

69 Consulte los ejercicios 67 y 68. El agua tiene un valor k de 1. Si una esfera de radio 6 tiene un valor k de 1, ¿cuál es el valor resultante de d? Interprete este resultado.

3.4 Ceros complejos y racionales de polinomios

El ejemplo 3 de la sección anterior ilustra un dato importante acerca de polinomios con coeficientes reales: los dos ceros complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugados entre sí. La relación no es accidental, puesto que el siguiente resultado general es verdadero.

Teorema sobre ceros en pares conjugados de un polinomio

Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$ tiene coeficientes reales y si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es un cero complejo de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ es también un cero de $f(x)$.

Una demostración se deja como ejercicio para análisis al final del capítulo.

EJEMPLO 1 **Encontrar un polinomio con ceros prescritos**

Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 que tenga coeficientes reales y ceros $2 + i$ y $-3i$.

SOLUCIÓN Por el teorema sobre ceros de pares conjugados de un polinomio, $f(x)$ también debe tener ceros $2 - i$ y $3i$. Al aplicar el teorema del factor, encontramos que $f(x)$ tiene los siguientes factores:

$$x - (2 + i), \quad x - (2 - i), \quad x - (-3i), \quad x - (3i)$$

Al multiplicar estos cuatro factores tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x + 3i)(x - 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \qquad (*) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45 \end{aligned}$$

Note que en (*) no aparece el símbolo i. Esto no es coincidencia, porque si $a + bi$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces $a - bi$ es también un cero y se puede multiplicar los factores asociados como sigue:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

En el ejemplo 1 tenemos $a = 2$ y $b = 1$, de modo que $-2a = -4$ y $a^2 + b^2 = 5$, y el factor cuadrático asociado es $x^2 - 4x + 5$. Este factor cuadrático resultante siempre tendrá coeficientes reales, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema sobre la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales y de grado positivo n se puede expresar como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales tales que los factores cuadráticos son irreductibles sobre $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN Como $f(x)$ tiene precisamente n ceros complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, escribimos

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Desde luego, algunos de los ceros pueden ser reales, en cuyo caso se obtienen los factores lineales referidos en el enunciado del teorema.

Si un cero c_k no es real, entonces, por el teorema sobre ceros en pares conjugados de un polinomio, el conjugado $\overline{c_k}$ es también un cero de $f(x)$ y, por lo tanto, debe ser uno de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Esto implica que $x - c_k$ y $x - \overline{c_k}$ aparezcan en la factorización de $f(x)$. Si esos factores se multiplican, obtenemos

$$(x - c_k)(x - \overline{c_k}) = x^2 - (c_k + \overline{c_k})x + c_k\overline{c_k},$$

que tiene coeficientes *reales*, porque $c_k + \overline{c_k}$ y $c_k\overline{c_k}$ son números reales. Así, si c_k es un cero complejo, entonces el producto $(x - c_k)(x - \overline{c_k})$ es un polinomio cuadrático que es irreductible sobre $\mathbb{R}$. Esto completa la demostración.

EJEMPLO 2 **Expresar un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos**

Exprese $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ como un producto de

a) polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que son irreductibles sobre $\mathbb{R}$

b) polinomios lineales

SOLUCIÓN

a) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

$$\begin{aligned} &= (x^5 - 4x^3) + (x^2 - 4) && \text{agrupamos términos} \\ &= x^3(x^2 - 4) + 1(x^2 - 4) && \text{factorizamos } x^3 \\ &= (x^3 + 1)(x^2 - 4) && \text{factorizamos } (x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2) && \text{factorizamos como la suma de cubos y la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Usando la fórmula cuadrática, vemos que el polinomio $x^2 - x + 1$ tiene los ceros complejos

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y por lo tanto es irreductible sobre $\mathbb{R}$. Entonces, la factorización deseada es

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2)$$

b) Como el polinomio $x^2 - x + 1$ del inciso a) tiene ceros $\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{3}/2\right)$, se deduce del teorema del factor que el polinomio tiene factores

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{y} \quad x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Sustituyendo en la factorización que se encontró en el inciso a), obtenemos la siguiente factorización completa en polinomios lineales:

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + 2)(x - 2)$$

Previamente se señaló que por lo general es muy difícil encontrar los ceros de un polinomio de grado superior. No obstante, si todos los coeficientes son enteros, hay un método para encontrar los ceros *racionales*, si existen. El método es una consecuencia del siguiente resultado.

Teorema sobre ceros racionales de un polinomio

Si el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros y si c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no tienen factor primo común, entonces

1) el numerador c del cero es un factor del término constante a_0

2) el denominador d del cero es un factor del coeficiente principal a_n

DEMOSTRACIÓN Suponga que $c > 0$. (La demostración para $c < 0$ es similar.) Se demostrará que c es un factor de a_0. El caso $c = 1$ es trivial, porque 1 es un factor de *cualquier* número. Así, suponga que $c \neq 1$. En este caso, $c/d \neq 1$, porque si $c/d = 1$, obtenemos $c = d$, y como c y d no tienen factor primo en común, esto implica que $c = d = 1$, una contradicción. Por lo tanto, en la siguiente discusión tenemos $c \neq 1$ y $c \neq d$.

Como $f(c/d) = 0$,

$$a_n\frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{c}{d} + a_0 = 0$$

Multiplicamos por d^n y luego sumamos $-a_0d^n$ a ambos lados:

$$a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1cd^{n-1} = -a_0d^n$$
$$c(a_nc^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1d^{n-1}) = -a_0d^n$$

La última ecuación muestra que c es un factor del entero a_0d^n. Como c y d no tienen factor común, c es un factor de a_0. Un argumento similar se puede usar para demostrar que d es un factor de a_n. ■

Como apoyo para elaborar una lista de los ceros racionales posibles, sugerimos recordar el siguiente cociente:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores del término constante } a_0}{\text{factores del coeficiente principal } a_n}$$

El teorema de ceros racionales de un polinomio se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales, con sólo multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcm de todos los coeficientes para obtener una ecuación con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3 **Demostración de que un polinomio no tiene ceros racionales**

Demuestre que $f(x) = x^3 - 4x - 2$ no tiene ceros racionales.

SOLUCIÓN Si $f(x)$ tiene un cero racional c/d tal que c y d no tienen factor primo común, entonces, por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio, c es un factor del término constante -2 y, por lo tanto, es 2 o -2 (que se escribe como ± 2) o ± 1. El denominador d es un factor del coeficiente principal 1 y, por consiguiente, es ± 1. Entonces, las únicas posibilidades para c/d son

$$\frac{\pm 1}{\pm 1} \quad \text{y} \quad \frac{\pm 2}{\pm 1} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad \pm 1 \quad \text{y} \quad \pm 2$$

Al sustituir x por cada uno de estos números, obtenemos

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 1, \quad f(2) = -2 \quad \text{y} \quad f(-2) = -2$$

Como $f(\pm 1) \neq 0$ y $f(\pm 2) \neq 0$, se deduce que $f(x)$ no tiene ceros racionales. ■

En la solución del siguiente ejemplo se supone que no disponemos de una calculadora graficadora. En el ejemplo 5 volveremos a trabajar el problema para demostrar la ventaja de usar una calculadora de este tipo.

EJEMPLO 4 **Encontrar las soluciones racionales de una ecuación**

Encuentre todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0$$

SOLUCIÓN El problema es equivalente a encontrar los ceros racionales del polinomio del lado izquierdo de la ecuación. Si c/d es un cero racional y c y d no tienen factor común, entonces c es un factor del término constante -8 y d es un factor del coeficiente principal 3. Todas las opciones posibles aparecen en la siguiente tabla.

Opciones para el numerador c	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Opciones para el denominador d	$\pm 1, \pm 3$
Opciones para c/d	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$

Podemos reducir el número de opciones al encontrar cotas superior e inferior para las soluciones reales, pero aquí no lo haremos así. Es necesario determinar cuál de las opciones para c/d, si las hay, son ceros. Vemos por sustitución que ni 1 ni -1 son una solución. Si se divide sintéticamente entre $x + 2$, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Este resultado muestra que -2 es un cero. Además, la división sintética da los coeficientes del cociente en la división del polinomio entre $x + 2$. Por lo tanto, tenemos la siguiente factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Las soluciones restantes de la ecuación deben ser ceros del segundo factor, de modo que ese polinomio se usa para comprobar las soluciones. *No utilice* el polinomio de la ecuación original. (Observe que $\pm\frac{8}{3}$ ya no son candidatos, porque el numerador debe ser un factor de 4.) De nuevo, procediendo por prueba y error, la división sintética entre $+\frac{2}{3}$ finalmente nos da el siguiente resultado:

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, $-\frac{2}{3}$ también es un cero.

Usando los coeficientes del cociente, sabemos que los ceros restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$. Al dividir ambos lados entre 3, obtenemos la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Por la fórmula cuadrática, esta ecuación tiene soluciones

$$\begin{aligned} \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Así, el polinomio dado tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos raíces irracionales, $-1 \pm \sqrt{3} \approx 0.732$ y $-1 - \sqrt{3} \approx -2.732$. ■

EJEMPLO 5 **Encontrar las soluciones racionales de una ecuación**

Encuentre todas las soluciones racionales de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0$$

FIGURA 1
$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

SOLUCIÓN Al asignar a Y_1 el polinomio indicado y escoger la ventana de visualización $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos un trazo semejante a la figura 1. La gráfica indica que -2 es una solución y que hay una solución en cada uno de los intervalos $(-3, -2)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Del ejemplo 4 sabemos que los posibles ceros racionales son

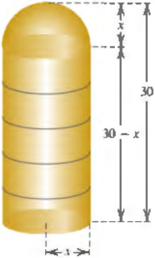
$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm\tfrac{1}{3}, \quad \pm\tfrac{2}{3}, \quad \pm\tfrac{4}{3}, \quad \pm\tfrac{8}{3}$$

Como conclusión, las únicas posibilidades son $-\frac{8}{3}$ en $(-3, -2)$, $-\frac{2}{3}$ en $(-1, 0)$ y $\frac{2}{3}$ en $(0, 1)$. Por lo tanto, al consultar la gráfica, se ha reducido el número de opciones para ceros de 16 a 3. La división sintética se puede usar ahora para determinar que las únicas soluciones racionales son -2 y $-\frac{2}{3}$. ■

EJEMPLO 6 **Encontrar el radio de un silo para granos**

Un silo para granos tiene la forma de un cilindro circular recto, con una semiesfera unida en la parte superior. Si la altura total de la estructura es de 30 pies, encuentre el radio del cilindro que resulte en un volumen total de 1008π pies^3.

FIGURA 2



SOLUCIÓN Sea x el radio del cilindro, como se muestra en la figura 2. El volumen del cilindro es $\pi r^2 h = \pi x^2(30 - x)$, y el de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$, de modo que x se despeja como sigue:

$$\begin{aligned} \pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 &= 1008\pi && \text{el volumen total es } 1008\pi \\ 3x^2(30 - x) + 2x^3 &= 3024 && \text{multiplicamos por } \frac{3}{\pi} \\ 90x^2 - x^3 &= 3024 && \text{simplificamos} \\ x^3 - 90x^2 + 3024 &= 0 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

Como el coeficiente principal del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $c/1 = c$, donde c es un factor de 3024. Si 3024 se factoriza en primos, encontramos que $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Se deduce que algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12, \ldots$$

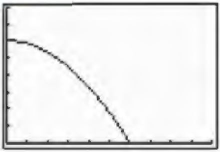
Para ayudar a decidir cuál de estos números probar primero, realizamos una estimación aproximada del radio al suponer que el silo tiene forma de cilindro circular recto de 30 pies de altura. En ese caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Como este volumen debe ser cercano a 1008π, vemos que

$$30r^2 = 1008 \quad \text{o} \quad r^2 = 1008/30 = 33.6$$

Esto sugiere que usaremos 6 en la primera división sintética, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & -90 & 0 & 3024 \\ & & 6 & -504 & -3024 \\ \hline & 1 & -84 & -504 & 0 \end{array}$$

FIGURA 3



Por lo tanto, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$.

Las dos soluciones restantes de la ecuación pueden obtenerse al resolver la ecuación disminuida o reducida $x^2 - 84x - 504 = 0$. Estos ceros son aproximadamente -5.62 y 89.62, ninguno de los cuales satisface las condiciones del problema. En consecuencia, el radio deseado es 6 pies.

La gráfica de $f(x) = x^3 - 90x^2 + 3024$ de la figura 3 muestra el cero $x = 6$. Una gráfica extendida también indicaría los otros dos ceros. ■

3.4 Ejercicios

Ejer. 1–10: Un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales y coeficiente principal 1 tiene el cero (o ceros) y grado dados. Exprese $f(x)$ como un producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que sean irreductibles sobre $\mathbb{R}$.

1 $3 + 2i$; grado 2

2 $-4 + 3i$; grado 2

3 $2, -2 - 5i$; grado 3

4 $-3, 1 - 7i$; grado 3

5 $-1, 0, 3 + i$; grado 4

6 $0, 2, -2 - i$; grado 4

7 $4 + 3i, -2 + i$; grado 4

8 $3 + 5i, -1 - i$; grado 4

9 $0, -2i, 1 - i$; grado 5

10 $0, 3i, 4 + i$; grado 5

Ejer. 11–16: Demuestre que la ecuación no tiene raíz racional.

11 $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$

12 $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$

13 $5x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

14 $x^4 - 9x + 7 = 0$

15 $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$

16 $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

Ejer. 17–18:

a) Elabore una lista de todos los ceros racionales posibles de f.

b) Use esta lista para determinar una ventana de visualización apropiada y genere una gráfica de f.

c) Tomando la gráfica como base, recorte la lista de posibles ceros racionales a sólo aquellos que todavía sean candidatos razonables.

17 $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$

18 $f(x) = 8x^3 + 34x^2 + 33x + 9$

Ejer. 19–30: Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

19 $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

20 $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

21 $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$

22 $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$

23 $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$

24 $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = 0$

25 $2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3 = 0$

26 $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$

27 $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$

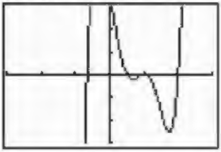
28 $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = 0$

29 $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$

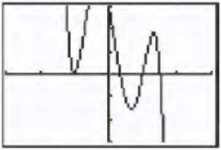
30 $3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$

Ejer. 31–32: Encuentre una forma factorizada con coeficientes enteros del polinomio f que se muestra en la figura. Suponga que Xscl = Yscl = 1.

31 $f(x) = 6x^5 - 23x^4 + 24x^3 + x^2 - 12x + 4$



32 $f(x) = -6x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 8x + 3$



Ejer. 33–34: La función polinomial f tiene sólo ceros reales. Use la gráfica de f para factorizarla.

33 $f(x) = 2x^3 - 25.4x^2 + 3.02x + 24.75$

34 $f(x) = 0.5x^3 + 0.65x^2 - 5.365x + 1.5375$

35 ¿Existe un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tenga ceros 1, -1 e i? Explique.

36 El polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$ tiene el número complejo i como cero, pero el conjugado $-i$ de i no es cero. ¿Por qué este resultado no contradice el teorema sobre ceros en pares conjugados de un polinomio?

37 Si n es un entero positivo impar, demuestre que un polinomio de grado n con coeficiente real tiene por lo menos un cero real.

38 Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde cada a_k es un entero, tiene una raíz racional r, demuestre que r es un entero y es factor de a_0.

39 **Construcción de una caja** De una pieza rectangular de cartón que tiene dimensiones de 20×30 pulgadas, se fabricará una caja abierta al quitarle cuadrados de área x^2 de cada esquina y voltear los lados hacia arriba. (Consulte el ejercicio 43 de la sección 3.1.)

a) Demuestre que hay dos cajas que tienen un volumen de 1000 pulgadas cúbicas.

b) ¿Cuál caja tiene la menor área superficial?

40 **Construcción de una reja de embarque** El bastidor para una reja de embarque se construirá con madera de 2×2 pulgadas por 24 pies de largo. Suponiendo que la reja debe tener extremos cuadrados de x pies de longitud, determine el(los) valor(es) de x que resulte(n) en un volumen de 4 pies^3. (Vea el ejercicio 44 de la sección 3.1.)

41 Un triángulo rectángulo tiene área de 30 pies^2 y una hipotenusa que mide 1 pie más que uno de sus lados.

a) Si x denota la longitud de este lado, entonces demuestre que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

b) Demuestre que hay una raíz positiva de la ecuación en el inciso a) y que esta raíz sea menor que 13.

c) Encuentre las longitudes de los lados del triángulo.

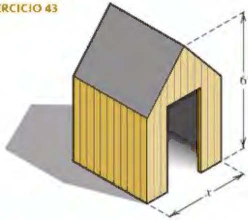
42 **Construcción de un tanque de almacenamiento** Un tanque de almacenamiento para gas propano se va a construir en forma de cilindro circular recto de 10 pies de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. Determine el radio x para que el volumen resultante sea de 27π pies^3. (Vea el ejemplo 8 de la sección 2.4.)

43 **Construcción de un cobertizo de almacenamiento** Un cobertizo de almacenamiento se construirá en forma de cubo con un prisma triangular formando el techo (vea la figura). La longitud x de un lado del cubo está por determinarse.

a) Si la altura total de la estructura es 6 pies, demuestre que su volumen V está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.

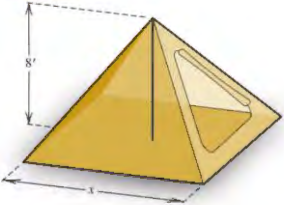
b) Determine x para que el volumen sea de 80 pies^3.

EJERCICIO 43



44 **Diseño de una tienda de campaña** Se construirá una tienda de campaña hecha de lona en forma de pirámide con base cuadrada. Un poste de 8 pies formará el soporte del centro, como se ilustra en la figura. Encuentre la longitud x de un lado de la base para que la cantidad total de lona necesaria para los costados y fondo sea de 384 pies^2.

EJERCICIO 44



Ejer. 45–46: Use una gráfica para determinar el número de soluciones no reales de la ecuación.

45 $x^5 + 1.1x^4 - 3.21x^3 - 2.835x^2 + 2.7x + 0.62 = -1$

46 $x^4 - 0.4x^3 - 2.6x^2 + 1.3x + 3.5 = 2$

Ejer. 47–48: Use una gráfica y división sintética para encontrar todas las soluciones de la ecuación.

47 $x^4 + 1.4x^3 + 0.44x^2 - 0.56x - 0.96 = 0$

48 $x^5 + 1.1x^4 - 2.62x^3 - 4.72x^2 - 0.2x + 5.44 = 0$

49 **Densidad atmosférica** La densidad $D(h)$ (en kg/m^3) de la atmósfera terrestre a una altitud de h metros se puede aproximar con

$$D(h) = 1.2 - ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.096 \times 10^{-4}, b = 3.42 \times 10^{-9}, c = 3.6 \times 10^{-14},$$

y $0 \le h \le 30{,}000$. Use la gráfica de D para aproximar la altitud h a la cual la densidad sea 0.4

50 **Densidad de la Tierra** La densidad de la Tierra $D(h)$ (en g/cm^3) h metros bajo la superficie se puede aproximar con

$$D(h) = 2.84 + ah + bh^2 - ch^3,$$

donde

$$a = 1.4 \times 10^{-1}, b = 2.49 \times 10^{-6}, c = 2.19 \times 10^{-9},$$

y $0 \le h \le 1000$. Use la gráfica de D para aproximar la profundidad h a la que la densidad de la Tierra es 3.7.

3.5 Funciones racionales

Una función f es una **función racional** si

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f está formado por todos los números reales, excepto los ceros del denominador $h(x)$.

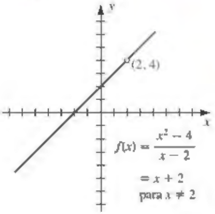
EJEMPLOS **Funciones racionales y sus dominios**

- $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; *dominio:* toda x excepto $x = 2$
- $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 9}$; *dominio:* toda x excepto $x = \pm 3$
- $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$; *dominio:* todos los números reales x

Previamente se simplificaron las expresiones racionales como sigue:

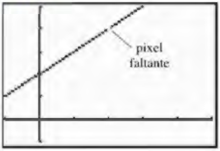
$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \overset{\text{si } x \neq 2}{=} \frac{x+2}{1} = x + 2$$

FIGURA 1



Si $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x + 2$, entonces el dominio de f es toda x, excepto $x = 2$, y el dominio de g son todos los números reales. Estos dominios y la simplificación indicada líneas antes sugieren que las gráficas de f y g son iguales, excepto para $x = 2$. ¿Qué sucede a la gráfica de f en $x = 2$? Hay un *vacío* en la gráfica, es decir, falta un punto. Para encontrar el valor y del vacío, sustituimos 2 por x en la función reducida, que es simplemente $g(2) = 4$. En la figura 1 se muestra una gráfica de f.

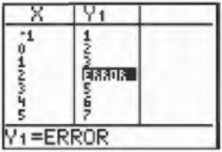
FIGURA 2



Para alertar al usuario de la presencia de un vacío en la gráfica, algunas calculadoras graficadoras en realidad dibujan un vacío, como en la figura 1; otras simplemente omiten un pixel, como en la figura 2. La revisión de una tabla de valores para f (figura 3) indica que f no está definida para $x = 2$.

Ahora se lleva la atención a funciones racionales que no tienen un factor común en el numerador y el denominador.

FIGURA 3



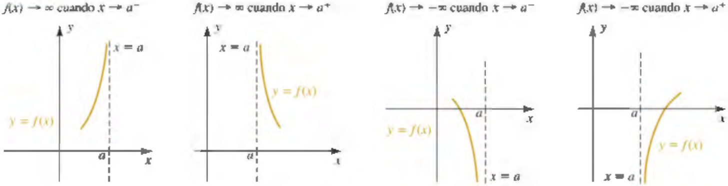
Al trazar la gráfica de una función racional f, es importante contestar las dos siguientes preguntas.

Pregunta 1 ¿Qué se puede decir de los valores de la función $f(x)$ cuando x está cercana (pero no es igual) a un cero del denominador?

Pregunta 2 ¿Qué se puede decir de los valores de la función $f(x)$ cuando x es positiva grande o cuando x es negativa grande?

Como se verá, si a es un cero del denominador, una de varias situaciones ocurre con frecuencia. Éstas se ven en la figura 4.

FIGURA 4



La recta discontinua $x = a$ de la figura 4 se denomina *asíntota vertical*, como en la siguiente definición.

Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función f si

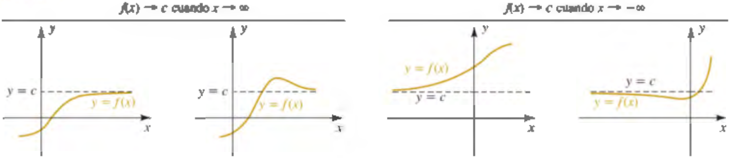
$$f(x) \to \infty \quad \text{o} \quad f(x) \to -\infty$$

cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

Entonces, la respuesta de la pregunta 1 es que si a es un cero del denominador de una función racional f, entonces la gráfica de f *puede* tener una asíntota vertical $x = a$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso (como en la figura 1 de esta sección). Si el numerador y el denominador no tienen factor común, entonces f *debe* tener una asíntota vertical $x = a$.

Considere a continuación la pregunta 2. Para x *grande positiva* o *grande negativa*, la gráfica de una función racional puede verse como cualquiera de la figura 5.

FIGURA 5



A la recta discontinua de la figura 5 se la denomina *asíntota horizontal*, como en la siguiente definición.

Definición de asíntota horizontal La recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función f si

$$f(x) \to c \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty$$

Así, la respuesta a la pregunta 2 es que $f(x)$ *puede* estar muy cerca de algún número c cuando x sea grande positiva o grande negativa; esto es, la gráfica de f puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Hay funciones racionales donde éste *no es* el caso (como en los ejemplos 2 c) y 9).

Note que, como en los dibujos segundo y cuarto de la figura 5, la gráfica de f puede cruzar una asíntota horizontal.

En el siguiente ejemplo se encuentran las asíntotas para la gráfica de una función racional sencilla.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una función racional**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

SOLUCIÓN Primero se considera la pregunta 1, expresada al principio de esta sección. El denominador $x - 2$ es cero en $x = 2$. Si x es cercana a 2 y $x > 2$, entonces $f(x)$ es grande positiva, como se indica en la siguiente tabla.

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.000 01
$\dfrac{1}{x-2}$	10	100	1000	10,000	100,000

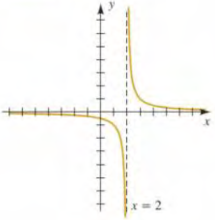
Como se puede hacer que $1/(x - 2)$ sea tan grande como se desee al tomar x cercana a 2 (y $x > 2$), vemos que

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^+$$

Si $f(x)$ es cercana a 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es grande negativa; por ejemplo, $f(1.9999) = -10{,}000$ y $f(1.99999) = -100{,}000$. Así,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 2^-$$

FIGURA 6



La recta $x = 2$ es una asíntota vertical para la gráfica de f, como se ilustra en la figura 6.

Luego consideramos la pregunta 2. La siguiente tabla contiene algunos valores aproximados para $f(x)$ cuando x es grande y positiva.

x	100	1000	10,000	100,000	1,000,000
$\dfrac{1}{x-2}$ (aprox.)	0.01	0.001	0.0001	0.000 01	0.000 001

Podemos describir este comportamiento de $f(x)$ al escribir

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Del mismo modo, $f(x)$ es cercana a 0 cuando x es grande negativa; por ejemplo, $f(-100{,}000) \approx -0.00001$. Así,

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal, como se ve en la figura 6.

Trazar los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$ ayuda a darse un trazo aproximado de la gráfica. ■

La función considerada en el ejemplo 1, $f(x) = 1/(x - 2)$, se asemeja con mucho a una de las funciones racionales más sencillas, la **función recíproca.** La función recíproca tiene ecuación $f(x) = 1/x$, asíntota vertical $x = 0$ (el eje y) y asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x). La gráfica de la función recíproca (que se muestra en el apéndice I) es la gráfica de una *hipérbola* (que se estudia más adelante en el libro). Observe que se puede obtener la gráfica de $y = 1/(x - 2)$ al desplazar la gráfica de $y = 1/x$ dos unidades a la derecha.

El siguiente teorema es útil para encontrar la asíntota horizontal para la gráfica de una función racional.

Teorema sobre asíntotas horizontales

Sea $f(x) = \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0}$, donde $a_n \neq 0$ y $b_k \neq 0$.

1) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

2) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ (la razón entre coeficientes principales) es la asíntota horizontal para la gráfica de f.

3) Si $n > k$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. En vez de ello, $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Las demostraciones para cada una de las partes de este teorema pueden copiarse de las soluciones del siguiente ejemplo. Respecto al inciso 3), si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir el numerador entre el denominador, entonces $f(x) \to \infty$ si $q(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ si $q(x) \to -\infty$.

EJEMPLO 2 **Encontrar asíntotas horizontales**

Encuentre la asíntota horizontal para la gráfica de f, si existe.

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$ **b)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$

SOLUCIÓN

a) El grado del numerador, 1, es menor que el grado del denominador, 2, así que por el inciso 1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es una asíntota horizontal. Para verificar directamente esto, se dividen el numerador y el denominador del cociente entre x^2 (porque 2 es la potencia mayor de x en el denominador), con lo cual obtenemos

$$f(x) = \frac{\dfrac{3x-1}{x^2}}{\dfrac{x^2-x-6}{x^2}} = \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

Si x es grande positiva o grande negativa, entonces $3/x$, $1/x^2$, $1/x$ y $6/x^2$ son cercanas a 0 y, por lo tanto,

$$f(x) \approx \frac{0-0}{1-0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

En consecuencia,

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty$$

Como $f(x)$ es la coordenada y de un punto sobre la gráfica, el último enunciado significa que la recta $y = 0$ (esto es, el eje x) es una asíntota horizontal.

b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, entonces el numerador y el denominador tienen el mismo grado, 2, y los coeficientes principales son 5 y 3, respectivamente. En consecuencia, por el inciso 2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal. También se podría demostrar que $y = \frac{5}{3}$ es la asíntota horizontal al dividir el numerador y el denominador de $f(x)$ entre x^2, como en el inciso a).

c) El grado del numerador, 4, es mayor que el grado del denominador, 2, de modo que, por el inciso 3) del teorema sobre asíntotas horizontales, la gráfica no tiene asíntota horizontal. Si usamos la división larga, obtenemos

$$f(x) = 2x^2 - 5 + \frac{10}{x^2 + 1}$$

Cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el cociente $2x^2 - 5$ aumenta sin límite y $10/(x^2 + 1) \to 0$. Por lo tanto, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. ■

A continuación se presenta una lista de algunos pasos para trazar la gráfica de una función racional. Su uso se ilustrará en los ejemplos 3, 6 y 7.

Pasos para trazar la gráfica de una función racional

Suponga que $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios que no tienen factor común.

1 Encuentre los puntos de intersección con el eje x; es decir, los ceros reales del numerador $g(x)$, y localice los puntos correspondientes sobre el eje x.

2 Encuentre los ceros reales del denominador $h(x)$. Para cada cero real a, trace la asíntota vertical $x = a$ con guiones.

3 Encuentre el punto de intersección $f(0)$ con el eje y, si existe, y trace el punto $(0, f(0))$ en el eje y.

4 Aplique el teorema sobre asíntotas horizontales. Si hay una asíntota horizontal $y = c$, trácela con guiones.

(*continúa*)

Pasos para trazar la gráfica de una función racional (*continúa*)

5 Si hay una asíntota horizontal $y = c$, determine si cruza la gráfica. Las coordenadas x de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación $f(x) = c$. Marque estos puntos, si existen.

6 Trace la gráfica de f en cada una de las regiones del plano xy determinadas por las asíntotas verticales en el paso 2. Si es necesario, use el signo de valores de función específicos para saber si la gráfica está arriba o abajo del eje x o de la asíntota horizontal. Use el paso 5 para determinar si la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal desde arriba o desde abajo.

En los siguientes ejemplos, el principal objetivo es determinar la forma general de la gráfica, poniendo especial atención a la forma en que la gráfica se aproxima a las asíntotas. Se trazarán sólo unos puntos, como los correspondientes a los puntos de intersección con los ejes x y y o la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.

EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una función racional**

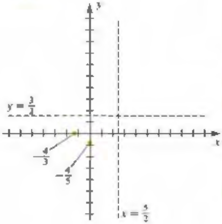
Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 5}$$

SOLUCIÓN Se siguen los pasos.

Paso 1 Para encontrar las intersecciones en x, se buscan los ceros del numerador. Al resolver $3x + 4 = 0$, obtenemos $x = -\frac{4}{3}$ y trazamos el punto $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ en el eje x, como se aprecia en la figura 7.

FIGURA 7



Paso 2 El denominador tiene el cero $\frac{5}{2}$, de modo que la recta $x = \frac{5}{2}$ es una asíntota vertical. Esta recta se traza con una línea discontinua, como en la figura 7.

Paso 3 La intersección en y es $f(0) = -\frac{4}{5}$ y trazamos el punto $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$ en la figura 7.

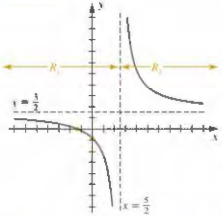
Paso 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, 1. Los coeficientes principales son 3 y 2, de modo que por el inciso 2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal. En la figura 7 se muestra la recta trazada con una línea discontinua.

Paso 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$ son soluciones de la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}$. Esta ecuación se resuelve así:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 4}{2x - 5} &= \frac{3}{2} && \text{sea } f(x) = \frac{3}{2} \\ 2(3x + 4) &= 3(2x - 5) && \text{multiplicamos por } 2(2x - 5) \\ 6x + 8 &= 6x - 15 && \text{multiplicamos} \\ 8 &= -15 && \text{restamos } 6x \end{aligned}$$

Como $8 \neq -15$ para cualquier valor de x, este resultado indica que la gráfica de f no cruza la asíntota horizontal. Como apoyo en el trazo, ahora se puede considerar la asíntota horizontal como una frontera que no se puede cruzar.

FIGURA 8



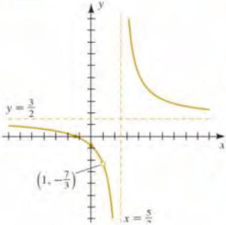
Lineamiento 6 La asíntota vertical de la figura 7 divide el plano xy en dos regiones:

$$R_1\text{: la región a la izquierda de } x = \frac{5}{2}$$
$$R_2\text{: la región a la derecha de } x = \frac{5}{2}$$

Para R_1 tenemos los dos puntos $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$ por los que la gráfica de f debe pasar, así como las dos asíntotas a las que la gráfica debe aproximarse. Esta parte de f se muestra en la figura 8.

Para R_2 la gráfica debe aproximarse de nuevo a las dos asíntotas. Como la gráfica no puede cruzar el eje x (no hay punto de intersección con el eje x en R_2), debe estar encima de la asíntota horizontal, como se ve en la figura 8. ■

FIGURA 9



EJEMPLO 4 **Trazo de una gráfica que tenga un vacío**

Trace la gráfica de g si

$$g(x) = \frac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x - 5)(x - 1)}$$

SOLUCIÓN El dominio de g es todos los números reales excepto $\frac{5}{2}$ y 1. Si g se reduce, obtenemos la función f del ejemplo previo. La única diferencia entre las gráficas de f y g es que g tiene un vacío en $x = 1$. Como $f(1) = -\frac{7}{3}$, sólo necesitamos hacer un vacío en la gráfica de la figura 8 para obtener la gráfica de g en la figura 9. ■

EJEMPLO 5 **Encontrar una ecuación de una función racional que satisfaga condiciones prescritas**

Encuentre una ecuación de una función racional f que satisfaga las siguientes condiciones:

intersección en x: 4, asíntota vertical: $x = -2$,

asíntota horizontal: $y = -\frac{3}{5}$ y un vacío en $x = 1$

SOLUCIÓN Una intersección de 4 en x implica que $x - 4$ debe ser un factor en el numerador, y una asíntota vertical de $x = -2$ implica que $x + 2$ es un factor del denominador. Por lo tanto, se puede comenzar con la forma

$$\frac{x - 4}{x + 2}$$

La asíntota horizontal es $y = -\frac{3}{5}$. Se puede multiplicar el numerador por -3 y el denominador por 5 para obtener la forma

$$\frac{-3(x - 4)}{5(x + 2)}$$

(*No escriba* $(-3x - 4)/(5x + 2)$, porque eso cambiaría el punto de intersección con el eje x y la asíntota vertical.) Por último, como hay un vacío en $x = 1$, debemos tener un factor de $x - 1$ en el numerador y en el denominador. Por lo tanto, una ecuación para f es

$$f(x) = \frac{-3(x - 4)(x - 1)}{5(x + 2)(x - 1)} \quad \text{o, lo que es equivalente a,} \quad f(x) = \frac{-3x^2 + 15x - 12}{5x^2 + 5x - 10}$$

■

EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una función racional**

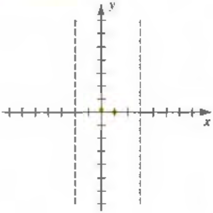
Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}$$

SOLUCIÓN Es útil expresar el numerador y el denominador en forma factorizada. Así, comenzamos por escribir

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

FIGURA 10



Paso 1 Para encontrar las intersecciones en x, se encuentran los ceros del numerador. Al resolver $x - 1 = 0$, tenemos $x = 1$ y se marca el punto $(1, 0)$ en el eje x, como muestra la figura 10.

Paso 2 El denominador tiene ceros -2 y 3. Por lo tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales; se trazan con una línea discontinua, como en la figura 10.

Paso 3 La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{6}$ y se marca el punto $\left(0, \frac{1}{6}\right)$, que se muestra en la figura 10.

Paso 4 El grado del numerador de $f(x)$ es menor que el grado del denominador, entonces, por el inciso 1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es la asíntota horizontal.

Paso 5 Los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal (el eje x) que se encuentran en el lineamiento 4 corresponden a las intersecciones en x. El punto $(1, 0)$ ya se marcó en el lineamiento 1.

Paso 6 Las asíntotas verticales de la figura 10 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1: la región a la izquierda de $x = -2$

R_2: la región entre $x = -2$ y $x = 3$

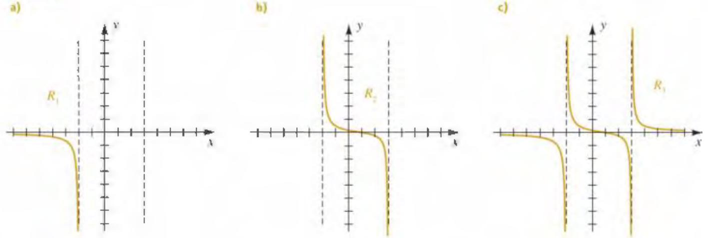
R_3: la región a la derecha de $x = 3$

Para R_1 tenemos $x < -2$. Sólo hay dos opciones para la forma de la gráfica de f en R_1: cuando $x \to -\infty$, la gráfica se aproxima al eje x, ya sea por arriba o por abajo. Para determinar cuál opción es correcta, se examinará el signo de un valor típico de la función en R_1. Elegimos -10 para x y usamos la forma factorizada de $f(x)$ para encontrar el signo de $f(-10)$ (este proceso es semejante al que se emplea en la sección 1.6):

$$f(-10) = \frac{(-)}{(-)(-)} = -$$

El valor negativo de $f(-10)$ indica que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *abajo* cuando $x \to -\infty$. Además, cuando $x \to -2^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo*; esto es, $f(x) \to -\infty$. Un trazo de f en R_1 se muestra en la figura 11a).

FIGURA 11



En R_2 tenemos $-2 < x < 3$ y la gráfica cruza el eje x en $x = 1$. Dado que, por ejemplo, $f(0)$ es positiva, se deduce que la gráfica se encuentra *arriba* del eje x si $-2 < x < 1$. Así, cuando $x \to -2^+$, la gráfica se extiende *hacia arriba*; esto es, $f(x) \to \infty$. Como se puede demostrar que $f(2)$ es negativa, la gráfica se encuentra *debajo* del eje x si $1 < x < 3$. En consecuencia, cuando $x \to 3^-$, la gráfica se extiende *hacia abajo*; esto es, $f(x) \to -\infty$. Un trazo de f en R_2 se muestra en la figura 11b).

Por último, en R_3, $x > 3$ y la gráfica no cruza el eje x. En vista de que, por ejemplo, se puede demostrar que $f(10)$ es positiva, la gráfica se encuentra *arriba* del eje x. Se deduce que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 3^+$ y que la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *arriba* cuando $x \to \infty$. La gráfica de f se traza en la figura 11c). ■

EJEMPLO 7 **Trazo de la gráfica de una función racional**

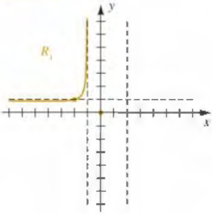
Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

SOLUCIÓN La factorización del denominador da

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x + 1)(x - 2)}$$

FIGURE 12



De nuevo seguimos los pasos.

Paso 1 Para encontrar las intersecciones en x buscamos los ceros del numerador. Al resolver $x^2 = 0$ tenemos $x = 0$ y marcamos el punto $(0, 0)$ en el eje x, como muestra la figura 12.

Paso 2 El denominador tiene ceros -1 y 2. Por lo tanto, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y se trazan con líneas discontinuas, como en la figura 12.

Paso 3 La intersección en y es $f(0) = 0$. Esto da el mismo punto $(0, 0)$ que se encontró en el paso 1.

(continúa)

Paso 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, y los coeficientes principales son ambos 1. Por lo tanto, por el inciso 2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{1}{1} = 1$ es una asíntota horizontal. La recta se traza con guiones, como en la figura 12.

Paso 5 Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 1$ son soluciones de la ecuación $f(x) = 1$. Esta ecuación se resuelve así:

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \qquad \text{sea } f(x) = 1$$

$$x^2 = x^2 - x - 2 \qquad \text{multiplicamos por } x^2 - x - 2$$

$$x = -2 \qquad \text{restamos } x^2 \text{ y sumamos } x$$

Este resultado indica que la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = 1$ sólo en $x = -2$; por lo tanto, trazamos el punto $(-2, 1)$ que se muestra en la figura 12.

Paso 6 Las asíntotas verticales de la figura 12 dividen el plano xy en tres regiones:

R_1: la región a la izquierda de $x = -1$

R_2: la región entre $x = -1$ y $x = 2$

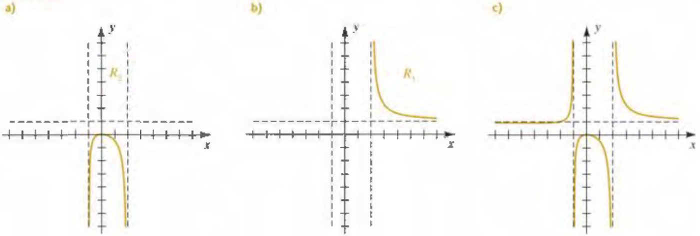
R_3: la región a la derecha de $x = 2$

Para R_1 primero consideremos la parte de la gráfica que corresponde a $-2 < x < -1$. Del punto $(-2, 1)$ en la asíntota horizontal, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* cuando $x \to -1^-$ (no puede extenderse hacia abajo, porque no hay intersección en x entre $x = -2$ y $x = -1$). Cuando $x \to -\infty$, habrá un punto bajo en la gráfica entre $y = 0$ y $y = 1$, y entonces la gráfica se aproximará a la asíntota horizontal $y = 1$ por *debajo*. Es difícil ver dónde se presenta el punto bajo en la figura 12, porque los valores de la función están muy cercanos entre sí. Usando cálculo, se puede demostrar que el punto bajo es $\left(-4, \frac{8}{9}\right)$.

En R_2 tenemos $-1 < x < 2$ y la gráfica interseca el eje x en $x = 0$. Como la función no cruza la asíntota horizontal en esta región, sabemos que la gráfica se extiende *hacia abajo* cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to 2^-$, como se ve en la figura 13a).

En R_3 la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$ (por arriba o por abajo) cuando $x \to \infty$. Además, la gráfica debe extenderse *hacia arriba* cuando

FIGURA 13



$x \to 2^-$ porque no hay intersecciones en x en R_3. Esto implica que cuando $x \to \infty$, la gráfica se aproxima a la asíntota horizontal por *arriba*, como en la figura 13b).

La gráfica de f se traza en la figura 13c). ■

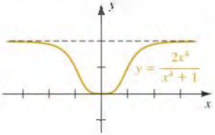
En las soluciones restantes no se escribirá formalmente cada paso.

EJEMPLO 8 **Trazo de la gráfica de una función racional**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}$$

FIGURA 14



SOLUCIÓN Note que como $f(-x) = f(x)$, la función es par y, por lo tanto, la gráfica es simétrica respecto al eje y.

La gráfica cruza el eje x en $(0, 0)$. Como el denominador de $f(x)$ no tiene cero real, la gráfica no tiene asíntota vertical.

El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado. Dado que los coeficientes principales son 2 y 1, respectivamente, la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es la asíntota horizontal. La gráfica no cruza la asíntota horizontal $y = 2$, porque la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución real.

Al marcar los puntos $(1, 1)$ y $2, \frac{32}{17}$ y hacer uso de la simetría obtenemos el trazo de la figura 14. ■

Una **asíntota oblicua** (o **inclinada**) para una gráfica es una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica se aproxima a esta recta cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. (Si la gráfica es una recta, se le considera su propia asíntota.) Si la función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ para los polinomios $g(x)$ y $h(x)$ y *si el grado de $g(x)$ es uno mayor que el grado de $h(x)$*, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para encontrar esta asíntota oblicua, usamos la división larga para expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$. Del inciso 1) del teorema sobre asíntotas horizontales,

$$\frac{r(x)}{h(x)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{o cuando} \quad x \to -\infty$$

En consecuencia, $f(x)$ se aproxima a la recta $y = ax + b$ cuando x aumenta o disminuye sin límite; esto es, $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

EJEMPLO 9 **Encontrar una asíntota oblicua**

Encuentre todas las asíntotas y trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$$

FIGURA 15

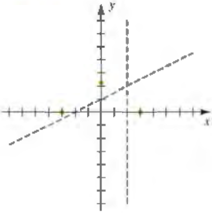
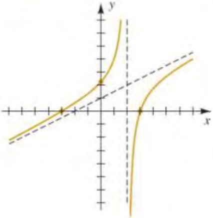


FIGURA 16



SOLUCIÓN Una asíntota vertical se presenta si $2x - 4 = 0$ (esto es, si $x = 2$).

El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el grado del denominador. Por lo tanto, por el inciso 3) del teorema sobre asíntotas horizontales, no hay asíntota *horizontal*; pero como el grado del numerador, 2, es *uno* mayor que el grado del denominador, 1, la gráfica tiene una asíntota *oblicua*. Por división larga obtenemos

$$\begin{array}{r|l l}
 & \tfrac{1}{2}x + 1 & \\
2x - 4 & x^2 \quad\quad - 9 & \\
 & \underline{x^2 - 2x} & (\tfrac{1}{2}x)(2x-4) \\
 & 2x - 9 & \text{restamos} \\
 & \underline{2x - 4} & (1)(2x-4) \\
 & -5 & \text{restamos}
\end{array}$$

Por lo tanto,
$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2x - 4}$$

Como se indicó en el análisis que precede a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es una asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ se trazan con una línea discontinua en la figura 15.

Los puntos de intersección de la gráfica con el eje x son las soluciones de $x^2 - 9 = 0$ y, por lo tanto, son 3 y -3. El punto de intersección con el eje y es $f(0) = \frac{9}{4}$. Los puntos correspondientes se trazan en la figura 15. Ahora podemos demostrar que la gráfica tiene la forma indicada en la figura 16. ■

En el ejemplo 9, la gráfica de f se aproxima a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ *en forma asintótica* cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Las gráficas de funciones racionales pueden aproximar de forma asintótica diferentes tipos de curvas. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{x^4 - x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x},$$

entonces para valores grandes de $|x|$, $1/x \approx 0$ y por lo tanto $f(x) \approx x^2$. Así, la gráfica de f se aproxima a la parábola $y = x^2$ en forma asintótica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. En general, si $f(x) = g(x)/h(x)$ y si $q(x)$ es el cociente obtenido al dividir $g(x)$ entre $h(x)$, entonces la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = q(x)$ en forma asintótica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Podemos hacer referencia a la función $y = q(x)$ como una asíntota cuadrática, una asíntota cúbica o, en general, una *asíntota curvilínea*.

EJEMPLO 10 **Trazo de la gráfica de una función racional**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^3 - 9x^2 - 22x + 8},$$

y encuentre ecuaciones de las asíntotas verticales.

SOLUCIÓN Primero se hacen las asignaciones

$$Y_1 = x^2 - x, \quad Y_2 = 9x^3 - 9x^2 - 22x + 8, \quad \text{y} \quad Y_3 = Y_1/Y_2$$

FIGURA 17
$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$

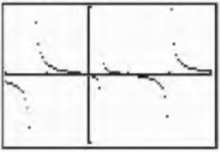
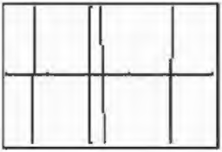


FIGURA 18
$[-2, 3]$ por $[-1, 1]$



Se selecciona sólo Y_3 para graficarla (Y_1 y Y_2 se desactivan) y se usa una ventana de visualización estándar, con lo cual obtenemos una gráfica que no da indicación de la verdadera forma de f. El cambio a una ventana de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ sugiere que las asíntotas verticales están confinadas al intervalo $-2 < x < 3$.

Al usar una ventana de $[-2, 3]$ por $[-1, 1]$ y cambiar al *modo de puntos* (para no graficar la función al otro lado de las asíntotas verticales) se llega al trazo de la figura 17. Como el grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, sabemos que la asíntota horizontal es el eje x. Los ceros del numerador, 0 y 1, son los únicos puntos de intersección con el eje x.

Para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales, abandonamos la gráfica de Y_3 y examinamos la gráfica de Y_2, buscando sus ceros. Graficamos Y_2 con la misma ventana de visualización, pero usando el *modo conectado* obtenemos la figura 18.

Por el teorema sobre ceros racionales de un polinomio, sabemos que las posibles raíces racionales de $9x^3 - 9x^2 - 22x + 8 = 0$ son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\tfrac{1}{3}, \pm\tfrac{2}{3}, \pm\tfrac{4}{3}, \pm\tfrac{8}{3}, \pm\tfrac{1}{9}, \pm\tfrac{2}{9}, \pm\tfrac{4}{9}, \pm\tfrac{8}{9}$$

En la gráfica vemos que la única opción razonable para el cero en el intervalo $(-2, -1)$ es $-\frac{4}{3}$. El número 2 parece ser un cero, y al usar una función "zero" o "root" se indica que $\frac{1}{3}$ es también un buen candidato para un cero. Usando la división sintética se puede demostrar que $-\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3}$ y 2 son ceros de Y_2. De esta manera, las ecuaciones de las asíntotas verticales son

$$x = -\tfrac{4}{3}, \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad \text{y} \quad x = 2$$

Las gráficas de funciones racionales pueden ser cada vez más complicadas cuando aumentan los grados de los polinomios en el numerador y el denominador. Técnicas desarrolladas en cálculo son muy útiles para lograr un tratamiento más completo de esas gráficas.

Las fórmulas que representan cantidades físicas pueden determinar funciones racionales. Por ejemplo, considere la ley de Ohm en la teoría eléctrica, que establece que $I = V/R$, donde R es la resistencia (en ohms) de un conductor, V es la diferencia de potencial (en volts) en las terminales del conductor, e I es la corriente (en amperes) que circula por el conductor. La resistencia de ciertas aleaciones se aproxima a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto (aproximadamente -273 °C), y la aleación se convierte en un *superconductor* de electricidad. Si el voltaje V es fijo, entonces, para ese superconductor

$$I = \frac{V}{R} \to \infty \quad \text{cuando} \quad R \to 0^+$$

esto es, cuando R se aproxima a 0, la corriente aumenta sin límite. Los superconductores permiten el uso de corrientes muy grandes en plantas generadoras y motores. También tienen aplicaciones en el transporte experimental terrestre de alta velocidad, donde los campos magnéticos intensos producidos por imanes superconductores hacen posible que los trenes leviten para que en esencia no haya fricción entre las ruedas y la vía. Quizás el uso más importante de los superconductores es en los circuitos para computadoras, porque producen muy poco calor.

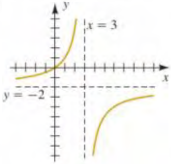
3.5 Ejercicios

Ejer. 1–2: a) Trace la gráfica de f. b) Encuentre el dominio D y el rango R de f. c) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

1 $f(x) = \dfrac{4}{x}$ **2** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 3–4: Use la gráfica para completar las afirmaciones.

3



a) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

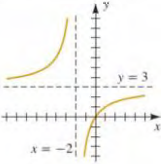
b) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to 3^-$, $f(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to 3^+$, $f(x) \to$ ____.

e) Cuando $x \to 0$, $f(x) \to$ ____.

4



a) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

b) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to -2^-$, $f(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to -2^+$, $f(x) \to$ ____.

e) Cuando $x \to 0$, $f(x) \to$ ____.

Ejer. 5–6: Utilice la notación de flecha para describir el comportamiento final de la función.

5 a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

6 a) $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$

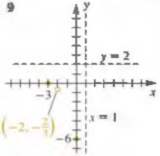
Ejer. 7–8: Identifique cualesquiera asíntotas verticales, horizontales y vacíos.

7 $f(x) = \dfrac{-2(x+5)(x-6)}{(x-3)(x-6)}$

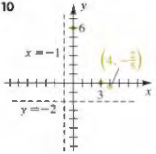
8 $f(x) = \dfrac{2(x+4)(x+2)}{5(x+2)(x-1)}$

Ejer. 9–10: Todos los puntos de intersección, asíntotas y vacíos de una función racional f están marcados en la figura. Trace una gráfica de f y encuentre una ecuación para f.

9



10



Ejer. 11–36: Trace la gráfica de f.

11 $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ **12** $f(x) = \dfrac{-3}{x+3}$

13 $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$ **14** $f(x) = \dfrac{4x}{2x-5}$

15 $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$ **16** $f(x) = \dfrac{5x+3}{3x-7}$

17 $f(x) = \dfrac{(4x-1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)}$ **18** $f(x) = \dfrac{(5x+3)(x+1)}{(3x-7)(x+1)}$

19 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-6}$ **20** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

21 $f(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ **22** $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

23 $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ **24** $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-4}$

25 $f(x) = \dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$ **26** $f(x) = \dfrac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

27 $f(x) = \dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x-4}$ **28** $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}$

29 $f(x) = \dfrac{3(x+3)(x-4)}{(x+2)(x-1)}$ **30** $f(x) = \dfrac{2(x+6)(x-4)}{(x+5)(x-2)}$

31 $f(x) = \dfrac{-2x^2+10x-12}{x^2+x}$ **32** $f(x) = \dfrac{2x^2+8x+6}{x^2-2x}$

33 $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 4x}$

34 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 9x}$

35 $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2 + 1}$

36 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

Ejer. 37–40: Encuentre la asíntota oblicua y trace la gráfica de *f*.

37 $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 1}$

38 $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$

39 $f(x) = \dfrac{8 - x^3}{2x^2}$

40 $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$

Ejer. 41–42: Encuentre la asíntota de la curva.

41 $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 - 5}{x^2 - 2}$

42 $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 3}$

Ejer. 43–50: Simplifique *f(x)* y trace la gráfica de *f*.

43 $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}$

44 $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

45 $f(x) = \dfrac{x - 1}{1 - x^2}$

46 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

47 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

48 $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

49 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

50 $f(x) = \dfrac{(x^2 + x)(2x - 1)}{(x^2 - 3x + 2)(2x - 1)}$

Ejer. 51–54: Encuentre una ecuación de una función racional *f* que satisfaga las condiciones dadas.

51 asíntota vertical: $x = 5$
asíntota horizontal: $y = -1$
intersección en x: 2

52 asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 0$
asíntota horizontal: $y = 0$
intersección en x: 2; $f(3) = 1$

53 asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 1$
asíntota horizontal: $y = 0$
intersección en x: -1; $f(0) = -2$
vacío en $x = 2$

54 asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 3$
asíntota horizontal: $y = 2$
intersecciones en x: -2, 1; vacío en $x = 0$

55 **Un contenedor para desechos radiactivos** Se construirá un recipiente cilíndrico de plomo para almacenar desechos radiactivos. Las paredes de este recipiente deben medir 6 pulgadas de grosor. El volumen del cilindro exterior que se muestra en la figura debe ser 16π pies^3.

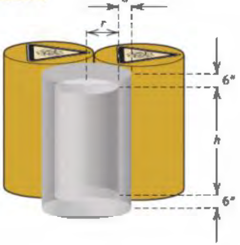
a) Exprese la altura h del interior del cilindro como función del radio interior r.

b) Demuestre que el volumen interior $V(r)$ está dado por

$$V(r) = \pi r^2\left[\frac{16}{(r + 0.5)^2} - 1\right].$$

c) ¿Qué valores de r deben excluirse en el inciso b)?

EJERCICIO 55



56 **Dosis de medicamento** La regla de Young es una fórmula que se usa para adaptar las dosis de medicamento de adultos a niños. Si a denota la dosis de adultos (en miligramos) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis y para niño está dada por la ecuación $y = ta/(t + 12)$. Trace la gráfica de esta ecuación para $t > 0$ y $a = 100$.

57 **Concentración de sal** Agua salada con una concentración de 0.1 libras de sal por galón entra en un gran tanque que inicialmente contiene 50 galones de agua pura.

a) Si el caudal de agua salada que entra al tanque es 5 gal/min, encuentre el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad $A(t)$ de sal en el tanque después de t minutos.

b) Encuentre una fórmula para la concentración de sal $c(t)$ (en lb/gal) después de t minutos.

c) Comente la variación de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

58 **Cantidad de lluvia** La cantidad total de pulgadas $R(t)$ de lluvia durante una tormenta de t horas de duración se puede aproximar con

$$R(t) = \frac{at}{t+b},$$

donde a y b son constantes positivas que dependen del lugar geográfico.

a) Comente la variación de $R(t)$ cuando $t \to \infty$.

b) La intensidad I de lluvia (en pulg/hora) está definida por $I = R(t)/t$. Si $a = 2$ y $b = 8$, trace la gráfica de R e I en el mismo plano de coordenadas para $t > 0$.

59 **Propagación de salmón** Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de reproductores y el número R de crías que sobreviven hasta la madurez está dada por la fórmula

$$R = \frac{4500S}{S+500}$$

a) ¿En qué condiciones es $R > S$?

b) Encuentre el número de reproductores que darían 90% del mayor número posible de crías que sobrevivan hasta la madurez.

c) Trabaje el inciso b) sustituyendo 90% por 80%.

d) Compare los resultados para S y R (en términos de aumentos porcentuales) de los incisos b) y c).

60 **Densidad de población** La densidad de población D (en habitantes/milla^2) en una gran ciudad está relacionada con la distancia x (en millas) desde el centro de la ciudad por

$$D = \frac{5000x}{x^2+36}.$$

a) ¿Qué le ocurre a la densidad cuando la distancia desde el centro de la ciudad cambia de 20 a 25 millas?

b) ¿Qué le ocurre finalmente a la densidad?

c) ¿En qué áreas de la ciudad la densidad de población excede de 400 habitantes/milla^2?

Ejer. 61–64: Grafique f y encuentre las ecuaciones de las asíntotas verticales.

61 $f(x) = \dfrac{20x^2 + 80x + 72}{10x^2 + 40x + 41}$

62 $f(x) = \dfrac{15x^2 - 60x + 68}{3x^2 - 12x + 13}$

63 $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-0.999)^2}$ **64** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9.01}{x - 3}$

65 Sea $f(x)$ el polinomio

$$(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1)(x-2)(x-3).$$

a) Describa la gráfica de $g(x) = f(x)/f(x)$.

b) Describa la gráfica de $h(x) = g(x)p(x)$, donde $p(x)$ es una función polinomial.

66 Refiérase al ejercicio 65.

a) Describa la gráfica de $y = f(x)$.

b) Describa la gráfica de $k(x) = 1/f(x)$.

67 **Promedio de calificaciones (GPA)**

a) Un estudiante ha concluido 48 horas-crédito con un GPA de 2.75. ¿Cuántas horas-crédito adicionales y en 4.0 aumentarán el GPA del estudiante a algún valor x deseado? (Determine y como función de x.)

b) Elabore una tabla de valores para x y y, comenzando con $x = 2.8$ y usando incrementos de 0.2.

c) Grafique la función en el inciso a) en la ventana [2, 4] por [0, 1000, 100].

d) ¿Cuál es la asíntota vertical de la gráfica del inciso c)?

e) Explique la importancia práctica del valor $x = 4$.

3.6 Variación

En algunas investigaciones científicas, la terminología de *variación* o *proporción* se emplea para describir relaciones entre cantidades variables. En la siguiente tabla, k es un número real diferente de cero llamado **constante de variación** o **constante de proporcionalidad**.

Terminología	Fórmula general	Ejemplo
y **varía directamente** con x, o y es **directamente proporcional** a x	$y = kx$	$C = 2\pi r$, donde C es la circunferencia de un círculo, r es el radio y $k = 2\pi$
y **varía inversamente** con x, o y es **inversamente proporcional** a x	$y = \dfrac{k}{x}$	$I = \dfrac{110}{R}$, donde I es la corriente en un circuito eléctrico, R es la resistencia y $k = 110$ es el voltaje

FIGURA 1

Cuando aumenta x, aumenta y, *o bien*, cuando disminuye x, disminuye y

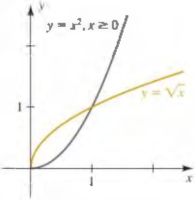
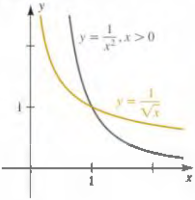


FIGURA 2

Cuando aumenta x, disminuye y, *o bien*, cuando disminuye x, aumenta y



La variable x de la tabla también puede representar una potencia. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ expresa que el área A de un círculo varía directamente con el *cuadrado* del radio r, donde π es la constante de variación. Asimismo, la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ indica que el volumen V de una esfera es directamente proporcional al *cubo* del radio. En este caso la constante de proporcionalidad es $\frac{4}{3}\pi$.

En general, las gráficas de variables relacionadas por *variación directa* se asemejan a las gráficas de **funciones de potencia** de la forma $y = x^n$ con $n > 0$ (como $y = \sqrt{x}$ o $y = x^2$ para valores de x no negativos, como se aprecia en la figura 1). Con variación directa, cuando una variable aumenta, también lo hace la otra variable. Un ejemplo de dos cantidades que están directamente relacionadas es el número de millas que recorre un corredor y la cantidad de calorías que quema.

Las gráficas de variables relacionadas por *variación inversa* se asemejan a las gráficas de funciones de potencia de la forma $y = x^n$ con $n < 0$ (como $y = 1/\sqrt{x}$ o $y = 1/x^2$ para valores positivos de x, como muestra la figura 2). En este caso, cuando una variable aumenta, la otra disminuye. Un ejemplo de dos cantidades que están inversamente relacionadas es el número de pulgadas de precipitación pluvial y el número de incendios de pastizales.

EJEMPLO 1 **Variables directamente proporcionales**

Suponga que una variable q es directamente proporcional a una variable z.

a) Si $q = 12$ cuando $z = 5$, determine la constante de proporcionalidad.

b) Encuentre el valor de q cuando $z = 7$ y trace una gráfica de esta relación.

SOLUCIÓN Como q es directamente proporcional a z,

$$q = kz,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

a) La sustitución de $q = 12$ y $z = 5$ da

$$12 = k \cdot 5 \qquad \text{o} \qquad k = \tfrac{12}{5}$$

b) Como $k = \frac{12}{5}$, la fórmula $q = kz$ tiene la forma específica

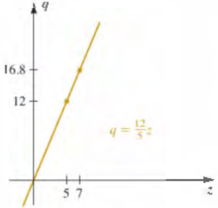
$$q = \tfrac{12}{5}z$$

Por lo tanto, cuando $z = 7$,

$$q = \tfrac{12}{5} \cdot 7 = \tfrac{84}{5} = 16.8$$

La figura 3 ilustra la relación de las variables q y z, una relación lineal.

FIGURA 3



Los siguientes pasos se usan para resolver problemas de aplicación que contienen variación o proporción.

Pasos para resolver problemas de variación

1. Escriba una fórmula *general* que contenga las variables y una constante de variación (o proporción) k.
2. Encuentre el valor de k en el paso 1 mediante los datos iniciales proporcionados en el enunciado del problema.
3. Sustituya el valor de k que se determinó en el paso 2 en la fórmula del paso 1, obteniendo una fórmula *específica* que contenga las variables.
4. Use los nuevos datos para resolver el problema.

Estos pasos se aplican en la solución del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Presión y volumen como cantidades inversamente proporcionales**

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas encerrado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 9 pulgadas de radio es 20 lb/pulg^2. Si el radio del globo aumenta a 12 pulgadas, aproxime la nueva presión del gas. Trace una gráfica de la relación entre la presión y el volumen.

SOLUCIÓN

Paso 1 Si la presión se denota con P (en lb/pulg^2) y el volumen por V (en pulg^3), entonces, como P es inversamente proporcional a V,

$$P = \frac{k}{V}$$

para alguna constante de proporcionalidad k.

Paso 2 La constante de proporcionalidad k se encuentra en el paso 1. Como el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen inicial del globo es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ pulg^3. Esto conduce a lo siguiente:

$$20 = \frac{k}{972\pi} \qquad P = 20 \text{ cuando } V = 972\pi$$

$$k = 20(972\pi) = 19{,}440\pi \qquad \text{despejamos } k$$

Lineamiento 3 Al sustituir $k = 19{,}440\pi$ en $P = k/V$, encontramos que la presión correspondiente a cualquier volumen V está dada por

$$P = \frac{19{,}440\pi}{V}$$

Lineamiento 4 Si el nuevo radio del globo es 12 pulgadas, entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi \text{ pulg}^3$$

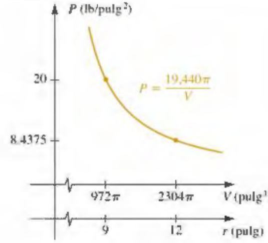
Sustituyendo este número por V en la fórmula obtenida en el paso 3 tenemos

$$P = \frac{19{,}440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375$$

Así, la presión disminuye a aproximadamente 8.4 lb/pulg^2 cuando el radio aumenta a 12 pulgadas.

La figura 4 ilustra la relación de las variables P y V para $V > 0$. Como $P = 19{,}440\pi/V$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, podemos demostrar que $(P \circ V)(r) = 14{,}580/r^3$, de modo que también se podría decir que P es inversamente proporcional a r^3. Note que esta es una gráfica de una función racional lineal.

FIGURA 4



Hay otros tipos de variación. Si x, y y z son variables y $y = kxz$ para algún número real k, se dice que *y varía directamente con el producto de x y z* o que y **varía conjuntamente con x y z**. Si $y = k(x/z)$, entonces *y varía directamente con x e inversamente con z*. Como ejemplo final, si una variable w varía directamente con el producto de x y el cubo de y e inversamente con el cuadrado de z, entonces

$$w = k\frac{xy^3}{z^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Las gráficas y ecuaciones para estos tipos de variación no se considerarán en este libro.

EJEMPLO 3 **Combinación de varios tipos de variación**

Una variable w varía directamente con el producto de u y v e inversamente con el cuadrado de s.

a) Si $w = 20$ cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentre la constante de variación.

b) Encuentre el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$.

SOLUCIÓN Una fórmula general para w es

$$w = k\frac{uv}{s^2},$$

donde k es una constante de variación.

a) Sustituyendo $w = 20$, $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$ tendríamos

$$20 = k\frac{3 \cdot 5}{2^2} \qquad \text{o} \qquad k = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$$

b) Como $k = \frac{16}{3}$, la fórmula específica para w es

$$w = \frac{16}{3}\frac{uv}{s^2}$$

Entonces, cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$,

$$w = \frac{16}{3}\frac{7 \cdot 4}{3^2} = \frac{448}{27} \approx 16.6$$

■

En el ejemplo siguiente de nuevo se siguen los pasos que se indican en esta sección.

EJEMPLO 4 **Determinar la carga de soporte de una viga rectangular**

El peso que con seguridad puede ser soportado por una viga de sección transversal rectangular varía directamente con el producto del ancho y el cuadrado de la profundidad de la sección transversal, e inversamente con la longitud de la viga. Si una viga de 2 por 4 pulgadas que mide 8 pies de largo soporta con seguridad una carga de 500 libras, ¿qué peso puede soportar con seguridad una viga de 2 por 8 pulgadas que mida 10 pies de largo? (Suponga que el ancho es la dimensión *más corta* de la sección transversal.)

SOLUCIÓN

Paso 1 Si el ancho, la profundidad, la longitud y el peso se denotan con w, d, l y W, respectivamente, entonces una fórmula general para W es

$$W = k\frac{wd^2}{l},$$

donde k es una constante de variación.

Paso 2 Para encontrar el valor de k en el paso 1, vemos de los datos dados que

$$500 = k\frac{2(4^2)}{8} \qquad \text{o} \qquad k = 125$$

Paso 3 Al sustituir $k = 125$ en la fórmula del paso 1, obtenemos la fórmula específica

$$W = 125\frac{wd^2}{l}$$

Paso 4 Para contestar la pregunta, sustituimos $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ en la fórmula que se encontró en el lineamiento 3, obteniendo

$$W = 125 \cdot \frac{2 \cdot 8^2}{10} = 1600 \text{ lb}$$

■

3.6 Ejercicios

Ejer. 1–16: Exprese el enunciado como una fórmula que contenga las variables dadas y una constante de proporcionalidad *k*, y luego determine el valor de *k* a partir de las condiciones dadas.

1 u es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $u = 12$.
$u = kv$; $k = \frac{2}{5}$

2 s varía directamente con t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.
$s = kt$; $k = \frac{9}{5}$

3 V varía directamente con el cubo de r. Si $r = 3$, entonces $V = 36\pi$.
$V = kr^3$; $k = \frac{4}{3}\pi$

4 S es directamente proporcional al cuadrado de x. Si $x = 2$, entonces $S = 24$. $S = kx^2$; $k = 6$

5 r varía directamente con s e inversamente con t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.
$r = k\frac{s}{t}$; $k = -14$

6 w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.
$w = k\frac{z}{\sqrt{u}}$; $k = 9$

7 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.
$y = k\frac{x^2}{z^3}$; $k = 27$

8 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Si $x = 4$ y $z = 3$, entonces $y = 16$.
$y = k\frac{x}{z^2}$; $k = 36$

9 z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y al cubo de y. Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.
$z = kx^2y^3$; $k = -\frac{2}{49}$

10 z es directamente proporcional al producto de x y a la raíz cúbica de y. Si $x = 2$ y $y = 8$, entonces $z = 12$.
$z = kx\sqrt[3]{y}$; $k = 3$

11 z es directamente proporcional al producto de x y y e inversamente proporcional a la raíz cúbica de w. Si $x = 6$, $y = 4$ y $w = 27$, entonces $z = 16$.
$z = k\frac{xy}{\sqrt[3]{w}}$; $k = 2$

12 r es directamente proporcional al producto de s y v e inversamente proporcional al cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.
$r = k\frac{sv}{p^3}$; $k = \frac{2500}{3}$

13 q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.
$q = \frac{k}{x + y}$; $k = 1.68$

14 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s. Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.
$y = k\frac{x}{r + s}$; $k = 8$

15 y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.
$y = k\frac{\sqrt{x}}{z^3}$; $k = \frac{40}{3}$

16 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.
$y = k\frac{x^2}{\sqrt{z}}$; $k = \frac{8}{5}$

17 **Presión de un líquido** La presión P que actúa en un punto en un líquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.

a) Exprese P como función de d por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k. $P = kd$

b) En cierto tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 pies es 118 lb/pie². Encuentre el valor de k del inciso a). 59

c) Encuentre la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo del inciso b). 295 lb/pie²

d) Trace una gráfica de la relación entre P y d para $d \geq 0$.

18 **Ley de Hooke** La ley de Hooke expresa que la fuerza F necesaria para estirar un resorte x unidades más allá de su longitud natural es directamente proporcional a x.

a) Exprese F como función de x por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k. $F = kx$

b) Un peso de 4 libras estira cierto resorte a partir de su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 10.3 pulgadas. Encuentre el valor de k en el inciso a).

c) ¿Qué peso estira el resorte en el inciso b) hasta una longitud de 11.5 pulgadas?

d) Trace una gráfica de la relación entre F y x para $x \geq 0$.

19 Resistencia eléctrica La resistencia eléctrica R de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.

a) Exprese R en términos de l, d y una constante de variación k.

b) Un alambre de 100 pies de largo y 0.01 pulgadas de diámetro tiene una resistencia de 25 ohms. Encuentre el valor de k del inciso a).

c) Trace una gráfica de la relación entre R y d para $l = 100$ y $d > 0$.

d) Encuentre la resistencia de un alambre fabricado del mismo material que tiene un diámetro de 0.015 pulgadas y mide 50 pies de largo.

20 Intensidad de iluminación La intensidad de iluminación I de una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la fuente.

a) Exprese I en términos de d y una constante de variación k.

b) Un reflector tiene una intensidad de 1 millón candelas de potencia a una distancia de 50 pies. Encuentre el valor de k del inciso a).

c) Trace una gráfica de la relación entre I y d para $d > 0$.

d) Aproxime la intensidad del reflector del inciso b) a una distancia de 1 milla.

21 Periodo de un péndulo El periodo P de un péndulo simple, es decir, el tiempo necesario para una oscilación completa, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l.

a) Exprese P en términos de l y una constante de proporcionalidad k.

b) Si un péndulo de 2 pies de largo tiene un periodo de 1.5 segundos, encuentre el valor de k del inciso a).

c) Encuentre el periodo de un péndulo de 5 pies de largo.

23 Dimensiones de un miembro humano Un cilindro circular se usa a veces en psicología como representación sencilla de un miembro humano.

a) Exprese el volumen V de un cilindro en términos de su longitud L y el cuadrado de su circunferencia C.

b) La fórmula obtenida en el inciso a) se puede usar para aproximar el volumen de un miembro a partir de las medidas de su longitud y circunferencia. Suponga que la circunferencia (promedio) de un antebrazo humano es de 22 centímetros y su longitud media es de 27 centímetros. Aproxime el volumen del antebrazo al cm^3 más cercano.

23 Periodo de un planeta La tercera ley de Kepler expresa que el periodo T de un planeta (el tiempo necesario para hacer una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia media d desde el Sol.

a) Exprese T como una función de d por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

b) Para el planeta Tierra, $T = 365$ días y $d = 93$ millones de millas. Encuentre el valor de k del inciso a).

c) Estime el periodo de Venus si su distancia media desde el Sol es de 67 millones de millas.

24 Alcance de un proyectil Sabemos, según la física, que el alcance R de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v.

a) Exprese R como función de v por medio de una fórmula que involucre una constante de proporcionalidad k.

b) Un motociclista temerario ha hecho un salto de 150 pies. Si la velocidad al salir de la rampa fue de 70 mi/h, encuentre el valor de k del inciso a).

c) Si el motociclista puede alcanzar una velocidad de 80 mi/h al salir de la rampa y mantiene un equilibrio apropiado, estime la longitud posible del salto.

25 Marcas de derrape de un automóvil La velocidad V a la que un automóvil corría antes de aplicar los frenos se puede estimar a veces a partir de la longitud L de las marcas de un derrape. Suponga que V es directamente proporcional a la raíz cuadrada de L.

a) Exprese V como función de L por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

b) Para cierto automóvil en una superficie seca, $L = 50$ pies cuando $V = 35$ mi/h. Encuentre el valor de k del inciso a).

c) Estime la velocidad inicial del automóvil del inciso b) si las marcas del derrape fueron de 162 pies de largo.

26 Ley de Coulomb La ley de Coulomb en teoría eléctrica establece que la fuerza F de atracción entre dos partículas con cargas opuestas varía directamente con el producto de las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas e inversamente con el cuadrado de la distancia d entre las partículas.

a) Encuentre una fórmula para F en términos de Q_1, Q_2, d y una constante de variación k.

b) ¿Cuál es el efecto de reducir la distancia entre las partículas por un factor de un cuarto?

27 **Umbral de peso** El umbral de peso W se define como el peso por encima del cual el riesgo de muerte aumenta de manera considerable. Para hombres de edad mediana, W es directamente proporcional a la tercera potencia de la estatura h.

a) Exprese W como una función de h por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

b) Para un hombre de 6 pies de estatura, W es de alrededor de 200 libras. Encuentre el valor de k del inciso a).

c) Estime, a la libra más cercana, el umbral de peso para un hombre que mide 5 pies 6 pulgadas de estatura.

28 **Ley de los gases ideales** La ley de los gases ideales establece que el volumen V que un gas ocupa es directamente proporcional al producto del número n de moles de gas y la temperatura T, en K, y es inversamente proporcional a la presión (en atmósferas).

a) Exprese V en términos de n, T, P y una constante de proporcionalidad k.

b) ¿Cuál es el efecto en el volumen si el número de moles se duplica, y tanto la temperatura como la presión se reducen por un factor de un medio?

29 **Ley de Poiseuille** La ley de Poiseuille establece que el flujo sanguíneo F (en L/min) que pasa por una arteria principal es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r de la arteria y la presión sanguínea P.

a) Exprese F en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.

b) Durante un ejercicio intenso, el torrente sanguíneo a veces se triplica. Si el radio de una arteria principal aumenta 10%, ¿aproximadamente cuánto más debe bombear el corazón?

30 **Población de truchas** Suponga que se pescan 200 truchas, se marcan y se sueltan en la población general de un lago. Designe con L el número de peces marcados que son recapturados cuando una muestra de n truchas se pesca en una fecha posterior. La validez del método de marca-recaptura para estimar la población total de truchas del lago se basa en la suposición de que T es directamente proporcional a n. Si 10 truchas marcadas se recuperan de una muestra de 300, estime la población total de truchas del lago.

31 **Desintegración radiactiva de un gas radón** Cuando el uranio se desintegra en plomo, un paso del proceso es el decaimiento radiactivo del radio en gas radón. El radón entra por el suelo hacia los sótanos de las casas, donde presenta un riesgo para la salud si se inhala. En el caso más sencillo de detección de radón, se toma una muestra de aire con volumen V. Después de establecer un equilibrio, el decaimiento radiactivo D del radón se cuenta con una eficiencia E en el tiempo t. La concentración C del radón presente en la muestra de aire varía directamente con el producto de D y E, e inversamente con el producto de V y t. Para una concentración C fija de radón y un tiempo t, encuentre el cambio en el conteo del decaimiento radiactivo D si V se duplica y E se reduce 20%.

32 **Concentración de radón** Consulte el ejercicio 31. Encuentre el cambio en la concentración de radón C si D aumenta 30%, t aumenta 60%, V disminuye 10% y E permanece constante.

33 **Densidad en un punto** Una placa plana y delgada se sitúa en un plano xy, de modo que la densidad d (en lb/pie^2) en el punto $P(x, y)$ es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen. ¿Cuál es el efecto en la densidad en P si las coordenadas x y y se multiplican por $\frac{1}{3}$?

34 **Temperatura en un punto** Una placa metálica plana se coloca en un plano xy tal que la temperatura T (en °C) en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia desde el origen. Si la temperatura en el punto $P(3, 4)$ es 20 °C, encuentre la temperatura en el punto $Q(24, 7)$.

Ejer. 35–38: Examine la expresión para el conjunto dado de puntos de datos de la forma (x, y). Encuentre la constante de variación y una fórmula que describa la forma en que y varía respecto a x.

35 y/x; $\{(0.6, 0.72), (1.2, 1.44), (4.2, 5.04), (7.1, 8.52)\}$

36 xy; $\{(0.2, -26.5), (0.4, -13.25), (0.8, -6.625)\}$

37 x^2y; $\{(0.8, -15.78125), (1.6, -3.9453125), (3.2, -0.986328125)\}$

38 y/x^3; $\{(0.6, 0.5616), (1.2, 4.4928), (2.4, 35.9424)\}$

39 **Distancias de frenado** Consulte el ejercicio 86 de la sección 2.4. La distancia D (en pies) necesaria para que un automóvil se detenga con seguridad varía directamente con su velocidad S (en mi/h).

a) Use la tabla para determinar un valor aproximado para k en la fórmula de variación $D = kS^{2.3}$.

S	20	30	40	50	60	70
D	33	86	167	278	414	593

b) Compruebe su aproximación al graficar los datos y D en los mismos ejes de coordenadas.

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–6: Encuentre todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x tal que $f(x) < 0$, y trace la gráfica de f.

1 $f(x) = (x + 2)^3$

2 $f(x) = x^8 - 32$

3 $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$

4 $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$

5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

6 $f(x) = \frac{1}{15}(x^5 - 20x^3 + 64x)$

7 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, use el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales para demostrar que hay un número real a tal que $f(a) = 100$.

8 Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Ejer. 9–10: Encuentre el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

9 $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5;\quad p(x) = x^3 - 2x + 7$

10 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1;\quad p(x) = x^2$

11 Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 + 20x^2 + 7x - 10$, use el teorema del residuo para encontrar $f(-2)$.

12 Use el teorema del factor para demostrar que $x - 3$ es un factor de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

Ejer. 13–14: Use la división sintética para encontrar el cociente y residuo si $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

13 $f(x) = 6x^5 - 4x^2 + 8;\qquad p(x) = x + 2$

14 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1;\quad p(x) = x - 3$

Ejer. 15–16: Un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene el cero (o ceros) y el grado indicados, y satisface la condición dada. Exprese $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que sean irreductibles sobre $\mathbb{R}$.

15 $-3 + 5i, -1;$ grado 3; $f(1) = 4$

16 $1 - i, 3, 0;$ grado 4; $f(2) = -1$

17 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 7 con coeficiente principal 1 tal que -3 sea un cero de multiplicidad 2 y 0 sea un cero de multiplicidad 5, y trace la gráfica de f.

18 Demuestre que 2 es un cero de multiplicidad 3 del polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24$ y exprese $f(x)$ como un producto de factores lineales.

Ejer. 19–20: Encuentre los ceros de $f(x)$ y exprese la multiplicidad de cada cero.

19 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

20 $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$

Ejer. 21–22: a) Use la regla de signos de Descartes para determinar el número de soluciones complejas posibles, positivas, negativas y no reales, de la ecuación. b) Encuentre los enteros mínimo y máximo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones reales de la ecuación.

21 $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

22 $x^5 - 4x^3 + 6x^2 + x + 4 = 0$

23 Demuestre que $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1$ no tiene cero real.

Ejer. 24–26: Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

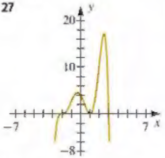
24 $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

25 $16x^3 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

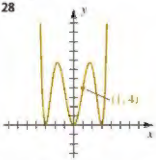
26 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

Ejer. 27–28: Encuentre una ecuación para el polinomio de sexto grado f que se muestra en la figura.

27



28



29 Identifique cualesquiera asíntotas verticales, asíntotas horizontales, puntos de intersección y vacíos para

$$f(x) = \frac{4(x + 2)(x - 1)}{3(x + 2)(x - 5)}$$

Ejer. 30–39: Trace la gráfica de f.

30 $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)^2}$

31 $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^3}$

32 $f(x) = \dfrac{3x^2}{16 - x^2}$

33 $f(x) = \dfrac{x}{(x + 5)(x^2 - 5x + 4)}$

34 $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{-x^2 + 2x}$

35 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ **36** $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 10}{x^2 + 2x}$

37 $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 - 6x + 8}$ **38** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x + 3}$

39 $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3}$

40 Encuentre una ecuación de una función racional f que satisfaga las condiciones dadas.

asíntota vertical: $x = -3$
asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$
intersección en x: 5
vacío en $x = 2$

41 Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cúbica de x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Encuentre la constante de proporcionalidad si $y = 6$ cuando $x = 8$ y $z = 3$.

42 Suponga que y es inversamente proporcional al cuadrado de x. Trace una gráfica de esta relación para $x > 0$, dado que $y = 18$ cuando $x = 4$. Incluya un punto para $x = 12$.

43 **Flexión de una viga** Una viga horizontal de l pies de largo está apoyada en un extremo y no apoyada en el otro extremo (vea la figura). Si la viga se somete a una carga uniforme y y denota su flexión en una posición a x pies del extremo con apoyo, entonces se puede demostrar que

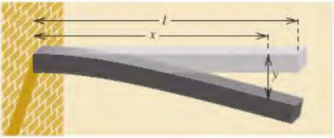
$$y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2),$$

donde c es una constante positiva que depende del peso de la carga y de las propiedades físicas de la viga.

a) Si la viga mide 10 pies de largo y la flexión en el extremo no apoyado de la viga es de 2 pies, encuentre c.

b) Demuestre que la flexión es de 1 pie en algún punto entre $x = 6.1$ y $x = 6.2$.

EJERCICIO 43

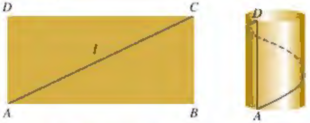


44 **Cilindro elástico** Un rectángulo hecho de material elástico se convertirá en cilindro al unir el lado AD con el lado BC, como se ve en la figura. Un alambre de longitud fija l se coloca a lo largo de la diagonal del rectángulo para dar apoyo a la estructura. Designe con x la altura del cilindro.

a) Exprese el volumen V del cilindro en términos de x.

b) ¿Para qué valores positivos de x es $V > 0$?

EJERCICIO 44



45 **Determinar temperaturas** Un meteorólogo determina que la temperatura T (en °F) para cierto periodo de 24 horas en invierno se obtiene con la fórmula $T = \frac{1}{20}$ para $0 \le t \le 24$, donde t es el tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a las 6:00 A.M. ¿En qué tiempo(s) la temperatura fue de 32 °F?

46 **Propagación de venados** Un rebaño de 100 venados se introduce en una pequeña isla. Suponiendo que el número $N(t)$ de venados después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$ (para $t > 0$), determine cuándo el tamaño del rebaño rebasa los 180 venados.

47 **Curva de umbral de respuesta** En bioquímica, la curva general de umbral de respuesta es la gráfica de una ecuación

$$R = \frac{kS^n}{S^n + a^n},$$

donde R es la respuesta química cuando el nivel de la sustancia sobre la que se actúa es S, y a, k y n son constantes positivas. Un ejemplo es la tasa de remoción R de alcohol del torrente sanguíneo por el hígado, cuando la concentración de alcohol en la sangre es S.

a) Encuentre una ecuación de la asíntota horizontal para la gráfica.

b) En el caso de la remoción de alcohol, $n = 1$ y un valor típico de k es 0.22 gramos por litro por minuto. ¿Cuál es la interpretación de k en esta situación?

48 **Limpieza de un derrame de petróleo** El costo $C(x)$ de limpiar x porciento de un derrame de petróleo que ha llegado a la costa aumenta en gran medida cuando x se aproxima a 100. Suponga que

$$C(x) = \frac{0.3x}{101 - x} \quad \text{(millones de dólares).}$$

a) Compare $C(100)$ con $C(90)$.

b) Trace la gráfica de C para $0 < x < 100$.

49 **Llamadas telefónicas** En cierto condado, el promedio del número de llamadas telefónicas por día, entre dos ciudades cualesquiera, es directamente proporcional al producto de sus poblaciones e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las ciudades A y B están a 25 millas una de otra y tienen poblaciones de 10,000 y 5000 habitantes, respectivamente. Los registros telefónicos indican un promedio de 2000 llamadas diarias entre las dos ciudades. Estime el número promedio de llamadas por día entre la ciudad A y otra ciudad de 15,000 habitantes que está a 100 millas de A.

50 **Potencia de un rotor de viento** La potencia P generada por un rotor de viento es directamente proporcional al producto del cuadrado del área A recorrida por las palas y la tercera potencia de la velocidad v del viento. Suponga que el diámetro del área circular recorrida por las palas es de 10 pies y $P = 3000$ watts cuando $v = 20$ mi/h. Encuentre la potencia generada cuando la velocidad del viento es de 30 mi/h.

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 Compare el dominio, rango, número de intersecciones con el eje x y forma general de los polinomios de grado par y de grado impar.

2 Cuando se usa la división sintética, ¿podríamos usar un número complejo c en vez de un número real en $x - c$?

3 Discuta la forma en que la división sintética se puede usar para ayudar a encontrar el cociente y residuo cuando $4x^3 - 8x^2 - 11x + 9$ es dividido entre $2x + 3$. Comente cómo se puede usar la división sintética con cualquier factor lineal de la forma $ax + b$.

4 Trace (a mano) una gráfica de una función polinomial de grado 3 que tenga intersección 1, 2 y 3 en x, intersección 6 en y y pase por el punto $(-1, 25)$. ¿Puede trazar en realidad la gráfica que acaba de bosquejar?

5 ¿Cuántos puntos diferentes se necesitan para especificar un polinomio de grado n?

6 Demuestre el teorema sobre ceros en pares conjugados de un polinomio (*Sugerencia*: para un polinomio f arbitrario, examine los conjugados de ambos lados de la ecuación $f(z) = 0$.)

7 Proporcione un ejemplo de una función racional que tenga un factor común en el numerador y el denominador, pero que no tenga un vacío en su gráfica. Comente, en general, la forma en que ocurre esto.

8 **a)** ¿Puede la gráfica de $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (donde $ax + b \neq cx + d$) cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde la cruza?

b) ¿Puede la gráfica de $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ (suponga que no hay factores semejantes) cruzar su asíntota horizontal? Si es así, ¿dónde la cruza?

9 **Fórmula de supervivencia en juegos de azar** Una fórmula empírica para la cantidad de dinero B (en dólares), que se necesita para sobrevivir a una sesión de juegos de azar con confianza C (porcentaje expresado como decimal), está dada por la fórmula

$$B = \frac{GW}{29.3 + 53.1E - 22.7C},$$

donde G es el número de juegos jugados en la sesión, W es la apuesta por juego y E es la ventaja del jugador en el juego (expresada como decimal).

a) Aproxime la cantidad de dinero necesaria para un jugador que juega 500 juegos por hora, durante 3 horas, a \$5 por juego y ventaja de -5%, siempre que el jugador desee 95% de probabilidad de sobrevivir la sesión de tres horas.

b) Discuta la validez de la fórmula; una tabla y una gráfica pueden ayudarle.

10 Multiplique entre sí tres enteros consecutivos y luego sume el segundo entero a ese producto. Use división sintética para ayudar a demostrar que la suma es el cubo de un entero y determine qué entero.

11 **Tasa de impuesto personal** Suponga que la cantidad total de impuesto estatal pagada está formada por una cantidad P por propiedad personal y S porciento del ingreso I.

a) Encuentre una función que calcule la tasa R de impuesto estatal de una persona, es decir, el porcentaje del ingreso de esa persona que se paga en impuestos. (Es útil considerar valores específicos para crear la función.)

b) ¿Qué le ocurre a R cuando I se hace muy grande?

c) Discuta la frase: "La gente rica paga un porcentaje más bajo de sus ingresos en impuestos estatales que cualquier otro grupo."

12 **Ranking de un quarterback de la NFL** La National Football League clasifica a sus quarterbacks al asignar una calificación R de quarterback con base en los números de pases completos C, intentos A, yardas Y, touchdowns T e intercepciones I. En una situación normal, se puede demostrar que la calificación del pasador se calcula usando la fórmula

$$R = \frac{25(A + 40C + 2Y + 160T - 200I)}{12A}$$

a) En 2004, Peyton Manning completó 336 pases de 497 intentos para 4557 yardas y lanzó 49 pases de touchdown e hizo 10 intercepciones. Calcule su calificación que estableció un récord.

b) ¿Cuántas yardas más hubiera necesitado para obtener una calificación de quarterback de por lo menos 121.5?

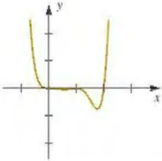
c) Si hubiera podido lanzar un pase más de touchdown, ¿de cuántas yardas hubiera tenido que ser para obtener una calificación de pasador de por lo menos 122?

CAPÍTULO 3 EXAMEN

1 Trace la gráfica de $f(x) = \frac{1}{6}(x + 3)(x - 2)(x - 4)$. ¿Cuál es la intersección con el eje y?

2 La gráfica de la función f tiene intersecciones en $x = 0$, 1 y 2. Escriba una posible ecuación para f.

EJERCICIO 2



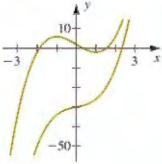
3 Use el teorema del valor intermedio para demostrar que $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$ tiene un cero entre 0 y 2.

4 ¿Cuál es la solución para $f(x) < 0$, donde $f(x) = (x - a)(x - b)^2(x - c)$ y $a < 0 < b < c$?

5 Suponga que el número $N(t)$ de cierto tipo de animal después de t años está dado por $N(t) = -t^4 + 48t^2 + 49$, donde $t > 0$. Según el modelo, ¿en qué momento se extinguirá la población?

6 La figura muestra la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$ y $g(x) = 2x^3 + 2x - 30$. ¿Qué sucedería con las gráficas si se cambiara el rango de $-50 \le y \le 10$ a $22000 \le y \le 2000$?

EJERCICIO 6



7 Use el teorema del factor para demostrar que $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

8 Dado que la gráfica de $f(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ pasa por el punto $(4, b)$, encuentre el valor de a en términos de b.

9 Encuentre todos los valores de k tales que $f(x) = k^2x^4 - kx^3 - 6$ sea divisible entre $x - 1$.

10 Un polinomio f tiene 3 como un cero de multiplicidad 1, -1 como un cero de multiplicidad 2, y pasa por el punto $(2, -27)$. Encuentre f en la forma factorizada.

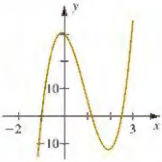
11 Un polinomio f de tercer grado pasa por los siguientes puntos: $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(4, b)$. Encuentre todos los valores posibles de b.

12 ¿Es posible tener un polinomio f de tercer grado que tenga ceros 0, 1 e i? Si es así, encuentre f.

13 Explique por qué $\frac{5}{2}$ *podría* ser una raíz racional de $f(x) = 702x^4 - 57x^3 - 5227x^2 - 163x + 6545$.

14 La función $f(x) = 10x^3 - 27x^2 - 7x + 30$ tiene posibles raíces racionales en $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{10}, \pm 2, \pm\frac{2}{5}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{3}{10}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm 6, \pm\frac{6}{5}, \pm 10, \pm 15, \pm\frac{15}{2}$ y ± 30. La gráfica dada muestra todos los ceros de f. Use esta información para elaborar una lista de todos los ceros de f.

EJERCICIO 14



15 La función $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 13}{x^2 + 2x + 1}$ interseca su asíntota horizontal. Encuentre el punto (x, y) de la intersección.

16 Encuentre las coordenadas x y y del vacío de $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{3x^2 - 8x + 4}$

17 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{2(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 4x + 3}$. Marque las intersecciones con los ejes x y x, las asíntotas horizontales y verticales y cualquier vacío.

18 Encuentre una ecuación de una función racional f que tenga una intersección 4 en x, una asíntota vertical de $x = 2$, una asíntota horizontal de $y = -3$ y un vacío en $x = -1$. Proporcione su respuesta en forma factorizada.

19 z es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a y. Si $z = 6$ cuando $x = 3$ y $y = 2$, encuentre z cuando $x = 6$ y $y = 12$.

4

Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas

4.1 Funciones inversas

4.2 Funciones exponenciales

4.3 La función exponencial natural

4.4 Funciones logarítmicas

4.5 Propiedades de los logaritmos

4.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes, porque no pueden definirse sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x, como es el caso de las funciones algebraicas consideradas en capítulos anteriores. Estas funciones son de la mayor importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en casi todos los campos del saber humano. Son especialmente útiles en las áreas de química, biología, física e ingeniería, donde ayudan a describir la forma en que las cantidades en la naturaleza aumentan o disminuyen. Como veremos en el capítulo, existe una estrecha relación entre funciones exponenciales y logarítmicas específicas; es decir, son funciones inversas entre sí.

4.1 Funciones inversas

Una función f puede tener el mismo valor para diferentes números en su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$. Para que se defina *la función inversa de una función*, es esencial que números diferentes del dominio siempre den valores diferentes de f. Esas funciones se denominan *funciones uno-a-uno* o *funciones biunívocas*.

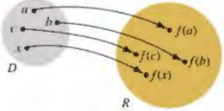
Definición de función biunívoca

Una función f con dominio D y rango R es una **función biunívoca** si se satisface cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

1) Siempre que $a \neq b$ en D, entonces $f(a) \neq f(b)$ en R.

2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces $a = b$ en D.

FIGURA 1



El diagrama de flechas de la figura 1 ilustra una función biunívoca. Note que el valor de cada función del rango R corresponde a *exactamente un* elemento del dominio D.

EJEMPLO 1 **Cómo determinar si una función es biunívoca**

a) Si $f(x) = 3x + 2$, demuestre que f es biunívoca.

b) Si $g(x) = x^2 - 3$, demuestre que g no es biunívoca.

SOLUCIÓN

a) Usaremos la condición 2 de la definición precedente. Por lo tanto, suponga que $f(a) = f(b)$ para algunos números a y b en el dominio de f. Esto nos da lo siguiente:

$$3a + 2 = 3b + 2 \qquad \text{definición de } f(x)$$

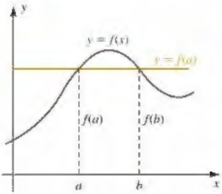
$$3a = 3b \qquad \text{restamos 2}$$

$$a = b \qquad \text{dividimos entre 3}$$

Como hemos concluido que a debe ser igual a b, f es biunívoca.

b) Demostrar que una función *es* biunívoca requiere una demostración *general*, como en el inciso a). Para demostrar que g no es biunívoca, sólo necesitamos encontrar dos números reales distintos en el dominio que produzcan el mismo valor de función. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho, como g es una función par, $g(-a) = g(a)$ para todo número real a. ■

FIGURA 2



Si conocemos la gráfica de una función f, es fácil determinar si f es biunívoca. Por ejemplo, la función cuya gráfica se traza en la figura 2 no es biunívoca, porque $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Observe que la recta horizontal $y = f(a)$ (o $y = f(b)$) interseca la gráfica en más de un punto. En general, podemos usar la siguiente prueba gráfica para determinar si una función es biunívoca.

Prueba de la recta horizontal

Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal interseca la gráfica de f en máximo un punto.

Apliquemos la prueba de la recta horizontal a las funciones del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 **Uso de la prueba de la recta horizontal**

Use la prueba de la recta horizontal para determinar si la función es biunívoca.

a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $g(x) = x^2 - 3$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $f(x) = 3x + 2$ es una recta con punto de intersección 2 con el eje y y pendiente 3, como se ve en la figura 3. Vemos que cualquier recta horizontal cruza la gráfica de f como máximo en un punto. Por consiguiente, f es biunívoca.

FIGURA 3

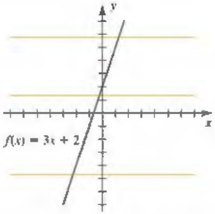
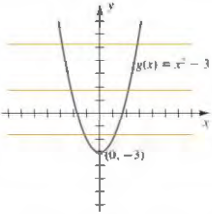


FIGURA 4



b) La gráfica de $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola que abre hacia arriba con vértice $(0, -3)$, como se ve en la figura 4. En este caso, cualquier recta horizontal con ecuación $y = k$, donde $k > -3$, interseca la gráfica de g en dos puntos. Por lo tanto, g no es biunívoca. ■

Podemos deducir del ejemplo 2 que toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema: las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

1) Una función que es creciente en todo su dominio es biunívoca.

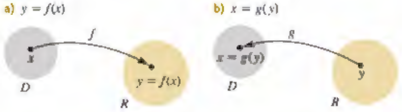
2) Una función que es decreciente en todo su dominio es biunívoca.

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Así, para cada número y en R, hay *exactamente un* número x en D tal que $y = f(x)$, como lo ilustra la flecha de la figura 5a). Podemos, por lo tanto, definir una función g de R a D por medio de la siguiente regla:

$$x = g(y)$$

Como en la figura 5b), g *invierte la correspondencia dada por* f. Denominamos g a la *función inversa* de f, como en la siguiente definición.

FIGURA 5



Definición de función inversa Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D es la **función inversa** de f, siempre que la condición siguiente sea verdadera para toda x en D y toda y en R:

$$y = f(x) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = g(y)$$

Recuerde que para definir la inversa de una función f, *es absolutamente esencial que f sea biunívoca.* El siguiente teorema, planteado sin demostración, es útil para verificar que una función g es la inversa de f.

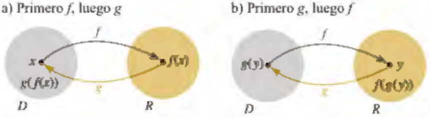
Teorema sobre funciones inversas Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Si g es una función con dominio R y rango D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si son verdaderas las dos condiciones siguientes:

1) $g(f(x)) = x$ para toda x en D

2) $f(g(y)) = y$ para toda y en R

Las condiciones 1 y 2 del teorema precedente se ilustran en la figura 6a) y b), respectivamente, donde la flecha negra indica que f es una función de D a R y la flecha color naranja indica que g es una función de R a D.

FIGURA 6



Tenga en cuenta que en la figura 6a) primero aplicamos f al número x en D, obteniendo el valor de función $f(x)$ en R, y luego aplicamos g a $f(x)$, obteniendo el número $g(f(x))$ en D. La condición 1 del teorema expresa que $g(f(x)) = x$ para toda x; esto es, g *invierte* la correspondencia dada por f.

En la figura 6b) usamos el orden opuesto para las funciones. Primero aplicamos g al número y en R, obteniendo el valor de función $g(y)$ en D y luego aplicamos f a $g(y)$, obteniendo el número $f(g(y))$ en R. La condición 2 del teorema expresa que $f(g(y)) = y$ para toda y; esto es, f *invierte* la correspondencia dada por g.

Si una función f tiene una función inversa g, con frecuencia denotamos g con f^{-1}. El -1 empleado en esta notación no debe confundirse con un exponente; esto es,

$$f^{-1}(y) \text{ no significa } 1/[f(y)].$$

El recíproco $1/[f(y)]$ puede denotarse con $[f(y)]^{-1}$. Es importante recordar los datos siguientes acerca del dominio y rango de f y f^{-1}.

Dominio y rango de f y f^{-1}

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Cuando estudiamos funciones, a veces denotamos con x un número arbitrario en el dominio. Así, para la función inversa f^{-1}, podemos considerar $f^{-1}(x)$, *donde x está en el dominio R de f^{-1}*. En este caso, las dos condiciones del teorema sobre funciones inversas se escriben como sigue:

1) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

2) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

La figura 6 contiene una sugerencia para encontrar el inverso de una función biunívoca en ciertos casos: si es posible, *de la ecuación $y = f(x)$ despejamos x en términos de y*, obteniendo una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si las dos condiciones $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$ son verdaderas para toda x en los dominios de f y g, respectivamente, entonces g es la función inversa f^{-1} requerida. Los siguientes pasos resumen este procedimiento; en el paso 2, antes de encontrar f^{-1}, escribimos $x = f^{-1}(y)$ en lugar de $x = g(y)$.

Pasos para encontrar f^{-1} en casos simples

1 Verifique que f sea una función biunívoca en todo su dominio.

2 De la ecuación $y = f(x)$ despeje x en términos de y, obteniendo una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.

3 Verifique las dos condiciones siguientes:

a) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f

b) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

El éxito de este método depende de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, porque debemos estar en aptitud de despejar x en términos de y. Por esta razón, incluimos la frase *en casos simples* en el título de los pasos. Consideraremos estos pasos en los siguientes cuatro ejemplos.

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar la inversa de una función**

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentre la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Paso 1 La gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3 y, por lo tanto, f es creciente de principio a fin en $\mathbb{R}$. Así, f es biunívoca y existe la función

(*continúa*)

inversa f^{-1}. Además, como el dominio y el rango de f son $\mathbb{R}$, lo mismo es cierto para f^{-1}.

Paso 2 Despeje x en la ecuación $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 && \text{sea } y = f(x) \\ x &= \frac{y+5}{3} && \text{despeje } x \text{ en términos de } y \end{aligned}$$

Ahora formalmente hacemos $x = f^{-1}(y)$; es decir,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+5}{3}.$$

Como el símbolo empleado para la variable no tiene importancia, también podemos escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3},$$

donde x está en el dominio de f^{-1}.

Paso 3 Como el dominio y rango de f y f^{-1} son $\mathbb{R}$, debemos verificar las condiciones a) y b) para todo número real x. Procedemos como sigue:

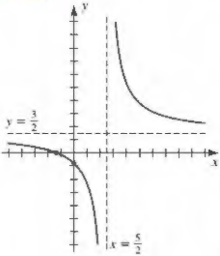
a) $$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x-5) && \text{definición de } f \\ &= \frac{(3x-5)+5}{3} && \text{definición de } f^{-1} \\ &= x && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+5}{3}\right) && \text{definición de } f^{-1} \\ &= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5 && \text{definición de } f \\ &= x && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

Estas verificaciones demuestran que la función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$ ■

FIGURA 7



EJEMPLO 4 **Cómo encontrar la inversa de una función**

Sea $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-5}$. Encuentre la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Paso 1 La gráfica de la función racional f aparece en la figura 7 (remítase al ejemplo 3 de la sección 3.5). Ésta es decreciente a lo largo de su dominio $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$. Por lo tanto, f es biunívoca y existe la función inversa f^{-1}. También sabemos que el dominio mencionado es el rango de f^{-1} y que el rango de f, $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, es el dominio de f^{-1}.

Paso 2 Despeje x de la ecuación $y = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{3x+4}{2x-5} && \text{sea } y = f(x)\\
y(2x-5) &= 3x+4 && \text{multiplicamos por } 2x-5\\
2xy - 5y &= 3x+4 && \text{multiplicamos}\\
2xy - 3x &= 5y+4 && \text{agrupamos todos los términos de } x \text{ en un solo lado}\\
x(2y-3) &= 5y+4 && \text{factorizamos } x\\
x &= \frac{5y+4}{2y-3} && \text{dividimos entre } 2y-3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{5y+4}{2y-3}, \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2x-3}$$

Paso 3 Verificamos las condiciones a) y b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

Para un ejemplo específico del paso 3, si $x = 3$, entonces $f(3) = 13/1 = 13$) y $f^{-1}(13) = 69/23 = 3$. Por lo tanto, $f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(13) = 3$ y $f(f^{-1}(13)) = f(3) = 13$.
***Sugerencia**: después de encontrar una función inversa f^{-1}, escoja un número arbitrario en el dominio de f (como 3 arriba) y verifique las condiciones a) y b) del paso 3. Es muy probable que si estas condiciones "cuadran", entonces hemos determinado la inversa correcta.*

a) $$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right) = \frac{5\left(\dfrac{3x+4}{2x-5}\right)+4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-5}\right)-3} = \frac{\dfrac{5(3x+4)+4(2x-5)}{2x-5}}{\dfrac{2(3x+4)-3(2x-5)}{2x-5}}$$
$$= \frac{15x+20+8x-20}{6x+8-6x+15} = \frac{23x}{23} = x$$

b) $$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{5x+4}{2x-3}\right) = \frac{3\left(\dfrac{5x+4}{2x-3}\right)+4}{2\left(\dfrac{5x+4}{2x-3}\right)-5} = \frac{\dfrac{3(5x+4)+4(2x-3)}{2x-3}}{\dfrac{2(5x+4)-5(2x-3)}{2x-3}}$$
$$= \frac{15x+12+8x-12}{10x+8-10x+15} = \frac{23x}{23} = x$$

Entonces, la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2x-3}$$

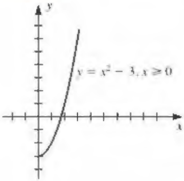
■

EJEMPLO 5 **Cómo determinar la inversa de una función**

Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$. Encuentre la función inversa de f.

SOLUCIÓN

FIGURA 8



Paso 1 La gráfica de f aparece en la figura 8. El dominio de f es $[0, \infty)$, y el rango es $[-3, \infty)$. Como f es creciente, es biunívoca y, por lo tanto, tiene una función inversa f^{-1} con dominio $[-3, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Paso 2 Consideremos la ecuación

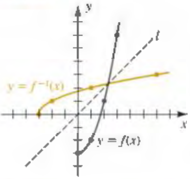
$$y = x^2 - 3\,x$$

y despejamos x, para obtener

$$x = \pm\sqrt{y+3}$$

(*continúa*)

FIGURA 9



Tenga en cuenta que las gráficas de f y f^{-1} se intersecan en la recta $y = x$.

Como x es no negativa, rechazamos $x = -\sqrt{y+3}$ y hacemos

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Note que si la función f tuviera dominio $x \le 0$, habríamos escogido la función $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$.)

Paso 3 Verificamos las condiciones a) y b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3)$
$= \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} = x$ para $x \ge 0$

b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt{x+3}\right)$
$= \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3 = (x+3) - 3 = x$ para $x \ge -3$

Entonces, la función inversa está dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{para } x \ge -3$$ ■

Existe una relación interesante entre la gráfica de una función f y la gráfica de su función inversa f^{-1}. Primero observamos que $b = f(a)$ es equivalente a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones implican que *el punto (a, b) está sobre la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está sobre la gráfica de f^{-1}*.

Como ilustración, en el ejemplo 5 encontramos que las funciones f y f^{-1} dadas por

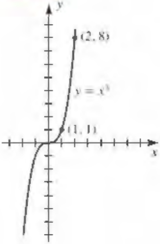
$$f(x) = x^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

son funciones inversas la una de la otra, siempre que x se restrinja de modo apropiado. Algunos puntos sobre la gráfica de f son (0, -3), (1, -2), (2, 1) y (3, 6). Los puntos correspondientes sobre la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} se trazan en el mismo plano de coordenadas en la figura 9. Si la página se dobla a lo largo de la recta $y = x$ que corta los cuadrantes I y III (como se indica con la línea discontinua de la figura), entonces las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Las dos gráficas son *reflexiones* una de la otra a través de la recta $y = x$, o son *simétricas* con respecto a esta recta. Esto es típico de la gráfica de toda función f que tiene una función inversa f^{-1} (vea el ejercicio 56).

EJEMPLO 6 **Relación entre las gráficas de f y f^{-1}**

Sea $f(x) = x^3$. Encuentre la función inversa f^{-1} de f, y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano de coordenadas.

FIGURA 10



SOLUCIÓN La gráfica de f se traza en la figura 10. Note que f es una función impar y, por lo tanto, la gráfica es simétrica respecto al origen.

Paso 1 Como f es creciente en todo su dominio, **R**, es biunívoca y, por lo tanto, tiene una función inversa f^{-1}.

Paso 2 Consideramos la ecuación

$$y = x^3$$

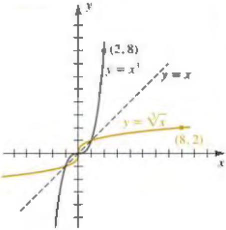
y para despejar x obtenemos la raíz cúbica de cada lado, obteniendo

$$x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}$$

Sea ahora

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

FIGURA 11



Paso 3 Verificamos las condiciones a) y b):

a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ para toda x en $\mathbb{R}$

b) $f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ para toda x en $\mathbb{R}$

La gráfica de f^{-1} (esto es, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$) puede obtenerse por reflexión de la gráfica de la figura 10 a través de la recta $y = x$, como vemos en la figura 11. Tres puntos sobre la gráfica de f^{-1} son (0, 0), (1, 1) y (8, 2). ■

El siguiente ejemplo muestra cómo graficar la inversa de una función usando una calculadora graficadora.

EJEMPLO 7 **Cómo graficar la inversa de una función**

a) Trace la gráfica de la función inversa de

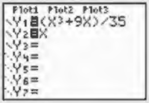
$$f(x) = \tfrac{1}{35}(x^3 + 9x)$$

b) Aproxime las soluciones de la ecuación $f(x) = f^{-1}(x)$

SOLUCIÓN

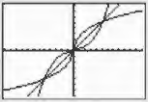
a) Asignaremos $(x^3 + 9x)/35$ a Y_1, asignamos x a Y_2, ajustamos la pantalla a $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$ y graficamos las funciones.

Realice las asignaciones Y y grafique las funciones.



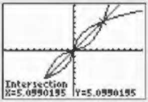
Grafique la inversa.

Como f es creciente en todo su dominio, es biunívoca y tiene una inversa. Si f no fuera biunívoca e hiciéramos el siguiente tecleo, entonces la calculadora trazaría la relación inversa, pero no sería una función.



(continúa)

b) $f(x) = f^{-1}(x)$ en la recta $y = x$. Usando la función de intersección con Y_1 y Y_2 da la solución $x \approx 5.1$. Por la simetría de las gráficas, tenemos las soluciones $x = 0$ y $x \approx \pm 5.1$.



4.1 Ejercicios

Ejer. 1-2: Si es posible, encuentre

a) $f^{-1}(5)$ **b)** $g^{-1}(6)$

1

x	2	4	6
$f(x)$	3	5	9

x	1	3	5
$g(x)$	6	2	6

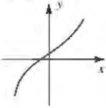
2

t	0	3	5
$f(t)$	2	5	6

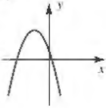
t	1	2	4
$g(t)$	3	6	6

Ejer. 3-4: Determine si la gráfica corresponde a una función biunívoca.

3 a)

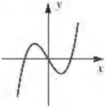


b)

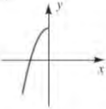


c)

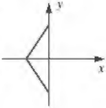
4 a)



b)



c)



Ejer. 5-16: Determine si la función f es biunívoca.

5 $f(x) = 2x + 5$

6 $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

7 $f(x) = x^2 - 5$

8 $f(x) = x^2 + 3$

9 $f(x) = \sqrt{x}$

10 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

11 $f(x) = |x|$

12 $f(x) = 3$

13 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

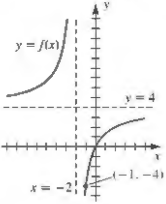
14 $f(x) = 2x^3 - 4$

15 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

16 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 17-18 Use la gráfica de f junto con la relación dominio-rango de f y f^{-1} para completar los enunciados. (*Sugerencia*: si x se aproxima a 2 en f, entonces y se aproxima a 2 en f^{-1}.)

17



a) Cuando $x \to -4$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

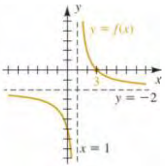
b) Cuando $x \to \infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to -\infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to 4^+$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

e) Cuando $x \to 4^-$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

18



a) Cuando $x \to 0$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

b) Cuando $x \to \infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to -\infty$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to -2^{+}$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

e) Cuando $x \to -2^{-}$, $f^{-1}(x) \to$ ____.

Ejer. 19-22: Use el teorema sobre funciones inversas para demostrar que f y g son funciones inversas una de otra, y trace las gráficas de f y g en el mismo plano de coordenadas.

19 $f(x) = 3x - 2$; $\quad g(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

20 $f(x) = x^2 + 5, x \leq 0$; $\quad g(x) = -\sqrt{x - 5}, x \geq 5$

21 $f(x) = -x^2 + 3, x \geq 0$; $\quad g(x) = \sqrt{3 - x}, x \leq 3$

22 $f(x) = x^3 - 4$; $\quad g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$

Ejer. 23-26: Determine el dominio y rango de f^{-1} para la función dada sin encontrar en realidad f^{-1}. *Sugerencia*: primero encuentre el dominio y rango de f.

23 $f(x) = -\dfrac{2}{x - 1}$

24 $f(x) = \dfrac{5}{x + 3}$

25 $f(x) = \dfrac{4x + 5}{3x - 8}$

26 $f(x) = \dfrac{2x - 7}{9x + 1}$

Ejer. 27-48: Encuentre la función inversa de f.

27 $f(x) = 3x + 5$

28 $f(x) = 7 - 2x$

29 $f(x) = \dfrac{3}{2x - 5}$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

31 $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 5}$

32 $f(x) = \dfrac{4x}{x - 2}$

33 $f(x) = 2 - 3x^2, x \leq 0$

34 $f(x) = 5x^2 + 2, x \geq 0$

35 $f(x) = 2x^3 - 5$

36 $f(x) = -x^3 + 2$

37 $f(x) = \sqrt{3 - x}$

38 $f(x) = \sqrt{x + 4}$

39 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

40 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

41 $f(x) = (x^3 - 6)^3$

42 $f(x) = (x^3 + 1)^5$

43 $f(x) = x$

44 $f(x) = -x$

45 $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}, -3 \leq x \leq 0$

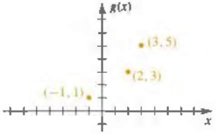
46 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$

47 $f(x) = x^2 - 6x, x \geq 3$

48 $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \leq 2$

Ejer. 49-50: Sea $h(x) = 4 - x$. Use h, la tabla y la gráfica para evaluar la expresión.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	−1	0	1	2	3



49 a) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ $\quad$ b) $(g^{-1} \circ h)(3)$

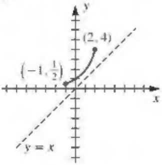
c) $(h^{-1} \circ f \circ g^{-1})(3)$

50 a) $(g \circ f^{-1})(-1)$ $\quad$ b) $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$

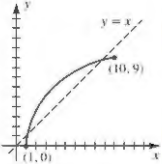
c) $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(6)$

Ejer. 51-54: Se presenta la gráfica de una función biunívoca f. a) Utilice la propiedad de reflexión para trazar la gráfica de f^{-1}. b) Encuentre el dominio D y el rango R de la función f. c) Encuentre el dominio D_1 y el rango R_1 de la función inversa f^{-1}.

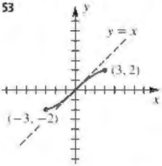
51



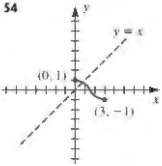
52



53



54



55 **a)** Demuestre que la función definida por $f(x) = ax + b$ (una función lineal) para $a \neq 0$ tiene una función inversa y encuentre $f^{-1}(x)$.

b) ¿Una función constante tiene inversa? Explique.

56 Demuestre que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f a través de la recta $y = x$ verificando las siguientes condiciones:

1) Si $P(a, b)$ está sobre la gráfica de f, entonces $Q(b, a)$ está sobre la gráfica de f^{-1}.

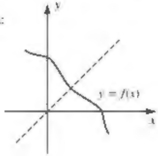
2) El punto medio del segmento de recta PQ está sobre la recta $y = x$.

3) La recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$.

57 Verifique que $f(x) = f^{-1}(x)$ si

a) $f(x) = -x + b$ **b)** $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$ para $c \neq 0$

c) $f(x)$ tiene la siguiente gráfica:



58 Sea n cualquier entero positivo. Encuentre la función inversa de f si

a) $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$

b) $f(x) = x^{m/n}$ para $x \geq 0$ y m cualquier entero positivo

Ejer. 59–60: Use la gráfica de f para determinar si f es biunívoca.

59 $f(x) = 0.4x^5 - 0.4x^4 + 1.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x - 0.8$

60 $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^{2/3} + 4}$

Ejer. 61-62: Grafique f sobre el intervalo dado. a) Estime el intervalo más grande $[a, b]$ con $a < 0 < b$ sobre el cual f es biunívoca. b) Si g es la función con dominio $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, estime el dominio y rango de g^{-1}.

61 $f(x) = 2.1x^3 - 2.98x^2 - 2.11x + 3$; $[-1, 2]$

62 $f(x) = 0.05x^4 - 0.24x^3 - 0.15x^2 + 1.18x + 0.24$; $[-2, 2]$

Ejer. 63-64: Grafique f en la pantalla dada. Use la gráfica de f para predecir la forma de la gráfica de f^{-1}. Verifique su predicción al graficar f^{-1} y la recta $y = x$ en la misma pantalla.

63 $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

64 $f(x) = 2(x - 2)^2 + 3, x \geq 2$; $[0, 12]$ por $[0, 8]$

65 **Necesidades de ventilación** La ventilación es una forma eficaz de mejorar la calidad del aire en interiores. En restaurantes donde no se permite fumar, las necesidades de circulación de aire (en ft^3/min) están dadas por la función $V(x) = 35x$, donde x es el número de personas en el área de comedor.

a) Determine las necesidades de ventilación para 23 personas.

b) Encuentre $V^{-1}(x)$. Explique el significado de V^{-1}.

c) Use V^{-1} para determinar el número máximo de personas que deben estar en un restaurante que tenga capacidad de ventilación de 2350 ft^3/min.

66 **Estaciones de radio** La tabla siguiente es una lista de números totales de radioemisoras en Estados Unidos para ciertos años.

Año	Número
1950	2773
1960	4133
1970	6760
1980	8566
1990	10,770
2000	12,717

a) Grafique los datos.

b) Determine una función lineal $f(x) = ax + b$ que modele estos datos, donde x es el año. Grafique f y los datos en los mismos ejes de coordenadas.

c) Encuentre $f^{-1}(x)$. Explique el significado de f^{-1}.

d) Use f^{-1} para predecir el año en el que hubo 11,987 radioemisoras. Compárelo con el verdadero valor, que es 1995.

4.2 Funciones exponenciales

Anteriormente consideramos funciones que tenian términos de la forma

$$\text{base variable}^{\text{potencia constante}},$$

como x^2, $0.2x^{1.3}$ y $8x^{2/3}$. Ahora centraremos la atención en funciones que tienen términos de la forma

$$\text{base constante}^{\text{potencia variable}},$$

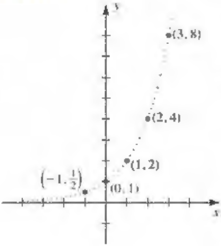
como 2^x, $(1.04)^{4x}$ y 3^{-x}. Comencemos por considerar la función f definida por

$$f(x) = 2^x,$$

donde x está restringida a números *racionales*. (Recuerde que si $x = m/n$ para enteros m y n con $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m$. Las coordenadas de varios puntos sobre la gráfica de $y = 2^x$ se dan en la siguiente tabla.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$y = 2x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

FIGURA 1



Otros valores de y para x racional, tales como $2^{1/3}$, $2^{-0.97}$ y $2^{5.143}$; se pueden aproximar con una calculadora. Podemos demostrar algebraicamente que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Así, f es una función creciente y su gráfica sube. Localizar puntos lleva al trazo de la figura 1, donde los puntos pequeños indican que sólo los puntos con coordenadas x *racionales* están sobre la gráfica. Hay un *vacío* en la gráfica siempre que la coordenada x de un punto es irracional.

Para extender el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente *irracional* x. Para ilustrar, si deseamos definir 2^π, podríamos utilizar el decimal no periódico 3.1415926… para representar π y considerar las siguientes potencias racionales de 2:

$$2^3,\ 2^{3.1},\ 2^{3.14},\ 2^{3.141},\ 2^{3.1415},\ 2^{3.14159},\ldots$$

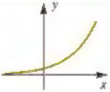
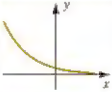
FIGURA 2

Utilizando cálculo, se puede demostrar que cada potencia sucesiva se acerca a un único número real, denotado por 2^π. Así,

$$2^x \to 2^\pi \text{ cuando } x \to \pi, \text{ con } x \text{ racional}.$$

La misma técnica se puede utilizar para cualquier otra potencia irracional de 2. Para trazar la gráfica de $y = 2^x$ con x *real*, sustituimos los vacíos de la gráfica de la figura 1 con puntos, y obtenemos la gráfica de la figura 2. La función f definida por $f(x) = 2^x$ para todo número real x se denomina **función exponencial** *con base* 2.

Consideremos a continuación *cualquier* base a, donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en la exposición precedente, a cada número real x le corresponde exactamente un número positivo a^x tal que las leyes de los exponentes son verdaderas. Así, como en la siguiente tabla, podemos definir una función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en $\mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Las gráficas de la tabla muestran que si $a > 1$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$, y si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en $\mathbb{R}$. (Estos hechos se pueden demostrar usando cálculo.) Las gráficas simplemente indican el aspecto *general*; la forma *exacta* depende del valor de a. Note, sin embargo, que como $a^0 = 1$, el punto de intersección con el eje y es 1 para toda a.

Note que si $a > 1$, entonces $a = 1 + d$ ($d > 0$) y la base a en $y = a^x$ puede considerarse como que representa una multiplicación por más de 100% a medida que x aumenta de 1, de modo que la función es creciente. Por ejemplo, si $a = 1.15$, entonces $y = (1.15)^x$ puede considerarse como una función de crecimiento de 15% anual. Más adelante se presentan más detalles sobre este concepto.

Si $a > 1$, entonces cuando x *disminuye* pasando por valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje x (vea la tercera columna de la tabla). Así, el eje x es una *asíntota horizontal*. Cuando x aumenta pasando por valores positivos, la gráfica sube rápidamente. Este tipo de variación es característica de la **ley exponencial de crecimiento**, y f a veces recibe el nombre de **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, entonces, cuando x *aumenta*, la gráfica de f se aproxima al eje x en forma asintótica (vea la última columna de la tabla). Este tipo de variación se conoce como **decrecimiento exponencial**.

Al considerar a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Note que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x como, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ no está definida. Por último, si $a = 1$, entonces $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $y = a^x$ es una recta horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio. Por lo tanto, f es biunívoca por el teorema de la página 251. Combinando este resultado con la definición de una función biunívoca (vea la página 250) obtenemos los incisos 1) y 2) del siguiente teorema.

Teorema: Las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \text{ para } 0 < a < 1 \text{ o } a > 1$$

es biunívoca. Por lo tanto, las siguientes condiciones equivalentes quedan satisfechas para números reales x_1 y x_2.

1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando usemos este teorema como justificación de un paso en la solución de un ejemplo, indicaremos que *las funciones exponenciales son biunívocas*.

EJEMPLOS **Las funciones exponenciales son biunívocas**

- Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$, o $x = 5$.

En el siguiente ejemplo resolveremos una *ecuación exponencial* sencilla, es decir, una en la que la variable aparece en un exponente.

EJEMPLO 1 **Resolución de una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
3^{5x-8} &= 9^{x+2} && \text{dado} \\
3^{5x-8} &= (3^2)^{x+2} && \text{expresamos ambos lados con la misma base} \\
3^{5x-8} &= 3^{2x+4} && \text{ley de exponentes} \\
5x - 8 &= 2x + 4 && \text{las funciones exponenciales son biunívocas} \\
3x &= 12 && \text{restamos } 2x \text{ y sumamos } 8 \\
x &= 4 && \text{dividimos entre } 3
\end{aligned}
$$

Tenga en cuenta que la solución en el ejemplo 1 dependió del hecho de que la base 9 podía escribirse como 3 a alguna potencia. Por ahora sólo consideraremos ecuaciones exponenciales de este tipo, pero resolveremos ecuaciones exponenciales más generales más adelante en el capítulo.

En los siguientes dos ejemplos trazamos las gráficas de varias funciones exponenciales.

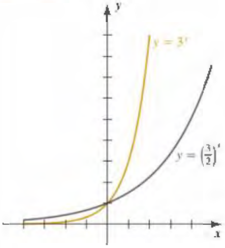
EJEMPLO 2 **Trazo de gráficas de funciones exponenciales**

Si $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$, trace las gráficas de f y g en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica sube cuando aumenta x. La siguiente tabla muestra coordenadas para varios puntos sobre las gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

FIGURA 3



Localizar puntos y estar familiarizado con la gráfica general de $y = a^x$ lleva a las gráficas de la figura 3.

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x y $b^x < a^x$ para valores negativos de x. En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ en la figura 2 se encuentra entre las gráficas de f y g en la figura 3.

FIGURA 4

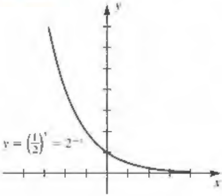


FIGURA 5

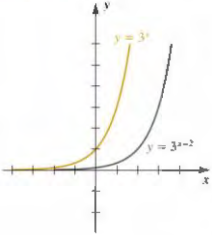
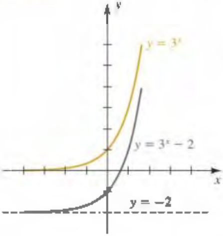


FIGURA 6



EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una función exponencial**

Trace la gráfica de la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

SOLUCIÓN Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *cae* cuando aumenta x. Las coordenadas de algunos puntos en la gráfica se indican en la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La gráfica se traza en la figura 4. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$, la gráfica es igual que la gráfica de la ecuación $y = 2^{-x}$. Note que la gráfica es una reflexión a través del eje y de la gráfica de $y = 2^x$ en la figura 2. ■

Ecuaciones de la forma $y = a^u$, donde u es alguna expresión en x, se presentan en aplicaciones. Los siguientes dos ejemplos ilustran ecuaciones de esta forma.

EJEMPLO 4 **Desplazamiento de gráficas de funciones exponenciales**

Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3^{x-2}$ **b)** $y = 3^x - 2$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $y = 3^x$, trazada en la figura 3, se vuelve a trazar en la figura 5. Por el análisis de desplazamientos horizontales en la sección 2.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^{x-2}$ al desplazar la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha, como se muestra en la figura 5.

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener al localizar varios puntos y usarlos como guía para trazar una curva tipo exponencial.

b) De la explicación de desplazamientos verticales de la sección 2.5, podemos obtener la gráfica de $y = 3^x - 2$ mediante el desplazamiento de la gráfica de $y = 3^x$ dos unidades hacia abajo, como se muestra en la figura 6. Note que el punto de intersección con el eje y es -1 y la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal para la gráfica. ■

EJEMPLO 5 **Determinar una ecuación de una función exponencial que satisfaga condiciones prescritas**

Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene asíntota horizontal $y = -2$, punto de intersección 16 con el eje y y punto de intersección 2 con el eje x.

SOLUCIÓN La asíntota horizontal de la gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x}$ es el eje x; es decir, $y = 0$. Como la asíntota horizontal deseada es $y = -2$, debemos tener $c = -2$, de modo que $f(x) = ba^{-x} - 2$.

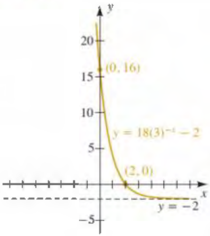
Como el punto de intersección con el eje y es 16, $f(0)$ debe ser igual a 16. Pero $f(0) = ba^{-0} - 2 = b - 2$, de modo que $b - 2 = 16$ y $b = 18$. Por lo tanto, $f(x) = 18a^{-x} - 2$.

Por último, encontramos el valor de a:

$f(x) = 18a^{-x} - 2$ forma dada de f

$0 = 18(a)^{-2} - 2$ $f(2) = 0$ porque 2 es el punto de intersección con el eje x

FIGURA 7



$$2 = 18 \cdot \frac{1}{a^2} \qquad \text{sumamos 2; definición de exponente negativo}$$
$$a^2 = 9 \qquad \text{multiplicamos por } a^2/2$$
$$a = \pm 3 \qquad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$

Como a debe ser positiva, tenemos

$$f(x) = 18(3)^{-x} - 2$$

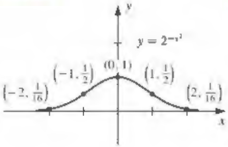
La figura 7 muestra una gráfica de f que satisface todas las condiciones del enunciado del problema. Note que $f(x)$ podría escribirse en la forma equivalente

$$f(x) = 18\left(\tfrac{1}{3}\right)^x - 2$$

■

La gráfica en forma de campana de la función del siguiente ejemplo es semejante a una *curva de probabilidad normal* empleada en estudios de estadística.

FIGURA 8



EJEMPLO 6 **Trazo de una gráfica en forma de campana**

Si $f(x) = 2^{-x^2}$, trace la gráfica de f.

SOLUCIÓN Si escribimos de nuevo $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}},$$

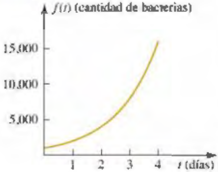
vemos que cuando x aumenta con valores positivos, $f(x)$ disminuye rápidamente; en consecuencia, la gráfica se aproxima al eje x en forma asintótica. Como x^2 es mínima cuando $x = 0$, el máximo valor de f es $f(0) = 1$. Como f es una función par, la gráfica es simétrica respecto al eje y. Algunos puntos en la gráfica son $(0,1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(2, \frac{1}{16})$. Localizamos puntos y usamos simetría para obtener el trazo de la figura 8.

APLICACIÓN **Crecimiento de bacterias**

Las funciones exponenciales pueden usarse para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. Como ilustración, suponga que se observa experimentalmente que el número de bacterias en un cultivo se duplica al día. Si 1,000 bacterias están presentes al inicio, entonces obtenemos la tabla siguiente, donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es la cantidad de bacterias en el tiempo t.

t (tiempo en días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (cantidad de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16,000

FIGURA 9



Parece que $f(t) = (1000)2^t$. Con esta fórmula podemos predecir el número de bacterias presentes en cualquier tiempo t. Por ejemplo, en $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

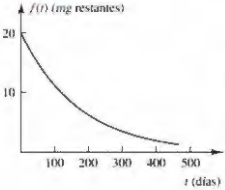
$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828$$

La gráfica de f se ve en la figura 9.

APLICACIÓN **Desintegración radiactiva**

Ciertas cantidades físicas *decrecen* exponencialmente. En tales casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decrecimiento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva o isótopo. La **vida media** de un isótopo es el tiempo que tarda la mitad de la cantidad original de una muestra determinada en desintegrarse. La vida media es la característica principal empleada para distinguir una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una vida media de aproximadamente 140 días; esto es, dada cualquier cantidad, la mitad se desintegrará en 140 días. Si inicialmente 20 miligramos de ^{210}Po están presentes, entonces la tabla siguiente indica la cantidad restante después de varios intervalos.

FIGURA 10



t (tiempo en días)	0	140	280	420	560
$f(t)$ (mg restantes)	20	10	5	2.5	1.25

La gráfica de la figura 10 ilustra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas tienen vida media mucho más largas. En particular, un producto derivado de los reactores nucleares es el isótopo de plutonio radiactivo ^{239}Pu, que tiene una vida media de alrededor de 24,000 años. Es por esta razón que la eliminación de desechos radiactivos es un problema muy grande en la sociedad moderna.

APLICACIÓN Interés compuesto

El *interés compuesto* es una buena ilustración del crecimiento exponencial. Si una cantidad de dinero P, el *principal*, se invierte a una tasa de interés r *simple*, entonces el interés al final de un periodo es el producto Pr cuando r se expresa como decimal. Por ejemplo, si $P = \$1000$ y la tasa de interés es de 9% anual, así $r = 0.09$, y el interés al final de un año es de \$1000(0.09), es decir, \$90.

Si el interés se reinvierte con el principal al final del periodo de interés, entonces el nuevo capital es

$$P + Pr \text{ o bien, lo que es equivalente, } P(1 + r)$$

Note que para determinar el nuevo capital, podemos multiplicar el principal por $(1 + r)$. En el ejemplo precedente, el nuevo capital es de \$1,000(1.09), o sea, \$1,090.

Después de que haya transcurrido otro periodo de interés, el nuevo principal puede determinarse si multiplicamos $P(1 + r)$ por $(1 + r)$. Así, el principal después de dos periodos de interés es $P(1 + r)^2$. Si continuamos reinvirtiendo, el principal después de tres periodos es $P(1 + r)^3$; después de cuatro es $P(1 + r)^4$; y, en general, la cantidad A acumulada después de k periodos de interés es

$$A = P(1 + r)^k$$

El interés acumulado por medio de esta fórmula es **interés compuesto**. Note que A se expresa en términos de una función exponencial con base $1 + r$. El periodo de interés puede medirse en años, meses, semanas, días o cualquier otra unidad apropiada de tiempo. Cuando aplique la fórmula para A, recuerde que *r es la tasa de interés por periodo de interés expresado como decimal*. Por ejemplo, si la tasa se expresa como *6% anual compuesto mensualmente*, entonces la tasa mensual es de $\frac{6}{12}\%$, o bien, lo que es equivalente, 0.5%. Entonces, $r = 0.005$ y k es el número de meses. Si se invierten \$100 a esta tasa, entonces la fórmula de A es

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k$$

En general, tenemos la siguiente fórmula.

Fórmula del interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

donde P = principal

r = tasa de interés anual expresada como decimal

n = número de periodos de interés por año

t = número de años que se invierte P

A = cantidad después de t años

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la fórmula del interés compuesto.

EJEMPLO 7 **Uso de la fórmula del interés compuesto**

Suponga que se invierten $1,000 a una tasa de interés de 9% compuesto mensualmente. Determine la nueva cantidad acumulada después de 5, 10 y 15 años. Ilustre gráficamente el crecimiento de la inversión.

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula de interés compuesto con $r = 9\% = 0.09$, $n = 12$ y $P = \$1,000$, encontramos que la cantidad después de t años es

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}$$

Sustituyendo $t = 5$, 10 y 15 y usando calculadora, obtenemos la siguiente tabla.

Observe que, al trabajar con valores monetarios, usamos = en lugar de ≈ y redondeamos a dos posiciones decimales.

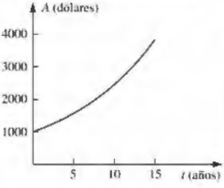
Número de años	Cantidad
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \$2451.36$
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \$3838.04$

La naturaleza exponencial del incremento es indicada por el hecho de que, durante los primeros cinco años, el crecimiento de la inversión es de $565.68; durante el segundo periodo de cinco años, el crecimiento es de $885.68; y durante el último periodo de cinco años, es $1386.68.

La gráfica de la figura 11 ilustra el crecimiento de $1,000 invertidos en un periodo de 15 años. ■

FIGURA 11

Interés compuesto: $A = 1000(1.0075)^{12t}$



EJEMPLO 8 **Determinación de un modelo exponencial**

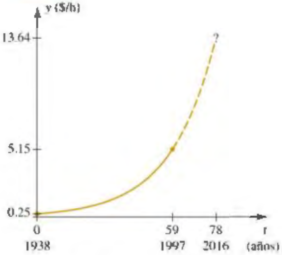
En 1938 se promulgó una ley federal que establecía un salario mínimo, y éste fue de $0.25 por hora; en 1997 el salario había aumentado a $5.15 por hora. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el salario mínimo federal para 1938-1997.

SOLUCIÓN

$y = ab^t$	dado
$0.25 = ab^0$	sea $t = 0$ para 1938
$0.25 = a$	$b^0 = 1$
$y = 0.25b^t$	sustitya a con 0.25
$5.15 = 0.25b^{59}$	$t = 1997 - 1938 = 59$
$b^{59} = \dfrac{5.15}{0.25} = 20.6$	dividimos entre 0.25
$b = \sqrt[59]{20.6}$	obtenemos la raíz 59
$b \approx 1.0526$	aproximamos

Obtenemos el modelo $y = 0.25(1.0526)^t$, que indica que el salario mínimo federal aumentó alrededor de 5.26% por año de 1938 a 1997. Una gráfica del modelo se muestra en la figura 12. ¿Piensa usted que este modelo se cumplirá hasta el año 2016?

FIGURA 12



■

Concluimos esta sección con un ejemplo que requiere usar una calculadora graficadora.

EJEMPLO 9 **Estimación de cantidades de un medicamento en el torrente sanguíneo**

Si un adulto ingiere una pastilla de 100 miligramos de cierto medicamento, la rapidez R a la cual se pronostica que el medicamento entrará en el torrente t minutos después será

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min}$$

Podemos demostrar mediante cálculo que la cantidad A del medicamento en el torrente sanguíneo en el tiempo t se puede aproximar con

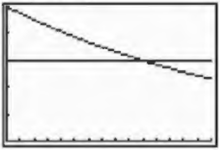
$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg}$$

a) Estime el tiempo que tardan 50 miligramos del medicamento en entrar en el torrente sanguíneo.

b) Estime el número de miligramos del medicamento presentes en el torrente sanguíneo cuando entra a razón de 3 mg/min.

FIGURA 13
[0, 100, 10] por [0, 100, 10]

FIGURA 14
[0, 15] por [0, 5]



SOLUCIÓN

a) Deseamos determinar t cuando A es igual a 50. Como el valor de A no puede exceder de 97.4786, determinamos que la pantalla sea de [0, 100, 10] por [0, 100, 10].

A continuación asignamos $97.4786[1 - (0.95)^t]$ a Y_1, asignamos 50 a Y_2 y graficamos Y_1 y Y_2, obteniendo una pantalla semejante a la de la figura 13 (note que $x = t$). Usando la función de intersección, estimamos que $A = 50$ mg cuando $x \approx 14$ minutos.

b) Deseamos determinar t cuando R es igual a 3. Primero asignemos $5(0.95)^t$ a Y_3 y 3 a Y_4. Como el valor máximo de Y_3 es 5 (en $t = 0$), usamos una pantalla de dimensiones [0, 15] por [0, 5] y obtenemos una pantalla semejante a la de la figura 14. Usando de nuevo la función de intersección, encontramos que $y = 3$ cuando $x \approx 9.96$. Entonces, después de casi 10 minutos, el medicamento estará entrando en el torrente sanguíneo a razón de 3 mg/minuto. (Note que la velocidad inicial, en $t = 0$, es de 5 mg/min.) Al encontrar el valor de Y_1 en $x = 10$, vemos que después de 10 minutos hay casi 39 miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo.

4.2 Ejercicios

Ejer. 1–10: Resuelva la ecuación.

1 $7^{x+6} = 7^{3x-4}$

2 $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

3 $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

4 $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

5 $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$

6 $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$

7 $25^{x-3} = 125^{4-x}$

8 $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

9 $4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 8 \cdot (2^x)^2$

10 $9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$

11 Complete los enunciados para $f(x) = a^x + c$ con $a > 1$.

a) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

b) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

12 Complete los enunciados para $f(x) = a^{-x} + c$ con $a > 1$.

a) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____

b) Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to$ ____.

13 Trace la gráfica de f si $a = 2$.

a) $f(x) = a^x$

b) $f(x) = -a^x$

c) $f(x) = 3a^x$

d) $f(x) = a^{x+3}$

e) $f(x) = a^x + 3$

f) $f(x) = a^{x-3}$

g) $f(x) = a^x - 3$

h) $f(x) = a^{-x}$

i) $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

j) $f(x) = a^{3-x}$

14 Trabaje el ejercicio 13 si $a = \frac{1}{2}$.

Ejer. 15–28: Trace la gráfica de f.

15 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

16 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

17 $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

18 $f(x) = 8(4)^{-x} - 2$

19 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

20 $f(x) = -3^{-x} + 9$

21 $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 8$

22 $f(x) = -3^x + 9$

23 $f(x) = 2^{|x|}$

24 $f(x) = 2^{-|x|}$

25 $f(x) = 3^{1-x^2}$

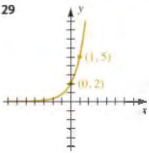
26 $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$

27 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$

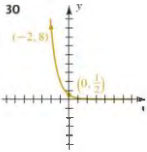
28 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Ejer. 29-32: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ o $f(x) = ba^x + c$ que tiene la gráfica dada.

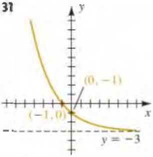
29



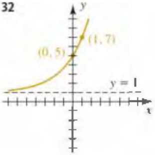
30



31



32



Ejer. 33-34: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ que tiene el punto dado de intersección con el eje y y pasa por el punto P.

33 Punto de intersección con el eje y: 8; $P(3, 1)$

34 Punto de intersección con el eje y: 5; $P(2, 5/16)$

Ejer. 35-36: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene la asíntota horizontal y el punto de intersección con el eje y dados, y que pasa por el punto P.

35 $y = 32$; punto de intersección con el eje y: 212; $P(2, 112)$

36 $y = 72$; punto de intersección con el eje y: 425; $P(1, 248.5)$

37 **Población de renos** Cien renos, cada uno de ellos de un año de edad, se introducen en una reserva de caza. Se pronostica que el número $N(t)$ de animales vivos después de t años será $N(t) = 100(0.9)^t$.

a) Estime el número de animales vivos después de cinco años.

b) ¿Qué porcentaje de la manada muere cada año?

38 **Dosis de medicamento** Un medicamento es eliminado del cuerpo a través de la orina. Suponga que para una dosis inicial de 10 miligramos, la cantidad $A(t)$ en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.

a) Estime la cantidad del medicamento en el cuerpo, ocho horas después de la dosis inicial.

b) ¿Qué porcentaje del medicamento remanente en el cuerpo es eliminado cada hora?

39 **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo aumentó de 600 a 1800 entre las 7:00 y las 9:00 A.M. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 A.M. está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

a) Estime el número de bacterias en el cultivo a las 8:00 A.M., 10:00 A.M. y 11:00 A.M.

b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

40 **Ley de Newton del enfriamiento** Según la ley de Newton del enfriamiento, la rapidez a con la que un cuerpo se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. La cara de una plancha doméstica se enfría de 125° a 100° en 30 minutos en una habitación que permanece a una temperatura constante de 75°. Con base en el cálculo integral, la temperatura $f(t)$ de la cara después de t horas de enfriamiento está dada por $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

a) Suponiendo que $t = 0$ corresponde a la 1:00 P.M., aproxime al décimo de grado más cercano, la temperatura de la cara a las 2:00 P.M., 3:30 P.M. y 4:00 P.M.

b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

41 **Desintegración radiactiva** El isótopo de bismuto radiactivo ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si hay 100 miligramos de ^{210}Bi presentes en el tiempo $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ restante después de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

a) ¿Cuánto ^{210}Bi queda después de 5, 10 y 12.5 días?

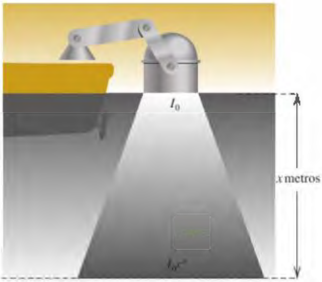
b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 30$.

42 **Penetración de la luz en el océano** Un problema importante en oceanografía es determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert establece que la función exponencial dada por $I(x) = I_0 c^x$ es un modelo para este fenómeno (vea la figura). Para cierto lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de luz (en calorías/cm²/s) que llega a una profundidad de x metros.

a) Calcule la cantidad de luz a una profundidad de dos metros.

b) Trace la gráfica de I para $0 \leq x \leq 5$

EJERCICIO 42



43 **Desintegración del radio** La vida media del radio es de 1,600 años. Si la cantidad inicial es de q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Encuentre k.

44 Disolución de sal en agua Si 10 gramos de sal se agregan a cierta cantidad de agua, entonces la cantidad $q(t)$ que no se disuelve después de t minutos está dada por $q(t) = 10(4/5)^t$. Trace una gráfica que muestre el valor de $q(t)$ en cualquier tiempo de $t = 0$ a $t = 10$.

45 Interés compuesto Si se invierten $1,000 a una tasa de 7% anual compuesto mensualmente, encuentre el capital después de

a) 1 mes **b)** 6 meses

c) 1 año **d)** 20 años

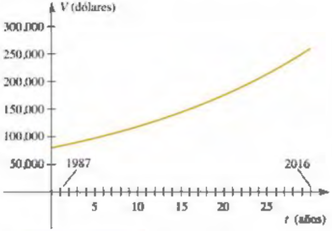
46 Interés compuesto Si un fondo de ahorro paga interés a razón de 3% anual compuesto semestralmente, ¿cuánto dinero invertido ahora llegará a $5,000 después de un año?

47 Valor comercial de un automóvil Si cierta marca de automóvil se compra en C dólares, su valor comercial $V(t)$ al final de t años está dado por $V(t) = 0.78C(0.85)^{t-1}$. Si el costo original es de $25,000, calcule, al dólar más cercano, el valor después de

a) 1 año **b)** 4 años **c)** 7 años

48 Plusvalía de un inmueble Si el valor de un inmueble aumenta a razón de 4% anual, después de t años el valor V de una casa comprada en P dólares es $V = P(1.04)^t$. En la figura se ilustra una gráfica del valor de una casa adquirida en $80,000 en 1986. Aproxime el valor de la casa a los 1,000 dólares más cercanos, en el año 2016.

EJERCICIO 48



49 Isla de Manhattan La isla de Manhattan fue vendida en $24 en 1626. ¿A cuánto habría crecido esta cantidad en 2012 si se hubiera invertido a 6% anual compuesto trimestralmente?

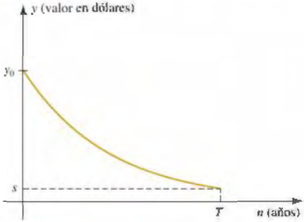
50 Interés de una tarjeta de crédito Cierta tienda departamental exige que sus clientes de tarjeta de crédito paguen interés por cuentas no pagadas a razón de 24% anual compuesto mensualmente. Si un cliente compra a crédito un televisor en $500 y no paga durante un año, ¿cuánto adeudará al finalizar del mismo?

51 Depreciación El método de saldo decreciente es un método de contabilidad en el que la cantidad de depreciación tomada cada año es un porcentaje fijo del valor presente del bien. Si y es el valor del bien en un año dado, la depreciación tomada es ay para alguna tasa de depreciación a con $0 < a < 1$, y el nuevo valor es $(1 - a)y$.

a) Si el valor inicial del artículo es y_0, demuestre que el valor después de n años de depreciación es $(1 - a)^n y_0$.

b) Al final de T años, el bien tiene un valor de rescate de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de rescate (vea la figura). Demuestre que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.

EJERCICIO 51



52 Datación de un lenguaje La glotocronología es un método de datar la antigüedad de un lenguaje en una etapa particular, con base en la teoría que en un periodo largo ocurren cambios lingüísticos a un ritmo relativamente constante. Suponga que un lenguaje tenía originalmente N_0 palabras básicas y que en el tiempo t, medido en milenios (1 milenio = 1,000 años), el número $N(t)$ de palabras básicas que restan en uso común está dado por $N(t) = N_0(0.805)^t$.

a) Aproxime el porcentaje de palabras básicas perdidas cada 100 años.

b) Si $N_0 = 200$, trace la gráfica de N para $0 \le t \le 5$.

Ejer. 53–56: Algunas instituciones de crédito calculan el pago mensual M sobre un préstamo de L dólares a una tasa de interés r (expresada como decimal) mediante la fórmula

$$M = \frac{Lrk}{12(k - 1)},$$

donde $k = [1 + (r/12)]^{12t}$ y t es el número de años que el préstamo está en efecto.

53 Crédito hipotecario

a) Determine el pago mensual sobre un crédito hipotecario de $250,000 a 30 años, si la tasa de interés es de 8%.

b) Calcule el interés total pagado sobre el crédito del inciso a).

54 **Crédito hipotecario** Calcule el crédito hipotecario máximo a 25 años que puede obtenerse a una tasa de interés de 7%, si el pago mensual debe ser $1,500.

55 **Préstamo para compra de automóvil** Un distribuidor de automóviles ofrece a sus clientes préstamos sin enganche y a tres años a una tasa de 10%. Si un cliente puede pagar $500 por mes, calcule el precio del automóvil más costoso que puede comprarse.

56 **Crédito comercial** El propietario de una pequeña empresa decide financiar una nueva computadora y solicita un préstamo de $3,000 a dos años a una tasa de interés de 7.5%.

a) Calcule el pago mensual.

b) Obtenga el interés total pagado sobre el préstamo.

Ejer. 57-58: Aproxime la función al valor de x a cuatro posiciones decimales.

57 **a)** $f(x) = 13^{\sqrt{x+1.1}}$, $x = 3$

b) $h(x) = (2^x + 2^{-x})^{2x}$, $x = 1.06$

58 **a)** $f(x) = 2^{\sqrt{1-x}}$, $x = 0.5$

b) $h(x) = \dfrac{3^{-x} + 5}{3^x - 16}$, $x = 1.4$

Ejer. 59-60: Trace la gráfica de la ecuación. a) Estime y si $x = 40$. b) Estime x si $y = 2$.

59 $y = (1.085)^x$ **60** $y = (1.0525)^x$

Ejer. 61-62: Utilice una gráfica para estimar las raíces de la ecuación.

61 $1.4x^2 - 2.2^x = 1$

62 $1.21^{5x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$

Ejer. 63-64: Grafique f en el intervalo dado. a) Determine si f es biunívoca. b) Estime los ceros de f.

63 $f(x) = \dfrac{3.1^x - 2.5^{-x}}{2.7^x + 4.5^{-x}}$; $[-3, 3]$

64 $f(x) = \pi^{0.6x} - 1.3^{(x^{1.2})}$; $[-4, 4]$

(*Sugerencia*: Cambie $x^{1.2}$ a una forma equivalente que esté definida para $x < 0$.)

Ejer. 65-66: Grafique f en el intervalo dado. a) Estime dónde f es creciente o decreciente. b) Estime el rango de f.

65 $f(x) = 0.7x^3 + 1.7^{(-1.8x)}$; $[-4, 1]$

66 $f(x) = \dfrac{3.1^{-x} - 4.1^x}{4.4^{-x} + 5.3^x}$; $[-3, 3]$

67 **Población de truchas** Mil truchas, cada una de ellas de un año de edad, se introducen en un gran estanque. Se pronostica que el número $N(t)$ de truchas vivas después de t años estará dado por la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$. Use la gráfica de N para aproximar cuándo estarán vivas 500 truchas.

68 **Poder adquisitivo** Un economista pronostica que el poder adquisitivo $B(t)$ de un dólar dentro de t años estará dado por $B(t) = (0.95)^t$. Use la gráfica de B para aproximar cuándo el poder adquisitivo será la mitad de lo que es hoy.

69 **Función de Gompertz** La **función de Gompertz**,

$$y = ka^{(b^x)} \quad \text{con } k > 0,\ 0 < a < 1, \text{ y } 0 < b < 1,$$

se usa a veces para describir las ventas de un nuevo producto cuyas ventas son inicialmente grandes, pero luego se estabilizan en un nivel máximo de saturación. Grafique, en el mismo plano de coordenadas, la recta $y = k$ y la función de Gompertz con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es la importancia de la constante k?

70 **Función logística** La función logística,

$$y = \frac{1}{k + ab^x} \quad \text{con } k > 0, a > 0 \text{ y } 0 < b < 1,$$

se usa a veces para describir las ventas de un nuevo producto que inicialmente experimenta ventas lentas, seguidas por un crecimiento hacia un nivel máximo de saturación. Grafique, en el mismo plano de coordenadas, la recta $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{5}{8}$. ¿Cuál es la importancia del valor de $1/k$?

Ejer. 71-72: Si p pagos mensuales se depositan en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés anual r, entonces la cantidad A en la cuenta después de n años está dada por

$$A = \frac{p\left(1 + \frac{r}{12}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right]}{\frac{r}{12}}$$

Grafique A para cada valor de p y r, y estime n para $A = \$100{,}000$.

71 $p = 100$, $r = 0.05$ **72** $p = 250$, $r = 0.09$

73 **Recaudación del gobierno** Las recaudaciones del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados aparecen en la siguiente tabla.

Año	1910	1930	1950	1970
Recaudación	0.7	4.1	39.4	192.8

Año	1980	1990	2000
Recaudación	517.1	1032.0	2025.2

a) Sea $x = 0$ correspondiente al año 1910. Grafique los datos junto con las funciones f y g:

1) $f(x) = 0.786(1.094)^x$

2) $g(x) = 0.503x^2 - 27.3x + 149.2$

b) Determine si la función exponencial o cuadrática modela mejor los datos.

c) Use su selección del inciso b) para estimar gráficamente el año en el que el gobierno federal recaudó $1 billón.

74 **Epidemia** En 1840, Gran Bretaña experimentó una epidemia bobina (vacas y bueyes) llamada epizootia. El número estimado de nuevos casos cada 28 días aparece en la tabla. En ese tiempo, el *London Daily* hizo la terrible predicción que el número de nuevos casos continuaría hasta aumentar de forma indefinida. William Farr pronosticó correctamente que el número de nuevos casos llegaría a un límite máximo. De las dos funciones

$$f(t) = 653(1.028)^t$$

y

$$g(t) = 54{,}700e^{-(t-200)^2/7500}$$

una de ellas modela la predicción del periódico y la otra la de Farr, donde t está en días con $t = 0$ correspondiente al 12 de agosto de 1840.

Fecha	Nuevos casos
Ago. 12	506
Sept. 9	1289
Oct. 7	3487
Nov. 4	9597
Dic. 2	18,817
Dic. 30	33,835
Ene. 27	47,191

a) Grafique cada función, junto con los datos, en una pantalla de [0, 400, 100] por [0, 60,000, 10,000].

b) Determine cuál función modela mejor la predicción de Farr.

c) Determine la fecha en la que el número de nuevos casos llegó a su punto más alto.

75 **Costo de una estampilla** El precio de una estampilla postal de primera clase era de 4¢ por primera vez en 1958 y de 44¢ en 2009 (era de 2¢ en 1919). Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el costo de una estampilla de primera clase para 1958-2009, y pronostique su valor para 2020.

76 **Costos de TV para el Súper Bowl** La siguiente tabla muestra el costo (en miles de dólares) de un anuncio televisivo de 30 segundos durante el Súper Bowl por varios años.

Año	Costo
1967	42
1977	125
1987	600
1997	1200
2007	2600

a) Grafique los datos en el plano xy.

b) Determine una curva de la forma $y = ab^t$, donde $x = 0$ es el primer año y y es el costo que modela los datos. Grafique esta curva, junto con los datos en el mismo eje de coordenadas. Las respuestas pueden variar.

c) Utilice esta curva para pronosticar el costo de un comercial de 30 segundos en el año 2002. Compare su respuesta con el valor real de $1,900,000.

77 **Comparación de inflación** En 1974, Johnny Miller ganó ocho torneos de la PGA y acumuló $353,022 en ganancias oficiales por la temporada. En 1999, Tiger Woods acumuló $6,616,585 con un récord similar.

a) Suponga que la tasa de inflación mensual de 1974 a 1999 fue de 0.0025 (3% anual). Use la fórmula de interés compuesto para estimar el valor equivalente de las ganancias de Miller en 1999. Compare su respuesta con la de un cálculo de inflación en la Web (por ejemplo, bls.gov/cpi/home.htm).

b) Encuentre la tasa de interés anual necesaria para que las ganancias de Miller sean equivalentes en valor a las de Woods.

c) ¿Qué tipo de función usó en el inciso a) y en el inciso b)?

78 **Índice de precios al consumidor** El IPC es la medida de inflación de uso más recurrente. En 1970, el IPC era de 37.8 y en 2000 fue de 168.8. Esto significa que un consumidor citadino que pagaba $37.80 por una canasta básica de artículos de consumo y servicios en 1970 habría necesitado $168.80 para artículos y servicios similares en 2000. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el IPC para 1970-2000 y pronostique su valor para 2020.

4.3 La función exponencial natural

La *fórmula de interés compuesto* estudiada en la sección precedente es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

donde P es el capital inicial invertido, r es la tasa de interés anual (expresada como decimal), n es el número de periodos de interés por año y t el número de años que se invierte el capital inicial. El siguiente ejemplo ilustra lo que ocurre si la tasa y el tiempo total de inversión son fijos, pero se hace variar el *periodo de interés*.

EJEMPLO 1 **Uso de la fórmula del interés compuesto**

Suponga que se invierten $1,000 a una tasa de interés compuesto de 9%. Calcule la nueva cantidad del principal después de un año, si el interés se capitaliza cada tres meses, cada mes, semanalmente, diario, cada hora y cada minuto.

SOLUCIÓN Si $P = \$1000$, $t = 1$ y $r = 0.09$ en la fórmula del interés compuesto, entonces

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^{n}$$

para n periodos de interés por año. Los valores de n que deseamos considerar aparecen en la siguiente tabla, donde hemos supuesto que hay 365 días en un año y, por lo tanto, $(365)(24) = 8{,}760$ horas y $(8{,}760)(60) = 525{,}600$ minutos. (En muchas transacciones financieras, un año de inversión se considera de sólo 360 días.)

Periodo de interés	Trimestre	Mes	Semana	Día	Hora	Minuto
n	4	12	52	365	8760	525,600

Usando la fórmula de interés compuesto (y una calculadora), obtenemos las cantidades dadas en la siguiente tabla.

Periodo de interés	Cantidad después de un año
Trimestre	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{4}\right)^{4} = \$1093.08$
Mes	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} = \$1093.81$
Semana	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{52}\right)^{52} = \$1094.09$
Día	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365} = \$1094.16$
Hora	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \$1094.17$
Minuto	$\$1000\left(1 + \frac{0.09}{525{,}600}\right)^{525{,}600} = \$1094.17$

■

Observe que, en el ejemplo anterior, después de que llegamos a un periodo de interés de una hora, el número de periodos de interés por año no tiene efecto en la cantidad final. Si el interés se hubiera compuesto cada segundo, el resultado seguiría siendo $1,094.17. (Algunas posiciones decimales *después* de las dos primeras *cambian*.) Así, la cantidad se aproxima a un valor fijo a medida que aumenta n. Se dice que el interés **se capitaliza continuamente** si el número n de periodos por año aumenta sin límite.

Si $P = 1$, $r = 1$ y $t = 1$ en la fórmula del interés compuesto, obtenemos

$$A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La expresión del lado derecho de la ecuación es importante en cálculo. En el ejemplo 1 consideramos una situación semejante: a medida que n aumentaba, A se aproximaba a un valor límite. El mismo fenómeno se presenta en esta fórmula, como se ilustra en la siguiente tabla.

n	Aproximación a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10,000	2.71814593
100,000	2.71826824
1,000,000	2.71828047
10,000,000	2.71828169
100,000,000	2.71828181
1,000,000,000	2.71828183

En cálculo se demuestra que cuando n aumenta sin límite, el valor de la expresión $[1 + (1/n)]^n$ se aproxima a cierto número irracional, que se denota con e. El número e aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos. Una aproximación es $e \approx 2.71828$. Si usamos la notación de flechas, denotamos este hecho como sigue.

El número e

Si n es un entero positivo, entonces

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828 \text{ cuando } n \to \infty$$

En la definición siguiente usamos e como base para una importante función exponencial.

Definición de la función exponencial natural

La **función exponencial natural** f está definida por

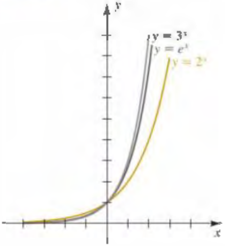
$$f(x) = e^x$$

para todo número real x.

La función exponencial natural es una de las más útiles en matemáticas avanzadas y aplicaciones. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura 1. Las calculadoras científicas y graficadoras tienen una tecla e^x para aproximar valores de la función exponencial natural.

Para acceder a la tecla e^x, *pulse* 2nd LN.

FIGURA 1



APLICACIÓN **Interés compuesto continuamente**

La fórmula del interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si $1/k = r/n$, entonces $k = n/r$, $n = kr$ y $nt = krt$, y podemos escribir otra vez la fórmula como

$$A = P\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{krt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt}$$

Para el interés compuesto continuamente, n (el número de periodos de interés por año) aumenta sin límite, lo que se denota con $n \to \infty$, o bien, lo que es equivalente, por $k \to \infty$. Usando el hecho de que $[1 + (1/k)]^k \to e$ cuando $k \to \infty$, vemos que

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt} \to P[e]^{rt} = Pe^{rt} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

Este resultado nos da la siguiente fórmula.

Fórmula del interés compuesto continuamente

$$A = Pe^{rt},$$

donde P = principal

r = tasa de interés anual expresada como decimal

t = número de años que se invierte P

A = cantidad después de t años.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de esta fórmula.

EJEMPLO 2 **Uso de la fórmula del interés compuesto continuamente**

Suponga que se depositan \$20,000 en una cuenta del mercado de dinero que paga intereses a razón de 6% anual compuesto continuamente. Determine el saldo de la cuenta después de cinco años.

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula del interés compuesto continuamente con $P = 20{,}000$, $r = 0.06$ y $t = 5$, tenemos

$$A = Pe^{rt} = 20{,}000e^{0.06(5)} = 20{,}000e^{0.3}$$

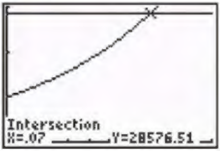
Si usamos calculadora, encontramos que $A = \$26{,}997.18$. ■

EJEMPLO 3 **Uso de la fórmula del interés compuesto continuamente**

Una inversión de \$10,000 aumentó a \$28,576.51 en 15 años. Si el interés se capitalizó continuamente, encuentre la tasa de interés.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula del interés compuesto continuamente con $P = \$10{,}000$, $A = 28{,}576.51$ y $t = 15$:

FIGURA 2



$$A = Pe^{rt} \qquad \text{fórmula}$$

$$28{,}576.51 = 10{,}000e^{r(15)} \qquad \text{sustituimos } A, P, t$$

En este punto, podríamos dividir entre 10,000, pero eso nos dejaría con una ecuación que no podemos resolver (todavía). Entonces, graficaremos $Y_1 = 28{,}576.51$ y $Y_2 = 10{,}000e\hat{\ }(15x)$ y determinaremos su punto de intersección. Como r es una tasa de interés, comenzaremos con un visor rectangular de [0, 0.10, 0.01] por [0, 30,000, 10,000]. Usando una función de intersección, encontramos que $Y_1 = Y_2$ para $x = 0.07$ en la figura 2. Entonces, la tasa de interés es de 7%. ■

La fórmula del interés compuesto continuamente es sólo un caso específico de la siguiente ley.

Ley de la fórmula de crecimiento (o decrecimiento)

Sea q_0 el valor de una cantidad q en el tiempo $t = 0$ (esto es, q_0 es la cantidad inicial de q). Si q cambia instantáneamente a una razón proporcional a su valor actual, entonces

$$q = q(t) = q_0e^{rt},$$

donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento (o $r < 0$ es la tasa de decrecimiento) de q.

EJEMPLO 4 **Predicción de la población de una ciudad**

La población de una ciudad en 1970 era de 153,800. Suponiendo que la población aumenta continuamente a razón de 5% anual, pronostique la población de la ciudad en el año 2020.

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula del crecimiento $q = q_0e^{rt}$, con población inicial $q_0 = 153{,}800$, tasa de crecimiento $r = 0.05$ y tiempo $t = 2020 - 1970 = 50$ años. Entonces, una predicción para la población de la ciudad en el año 2020 es

$$153{,}800e^{(0.05)(50)} = 153{,}800e^{2.5} \approx 1{,}873{,}668$$

EJEMPLO 5 **Uso de la fórmula de la ley de desintegración**

El isótopo de plutonio-238 se utiliza para impulsar naves espaciales y se desintegra a una tasa de aproximadamente 0.79% anual. A la décima de gramo más cercana, ¿cuánto de una muestra de 100 gramos quedará en 88 años?

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula de desintegración $q = q_0e^{rt}$, con la cantidad inicial $q_0 = 100$, la tasa de desintegración $r = -0.0079$ y el tiempo $t = 88$ años. La cantidad restante después de 88 años es

$$100e^{-(0.0079)(88)} = 100e^{-0.6952} \approx 49.9$$

Como 49.9 está cerca de la mitad de la cantidad original, sabemos que la vida media del ^{238}Pu es de aproximadamente 88 años.

La función f del siguiente ejemplo es importante en aplicaciones avanzadas de matemáticas.

EJEMPLO 6 **Trazo de una gráfica que contiene dos funciones exponenciales**

Trace la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

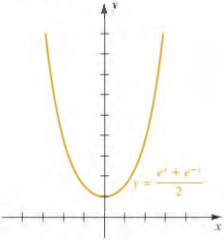
SOLUCIÓN Observe que f es una función par, porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

Entonces, la gráfica es simétrica respecto al eje y. Si usamos la calculadora, obtenemos las siguientes aproximaciones de $f(x)$.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aprox.)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

FIGURA 3



Trazamos los puntos y usamos simetría respecto al eje para obtener la gráfica de la figura 3. La gráfica *parece* ser una parábola, pero en realidad no es así.

FIGURA 4

APLICACIÓN **Cables flexibles**

La función f del ejemplo 6 se presenta en matemáticas aplicadas e ingeniería, donde se denomina **función coseno hiperbólico**. Esta función se puede usar para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos están sostenidos desde la misma altura, por ejemplo, un cable de teléfonos o líneas eléctricas (vea la figura 4). Si introducimos un sistema de coordenadas, como se indica en la figura, entonces se puede demostrar que una ecuación que corresponde a la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. La gráfica se llama **catenaria**, por la palabra latina que significa *cadena*. La función del ejemplo 6 es el caso especial en el que $a = 1$. Vea el ejercicio de análisis 3 al final de este capítulo para una aplicación que comprende una catenaria.

APLICACIÓN **Radioterapia**

Las funciones exponenciales desempeñan un importante papel en el campo de la *radioterapia*, que es el tratamiento de tumores por radiación. La fracción de células de un tumor que sobreviven al tratamiento, llamada *fracción sobreviviente*, depende no sólo de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor mismo. La exposición a la radiación puede considerarse como varios sucesos potencialmente dañinos, donde por lo menos se requiere un *hit* (acierto) para matar una célula tumoral. Por ejemplo, suponga que cada célula tiene exactamente un *blanco* al que se debe acertar. Si k denota el tamaño promedio del blanco de una célula tumoral y si x es el número de sucesos dañinos (la *dosis*), entonces la fracción sobreviviente $f(x)$ está dada por

$$f(x) = e^{-kx}$$

Esto recibe el nombre de *fracción sobreviviente de un blanco-un acierto* (o *hit*).

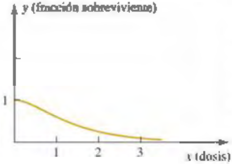
Suponga a continuación que cada célula tiene n objetivos o blancos y que a cada blanco se debe acertar una vez para que muera la célula. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos-un acierto* está dada por

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

La gráfica de f puede analizarse para determinar qué efecto tendrá incrementar la dosis x en disminuir la fracción sobreviviente de células tumorales. Tenga en cuenta que $f(0) = 1$; esto es, si no hay dosis, entonces todas las células sobreviven. Como ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

FIGURA 5
Fracción sobreviviente de células tumorales después de un tratamiento de radiación



Un análisis completo de la gráfica de f requiere cálculo. La gráfica se traza en la figura 5. El *hombro* de la curva cerca del punto $(0, 1)$ representa la naturaleza de umbral del tratamiento, es decir, una pequeña dosis da por resultado muy poca eliminación de células tumorales. Note que, para x grande, un incremento en la dosis tiene poco efecto en la fracción sobreviviente. Para determinar la dosis ideal que se debe administrar a un paciente, especialistas en terapia de radiación también deben tomar en cuenta el número de células sanas que mueren durante el tratamiento.

Problemas del tipo que se ilustra en el ejemplo siguiente se presentan en el estudio de cálculo.

EJEMPLO 7 **Cómo encontrar ceros de una función que contiene exponenciales**

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, encuentre los ceros de f.

SOLUCIÓN Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} && \text{dado} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x) && \text{factorizamos } 2xe^{-2x} \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Como $e^{-2x} > 0$ para toda x, vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$. Entonces, los ceros de f son 0 y 1.

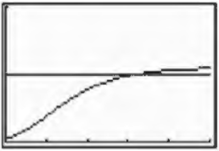
EJEMPLO 8 **Trazo de una curva de crecimiento de Gompertz**

En biología, la **función de crecimiento de Gompertz** G, dada por

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})}$$

donde k, A y B son constantes positivas, se usa para estimar el tamaño de ciertas cantidades en el tiempo t. La gráfica de G se llama **curva de crecimiento de Gompertz**. La función es siempre positiva y creciente, y cuando t aumenta sin límite, $G(t)$ se estabiliza y se aproxima al valor de k. Grafique G en el intervalo [0, 5] para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y estime el tiempo t en el que $G(t) = 1$.

FIGURA 6
[0, 5] por [0, 2]



SOLUCIÓN Comenzamos por asignar

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.1x})}$$

a Y_1. Como deseamos graficar G en el intervalo [0, 5], escogemos Xmin = 0 y Xmax = 5. Como $G(t)$ es siempre positiva y no excede el valor $k = 1.1$, escogemos Ymin = 0 y Ymax = 2. Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo de visualización son [0, 5] por [0, 2]. Graficar G nos da una pantalla semejante a la figura 6. Los valores extremos de la gráfica son aproximadamente (0, 0.045) y (5, 1.086).

Para determinar el tiempo en que $y = G(t) = 1$, usamos una función de intersección, con $Y_2 = 1$, para obtener $x = t \approx 3.194$.

4.3 Ejercicios

Ejer. 1-4: Use la gráfica de $y = e^x$ como apoyo para trazar la gráfica de f.

1 a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = -e^x$

2 a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = 2e^x$

3 a) $f(x) = e^{x+4}$ b) $f(x) = e^x + 4$

4 a) $f(x) = e^{-2x}$ b) $f(x) = -2e^x$

Ejer. 5-6: Si P dólares se depositan en una cuenta de ahorro que paga interés a razón de r% anual compuesto continuamente, encuentre el saldo después de t años.

5 $P = 1000$, $r = 5\frac{1}{4}$, $t = 5$

6 $P = 100$, $r = 3\frac{1}{2}$, $t = 10$

Ejer. 7-8: ¿Cuánto dinero, invertido a una tasa de interés de r% anual compuesto continuamente, llegará a A dólares después de t años?

7 $A = 100{,}000$, $r = 3.4$, $t = 18$

8 $A = 15{,}000$, $r = 4.5$, $t = 4$

9-10: Una inversión de P dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés se capitalizó continuamente, encuentre la tasa de interés.

9 $A = 4055$, $P = 1000$, $t = 20$

10 $A = 890.20$, $P = 400$, $t = 16$

Ejer. 11–14: Resuelva la ecuación.

11 $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$

12 $e^{3x} = e^{2x-1}$

13 $(e^x + 1)(ex - 1) = 0$

14 $e^x(x + e) = 0$

Ejer. 15–18: Encuentre los ceros de f.

15 $f(x) = xe^x + e^x$

16 $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

17 $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

18 $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ejer. 19–20: Simplifique la expresión.

19 $$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

20 $$\frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

21 **Crecimiento de cultivos** Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0e^{kt}$ para $k = 0$ describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y frijol de soya. El valor de función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 el peso en el día que brotan y t el tiempo en días. Si, para una especie de frijol de soya, $k = 0.2$ y $W_0 = 68$ mg, pronostique el peso al término de 30 días.

22 **Crecimiento de cultivos** Consulte el ejercicio 21. A veces es difícil medir el peso W_0 de una planta cuando brota del suelo. Si, para una especie de algodón, $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es de 575 miligramos, estime W_0.

23 **Crecimiento de población en EUA** La población de Estados Unidos en 1980 era de alrededor de 231 millones y ha crecido continuamente a razón de 1.03% anual. Pronostique la población $N(t)$ en el año 2020 si continúa esta tendencia.

24 **Crecimiento de población en India** En 1985, la estimación de la población en India era de 766 millones y ha crecido a razón de 1.82% anual. Suponiendo que continúe este rápido ritmo de crecimiento, estime la población $N(t)$ de India en el año 2015.

25 **Desintegración del isótopo de yodo** El isótopo radiactivo ^{131}I, utilizado en medicina nuclear, se desintegra continuamente a una tasa de 5.25% por hora.

a) Aproxime el porcentaje remanente de cualquier cantidad inicial después de 26.4 horas.

b) ¿Cuál es la vida media de ^{131}I?

26 **Desintegración del isótopo de sodio** El isótopo radiactivo del sodio ^{24}Na, que se utiliza para localizar fugas en tuberías industriales y en el estudio de electrolitos en el cuerpo, se desintegra continuamente a una tasa de 4.62% por hora.

a) Aproxime el porcentaje restante de cualquier cantidad inicial después de 30 horas.

b) ¿Cuál es la vida media de ^{24}Na?

27 **Longevidad del lenguado** En ciencias de pesquería, una cohorte es un conjunto de peces que resulta de una reproducción anual. Suele suponerse que el número de peces $N(t)$ todavía vivos después de t años está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0e^{-0.2t}$, donde N_0 es el tamaño inicial de la cohorte. Aproxime el porcentaje del número original todavía vivos después de 10 años.

28 **Rastreador radiactivo** El rastreador radiactivo ^{51}Cr se puede usar para localizar la posición de la placenta en una mujer embarazada. Con frecuencia, el laboratorio médico debe ordenar el rastreador. Si se envían A_0 unidades (microcuries), entonces, debido a la desintegración radiactiva, el número de unidades $A(t)$ presentes después de t días está dado por $A(t) = A_0e^{-0.0249t}$.

a) Si se envían 35 unidades del rastreador y tardan dos días en llegar, ¿aproximadamente cuántas unidades habrá para la prueba?

b) Si se requieren 35 unidades para la prueba, ¿aproximadamente cuántas unidades deben enviarse?

29 **Crecimiento de la población de ballenas azules** En 1980, la población de ballenas azules en el Hemisferio Sur se pensaba que era de 4,500. La población $N(t)$ ha decrecido con base en la fórmula $N(t) = 4500e^{-0.1345t}$, donde t está en años y $t = 0$ corresponde a 1980. Pronostique la población en 2015 si continúa esta tendencia.

30 **Crecimiento del lenguado** La longitud (en centímetros) de muchos peces comerciales comunes de t años de edad puede aproximarse con una función de crecimiento de Von Bertalanffy, que tiene una ecuación de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, donde a, b y k son constantes.

a) Para el lenguado del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Estime la longitud de un lenguado de 10 años de edad.

b) Use la gráfica de f para estimar la máxima longitud alcanzable del lenguado del Pacífico.

31 **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en pulgadas) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de

a) 30,000 pies? b) 40,000 pies?

32 **Desintegración del isótopo de polonio** Si comenzamos con c miligramos del isótopo de polonio ^{210}Po, la cantidad que queda después de t días puede aproximarse con $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es de 50 miligramos, aproxime, al centésimo más cercano, la cantidad restante después de

a) 30 días b) 180 días c) 365 días

33 **Crecimiento de niños** El modelo de Jenss se considera por lo general como la fórmula más precisa para predecir la estatura de niños en edad preescolar. Si y es la estatura (en centímetros) y x la edad (en años), entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$

$\frac{1}{4} \leq x \leq 6$. Por cálculo, la tasa de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261 - 0.993x}$. Calcule la estatura y la tasa de crecimiento de un niño típico de un año de edad.

34 **Velocidad de una partícula** Una partícula esférica muy pequeña (del orden de 5 micrones de diámetro) se proyecta en aire en calma con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero su velocidad disminuye debido a las fuerzas de resistencia. Su velocidad t segundos más tarde está dada por $v(t) = v_0 e^{-at}$ para alguna $a > 0$, y la distancia $s(t)$ que la partícula recorre está dada por

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

La distancia de frenado es la distancia total recorrida por la partícula.

a) Encuentre una fórmula que aproxime la distancia de frenado en términos de v_0 y a.

b) Use la fórmula del inciso a) para estimar la distancia de frenado si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^5$.

35 **Salario mínimo** En 1971 el salario mínimo en Estados Unidos era de \$1.60 por hora. Suponiendo que la tasa de inflación es de 5% anual, encuentre el salario mínimo equivalente en el año 2020.

36 **Valor del terreno** En 1867, Estados Unidos compró Alaska a Rusia en \$7,200,000. Hay 586,400 millas cuadradas de terreno en Alaska. Suponiendo que el valor del terreno aumenta continuamente a 3% anual, y que el terreno se puede comprar a un precio equivalente, determine el precio de 1 acre en el año 2020. (Una milla cuadrada es equivalente a 640 acres.)

Ejer. 37-40: El *rendimiento efectivo* (o tasa de interés anual efectiva) de una inversión es la tasa de interés simple que produciría al término de un año la misma cantidad que rinde la tasa compuesta que en realidad se aplica. Aproxime, al 0.01% más cercano, el rendimiento efectivo correspondiente a una tasa de interés de r% por año compuesto a) trimestralmente y b) continuamente.

37 $r = 7$

38 $r = 12$

39 $r = 5$

40 $r = 3$

Ejer. 41-42: Trace la gráfica de la ecuación.

41 $y = e^{1000x}$

42 $y = e^{-1000x}$

Ejer. 43-44: Trace la gráfica de la ecuación. a) Estime y si $x = 40$. b) Estime x si $y = 2$.

43 $y = e^{0.085x}$

44 $y = e^{0.0525x}$

Ejer. 45-47: a) Grafique f usando una calculadora graficadora. b) Trace la gráfica de g tomando los recíprocos de las coordenadas y en a), *sin* usar calculadora graficadora.

45 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

46 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\quad g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

47 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\quad g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

48 **Función de densidad de probabilidad** En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{con} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la *media* y σ^2 es la varianza de la distribución). Trace la gráfica de f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

Ejer. 49-50: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas, y estime las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

49 $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.4x}$; $\quad g(x) = x^2 - 2$

50 $f(x) = 0.3e^x$; $\quad g(x) = x^3 - x$

Ejer. 51-52: Las funciones f y g se pueden usar para aproximar e^x en el intervalo [0, 1]. Grafique f, g y $y = e^x$ en el mismo plano de coordenadas, y compare la precisión de $f(x)$ y $g(x)$ como una aproximación a e^x.

51 $f(x) = x + 1$; $\quad g(x) = 1.72x + 1$

52 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $\quad g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

Ejer. 53-54: Grafique f y estime sus ceros.

53 $f(x) = x^2e^x - xe^{(x^2)} + 0.1$

54 $f(x) = x^3e^x - x^2e^{2x} + 1$

Ejer. 55-56: Grafique f en el intervalo (0, 200]. Encuentre una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

55 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

56 $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Ejer. 57-58: Aproxime la raíz real de la ecuación.

57 $e^{-x} = x$

58 $e^{3x} = 5 - 2x$

Ejer. 59-60: Grafique f y determine dónde es creciente o es decreciente.

59 $f(x) = xe^x$

60 $f(x) = x^2e^{-2x}$

61 **Contaminación de una chimenea** La concentración C (en unidades/m^3) de contaminación cerca de un punto al nivel del suelo, que está corriente abajo de una fuente de chimenea de altura h, está dada por

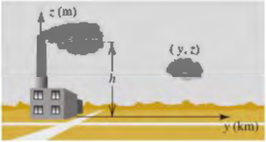
$$C = \frac{Q}{\pi vab}e^{-y^2/(2a^2)}\left[e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}\right],$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades/s), v la velocidad promedio del viento (en m/s), z la altura (en metros) del punto a favor del viento, y la distancia del punto a favor del viento en la dirección perpendicular al viento (la dirección de viento cruzado), y a y b son constantes que dependen de la distancia a favor del viento (vea la figura).

a) ¿Cómo cambia la concentración de contaminación al nivel del suelo, en la posición a favor del viento ($y = 0$ y $z = 0$) si aumenta la altura de la chimenea?

b) ¿Cómo cambia la concentración de contaminación al nivel del suelo ($z = 0$) para una chimenea de altura fija h si una persona se mueve en la dirección de viento cruzado, con lo cual aumenta y?

EJERCICIO 61



62 **Concentración de contaminación** Consulte el ejercicio 61. Si la altura de la chimenea es de 100 metros y $b = 12$, use una gráfica para estimar la altura z arriba del punto a favor del viento ($y = 0$) donde se presenta la máxima concentración de contaminación. (*Sugerencia*: sea $h = 100$, $b = 12$, y grafique la ecuación $C = e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}$.)

63 **Densidad atmosférica** La densidad atmosférica a una altitud x se indica en la siguiente tabla.

Altitud (m)	0	2000	4000	6000	8000	10,000
Densidad (kg/m³)	1.225	1.007	0.819	0.660	0.526	0.414

a) Encuentre una función $f(x) = C_0e^{kx}$ que aproxime la densidad a una altitud x, donde C_0 y k son constantes. Grafique los datos y f en los mismos ejes de coordenadas.

b) Use f para pronosticar la densidad a 3,000 y 9,000 metros. Compare las predicciones con los valores reales de 0.909 y 0.467, respectivamente.

64 **Gasto gubernamental** Los gastos del gobierno federal (en miles de millones de dólares) para años seleccionados se presentan en las siguientes tablas.

Año	1910	1930	1950	1970	1980	1990	2000
Gastos	0.7	3.3	42.6	195.6	590.9	1253.1	1789.1

a) Sea $x = 0$ correspondiente al año 1910. Encuentre una función $A(x) = A_0e^{kx}$ que aproxime los datos, donde A_0 y k son constantes. Grafique los datos y A en los mismos ejes de coordenadas.

b) Utilice A para predecir gráficamente el primer año en que el gasto federal llegó a \$1 billón. (El año real fue 1987.)

4.4 Funciones logarítmicas

En la sección 4.2 observamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ o $a > 1$ es biunívoca. En consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} (vea la sección 4.1). Esta inversa de la función exponencial con base a se denomina **función logarítmica con base a** y se denota por $\log_a$. Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o $\log_a x$, léase "el logaritmo de x base a". En vista de que, por la definición de una función inversa f^{-1},

$$y = f^{-1}(x) \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = f(y),$$

la definición de $\log_a$ se puede expresar como sigue.

Definición de $\log_a$

Sea a un número real positivo diferente de 1. **El logaritmo de x base a** está definido por

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

Tenga en cuenta que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. A la primera se le llama **forma logarítmica** y a la segunda **forma exponencial**. Usted debe esforzarse por ser experto en cambiar de una forma a la otra. El siguiente diagrama puede ayudar a lograr este objetivo.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_a x = y$	$a^y = x$

exponente

base

Observe que cuando se cambia de forma, *las bases de las formas logarítmica y exponencial son iguales*. El número y (esto es, $\log_a x$) corresponde al exponente en la forma exponencial. En otras palabras, $\log_a x$ es *el exponente al cual debe elevarse la base para obtener x*. Esto es a lo que se refieren las personas cuando dicen "los logaritmos son exponentes".

A continuación se muestran algunos ejemplos de formas equivalentes.

EJEMPLOS **Formas equivalentes**

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
$\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
$r = \log_p q$	$p^r = q$
$w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
$\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El siguiente ejemplo contiene una aplicación que comprende el cambio de una forma exponencial a una forma logarítmica.

EJEMPLO 1 **Cambio de forma exponencial a forma logarítmica**

El número N de bacterias en cierto cultivo después de t horas está dado por $N = (1000)2^t$. Exprese t como función logarítmica de N base 2.

SOLUCIÓN

$$N = (1000)2^t \quad \text{dado}$$

$$\frac{N}{1000} = 2^t \quad \text{aislamos la expresión exponencial}$$

$$t = \log_2 \frac{N}{1000} \quad \text{cambiamos a forma logarítmica}$$

■

Algunos casos especiales de logaritmos se dan en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar logaritmos**

Encuentre el número, si es posible.

a) $\log_{10} 100$ **b)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **c)** $\log_9 3$ **d)** $\log_7 1$ **e)** $\log_3 (-2)$

SOLUCIÓN En cada caso nos dan $\log_a x$ y debemos encontrar el exponente y tal que $a^y = x$. Obtenemos lo siguiente.

a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ porque $2^{-5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.

d) $\log_7 1 = 0$ porque $7^0 = 1$.

e) $\log_3 (-2)$ no es posible porque $3^y \neq -2$ para cualquier número real y. ■

Las siguientes propiedades generales se deducen de la interpretación de $\log_a x$ como exponente.

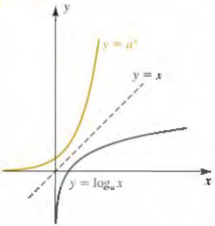
Propiedad de $\log_a x$	Razón	Ejemplo
1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
4) $a^{\log_a x} = x$	como sigue	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón para la propiedad 4 es consecuencia directa de la definición de $\log_a$, porque

$$\text{si} \quad y = \log_a x, \quad \text{entonces} \quad x = a^y, \quad \text{o} \quad x = a^{\log_a x}$$

La función logarítmica base a es la inversa de la función exponencial base a, de modo que la gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener al reflejar la gráfica de $y = a^x$ a través de la recta $y = x$ (vea la sección 4.1). Este procedimiento se ilustra en la figura 1 para el caso $a > 1$. Note que el punto de intersección con el eje x de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de los números reales positivos, el rango es $\mathbb{R}$, y el eje y es una asíntota vertical. Como los logaritmos base $0 < a < 1$ rara vez se usan, aquí no trazaremos sus gráficas.

FIGURA 1



En la figura 1 vemos que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por lo tanto, es biunívoca según el teorema de la página 251. La combinación de este resultado con los incisos 1) y 2) de la definición de función biunívoca de la página 250 nos da el siguiente teorema, que también se puede demostrar si $0 < a < 1$.

Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica base a es biunívoca. Entonces, las siguientes condiciones equivalentes se satisfacen para números reales positivos x_1 y x_2.

1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

Cuando usemos como justificación este teorema para un paso en la solución de un ejemplo, indicaremos que *las funciones logarítmicas son biunívocas*.

En el siguiente ejemplo resolvemos una *ecuación logarítmica* sencilla, es decir, una ecuación que contiene un logaritmo de una expresión que contiene una variable. Podemos introducir soluciones extrañas cuando se resuelven ecuaciones logarítmicas. En consecuencia, debemos comprobar las soluciones de ecuaciones logarítmicas para asegurarnos de que estamos obteniendo logaritmos de *sólo números reales positivos*; de otro modo, una función logarítmica no está definida.

EJEMPLO 3 **Resolución de una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$.

SOLUCIÓN

$\log_6 (4x - 5) = \log_6 (2x + 1)$	dado
$4x - 5 = 2x + 1$	las funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 6$	restamos $2x$; sumamos 5
$x = 3$	dividimos entre 2

✓ **Comprobación** $x = 3$ LI: $\log_6 (4 \cdot 3 - 5) = \log_6 7$
LD: $\log_6 (2 \cdot 3 + 1) = \log_6 7$

Como $\log_6 7 = \log_6 7$ es un enunciado verdadero, $x = 3$ es una solución. ■

Cuando comprobamos la solución $x = 3$ del ejemplo 3, no se requiere que la solución sea positiva, pero sí que las dos expresiones, $4x - 5$ y $2x + 1$, sean positivas después de sustituir 3 por x. Si extendemos nuestra idea de *argumento* de variables a expresiones, entonces cuando comprobemos soluciones podemos simplemente recordar que *los argumentos deben ser positivos*.

En el siguiente ejemplo usamos la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

EJEMPLO 4 **Resolución de una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_4 (5 + x) = 3$.

SOLUCIÓN

$\log_4 (5 + x) = 3$	dado
$5 + x = 4^3$	cambiamos a forma exponencial
$x = 59$	despejamos x

✓ **Comprobación** $x = 59$ LI: $\log_4 (5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
LD: 3

Como $3 = 3$ es un enunciado verdadero, $x = 59$ es una solución. ■

A continuación trazamos la gráfica de una función logarítmica específica.

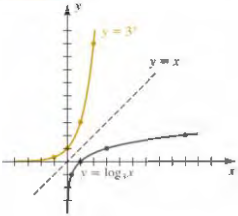
EJEMPLO 5 **Trazo de la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 x$.

SOLUCIÓN Describiremos tres métodos para graficar.

Método 1 Como las funciones dadas por $\log_3 x$ y 3^x son inversas entre sí, procedemos como hicimos para $y = \log_a x$ en la figura 1; esto es, primero trazamos la gráfica de $y = 3^x$ y luego la reflejamos a través de la recta $y = x$. Esto nos da el trazo de la figura 2. Note que los puntos $(-1, 3^{-1})$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 9)$ en la gráfica de $y = 3^x$ se reflejan en los puntos $(3^{-1}, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$ y $(9, 2)$ en la gráfica de $y = \log_3 x$.

FIGURA 2



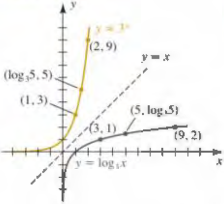
Método 2 Podemos encontrar puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ si hacemos $x = 3^k$, donde k es un número real, y luego aplicamos la propiedad 3 de los logaritmos en la página 285, como sigue:

$$y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$$

Usando esta fórmula, obtenemos los puntos de la gráfica que se ven en la siguiente tabla.

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	-3	-2	-1	0	1	2	3

FIGURA 3



Esto nos da los mismos puntos que obtuvimos con el primer método.

Método 3 Podemos trazar la gráfica de $y = \log_3 x$ si trazamos la gráfica de la forma exponencial equivalente $x = 3^y$. ■

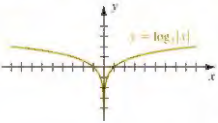
Antes de continuar, localizamos un punto más en $y = \log_3 x$ en la figura 2. Si $x = 5$, entonces $y = \log_3 5$ (vea la figura 3). (Vemos que $\log_3 5$ es un número entre 1 y 2; en la sección 4.6 estaremos en mejor aptitud de aproximar $\log_3 5$.) Ahora, en la gráfica de $y = 3^x$ tenemos el punto $(x, y) = (\log_3 5, 5)$, de modo que $5 = 3^{\log_3 5}$, que ilustra la propiedad 4 de los logaritmos (página 285) y refuerza lo dicho respecto a que *los logaritmos son exponentes*.

Al igual que en los ejemplos siguientes, con frecuencia buscamos trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es alguna expresión que contiene x.

EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3 |x|$ para $x \neq 0$.

FIGURA 4



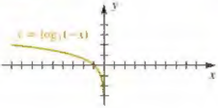
SOLUCIÓN La gráfica es simétrica respecto al eje y, porque

$$f(-x) = \log_3|-x| = \log_3|x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y la gráfica coincide con la gráfica de $y = \log_3 x$ trazada en la figura 2. Usando simetría, reflejamos esa parte de la gráfica a través del eje y y obtenemos el trazo de la figura 4.

Por otra parte, también podemos pensar en esta función en términos de $g(x) = \log_3 x$ con $|x|$ sustituida por x (consulte la explicación en la página 147). Como todos los puntos de la gráfica de g tienen coordenadas x positivas, podemos obtener la gráfica de f al combinar g con la reflexión de g a través del eje y. ■

FIGURA 5



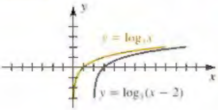
EJEMPLO 7 **Reflejo de la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3(-x)$.

SOLUCIÓN El dominio de f es el conjunto de los números reales negativos, porque $\log_3(-x)$ existe sólo si $-x > 0$, o bien, lo que es equivalente, $x < 0$. Podemos obtener la gráfica de f a partir de la gráfica de $y = \log_3 x$ al sustituir cada punto (x, y) de la figura 2 por $(-x, y)$. Esto es equivalente a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ a través del eje y. La gráfica se traza en la figura 5.

Otro método es cambiar $y = \log_3(-x)$ a la forma exponencial $3^y = -x$ y luego trazar la gráfica de $x = -3^y$. ■

FIGURA 6



EJEMPLO 8 **Desplazamiento de gráficas de ecuaciones logarítmicas**

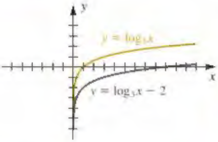
Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3(x - 2)$ **b)** $y = \log_3 x - 2$

SOLUCIÓN

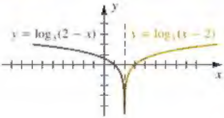
a) La gráfica de $y = \log_3 x$ se trazó en la figura 2 y se vuelve a trazar en la figura 6. Por la exposición sobre desplazamientos horizontales en la sección 2.5, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ al desplazar la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha, como se muestra en la figura 6.

FIGURA 7



b) Por la exposición sobre desplazamientos verticales en la sección 2.5, la gráfica de la ecuación $y = \log_3 x - 2$ se puede obtener desplazando la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo, como se muestra en la figura 7. Note que el punto de intersección con el eje x está dado por $\log_3 x = 2$ o $x = 3^2 = 9$. ■

FIGURA 8



EJEMPLO 9 **Reflejo de la gráfica de una función logarítmica**

Trace la gráfica de f si $f(x) = \log_3(2 - x)$.

SOLUCIÓN Si escribimos

$$f(x) = \log_3(2 - x) = \log_3[-(x - 2)],$$

entonces, aplicando la misma técnica utilizada para obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_3(-x)$ en el ejemplo 7 (con x sustituida por $x - 2$), vemos que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ a través de la recta vertical $x = 2$. Esto nos da el trazo de la figura 8.

Otro método es cambiar $y = \log_3(2 - x)$ a la forma exponencial $3^y = 2 - x$ y luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$. ■

Antes que se inventaran las calculadoras electrónicas, los logaritmos base 10 se usaban para cálculos numéricos complejos que contenían productos, cocientes y potencias de números reales. La base 10 se usaba porque es adecuada para números que se expresan en forma científica. Los logaritmos base 10 se denominan **logaritmos comunes**. El símbolo **log *x*** se usa como abreviatura de $\log_{10} x$, igual que $\sqrt{\ }$ se usa como abreviatura de $\sqrt[2]{\ }$.

Definición de logaritmo común $\log x = \log_{10} x$ para toda $x > 0$

Como en la actualidad disponemos de calculadoras de bajo costo, no se requieren logaritmos comunes como herramienta de trabajo computacional. Sin embargo, la base 10 se incluye en aplicaciones y, por ello, numerosas calculadoras tienen una tecla (LOG), que se puede usar para aproximar logaritmos comunes.

La función exponencial natural está dada por $f(x) = e^x$. La función logarítmica base e se llama **función logarítmica natural**. El símbolo **ln *x*** (léase "ele ene de x") es una abreviatura de $\log_e x$ y nos referimos a ella como el **logaritmo natural de *x***. Entonces, *la función logarítmica natural y la función exponencial natural son funciones inversas una de la otra.*

Definición de logaritmo natural $\ln x = \log_e x$ para toda $x > 0$

Casi todas las calculadoras tienen una tecla marcada (LN), que se puede usar para aproximar logaritmos naturales. En seguida se muestran varios ejemplos de formas equivalentes que contienen logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLOS **Formas equivalentes**

	Forma logarítmica	Forma exponencial
■	$\log x = 2$	$10^2 = x$
■	$\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
■	$\ln x = 2$	$e^2 = x$
■	$\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

Para encontrar x cuando se da $\log x$ o $\ln x$, podemos usar la tecla (10^x) o la (e^x), respectivamente, en una calculadora, como en el siguiente ejemplo. Si su calculadora tiene una tecla (INV) (para inversas), puede introducir x y pulsar sucesivamente (INV) (LOG) o (INV) (LN).

EJEMPLO 10 **Resolución de una ecuación logarítmica sencilla**

Encuentre x si

a) $\log x = 1.7959$ **b)** $\ln x = 4.7$

SOLUCIÓN

a) Cambiando $\log x = 1.7959$ a su forma exponencial equivalente, tendremos

$$x = 10^{1.7959}.$$

Evaluando la última expresión a una precisión de tres posiciones decimales dará

$$x \approx 62.503.$$

b) Cambiando $\ln x = 4.7$ a su forma exponencial equivalente dará

$$x = e^{4.7} \approx 109.95.$$

La siguiente tabla es una lista de formas logarítmicas comunes y naturales para las propiedades de la página 285.

Logaritmos con base a	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
1) $\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
3) $\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
4) $a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

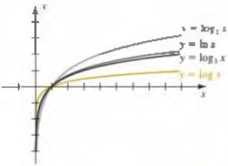
La última propiedad de los logaritmos naturales nos permite escribir el número a como $e^{\ln a}$, de modo que la función exponencial $f(x) = a^x$ se puede escribir como $f(x) = (e^{\ln a})^x$ o como $f(x) = e^{x \ln a}$. Varias calculadoras usan un modelo exponencial de regresión de la forma $y = ab^x$. Si deseamos un modelo exponencial base e, podemos escribir el modelo

$$y = ab^x \quad \text{cuando} \quad y = ae^{x \ln b}.$$

EJEMPLOS **Conversión a expresiones con base e**

- 3^x es equivalente a $e^{x \ln 3}$
- x^3 es equivalente a $e^{3 \ln x}$
- $4 \cdot 2^x$ es equivalente a $4 \cdot e^{x \ln 2}$

FIGURA 9



La figura 9 muestra cuatro gráficas logarítmicas con base $a > 1$. Note que para $x > 1$, cuando aumenta la base del logaritmo, las gráficas aumentan más lento (son más horizontales). Esto es lógico cuando consideramos las gráficas de las inversas de estas funciones: $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$ y $y = 10^x$. Aquí, para $x > 0$, cuando aumenta la base exponencial, las gráficas aumentan más rápido (son más verticales).

Los siguientes cuatro ejemplos ilustran aplicaciones de logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO 11 **La escala de Richter**

En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

a) Si la intensidad de un terremoto es $1000I_0$, encuentre R.

b) Exprese I en términos de R e I_0.

SOLUCIÓN

a)

$$
\begin{aligned}
R &= \log\frac{I}{I_0} && \text{dado}\\
&= \log\frac{1000I_0}{I_0} && \text{sea } I = 1000I_0\\
&= \log 1000 && \text{cancelamos } I_0\\
&= \log 10^3 && 1000 = 10^3\\
&= 3 && \log 10^x = x \text{ para toda } x
\end{aligned}
$$

En este resultado vemos que un aumento multiplicado por diez en intensidad produce un aumento de 1 en magnitud (si 1000 se cambiara a 10,000, entonces 3 cambiaría a 4).

b)

$$
\begin{aligned}
R &= \log\frac{I}{I_0} && \text{dado}\\
\frac{I}{I_0} &= 10^R && \text{cambiamos a forma exponencial}\\
I &= I_0 \cdot 10^R && \text{multiplicamos por } I_0
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 12 **Ley de Newton del enfriamiento**

La ley de Newton del enfriamiento establece que la tasa a la que un cuerpo se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que le rodea. La ley de Newton se puede usar para demostrar que en ciertas condiciones la temperatura T (en °C) de un cuerpo en el tiempo t (en horas) está dada por $T = 75e^{-2t}$. Exprese t como función de T.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
T &= 75e^{-2t} && \text{dado}\\
e^{-2t} &= \frac{T}{75} && \text{aislamos la expresión exponencial}\\
-2t &= \ln\frac{T}{75} && \text{cambiamos a forma logarítmica}\\
t &= -\frac{1}{2}\ln\frac{T}{75} && \text{dividimos entre } -2
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 13 **Aproximación de un tiempo de duplicación**

Suponga que una población crece continuamente a razón de 4% anual. Aproxime el tiempo que requiere una población para duplicar su tamaño, es decir, su **tiempo de duplicación**.

SOLUCIÓN Tenga en cuenta que no se da un tamaño inicial de población. Sin embargo, desconocer el tamaño inicial no presenta problema, ya que sólo deseamos determinar el tiempo necesario para obtener un tamaño de población *relativo* a un tamaño inicial de población. Si usamos la fórmula de crecimiento $q = q_0e^{rt}$ con $r = 0.04$ tendremos

$$
\begin{aligned}
2q_0 &= q_0 e^{0.04t} && \text{sea } q = 2q_0 \\
2 &= e^{0.04t} && \text{dividimos entre } q_0\ (q_0 \neq 0) \\
0.04t &= \ln 2 && \text{cambiamos a forma logarítmica} \\
t &= 25 \ln 2 \approx 17.3 \text{ años} && \text{multiplicamos por } \frac{1}{0.04} = 25
\end{aligned}
$$

El hecho de que q_0 no haya tenido ningún efecto en la respuesta indica que el tiempo de duplicación de una población de 1,000 es igual que el tiempo de duplicación de una población de 1,000,000 o cualquier otra población inicial razonable. ■

Del último ejemplo podemos obtener una fórmula general para el tiempo de duplicación de una población, es decir,

$$rt = \ln 2 \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad t = \frac{\ln 2}{r}$$

Como $\ln 2 \approx 0.69$, vemos que el tiempo de duplicación t para un crecimiento de este tipo es aproximadamente $0.69/r$. Debido a que los números 70 y 72 son cercanos a 69 pero tienen más divisores, algunas fuentes se refieren a esta relación de duplicación como la **regla del 70** o la **regla del 72**. Como ilustración de la regla del 72, si el porcentaje de crecimiento de una población es de 8%, entonces se necesitan unos $72/8 = 9$ años para que la población se duplique. En forma más precisa, este valor es

$$\frac{\ln 2}{8} \cdot 100 \approx 8.7 \text{ años}$$

EJEMPLO 14 **Determinación de la vida media de una sustancia radiactiva**

Un físico calcula que una sustancia radiactiva desconocida registra 2,000 conteos por minuto en un contador Geiger. Diez días después la sustancia registra 1,500 conteos por minuto. Con cálculo se puede demostrar que después de t días la cantidad de material radiactivo y, por consiguiente, el número de conteos por minuto $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para alguna constante c. Determine la vida media media de la sustancia.

SOLUCIÓN Como $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct},

$$N(t) = ke^{ct},$$

donde k es una constante. Si $t = 0$ y usando $N(0) = 2000$, obtenemos

$$2000 = ke^{c0} = k \cdot 1 = k.$$

En consecuencia, la fórmula para $N(t)$ se puede escribir así:

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Como $N(10) = 1500$, podemos determinar c como sigue:

$$
\begin{aligned}
1500 &= 2000e^{c \cdot 10} && \text{sea } t = 10 \text{ en } N(t) \\
\tfrac{3}{4} &= e^{10c} && \text{aislamos la expresión exponencial} \\
10c &= \ln \tfrac{3}{4} && \text{cambiamos a forma logarítmica} \\
c &= \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} && \text{dividimos entre 10}
\end{aligned}
$$

Por último, como la vida media corresponde al tiempo t en el que $N(t)$ es igual a 1,000, tenemos lo siguiente:

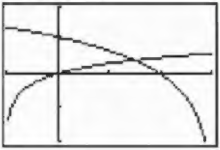
$$
\begin{aligned}
1000 &= 2000e^{ct} && \text{sea } N(t) = 1000 \\
\tfrac{1}{2} &= e^{ct} && \text{aislamos la expresión exponencial} \\
ct &= \ln \tfrac{1}{2} && \text{cambiamos a forma logarítmica} \\
t &= \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2} && \text{dividimos entre } c \\
&= \frac{1}{\frac{1}{10}\ln\frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2} && c = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{3}{4} \\
&\approx 24 \text{ días} && \text{aproximamos}
\end{aligned}
$$

El siguiente ejemplo es una buena ilustración del poder de una calculadora graficadora, porque es imposible encontrar la solución exacta usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 15 **Aproximar una solución de una desigualdad**

Grafique $f(x) = \log(x + 1)$ y $g(x) = \ln(3 - x)$, y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

FIGURA 10
$[-1, 3]$ por $[-2, 2]$



SOLUCIÓN Comenzamos por hacer las asignaciones

$$Y_1 = \log(x + 1) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \ln(3 - x)$$

Como el dominio de f es $(-1, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, 3)$, escogemos la pantalla $[-1, 3]$ por $[-2, 2]$ y obtenemos la gráfica de la figura 10. Usando una función de intersección, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(1.51, 0.40)$. Entonces, la solución aproximada de $f(x) \geq g(x)$ es el intervalo

$$1.51 < x < 3.$$

4.4 Ejercicios

Ejer. 1–2: Cambie a forma logarítmica.

1 a) $4^3 = 64$ b) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

c) $t^r = s$ d) $3^x = 4 - t$

e) $5^{7t} = \dfrac{a + b}{a}$ f) $(0.7)^t = 5.3$

2 a) $3^5 = 243$ b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

c) $c^p = d$ d) $7^x = 100p$

e) $3^{-2x} = \dfrac{P}{F}$ f) $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejer. 3–4: Cambie a forma exponencial.

3 a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

c) $\log_t r = p$ d) $\log_3 (x + 2) = 5$

e) $\log_2 m = 3x + 4$ f) $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

4 a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

c) $\log_v w = q$ d) $\log_6 (2x - 1) = 3$

e) $\log_4 p = 5 - x$ f) $\log_a 343 = \frac{3}{4}$

Ejer. 5–10: Despeje t usando logaritmos base a.

5 $2a^{t/3} = 5$ 6 $3a^{4t} = 10$

7 $K = H - Ca^t$ 8 $F = D + Ba^t$

9 $A = Ba^{Ct} + D$ **10** $L = Ma^{t/N} - P$

Ejer. 11-12: Cambie a forma logarítmica.

11 a) $10^5 = 100{,}000$ b) $10^{-3} = 0.001$

c) $10^x = y - 3$ d) $e^7 = p$

e) $e^{2t} = 3 - x$

12 a) $10^4 = 10{,}000$ b) $10^{-2} = 0.01$

c) $10^x = 38z$ d) $e^x = D$

e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejer. 13-14: Cambie a forma exponencial.

13 a) $\log x = 50$ b) $\log x = 20t$

c) $\ln x = 0.1$ d) $\ln w = 4 + 3x$

e) $\ln (z - 2) = \frac{1}{6}$

14 a) $\log x = -8$ b) $\log x = y + 4$

c) $\ln x = \frac{1}{2}$ d) $\ln z = 7 + x$

e) $\ln (t - 5) = 1.2$

Ejer. 15-16: Encuentre el número, si es posible.

15 a) $\log_5 1$ b) $\log_3 3$ c) $\log_4 (-2)$

d) $\log_7 7^2$ e) $3^{\log_3 8}$ f) $\log_5 125$

g) $\log_4 \frac{1}{16}$

16 a) $\log_8 1$ b) $\log_9 9$ c) $\log_5 0$

d) $\log_6 6^7$ e) $5^{\log_5 4}$ f) $\log_3 243$

g) $\log_2 128$

Ejer. 17–20: Encuentre el número.

17 a) $10^{\log 3}$ b) $\log 10^5$ c) $\log 100$

d) $\log 0.0001$ e) $10^{1+\log 3}$

18 a) $10^{\log 7}$ b) $\log 10^{-6}$ c) $\log 100{,}000$

d) $\log 0.001$ e) $10^{-1+\log 5}$

19 a) $e^{\ln 2}$ b) $\ln e^{-3}$ c) $e^{2+\ln 3}$

20 a) $e^{\ln 8}$ b) $\ln e^{2/3}$ c) $e^{1+\ln 5}$

Ejer. 21–36: Resuelva la ecuación.

21 $\log_4 (x + 10) = \log_4 (8 - x)$

22 $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$

23 $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$

24 $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$

25 $\log x^2 = \log (-3x - 2)$ **26** $\ln x^2 = \ln (12 - x)$

27 $\log_3 (x - 4) = 2$ **28** $\log_2 (x - 5) = 4$

29 $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ **30** $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

31 $\ln x^2 = -2$ **32** $\log x^2 = -4$

33 $e^{2 \ln x} = 9$ **34** $e^{-\ln x} = 0.2$

35 $e^{x \ln 3} = 27$ **36** $e^{x \ln 2} = 0.25$

37 Complete los enunciados para $f(x) = \log x$.

a) Cuando $x \to 1$, $f(x) \to$ ____.

b) Cuando $x \to 10$, $f(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to$ ____.

38 Complete los enunciados para $f(x) = \ln x$.

a) Cuando $x \to 1$, $f(x) \to$ ____.

b) Cuando $x \to e$, $f(x) \to$ ____.

c) Cuando $x \to \infty$, $f(x) \to$ ____.

d) Cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to$ ____.

39 Trace la gráfica de f si $a = 4$.

a) $f(x) = \log_a x$ b) $f(x) = -\log_a x$

c) $f(x) = 2 \log_a x$ d) $f(x) = \log_a (x + 2)$

e) $f(x) = (\log_a x) + 2$ f) $f(x) = \log_a (x - 2)$

g) $f(x) = (\log_a x) - 2$ h) $f(x) = \log_a |x|$

i) $f(x) = \log_a (-x)$ j) $f(x) = \log_a (3 - x)$

k) $f(x) = |\log_a x|$ l) $f(x) = \log_{1/a} x$

40 Haga el ejercicio 39 si $a = 5$.

Ejer. 41–46: Trace la gráfica de f.

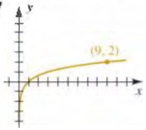
41 $f(x) = \log (x + 10)$ **42** $f(x) = \log (x + 100)$

43 $f(x) = \ln |x|$ **44** $f(x) = \ln |x - 1|$

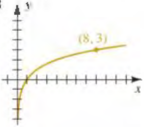
45 $f(x) = \ln e + x$ **46** $f(x) = \ln (e + x)$

Ejer. 47–48: Encuentre una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ para la gráfica dada.

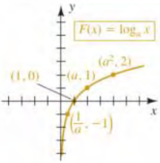
47



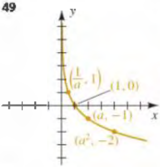
48



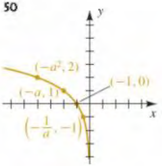
Ejer. 49–54: En la figura se muestra la gráfica de una función f. Exprese $f(x)$ en términos de F.



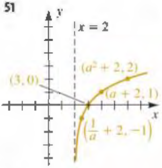
49



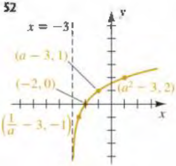
50



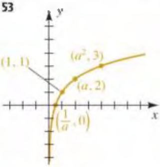
51



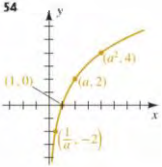
52



53



54



Ejer. 55-56: Aproxime x a tres cifras significativas.

55 **a)** $\log x = 3.6274$ **b)** $\log x = 0.9469$

c) $\log x = -1.6$ **d)** $\ln x = 2.3$

e) $\ln x = 0.05$ **f)** $\ln x = -1.6$

56 **a)** $\log x = 1.8965$ **b)** $\log x = 4.9680$

c) $\log x = -2.2$ **d)** $\ln x = 3.7$

e) $\ln x = 0.95$ **f)** $\ln x = -5$

57 **Encontrar una tasa de crecimiento** Cambie $f(x) = 1000(1.05)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la tasa de crecimiento de f.

58 **Encontrar una tasa de crecimiento** Cambie $f(x) = 50(\frac{9}{8})^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la tasa de crecimiento de f.

59 **Encontrar una tasa de desintegración** Cambie $f(x) = 20(0.97)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la tasa de desintegración de f.

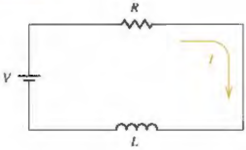
60 **Encontrar una tasa de desintegración** Cambie $f(x) = 100(\frac{1}{2})^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la tasa de desintegración de f.

61 **Desintegración del radio** Si comenzamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q que queda después de t años está dada por la fórmula $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Exprese t en términos de q y de q_0.

62 **Desintegración del isótopo de bismuto** El isótopo radiactivo de bismuto ^{210}Bi se desintegra con base en $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t es el tiempo en días. Exprese t en términos de Q y k.

63 **Circuito eléctrico** Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la figura siguiente. La corriente I en el tiempo t está dada por la fórmula $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L la inductancia. Despeje t de esta ecuación.

EJERCICIO 63



64 **Condensador eléctrico** A un condensador eléctrico con carga inicial Q_0 se le permite descargarse. Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0e^{kt}$, donde k es una constante. De esta ecuación despeje t.

65 **Escala de Richter** Use la fórmula de la escala de Richter $R = \log (I/I_0)$ para encontrar la magnitud de un terremoto que tiene una intensidad

a) 100 veces la de I_0

b) 10,000 veces la de I_0

c) 100,000 veces la de I_0

66 **Escala de Richter** Consulte el ejercicio 65. Las magnitudes más grandes de terremotos registrados han sido de entre 8 y 9 en la escala de Richter. Encuentre las intensidades correspondientes en términos de I_0.

67 **Intensidad del sonido** La sonoridad de un sonido, como la experimenta el oído humano, se basa en su nivel de intensidad. Una fórmula empleada para encontrar el nivel de intensidad α (en decibeles) que corresponde a una intensidad del sonido I es $\alpha = 10 \log(I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I establecido por acuerdo como el sonido más débil que puede ser detectado por el oído en ciertas condiciones. Encuentre α si

a) I es 10 veces mayor que I_0

b) I es 1000 veces mayor que I_0

c) I es 10,000 veces mayor que I_0. (Este es el nivel de intensidad promedio de la voz.)

68 **Intensidad del sonido** Consulte el ejercicio 67. Un nivel de intensidad del sonido de 140 decibeles produce dolor en el oído humano promedio. ¿Aproximadamente cuántas veces mayor que I_0 debe ser I para que α alcance este nivel?

69 **Crecimiento de la población en Estados Unidos** La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos t años después de 1980 puede aproximarse con la fórmula $N(t) = 231e^{0.0103t}$. ¿Cuándo será la población el doble de la de 1980?

70 **Crecimiento de la población en India** La población $N(t)$ (en millones) de India t años después de 1985 puede aproximarse con la fórmula $N(t) = 766e^{0.0182t}$. ¿Cuándo será la población de 1,500 millones?

71 **Peso de niños** La relación de Ehrenberg

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en metros) con el peso promedio W (en kilogramos) para niños de 5 a 13 años de edad.

a) Exprese W como función de h que no contenga ln.

b) Estime el peso promedio de un niño de 8 años de edad que mide 1.5 metros de estatura.

72 **Interés compuesto continuamente** Si el interés se capitaliza continuamente a razón de 4% anual, aproxime el número de años necesarios para que un depósito inicial de \$6,000 crezca a \$25,000.

73 **Presión de aire** La presión de aire $p(h)$ (en lb/pulg^2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, se puede aproximar con la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$. ¿Aproximadamente a qué altitud h la presión del aire es

a) 10 lb/pulg^2?

b) la mitad de su valor al nivel del mar?

74 **Presión de vapor** La presión de vapor P de un líquido (en lb/in^2), una medida de su volatilidad, está relacionada con su temperatura T (en °F) por la ecuación de Antoine

$$\log P = a + \frac{b}{c + T},$$

donde a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente con un incremento de temperatura. Exprese P como función de T.

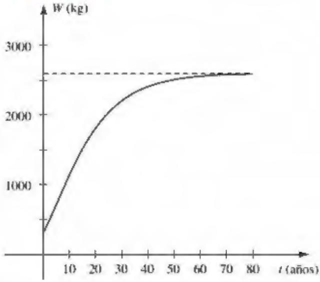
75 **Crecimiento de elefantes** El peso W (en kilogramos) de una elefanta africana de edad t (en años) se puede aproximar con

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

a) Aproxime el peso al nacer.

b) Estime la edad de una elefanta africana que pesa 1,800 kg mediante el uso 1) de la gráfica siguiente y 2) de la fórmula para W.

EJERCICIO 75



76 **Consumo de carbón** Un país actualmente tiene reservas de carbón de 50 millones de toneladas; el año pasado consumió 6.5 millones de toneladas de carbón. Los datos de años pasados y las proyecciones de población indican que la tasa de consumo R (en millones de toneladas al año) aumentará según la fórmula $R = 6.5e^{0.02t}$, y la cantidad total T de carbón (en millones de toneladas) que se usarán en t años está dada por la fórmula $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país utiliza sólo sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán las reservas de carbón?

77 **Densidad de población urbana** Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad de población D (en miles/mi^2) con la distancia x (en millas) desde el centro de la ciudad. Se ha determinado que la fórmula $D = ae^{-bx}$ para la densidad central a y el coeficiente de decrecimiento b son apropiados para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. Para la ciudad de Atlanta en 1970, $a = 5.5$ y $b = 0.10$. ¿Aproximadamente a qué distancia estaba la densidad de población de 2000 por milla cuadrada?

78 **Brillantez de estrellas** Las estrellas se clasifican en categorías de brillantez llamadas magnitudes. A las estrellas más tenues, con flujo luminoso L_0, se les asigna una magnitud de 6; a las más brillantes con flujo luminoso L se les asigna una magnitud m por medio de la fórmula

$$m = 6 - 2.5 \log \frac{L}{L_0}.$$

a) Encuentre m si $L = 10^{0.4}L_0$.

b) Despeje L en la fórmula en términos de m y L_0.

79 **Desintegración de yodo radiactivo** El yodo radiactivo ^{131}I se usa con frecuencia en estudios de rastreo de la glándula tiroides. La sustancia se desintegra según la fórmula $A(t) = A_0 a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t es el tiempo en días. Encuentre a, suponiendo que la vida media del ^{131}I es de ocho días.

80 **Contaminación radiactiva** La lluvia ácida ha depositado estroncio radiactivo ^{90}Sr en un campo grande. Si cantidades suficientes llegan por la cadena alimenticia a los seres humanos, pueden ocasionar cáncer en los huesos. Se ha determinado que el nivel de radiactividad en el campo es 2.5 veces mayor que el nivel seguro S. El ^{90}Sr se desintegra según la fórmula

$$A(t) = A_0 e^{-0.0239t},$$

donde A_0 es actualmente la cantidad en el campo y t el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminado el campo?

81 **Velocidad al caminar** En un estudio de 15 pueblos y ciudades que varían en población P de 300 a 3,000,000, se determinó que el promedio de velocidad al caminar S (en ft/s) de un peatón podía aproximarse con $S = 0.05 + 0.86 \log P$.

a) ¿En qué forma afecta la población el promedio de velocidad al caminar?

b) ¿Para qué población el promedio de velocidad al caminar es de 5 ft/s?

82 **Chips de computadora** Para los fabricantes de chips de computadora es importante considerar la fracción F de chips que fallarán después de t años de servicio. Esta fracción puede aproximarse a veces con la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$ donde c es una constante positiva.

a) ¿En qué forma el valor de c afecta la confiabilidad de un chip?

b) Si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años habrán fallado 35% de los chips?

Ejer. 83–84: Aproxime la función al valor de x a cuatro posiciones decimales.

83 **a)** $f(x) = \ln(x + 1) + e^x$, $\quad x = 2$

b) $g(x) = \dfrac{(\log x)^2 - \log x}{4}$, $\quad x = 3.97$

84 **a)** $f(x) = \log(2x^2 + 1) - 10^{-x}$, $\quad x = 1.95$

b) $g(x) = \dfrac{x - 3.4}{\ln x + 4}$, $\quad x = 0.55$

Ejer. 85–86: Aproxime la raíz real de la ecuación.

85 $x \ln x = 1$

86 $\ln x + x = 0$

Ejer. 87–88: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

87 $f(x) = 2.2 \log(x + 2)$; $\quad g(x) = \ln x$

88 $f(x) = x \ln|x|$; $\quad g(x) = 0.15e^x$

89 **Nivel de colesterol en mujeres** Estudios que relacionan el nivel de colesterol con enfermedades coronarias indican que un factor de riesgo es la razón x entre la cantidad total C de colesterol en la sangre y la cantidad H de colesterol de lipoproteína de alta densidad en la sangre. Para una mujer, el riesgo de vida R de tener un ataque cardiaco se puede aproximar con la fórmula

$$R = 2.07 \ln x - 2.04 \quad \text{siempre y cuando} \quad 0 \leq R \leq 1$$

Por ejemplo, si $R = 0.65$, entonces hay 65% de probabilidad que una mujer sufra un ataque cardiaco en su vida.

a) Calcule R para una mujer con $C = 242$ y $H = 78$.

b) Estime gráficamente x cuando el riesgo es de 75%.

90 **Nivel de colesterol en hombres** Consulte el ejercicio 89. Para un hombre, el riesgo se puede aproximar con la fórmula $R = 1.36 \ln x - 1.19$.

a) Calcule R para un hombre con $C = 287$ y $H = 65$.

b) Estime gráficamente x cuando el riesgo es de 75%.

4.5 Propiedades de los logaritmos

En la sección anterior observamos que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente. Así, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes puedan usarse para obtener leyes correspondientes de logaritmos. Esto se comprueba en las demostraciones de las leyes siguientes, que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de logaritmos

Si u y w denotan números reales positivos, entonces

1) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$

2) $\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

3) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

DEMOSTRACIONES Para las tres demostraciones, sean

$$r = \log_a u \qquad \text{y} \qquad s = \log_a w$$

Las formas exponenciales equivalentes son

$$u = a^r \qquad \text{y} \qquad w = a^s.$$

Ahora procedemos como sigue:

1)

$uw = a^r a^s$	definición de u y w
$uw = a^{r+s}$	ley 1 de los exponentes
$\log_a (uw) = r + s$	cambiamos a forma logarítmica
$\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$	definición de r y s

2)

$\dfrac{u}{w} = \dfrac{a^r}{a^s}$	definición de u y w
$\dfrac{u}{w} = a^{r-s}$	ley 5a) de los exponentes
$\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = r - s$	cambiamos a forma logarítmica
$\log_a \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$	definición de r y s

3)

$u^c = (a^r)^c$	definición de u
$u^c = a^{cr}$	ley 2 de los exponentes
$\log_a (u^c) = cr$	cambiamos a forma logarítmica
$\log_a (u^c) = c \log_a u$	definición de r

■

Las leyes de los logaritmos para los casos especiales $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales) se escriben como se muestra en la siguiente tabla.

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
1) $\log (uw) = \log u + \log w$	1) $\ln (uw) = \ln u + \ln w$
2) $\log \left(\dfrac{u}{w}\right) = \log u - \log w$	2) $\ln \left(\dfrac{u}{w}\right) = \ln u - \ln w$
3) $\log (u^c) = c \log u$	3) $\ln (u^c) = c \ln u$

Como lo indica la siguiente instrucción de atención, no hay leyes para expresar $\log_a (u + w)$ o $\log_a (u - w)$ en términos más sencillos de logaritmos.

¡Atención!

$$\log_a (u + w) \neq \log_a u + \log_a w$$
$$\log_a (u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los siguientes ejemplos ilustran usos de las leyes de logaritmos.

EJEMPLO 1 **Uso de leyes de los logaritmos**

Exprese $\log_a \dfrac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$ en términos de logaritmos de x, y y z.

SOLUCIÓN Escribimos $\sqrt{y}$ como $y^{1/2}$ y usamos leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} &= \log_a (x^3y^{1/2}) - \log_a z^2 \\
&= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 \\
&= 3 \log_a x + \tfrac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z
\end{aligned}$$

Note que si un término con exponente positivo (por ejemplo, x^3) está en el numerador de la expresión original, tendrá un coeficiente positivo en la forma expandida, y si está en el denominador (por ejemplo, z^2), tendrá un coeficiente negativo en la forma expandida. ■

EJEMPLO 2 **Uso de las leyes de logaritmos**

Exprese como un logaritmo:

$$\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$

SOLUCIÓN Aplicamos las leyes de los logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z \\
&\quad = \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 && \text{ley 3} \\
&\quad = \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) && \text{álgebra} \\
&\quad = \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) && \text{ley 1} \\
&\quad = \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} && \text{ley 2}
\end{aligned}$$
■

FIGURA 1

```
73→X:101→Y:7→Z
                    7
(1/3)log(X²-1)-l
og(Y)-4log(Z)
      -4.142525462
log(³√(X²-1)/(Y*
Z^4))
      -4.142525462
```

En la figura 1 ejecutamos una prueba sencilla del ejemplo 2 con calculadora, asignando valores arbitrarios a X, Y y Z y luego evaluando la expresión dada y nuestra respuesta. No demuestra que tengamos razón, pero da credibilidad a nuestro resultado (por no mencionar tranquilidad mental).

EJEMPLO 3 **Resolución de una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\log_5 (2x + 3) &= \log_5 11 + \log_5 3 && \text{dado}\\
\log_5 (2x + 3) &= \log_5 (11 \cdot 3) && \text{ley 1 de los logaritmos}\\
2x + 3 &= 33 && \text{las funciones logarítmicas son biunívocas}\\
x &= 15 && \text{despejamos } x
\end{aligned}$$

✓ **Comprobación** $x = 15$ LI: $\log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$

LD: $\log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$

Como $\log_5 33 = \log_5 33$ es un enunciado verdadero, $x = 15$ es una solución. ■

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números reales positivos u y w. Si aplicamos estas leyes a ecuaciones en las que u y w son expresiones que contienen una variable, entonces pueden aparecer soluciones extrañas, por lo cual las respuestas deben sustituirse por la variable en u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

EJEMPLO 4 **Resolución de una ecuación logarítmica**

Resuelva la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\log_2 x + \log_2 (x + 2) &= 3 && \text{dado}\\
\log_2 [x(x + 2)] &= 3 && \text{ley 1 de los logaritmos}\\
x(x + 2) &= 2^3 && \text{cambiamos a forma exponencial}\\
x^2 + 2x - 8 &= 0 && \text{multiplicamos e igualamos a 0}\\
(x - 2)(x + 4) &= 0 && \text{factorizamos}\\
x - 2 = 0, \quad x + 4 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
x = 2, \quad x &= -4 && \text{despejamos } x
\end{aligned}$$

✓ **Comprobación** $x = 2$ LI: $\log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4$

$= 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$

LD: 3

Como $3 = 3$ es un enunciado verdadero, $x = 2$ es una solución.

✓ **Comprobación** $x = -4$ LI: $\log_2 (-4) + \log_2 (-4 + 2)$

Como los logaritmos de números negativos no están definidos, $x = -4$ no es una solución. ■

EJEMPLO 5 **Solución de una ecuación logarítmica**

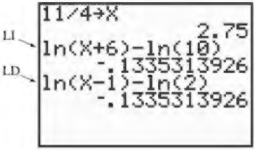
Resuelva la ecuación $\ln(x + 6) - \ln 10 = \ln(x - 1) - \ln 2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \ln(x + 6) - \ln(x - 1) &= \ln 10 - \ln 2 && \text{reordenamos los términos} \\ \ln\left(\frac{x + 6}{x - 1}\right) &= \ln \frac{10}{2} && \text{ley 2 de logaritmos} \\ \frac{x + 6}{x - 1} &= 5 && \ln \text{ es biunívoco} \\ x + 6 &= 5x - 5 && \text{multiplicamos por } x - 1 \\ x &= \tfrac{11}{4} && \text{despejamos } x \end{aligned}$$

✓ **Comprobación** Como $\ln(x + 6)$ y $\ln(x - 1)$ están definidos en $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como nuestros pasos algebraicos son correctos, deducimos que $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada. (La figura 2 muestra una comprobación con calculadora del ejemplo 5.)

FIGURA 2



■

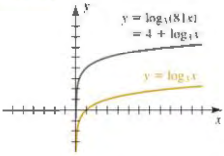
EJEMPLO 6 **Desplazamiento de la gráfica de una ecuación logarítmica**

Trace la gráfica de $y = \log_3(81x)$.

SOLUCIÓN Podemos reescribir la ecuación como sigue:

$$\begin{aligned} y &= \log_3(81x) && \text{dado} \\ &= \log_3 81 + \log_3 x && \text{ley 1 de los logaritmos} \\ &= \log_3 3^4 + \log_3 x && 81 = 3^4 \\ &= 4 + \log_3 x && \log_a a^x = x \end{aligned}$$

FIGURA 3



Entonces, podemos obtener la gráfica de $y = \log_3(81x)$ al desplazar verticalmente la gráfica de $y = \log_3 x$ de la figura 2 de la sección 4.4 cuatro unidades hacia arriba. Esto nos da el trazo de la figura 3. ■

EJEMPLO 7 **Trazo de gráficas de ecuaciones logarítmicas**

Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = \log_3 (x^2)$ **b)** $y = 2 \log_3 x$

SOLUCIÓN

a) Como $x^2 = |x|^2$, podemos reescribir la ecuación dada como

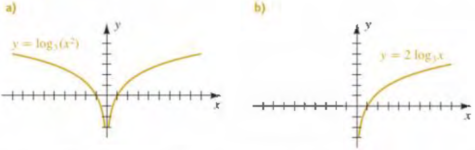
$$y = \log_3 |x|^2$$

Usando la ley 3 de los logaritmos, tenemos

$$y = 2\log_3 |x|$$

Podemos obtener la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ si multiplicamos por 2 las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $y = \log_3 |x|$ en la figura 4 de la sección 4.4. Esto nos da la gráfica de la figura 4a).

FIGURA 4



b) Si $y = 2 \log_3 x$, entonces x debe ser positiva. Por lo tanto, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ de la figura 4a) que se encuentra a la derecha del eje y. Esto nos da la figura 4b). ■

EJEMPLO 8 **Una relación entre precio de venta y demanda**

En el estudio de economía, la demanda D de un producto a veces se relaciona con su precio de venta p por una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p,$$

donde a, c y k son constantes positivas.

a) Despeje D de la ecuación.

b) ¿En qué forma se afecta la demanda al aumentar o disminuir el precio de venta?

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned}
\log_a D &= \log_a c - k \log_a p && \text{dado} \\
\log_a D &= \log_a c - \log_a p^k && \text{ley 3 de los logaritmos} \\
\log_a D &= \log_a \frac{c}{p^k} && \text{ley 2 de los logaritmos} \\
D &= \frac{c}{p^k} && \log_a \text{ es biunívoca}
\end{aligned}$$

b) Si el precio p aumenta, el denominador p^k en $D = c/p^k$ también aumentará y, por lo tanto, la demanda D del producto disminuirá. Si el precio disminuye, entonces p^k disminuirá y la demanda D aumentará. ■

4.5 Ejercicios

Ejer. 1–8: Exprese en términos de logaritmos de x, y, z o w.

1 a) $\log_4 (xz)$ b) $\log_4 (y/x)$ c) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

2 a) $\log_3 (xyz)$ b) $\log_3 (xz/y)$ c) $\log_3 \sqrt[5]{y}$

3 $\log_a \dfrac{x^3w}{y^2z^4}$

4 $\log_a \dfrac{y^5w^2}{x^4z^3}$

5 $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

6 $\log \dfrac{\sqrt{y}}{x^4\sqrt[3]{z}}$

7 $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5z}}$

8 $\ln x\sqrt[5]{\dfrac{y^4}{z^2}}$

Ejer. 9–16: Escriba la expresión como un logaritmo.

9 a) $\log_3 x + \log_3 (5y)$ b) $\log_3 (2z) - \log_3 x$

c) $\frac{1}{5} \log_3 y$

10 a) $\log_4 (3z) + \log_4 x$ b) $\log_4 x - \log_4 (7y)$

c) $\frac{1}{3} \log_4 w$

11 $2 \log_a x - \frac{1}{3} \log_a (x - 2) - 5 \log_a (2x + 3)$

12 $5 \log_a x - \frac{1}{2} \log_a (3x - 4) - 3 \log_a (5x + 1)$

13 $\log (x^3y^2) - 2 \log x\sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\dfrac{x}{y}\right)$

14 $2 \log \dfrac{y^3}{x} - 3 \log y + \dfrac{1}{2} \log x^4y^2$

15 $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln (x^3y^6) - 5 \ln y$

16 $2 \ln x - 4 \ln (1/y) - 3 \ln (xy)$

Ejer. 17–38: Resuelva la ecuación.

17 $\log_6 (2x - 3) = \log_6 24 - \log_6 3$

18 $\log_4 (3x + 2) = \log_4 7 + \log_4 3$

19 $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$

20 $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$

21 $\log x - \log (x + 1) = 3 \log 4$

22 $\log (x + 2) - \log x = 2 \log 4$

23 $\ln (-4 - x) + \ln 3 = \ln (2 - x)$

24 $\ln x + \ln (x + 6) = \frac{1}{2} \ln 9$

25 $\log_2 (x + 7) + \log_2 x = 3$

26 $\log_6 (x + 5) + \log_6 x = 2$

27 $\log_2 (-x) + \log_2 (2 - x) = 3$

28 $\log_3 (-x) + \log_3 (8 - x) = 2$

29 $\log_3 (x + 3) + \log_3 (x + 5) = 1$

30 $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x - 4) = 2$

31 $\log (x + 3) = 1 - \log (x - 2)$

32 $\log (x + 4) = 2 - \log (x - 2)$

33 $\log (20x) = 3 + \log (x - 5)$

34 $\log (57x) = 2 + \log (x - 2)$

35 $\ln x = 1 - \ln (x + 2)$

36 $\ln x = 1 + \ln (x + 1)$

37 $\log_3 (x - 2) = \log_3 27 - \log_3 (x - 4) - 5^{\log_5 1}$

38 $\log_2 (x + 3) = \log_2 (x - 3) + \log_3 9 + 4^{\log_4 3}$

Ejer. 39–50: Trace la gráfica de f.

39 $f(x) = \log_3 (3x)$

40 $f(x) = \log_4 (16x)$

41 $f(x) = 3 \log_3 x$

42 $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$

43 $f(x) = \log_3 (x^2)$

44 $f(x) = \log_2 (x^2)$

45 $f(x) = \log_2 (x^3)$

46 $f(x) = \log_3 (x^3)$

47 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

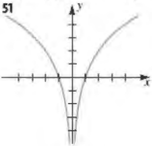
48 $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$

49 $f(x) = \log_3 \left(\dfrac{1}{x}\right)$

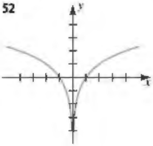
50 $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ejer. 51–54: En la figura se ilustra la gráfica de una función f. Exprese $f(x)$ como un logaritmo base 2.

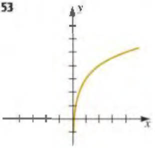
51



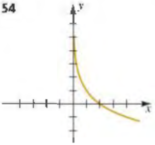
52



53



54



55 **Volumen y decibeles** Cuando se incrementa el control de volumen de un equipo estereofónico, el voltaje en las terminales del altavoz cambia de V_1 a V_2, y el aumento de decibeles en ganancia está dado por

$$\text{db} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}.$$

Encuentre el aumento de decibeles si el voltaje cambia de 2 a 4.5 volts.

56 **Volumen y decibeles** Consulte el ejercicio 55. ¿Qué razón de voltaje k se necesita para una ganancia de +20 decibeles? ¿Y para una ganancia de +40 decibeles?

57 **Ley de Pareto** La ley de Pareto para países capitalistas expresa que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyo ingreso es superior a x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. Despeje y de esta ecuación.

58 **Precio y demanda** Si p denota el precio de venta (en dólares) de una mercancía y x la demanda correspondiente (en número vendido por día), entonces la relación entre p y x está dada a veces por $p = p_0e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Exprese x como función de p.

59 **Velocidad del viento** Si v denota la velocidad del viento (en m/s) a una altura de z metros sobre el suelo, entonces, en ciertas condiciones $v = c \ln (z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 es la altura a la que la velocidad es cero. Trace la gráfica de esta ecuación en un plano zv para $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

60 **Eliminar la contaminación** Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha estimado que el nivel y de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 es el nivel de contaminantes al que ya no hubo más contaminación. ¿Cuántos años transcurrirían para limpiar 50% los de contaminantes?

61 **Reacción a un estímulo** Denote con R la reacción de un sujeto a un estímulo de fuerza x. Hay muchas posibilidades de R y x. Si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro), R puede ser la estimación del sujeto de qué tan salada está la solución, con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x está dada por la fórmula de Weber-Fechner, $R(x) = a \log (x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 se denomina estímulo de umbral.

a) Encuentre $R(x_0)$.

b) Encuentre una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

62 **Energía del electrón** La energía $E(x)$ de un electrón después de pasar por material de grosor x está dada por la ecuación $E(x) = E_0e^{-x/x_0}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 la longitud de onda de la radiación.

a) Exprese, en términos de E_0, la energía de un electrón después de pasar por material de grosor x_0.

b) Exprese, en términos de x_0, el grosor al que el electrón pierde 99% de su energía inicial.

63 **Capa de ozono** Un método para estimar el espesor de la capa de ozono es usar la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx,$$

donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda particular de la luz solar antes de llegar a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar una capa de ozono de x centímetros de espesor, y k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda. Suponga que para una longitud de onda de 3176×10^{-8} centímetros con $k \approx 0.39$, I_0/I se mide como 1.12. Aproxime el espesor de la capa de ozono al 0.01 centímetro más cercano.

64 **Capa de ozono** Consulte el ejercicio 63. Aproxime el porcentaje de disminución en la intensidad de la luz con una longitud de onda de 3176×10^{-8} centímetros si la capa de ozono mide 0.24 centímetros de espesor.

Ejer. 65–66: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.

65 $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

66 $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

Ejer. 67–68: Use una gráfica para estimar las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

67 $e^{-x} - 2 \log (1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

68 $0.3 \ln x + x^3 - 3.1x^2 + 1.3x + 0.8 = 0$; $(0, 3)$

Ejer. 69–70: Grafique f en el intervalo [0.2, 16]. a) Estime los intervalos donde f es creciente o decreciente. b) Estime los valores máximo y mínimo de f en [0.2, 16].

69 $f(x) = 2 \log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

70 $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35^x - \log x + 5$

Ejer. 71–72: Resuelva gráficamente la ecuación.

71 $x \log x - \log x = 5$

72 $0.3e^x - \ln x = 4 \ln (x + 1)$

Ejer. 73–74: Los graznidos de las aves disminuyen en intensidad (sonoridad) cuando se mueven por la atmósfera. Cuanto más lejos se encuentre un ave de un observador, más débil será el sonido. Esta disminución en intensidad se puede usar para estimar la distancia entre un observador y un ave. Una fórmula que se puede usar para medir esta distancia es

$$I = I_0 - 20 \log d - kd \quad \text{siempre que } 0 \leq I \leq I_0,$$

donde I_0 representa la intensidad (en decibeles) del ave a una distancia de un metro (I_0 se conoce con frecuencia y, por lo general, depende sólo del tipo de ave), I es la intensidad observada a una distancia de d metros del ave y k una constante positiva que depende de condiciones atmosféricas como temperatura y humedad. Dadas I_0, I y k, estime gráficamente la distancia d entre el ave y un observador.

73 $I_0 = 70, \quad I = 20, \quad k = 0.076$

74 $I_0 = 60, \quad I = 15, \quad k = 0.11$

4.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección consideraremos varios tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas y sus aplicaciones. Al resolver una ecuación con expresiones exponenciales con bases constantes y variables que aparecen en los exponentes, con frecuencia *igualamos los logaritmos de ambos lados* de la ecuación. Al hacerlo así, las variables en el exponente se convierten en multiplicadores y la ecuación resultante suele ser más fácil de resolver. Nos referiremos a este paso simplemente como "obtener log en ambos lados".

EJEMPLO 1 **Resolución de una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3^x &= 21 && \text{dado} \\ \log (3^x) &= \log 21 && \text{obtenemos el logaritmo en ambos lados} \\ x \log 3 &= \log 21 && \text{ley 3 de los logaritmos} \\ x &= \frac{\log 21}{\log 3} && \text{dividimos entre log 3} \end{aligned}$$

También podríamos haber usado logaritmos naturales para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$

Con una calculadora obtenemos la solución aproximada de $x \approx 2.77$. Una prueba parcial es observar que, como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$ debe estar entre 2 y 3, un poco más cerca de 3 que de 2. ■

También podríamos haber resuelto la ecuación del ejemplo 1 al cambiar la forma exponencial $3^x = 21$ a forma logarítmica, como lo hicimos en la sección 4.4, para obtener

$$x = \log_3 21$$

Esta es, de hecho, la solución de la ecuación; no obstante, como en general las calculadoras tienen teclas sólo para log y ln, no podemos aproximar $\log_3 21$ directamente. El siguiente teorema nos da una *fórmula de cambio de base* más sencilla para encontrar $\log_b u$ si $u > 0$ y b es *cualquier* base logarítmica.

Teorema: fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y si a y b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

EJEMPLO Comenzamos con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \qquad \text{y} \qquad b^w = u$$

y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
b^w &= u && \text{dado} \\
\log_a b^w &= \log_a u && \text{obtenemos } \log_a \text{ en ambos lados} \\
w \log_a b &= \log_a u && \text{ley 3 de los logaritmos} \\
w &= \frac{\log_a u}{\log_a b} && \text{dividimos entre } \log_a b
\end{aligned}$$

Como $w = \log_b u$, obtenemos la fórmula. ■

El siguiente caso especial de la fórmula de cambio de base se obtiene al $u = a$ y usando el dato de que $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

La fórmula de cambio de base se confunde a veces con la ley 2 de los logaritmos. La primera de las siguientes llamadas de atención podría recordarse con la frase "un cociente de logaritmos *no* es el logaritmo del cociente".

¡Atención!

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}; \qquad \frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a (u - b)$$

Los casos especiales de la fórmula de cambio de base que se usan con mayor frecuencia son aquellos para los que $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales), como se expresa en el siguiente recuadro.

Fórmulas especiales de cambio de base

$$\text{1)} \quad \log_b u = \frac{\log_{10} u}{\log_{10} b} = \frac{\log u}{\log b} \qquad \text{2)} \quad \log_b u = \frac{\log_e u}{\log_e b} = \frac{\ln u}{\ln b}$$

A continuación volvemos a trabajar el ejemplo 1 usando una fórmula de cambio de base.

EJEMPLO 2 Uso de una fórmula de cambio de base

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 3^x &= 21 && \text{dado} \\ x &= \log_3 21 && \text{cambiamos a forma logarítmica} \\ &= \frac{\log 21}{\log 3} && \text{fórmula especial de cambio de base 1} \end{aligned}$$

Otro método es usar la fórmula especial de cambio de base 2 para obtener

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$ ■

Los logaritmos base 2 se usan en ciencias informáticas. El siguiente ejemplo indica cómo aproximar logaritmos base 2 usando fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 **Aproximación de un logaritmo base 2**

Aproxime $\log_2 5$ usando

a) logaritmos comunes **b)** logaritmos naturales

SOLUCIÓN Usando las fórmulas especiales de cambio de base 1 y 2, obtenemos lo siguiente:

a) $\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$ **b)** $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$ ■

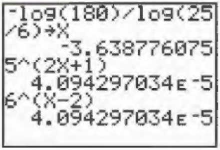
EJEMPLO 4 **Resolución de una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

SOLUCIÓN Podemos usar logaritmos comunes o naturales. El uso de logaritmos comunes nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} 5^{2x+1} &= 6^{x-2} && \text{dado} \\ \log (5^{2x+1}) &= \log (6^{x-2}) && \text{obtenemos log en ambos lados} \\ (2x+1)\log 5 &= (x-2)\log 6 && \text{ley 3 de los logaritmos} \\ 2x\log 5 + \log 5 &= x\log 6 - 2\log 6 && \text{multiplicamos} \\ 2x\log 5 - x\log 6 &= -\log 5 - 2\log 6 && \text{pasamos a un lado todos los términos con } x \\ x(\log 5^2 - \log 6) &= -(\log 5 + \log 6^2) && \text{factorizamos y usamos la ley 3 de los logaritmos} \\ x &= -\frac{\log (5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}} && \text{despejamos } x \text{ y usamos las leyes de los logaritmos} \end{aligned}$$

FIGURA 1



Una aproximación es $x \approx -3.64$. La figura 1 muestra una comprobación con calculadora para este ejemplo. Deducimos de la comprobación que las gráficas de $y = 5^{2x+1}$ y $y = 6^{x-2}$ se intersecan en aproximadamente $(-3.64, 0.00004)$. ■

EJEMPLO 5 **Resolución de una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

SOLUCIÓN

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3 \qquad \text{dado}$$
$$5^x - 5^{-x} = 6 \qquad \text{multiplicamos por 2}$$
$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6 \qquad \text{definición de exponente negativo}$$
$$5^x(5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x) \qquad \text{multiplicamos por el mcd, } 5^x$$
$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{simplificamos y restamos } 6(5^x)$$

Note que $(5^x)^2$ se puede escribir como 5^{2x}.

Reconocemos esta forma de ecuación como una cuadrática en 5^x y procedemos como sigue:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{ley de los exponentes}$$
$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \qquad \text{fórmula cuadrática}$$
$$5^x = 3 \pm \sqrt{10} \qquad \text{simplificamos}$$
$$5^x = 3 + \sqrt{10} \qquad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$
$$\log 5^x = \log\left(3 + \sqrt{10}\right) \qquad \text{obtenemos log en ambos lados}$$
$$x \log 5 = \log\left(3 + \sqrt{10}\right) \qquad \text{ley 3 de los logaritmos}$$
$$x = \frac{\log\left(3 + \sqrt{10}\right)}{\log 5} \qquad \text{dividimos entre log 5}$$

Una aproximación es $x \approx 1.13$. ■

EJEMPLO 6 **Resolución de una ecuación que contiene logaritmos**

Resuelva la ecuación $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ para x.

SOLUCIÓN

$$\log x^{1/3} = \sqrt{\log x} \qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$
$$\tfrac{1}{3} \log x = \sqrt{\log x} \qquad \log x^r = r \log x$$
$$\tfrac{1}{9}(\log x)^2 = \log x \qquad \text{elevamos ambos lados al cuadrado}$$
$$(\log x)^2 = 9 \log x \qquad \text{multiplicamos por 9}$$
$$(\log x)^2 - 9 \log x = 0 \qquad \text{igualamos un lado a 0}$$
$$(\log x)(\log x - 9) = 0 \qquad \text{factorizamos } \log x$$
$$\log x = 0, \quad \log x - 9 = 0 \qquad \text{igualamos a 0 cada factor}$$
$$\log x = 9 \qquad \text{sumamos 9}$$
$$x = 10^0 = 1 \quad \text{or} \quad x = 10^9 \qquad \log_{10} x = a \iff x = 10^a$$

✓ **Comprobación** $x = 1$ LI: $\log \sqrt[3]{1} = \log 1 = 0$
LD: $\sqrt{\log 1} = \sqrt{0} = 0$

✓ **Comprobación** $x = 10^9$ LI: $\log \sqrt[3]{10^9} = \log 10^3 = 3$
LD: $\sqrt{\log 10^9} = \sqrt{9} = 3$

La ecuación tiene dos soluciones: 1 y 1,000 millones. ■

La función $y = 2/(e^x + e^{-x})$ se llama **función secante hiperbólica**. En el siguiente ejemplo despejamos x de esta ecuación en términos de y. Con restricciones apropiadas, esto nos da la función inversa.

EJEMPLO 7 **Encontrar una función hiperbólica inversa**

De la ecuación $y = 2/(e^x + e^{-x})$ despeje x en términos de y.

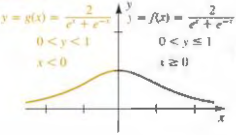
SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} && \text{dado}\\
ye^x + ye^{-x} &= 2 && \text{multiplicamos por } e^x + e^{-x}\\
ye^x + \frac{y}{e^x} &= 2 && \text{definición de exponente negativo}\\
ye^x(e^x) + \frac{y}{e^x}(e^x) &= 2(e^x) && \text{multiplicamos por el mcd, } e^x\\
y(e^x)^2 - 2e^x + y &= 0 && \text{simplificamos y restamos } 2e^x
\end{aligned}
$$

Reconocemos esta forma de la ecuación como una cuadrática en e^x con coeficientes $a = y$, $b = -2$ y $c = y$. Tenga en cuenta que estamos despejando e^x, no x.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(y)(y)}}{2(y)} && \text{fórmula cuadrática}\\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} && \text{simplificamos}\\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4}\,\sqrt{1 - y^2}}{2y} && \text{factorizamos } \sqrt{4}\\
e^x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} && \text{cancelamos un factor de 2}\\
x &= \ln \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} && \text{obtenemos ln en ambos lados}
\end{aligned}
$$

FIGURA 2



Para la curva negra $y = f(x)$ en la figura 2, la función inversa es

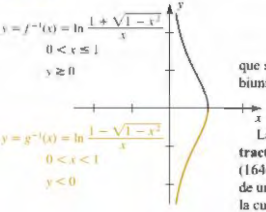
$$y = f^{-1}(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x},$$

que se muestra en negro en la figura 3. Note las relaciones de dominio y rango. Para la curva color naranja $y = g(x)$ en la figura 2, la función inversa es

$$y = g^{-1}(x) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x},$$

que se muestra en color naranja en la figura 3. Como la secante hiperbólica no es biunívoca, no puede tener una ecuación sencilla para su inversa. ■

FIGURA 3



La secante hiperbólica inversa es parte de la ecuación de la curva llamada **tractriz**. La curva se relaciona con la solución de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) a la pregunta "¿cuál es la trayectoria de un cuerpo arrastrado a lo largo de un plano horizontal con una cuerda de longitud constante, cuando el extremo de la cuerda no unido al cuerpo se mueve a lo largo de una recta en el plano?".

EJEMPLO 8 **Aproximación de la penetración de luz en un océano**

La ley de Beer-Lambert expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en un océano está dada por $I = I_0c^x$, donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

a) Despeje x en términos de logaritmos comunes.

b) Si $c = \frac{1}{4}$, aproxime la profundidad a la que $I = 0.01I_0$. (Esto determina la zona fótica donde puede tener lugar la fotosíntesis.)

SOLUCIÓN

a)

$$
\begin{aligned}
I &= I_0c^x && \text{dado}\\
\frac{I}{I_0} &= c^x && \text{aísle la expresión exponencial}\\
x &= \log_c \frac{I}{I_0} && \text{cambie a forma logarítmica}\\
&= \frac{\log (I/I_0)}{\log c} && \text{fórmula especial de cambio de base 1}
\end{aligned}
$$

b) Si $I = 0.01I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x obtenida en el inciso a), tenemos

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\log (0.01I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} && \text{sustituimos } I \text{ y } c\\
&= \frac{\log (0.01)}{\log 1 - \log 4} && \text{cancelamos } I_0\text{; ley 2 de los logaritmos}\\
&= \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} && \text{propiedad de los logaritmos}\\
&= \frac{-2}{-\log 4} && \log 10^x = x\\
&= \frac{2}{\log 4}. && \text{simplificamos}
\end{aligned}
$$

Una aproximación es $x \approx 3.32$ m. ■

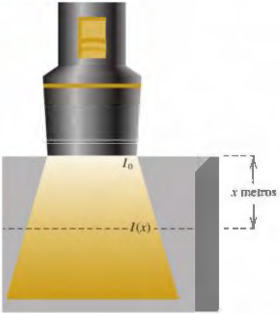
EJEMPLO 9 **Comparación de intensidades de luz**

Si un haz de luz que tiene intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, entonces su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0e^{-1.4x}$ (vea la figura 4). ¿A qué profundidad tendrá la intensidad la mitad de su valor en la superficie?

SOLUCIÓN En la superficie, $x = 0$, y la intensidad es

$$
\begin{aligned}
I(0) &= I_0e^0\\
&= I_0
\end{aligned}
$$

FIGURA 4



Deseamos encontrar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2}I_0$. Esto lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned} I(x) &= \tfrac{1}{2}I_0 && \text{intensidad deseada} \\ I_0e^{-1.4x} &= \tfrac{1}{2}I_0 && \text{fórmula de } I(x) \\ e^{-1.4x} &= \tfrac{1}{2} && \text{dividimos entre } I_0\ (I_0 \neq 0) \\ -1.4x &= \ln \tfrac{1}{2} && \text{cambiamos a forma logarítmica} \\ x &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1.4} && \text{dividimos entre } -1.4 \end{aligned}$$

Una aproximación es $x \approx 0.495$ m. ■

EJEMPLO 10 **Una curva logística**

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

donde k, b y c son constantes positivas. Estas curvas son útiles para describir una población y que al principio crece rápidamente, pero cuya tasa de crecimiento disminuye después de que x alcanza cierto valor. En un estudio famoso del crecimiento de protozoarios realizado por Gause, se descubrió que una población de *Paramecium caudata* estaba descrita por una ecuación logística con $c = 1.1244$, $k = 105$ y el tiempo x en días.

a) Encuentre b si la población inicial era de tres protozoarios.

b) En el estudio, la tasa máxima de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué tiempo x ocurrió esto?

c) Demuestre que después de largo tiempo, la población descrita por cualquier curva logística se aproxima a la constante k.

SOLUCIÓN

a) Sea $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística, para obtener

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

A continuación, procedemos como sigue:

$$3 = \frac{105}{1 + be^{0}} = \frac{105}{1 + b} \qquad y = 3 \text{ cuando } x = 0$$
$$1 + b = 35 \qquad \text{multiplicamos por } \frac{1+b}{3}$$
$$b = 34 \qquad \text{despejamos } b$$

b) El hecho de que $b = 34$ nos lleva a lo siguiente:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}} \qquad \text{sea } y = 52 \text{ en el inciso a)}$$
$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52} \qquad \text{multiplicamos por } \frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$$
$$e^{-1.1244x} = \left(\tfrac{105}{52} - 1\right) \cdot \tfrac{1}{34} = \tfrac{53}{1768} \qquad \text{aislamos } e^{-1.1244x}$$
$$-1.1244x = \ln \tfrac{53}{1768} \qquad \text{cambiamos a forma logarítmica}$$
$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ días} \qquad \text{dividimos entre } -1.1244$$

c) A medida que $x \to \infty$, $e^{-cx} \to 0$. En consecuencia,

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}} \to \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$

En el siguiente ejemplo graficamos la ecuación obtenida en el inciso a) del ejemplo precedente.

EJEMPLO 11 **Trazo de la gráfica de una curva logística**

Grafique la curva logística dada por

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}.$$

y estime el valor de x para $y = 52$.

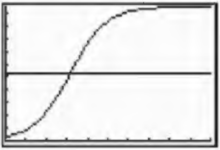
SOLUCIÓN Comenzamos por asignar

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1 y 52 a Y_2. Como el tiempo x es no negativo, escogemos Xmín = 0. Seleccionamos Xmáx = 10 para incluir el valor de x hallado en el inciso b) del ejemplo 10. Por el inciso c), sabemos que el valor de y no puede exceder de 105. Entonces, escogemos Ymín = 0 y Ymáx = 105 y obtenemos una pantalla semejante a la figura 5.

Usando una función de intersección, vemos que para $y = 52$, el valor de x es de aproximadamente 3.12, que concuerda con la aproximación encontrada en el inciso b) del ejemplo 10.

FIGURA 5
[0, 10] por [0, 105, 10]



El siguiente ejemplo muestra cómo puede usarse una fórmula de cambio de base para graficar funciones logarítmicas con bases diferentes de 10 y e en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 12 **Estimación de puntos de intersección de gráficas logarítmicas**

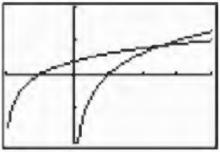
Estime el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \log_6 (x + 2)$$

SOLUCIÓN Casi todas las calculadoras graficadoras están diseñadas para trabajar sólo con funciones logarítmicas comunes y naturales. Por lo tanto, primero usamos una fórmula de cambio de base para reescribir f y g como

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\ln (x + 2)}{\ln 6}$$

FIGURA 6
$[-2, 4]$ por $[-2, 2]$



A continuación, asignamos $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln(x + 2)/\ln 6$ a Y_1 y Y_2, respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 usando una pantalla estándar, vemos que hay un punto de intersección en el primer cuadrante con $2 < x < 3$. Usando una función de intersección, encontramos que el punto de intersección es aproximadamente $(2.52, 0.84)$.

La figura 6 se obtuvo usando dimensiones de pantalla de $[-2, 4]$ por $[-2, 2]$. No hay otros puntos de intersección, porque f aumenta más rápidamente que g para $x > 3$. ■

4.6 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre la solución exacta y una aproximación a dos posiciones decimales para ella usando a) el método del ejemplo 1 y b) el método del ejemplo 2.

1 $5^x = 3$ **2** $4^x = 7$

3 $3^{4-x} = 5$ **4** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 100$

Ejer. 5–8: Estime utilizando la fórmula de cambio de base.

5 $\log_5 12$ **6** $\log_8 5$

7 $\log_9 0.9$ **8** $\log_6 \frac{1}{3}$

Ejer. 9–10: Evalúe utilizando la fórmula de cambio de base (sin calculadora).

9 $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 4}$ **10** $\dfrac{\log_7 243}{\log_7 3}$

Ejer. 11–28: Encuentre la solución exacta usando logaritmos comunes y una aproximación a dos posiciones decimales de cada solución, cuando sea apropiado.

11 $2^{-x} = 8$ **12** $2^{-x^2} = 5$

13 $3^{-x^2} = 7$ **14** $3^{-x} = 81$

15 $3^{x+4} = 2^{1-3x}$ **16** $4^{2x+3} = 5^{x-2}$

17 $2^{2x-3} = 5^{x-2}$ **18** $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$

19 $\log x = 1 - \log (x - 3)$

20 $\log (5x + 1) = 2 + \log (2x - 3)$

21 $\log (x^2 + 4) - \log (x + 2) = 2 + \log (x - 2)$

22 $\log (x + 3) + \log (x - 3) = \log (x^2 + 5) - 2$

23 $\log (x - 1) = \log (2/x) + \log (3x - 5)$

24 $\log (x - 4) - \log (3x - 10) = \log (1/x)$

25 $5^x + 125(5^{-x}) = 30$ **26** $3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28$

27 $4^x - 3(4^{-x}) = 8$ **28** $2^x - 6(2^{-x}) = 6$

Ejer. 29–36: Resuelva la ecuación sin usar calculadora.

29 $\log(x^2) = (\log x)^2$

30 $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

31 $\log(\log x) = 2$

32 $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

33 $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

34 $\log(x^3) = (\log x)^3$

35 $e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

36 $e^x + 4e^{-x} = 5$

Ejer. 37–38: Resuelva la ecuación.

37 $\log_3 x - \log_9(x + 42) = 0$

38 $\log_4 x + \log_8 x = 1$

Ejer. 39–42: Use logaritmos comunes para despejar x en términos de y.

39 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$

40 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2}$

41 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

42 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$

Ejer. 43–46: Use logaritmos naturales para despejar x en términos de y.

43 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

44 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

45 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

46 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Ejer. 47–48: Trace la gráfica de f y use la fórmula de cambio de base para aproximar el punto de intersección con el eje y.

47 $f(x) = \log_2(x + 3)$

48 $f(x) = \log_3(x + 5)$

Ejer. 49–50: Trace la gráfica de f y use la fórmula de cambio de base para aproximar el punto de intersección con el eje x.

49 $f(x) = 4^x - 3$

50 $f(x) = 3^x - 6$

Ejer. 51–54: Los químicos emplean un número denotado por pH para describir cuantitativamente la acidez o basicidad de las soluciones. Por definición, $\text{pH} = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro.

51 Aproxime el pH de cada sustancia.

a) vinagre: $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$

b) zanahorias: $[H^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$

c) agua de mar: $[H^+] \approx 5.0 \times 10^{-9}$

52 Aproxime la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ de cada sustancia.

a) manzanas: $\text{pH} \approx 3.0$

b) cerveza: $\text{pH} \approx 4.2$

c) leche: $\text{pH} \approx 6.6$

53 Se considera que una solución es básica si $[H^+] < 10^{-7}$ o ácida si $[H^+] > 10^{-7}$. Encuentre las correspondientes desigualdades que contengan el pH.

54 Muchas soluciones tienen un pH de entre 1 y 14. Encuentre el rango correspondiente de $[H^+]$.

55 **Interés compuesto** Use la fórmula del interés compuesto para determinar cuánto tiempo tardará una suma de dinero en duplicarse si se invierte a razón de 6% anual compuesto mensualmente.

56 **Interés compuesto** De la fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

despeje t usando logaritmos naturales.

57 **Zona fótica** Consulte el ejemplo 8. Desde el punto de vista de la biología marina, la zona más importante en el mar es la zona fótica, en la que tiene lugar la fotosíntesis. La zona fótica termina a la profundidad a la que penetra alrededor de 1% de la luz de la superficie. En aguas muy claras en el Caribe, 50% de la luz de superficie alcanza una profundidad de unos 13 metros. Estime la profundidad de la zona fótica.

58 **Zona fótica** En contraste con la situación descrita en el ejercicio 57, en partes del puerto de Nueva York, 50% de la luz de la superficie no llega a una profundidad de 10 centímetros. Estime la profundidad de la zona fótica.

59 **Absorción de medicamento** Si una tableta de 100 miligramos de un medicamento para el asma se toma oralmente y si nada de este fármaco está presente en el cuerpo cuando se toma la tableta por primera vez, la cantidad total A en el torrente sanguíneo después de t minutos se pronostica que será

$$A = 100[1 - (0.9)^t] \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 10$$

a) Trace la gráfica de la ecuación.

b) Determine el número de minutos necesario para que 50 miligramos del fármaco entren en el torrente sanguíneo.

60 **Dosis de medicamento** Un medicamento se elimina del cuerpo por la orina. Suponga que para una dosis de 10 miligramos, la cantidad $A(t)$ remanente en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$, y que para que el medicamento sea eficaz, por lo menos dos miligramos deben estar en el cuerpo.

a) Determine cuándo quedan dos miligramos en el cuerpo.

b) ¿Cuál es la vida media del medicamento?

61 **Mutación genética** La fuente básica de diversidad genética es la mutación, o cambio en la estructura química de los genes. Si un gen cambia a un ritmo constante m y si otras fuerzas de evolución son insignificantes, entonces la frecuencia F del gen original después de t generaciones está dada por $F = F_0(1 - m)^t$, donde F_0 es la frecuencia en $t = 0$.

a) De la ecuación despeje t usando logaritmos comunes.

b) Si $m = 5 \times 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones F es igual a $\frac{1}{2}F_0$?

62 **Productividad de empleados** Ciertos procesos de aprendizaje se pueden ilustrar con la gráfica de una ecuación de la forma $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a, b y c son constantes positivas. Suponga que un fabricante estima que un empleado de nuevo ingreso puede producir cinco piezas el primer día de trabajo. A medida que el empleado adquiera más experiencia, la producción diaria aumentará hasta alcanzar cierta producción máxima. Suponga que en el n-ésimo día en el trabajo, el número $f(n)$ de piezas producidas se aproxima con

$$f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n})$$

a) Estime el número de piezas producidas en el quinto día, el noveno día, el día 24 y el día 30.

b) Trace la gráfica de f de $n = 0$ a $n = 30$. (Las gráficas de este tipo reciben el nombre de *curvas de aprendizaje* y se usan con frecuencia en educación y psicología.)

c) ¿Qué ocurre cuando n aumenta sin límite?

63 **Altura de árboles** El crecimiento en altura de los árboles se describe con frecuencia con una ecuación logística. Suponga que la altura h (en pies) de un árbol de edad t (en años) es

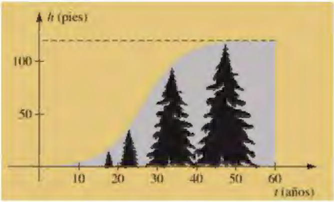
$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}},$$

como se ilustra en la gráfica de la figura.

a) ¿Qué altura tendrá el árbol a los 10 años de edad?

b) ¿A qué edad tendrá 50 pies de altura?

EJERCICIO 63



64 **Productividad de los empleados** En ocasiones, algunos fabricantes usan fórmulas empíricas para pronosticar el tiempo necesario para producir el n-ésimo artículo en una línea de montaje para un entero n. Si $T(n)$ denota el tiempo necesario para ensamblar el n-ésimo artículo y T_1 el tiempo necesario para el primer artículo, o prototipo, entonces típicamente $T(n) = T_1 n^{-k}$ para alguna constante positiva k.

a) Para numerosos aviones, el tiempo necesario para ensamblar el segundo avión, $T(2)$, es igual a $(0.80)T_1$. Encuentre el valor de k.

b) Exprese, en términos de T_1, el tiempo necesario para ensamblar el cuarto avión.

c) Exprese, en términos de $T(n)$, el tiempo $T(2n)$ necesario para ensamblar el $(2n)$-ésimo avión.

65 **Cortante vertical del viento** Consulte los ejercicios 67-68 de la sección 2.3. Si v_0 es la velocidad del viento a una altura h_0 y v_1 la velocidad del viento a una altura h_1, entonces la cortante vertical del viento puede describirse con la ecuación

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^P,$$

donde P es una constante. Durante un periodo de un año en Montreal, la máxima cortante vertical del viento ocurrió cuando los vientos al nivel de 200 pies eran de 25 mi/h, mientras que los vientos al nivel de 35 pies eran de 6 mi/h. Encuentre P para estas condiciones.

66 **Cortante vertical del viento** Consulte el ejercicio 65. El promedio de cortante vertical del viento está dado por la ecuación

$$s = \frac{v_1 - v_0}{h_1 - h_0}.$$

Suponga que la velocidad del viento aumenta al incrementarse la altitud y que todos los valores de la velocidad del viento, tomada a altitudes de 35 y 200 pies, son mayores que 1 mi/h. ¿El valor creciente de P produce valores de s mayores o menores?

Ejer. 67-68: Un economista sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran sobre la gráfica de $y = c2^{kx}$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres posiciones decimales, ¿es correcta esta sospecha?

67 (0, 4), (1, 3.249), (2, 2.639), (3, 2.144)

68 (0, −0.3), (0.5, −0.345), (1, −0.397), (2, −0.727)

Ejer. 69-70: Se sospecha que los siguientes puntos de datos se encuentran sobre la gráfica de $y = c \log (kx + 10)$, donde c y k son constantes. Si los puntos de datos tienen una precisión de tres posiciones decimales, ¿es correcta esta sospecha?

69 (0, 1.5), (1, 1.619), (2, 1.720), (3, 1.997)

70 (0, 0.7), (1, 0.782), (2, 0.847), (4, 0.945)

Ejer. 71–72: Aproxime la función en el valor de x a cuatro posiciones decimales.

71 $h(x) = \log_4 x - 2 \log_8 1.2x$; $x = 5.3$

72 $h(x) = 3 \log_5 (2x - 1) + 7 \log_2 (x + 0.2)$; $x = 52.6$

Ejer. 73–74: Use una gráfica para estimar las raíces de la ecuación en el intervalo dado.

73 $x - \ln (0.3x) - 3 \log_3 x = 0$; $(0, 9)$

74 $2 \log 2x - \log_3 x^2 = 0$; $(0, 3)$

Ejer. 75–76: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

75 $f(x) = x$; $g(x) = 3 \log_2 x$

76 $f(x) = x$; $g(x) = -x^2 - \log_5 x$

77–78: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas y estime la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

77 $f(x) = 3^{-x} - 4^{0.2x}$; $g(x) = \ln (1.2) - x$

78 $f(x) = 3 \log_4 x - \log x$; $g(x) = e^x - 0.25x^4$

79 **Memoria humana** A un grupo de estudiantes de escuela primaria se les enseñó la división larga en una semana. Después, se les aplicó un examen. El promedio de calificaciones fue de 85. De ahí en adelante, cada semana se les aplicó un examen equivalente sin ningún repaso. Represente con $n(t)$ el promedio de calificaciones después de $t \geq 0$ semanas. Grafique cada $n(t)$ y determine cuál función modela mejor la situación.

1) $n(t) = 85e^{t/3}$

2) $n(t) = 70 + 10 \ln (t + 1)$

3) $n(t) = 86 - e^t$

4) $n(t) = 85 - 15 \ln (t + 1)$

80 **Enfriamiento** Un frasco con agua hirviendo a 212 °F se coloca sobre una mesa en una habitación con temperatura de 72 °F. Si $T(t)$ representa la temperatura del agua después de t horas, grafique $T(t)$ y determine cuál función modela mejor la situación.

1) $T(t) = 212 - 50t$

2) $T(t) = 140e^{-t} + 72$

3) $T(t) = 212e^{-t}$

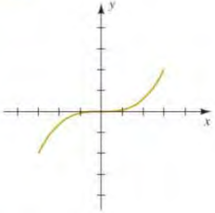
4) $T(t) = 72 + 10 \ln (140t + 1)$

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

1 ¿La función $f(x) = 2x^3 - 5$ es biunívoca?

2 La gráfica de una función f con dominio $[-3, 3]$ se muestra en la figura. Trace la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

EJERCICIO 2



Ejer. 3–4: a) Encuentre $f^{-1}(x)$. b) Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano de coordenadas.

3 $f(x) = 10 - 15x$

4 $f(x) = 9 - 2x^2, x \leq 0$

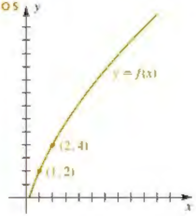
5 Consulte la figura para determinar cada uno de lo siguiente:

a) $f(1)$ **b)** $(f \circ f)(1)$ **c)** $f^{-1}(4)$

d) toda x tal que $f(x) = 4$

e) toda x tal que $f(x) > 4$

EJERCICIO 5



6 Suponga que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentre el valor, si es posible.

a) $(g \circ f^{-1})(7)$ **b)** $(f \circ g^{-1})(5)$

c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$ **d)** $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

Ejer. 7-24: Trace la gráfica de f.

7 $f(x) = 3^{x+2}$

8 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

9 $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

10 $f(x) = 3^{-2x}$

11 $f(x) = 3^{-x^2}$

12 $f(x) = 1 - 3^{-x}$

13 $f(x) = e^{x/2}$

14 $f(x) = \frac{1}{2}e^{x}$

15 $f(x) = e^{x-2}$

16 $f(x) = e^{2-x}$

17 $f(x) = \log_6 x$

18 $f(x) = \log_6 (36x)$

19 $f(x) = \log_4 (x^2)$

20 $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$

21 $f(x) = \log_2 (x + 4)$

22 $f(x) = \log_2 (4 - x)$

23 $f(x) = -3 \log x$

24 $f(x) = \ln x - 1$

Ejer. 25–26: Evalúe sin usar calculadora.

25 a) $\log_2 \frac{1}{16}$ b) $\log_\pi 1$ c) $\ln e$ d) $6^{\log_6 4}$ e) $\log 1{,}000{,}000$ f) $10^{3 \log 2}$ g) $\log_4 2$

26 a) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ b) $\log_5 1$ c) $\log 10$ d) $e^{\ln 5}$ e) $\log \log 10^{10}$ f) $e^{2 \ln 5}$ g) $\log_{27} 3$

Ejer. 27–46: Resuelva la ecuación sin usar calculadora.

27 $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$

28 $8^{2x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 4^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$

29 $\log \sqrt{x} = \log (x - 6)$

30 $\log_8 (x + 6) = \frac{2}{3}$

31 $\log_4 (x + 1) = 2 + \log_4 (3x - 2)$

32 $2 \ln (x + 3) - \ln (x + 1) = 3 \ln 2$

33 $\ln (x + 2) = \ln e^{\ln 2} - \ln x$

34 $\log \sqrt[4]{x - 3} = \frac{1}{2}$

35 $2^{5-x} = 6$

36 $3^{(x^2)} = 7$

37 $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$

38 $\log_3 (3x) = \log_3 x + \log_3 (4 - x)$

39 $\log_4 x = \sqrt[3]{\log_4 x}$

40 $e^{x+\ln 4} = 3e^{x}$

41 $10^{2 \log x} = 5$

42 $e^{\ln (x+1)} = 3$

43 $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$

44 $e^{x} + 2 = 8e^{-x}$

45 a) $\log x^2 = \log (6 - x)$ b) $2 \log x = \log (6 - x)$

46 a) $\ln (e^{x})^2 = 16$ b) $\ln e^{(x^2)} = 16$

47 Exprese $\log x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de logaritmos de x, y y z.

48 Exprese $\log (x^2/y^3) + 4\log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un logaritmo.

49 Encuentre una función exponencial que tenga 6 como punto de intersección con el eje y y pase por el punto $(1, 8)$.

50 Trace la gráfica de $f(x) = \log_3(x + 2)$.

Ejer. 51–52: Use logaritmos comunes para despejar x de la ecuación en términos de y.

51 $y = \dfrac{1}{10^x + 10^{-x}}$

52 $y = \dfrac{1}{10^x - 10^{-x}}$

Ejer. 53–54: Aproxime x a tres cifras significativas.

53 a) $x = \ln 6.6$ b) $\log x = 1.8938$ c) $\ln x = -0.75$ d) $x = \log 52$

54 a) $x = \log 8.4$ b) $\log x = -2.4260$ c) $\ln x = 1.8$ d) $x = \ln 0.8$

Ejer. 55–56: a) Encuentre el dominio y el rango de la función. b) Encuentre la inversa de la función y su dominio y rango.

55 $y = \log_2 (x + 1)$

56 $y = 2^{3-x} - 2$

57 **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo en el tiempo t (en horas) está dado por $Q(t) = 2(3^t)$, donde $Q(t)$ se mide en millares.

a) ¿Cuál es el número de bacterias en $t = 0$?

b) Encuentre el número de bacterias después de 10 minutos, 30 minutos y 1 hora.

58 **Interés compuesto** Si se invierten \$1,000 a una tasa de 3.25% anual compuesto trimestralmente, ¿cuál es el principal después de un año?

59 **Desintegración de yodo radiactivo** El yodo radiactivo, ^{131}I, que se usa con frecuencia en estudios de rastreo de la glándula tiroides, se desintegra según $N = N_0(0.5)^{t/8}$, donde N_0 es la dosis inicial y t el tiempo en días.

a) Trace la gráfica de la ecuación si $N_0 = 64$.

b) Encuentre la vida media del ^{131}I.

60 **Población de truchas** Un estanque es abastecido con 1,000 truchas. Tres meses después se estima que quedan 600. Encuentre una fórmula de la forma $N = N_0a^{ct}$ que se pueda usar para estimar el número de truchas restantes después de t meses.

61 **Interés compuesto continuamente** Diez mil dólares se invierten en un fondo de ahorro en el que el interés se capitaliza continuamente a una tasa de 4.75% anual.

a) ¿Cuándo habrá $25,000 en la cuenta?

b) ¿Cuánto tiempo tarda el dinero en duplicarse en la cuenta?

62 **Testamento de Ben Franklin** En 1790, Ben Franklin dejó $4,000 con instrucciones de que pasaran a la ciudad de Filadelfia dentro de 200 años. Esta suma equivalía a unos 2 millones de dólares en ese tiempo. Aproxime la tasa de interés anual para el crecimiento.

63 **Corriente eléctrica** La corriente $I(t)$ en cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia, L la inductancia e I_0 la corriente inicial en $t = 0$. Encuentre el valor de t, en términos de L y R, para el cual $I(t)$ es 1% de I_0.

64 **Intensidad del sonido** La fórmula del nivel de intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log (I/I_0)$.

a) Despeje I en términos de α y de I_0

b) Demuestre que un aumento de un decibel en el nivel de intensidad α corresponde a 26% de aumento de la intensidad I.

65 **Crecimiento de peces** La longitud L de un pez está relacionada con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de von Bertalanffy

$$L = a(1 - be^{-kt})$$

donde a, b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. De esta ecuación despeje t para obtener una fórmula que se pueda usar para estimar la edad de un pez a partir de una medición de longitud.

66 **Área de terremotos en el oeste** En la región oeste de Estados Unidos, el área A (en mi^2) afectada por un terremoto está relacionada con la magnitud R del terremoto mediante la fórmula

$$R = 2.3 \log (A + 3000) - 5.1.$$

Despeje A en términos de R.

67 **Área de terremotos en el este** Consulte el ejercicio 66. Para el este de Estados Unidos, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log (A + 34{,}000) - 7.5.$$

Si A_1 es el área afectada por un terremoto de magnitud R en el oeste y A_2 es el área afectada por un terremoto similar en el este, encuentre una fórmula para A_1/A_2 en términos de R.

68 **Área de terremotos en los estados del centro** Consulte el ejercicio 66. Para los estados de las Rocallosas y del centro, la fórmula de área-magnitud tiene la forma

$$R = 2.3 \log (A + 14{,}000) - 6.6$$

Si el terremoto tiene una magnitud de 4 en la escala de Richter, estime el área A de la región donde se sentirá el terremoto.

69 **Presión atmosférica** En ciertas condiciones, la presión atmosférica p a una altura h está dada por la fórmula $p = 29e^{-0.000034h}$. Exprese h como función de p.

70 **Velocidad de un cohete** Un cohete de masa m_1 se llena de combustible con masa inicial m_2. Si se desprecian las fuerzas de fricción, la masa total m del cohete en el tiempo t después de la ignición está relacionada con su velocidad ascendente v por medio de $v = -a \ln m + b$, donde a y b son constantes. En el tiempo de ignición $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Al agotarse el combustible, $m = m_1$. Use esta información para encontrar una fórmula, en términos de un logaritmo, para la velocidad del cohete al agotársele el combustible.

71 **Frecuencia de terremotos** Sea n el número promedio de terremotos por año que tienen magnitudes entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que aproxima la relación entre n y R es

$$\log n = 7.7 - (0.9)R$$

a) Despeje n en términos de R.

b) Encuentre n si $R = 4$, 5 y 6.

72 **Energía sísmica** La energía E (en ergios) liberada durante un terremoto de magnitud R se puede aproximar con la fórmula

$$\log E = 11.4 + (1.5)R$$

a) Despeje E en términos de R.

b) Encuentre la energía liberada durante el terremoto ocurrido frente a las costas de Sumatra en 2004, que midió 9.0 en la escala de Richter.

73 **Desintegración radiactiva** Cierta sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $q(t) = q_0 e^{-0.0063t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de la sustancia y t es el tiempo en días. Aproxime la vida media de la sustancia.

74 **Crecimiento de niños** El modelo de Count es una fórmula que se puede usar para predecir la estatura de niños en edad preescolar. Si h es la estatura (en centímetros) y t la edad (en años), entonces

$$h = 70.228 + 5.104t + 9.222 \ln t$$

para $\frac{1}{4} \le t \le 6$. Por cálculo, la tasa de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 5.104 + (9.222/t)$. Pronostique la estatura y tasa de crecimiento de un niño típico de dos años.

75 **Circuito eléctrico** La corriente I en cierto circuito eléctrico en el tiempo t está dada por

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

donde V es la fuerza electromotriz, R la resistencia y L la inductancia. Despeje t.

76 **Datación del carbono 14** La técnica de datación del carbono 14 (^{14}C) se utiliza para determinar la edad de especímenes arqueológicos y geológicos. La fórmula $T = -8310 \ln x$ se usa a veces para pronosticar la edad T (en años) de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el fósil.

a) Estime la edad de un hueso fósil que contiene 4% del ^{14}C encontrado en una cantidad igual de carbono en un hueso de nuestros días.

b) Aproxime el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil que tiene 10,000 años.

77 **Población de Kenia** Con base en tasas actuales de nacimientos y muertes, se espera que la población de Kenia aumente con base en la fórmula $N = 30.7e^{0.022t}$, con N en millones y $t = 0$ correspondiente a 2000. ¿Cuántos años tardará la población en duplicarse?

78 **Historia de un lenguaje** Consulte el ejercicio 52 de la sección 4.2. Si un lenguaje originalmente tenía N_0 palabras básicas, de las cuales $N(t)$ todavía están en uso, entonces $N(t) = N_0(0.805)^t$, donde el tiempo t se mide en milenios. ¿Después de cuántos años todavía estará en uso la mitad de las palabras básicas?

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 **a)** Trace la gráfica de $f(x) = -(x - 1)^3 + 1$ junto con la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

b) Analice qué le ocurre a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ (en general) cuando la gráfica de $y = f(x)$ es creciente o decreciente.

c) ¿Qué se puede concluir acerca de los puntos de intersección de las gráficas de una función y su inversa?

2 Grafique $y = (-3)^x$ en $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Trace la gráfica para $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1$. Explique cómo se relaciona la gráfica con las gráficas de $y = 3^x$ y $y = -3^x$. Además, explique cómo se relacionan estos resultados con la restricción $a > 0$ para funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$.

3 **Catenaria** Consulte la explicación sobre catenarias de la página 279 y la figura 4 de la sección 4.3.

a) Describa la gráfica de la ecuación que se presenta para valores crecientes de a.

b) Encuentre una ecuación del cable en la figura, de manera que el punto más bajo del cable esté a 30 pies del suelo y la diferencia entre el punto más alto del cable (donde está conectado a la torre) y el punto más bajo sea menor que dos pies, siempre que las torres están entre sí a 40 pies de distancia.

4 Consulte el ejercicio 76 de la sección 4.4. Explique cómo resolver este ejercicio *sin* usar la fórmula para la cantidad total T. Prosiga con su solución y compare su respuesta con la que obtuvo usando la fórmula para T.

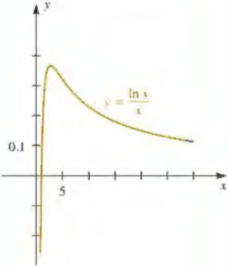
5 En la figura se ilustra una gráfica de $f(x) = (\ln x)/x$ para $x > 0$. El valor máximo de $f(x)$ se presenta en $x = e$.

a) Los enteros 2 y 4 tienen la poco común propiedad que $2^4 = 4^2$. Demuestre que si $x^y = y^x$ para los números reales positivos x y y, entonces $(\ln x)/x = (\ln y)/y$.

b) Use la gráfica de f (una tabla es útil) para encontrar otro par de números reales x y y (a dos posiciones decimales) tales que $x^y = y^x$.

c) Explique por qué muchos pares de números reales satisfacen la ecuación $x^y = y^x$.

EJERCICIO 5



6 **a)** Compare los resultados del ejercicio 59 de la sección 4.2 y el ejercicio 43 de la sección 4.3. Explique la diferencia entre las dos funciones.

b) Ahora suponga que invierte dinero a 8.5% anual compuesto mensualmente. ¿Cómo se compara una gráfica de este crecimiento con las dos gráficas del inciso a)?

c) Usando la función descrita en el inciso b), estime mentalmente las respuestas de los incisos a) y b) del ejercicio 43 de la sección 4.3, y explique por qué piensa que son correctas antes de calcularlas realmente.

7 Como $y = \log_3 (x^2)$ es equivalente a $y = 2 \log_3 x$ por la ley 3 de los logaritmos, ¿por qué no son iguales las gráficas de la figura 4a) y b) de la sección 4.5?

8 **Saldo insoluto de un crédito hipotecario** Cuando las instituciones de crédito prestan dinero, esperan recibir un rendimiento equivalente a la cantidad dada por la fórmula del interés compuesto. El prestatario acumula dinero "contra" la cantidad original cuando efectúa un pago mensual M que se acumula según

$$\frac{12M[(1 + r/12)^{12t} - 1]}{r},$$

donde r es la tasa de interés anual y t el número de años del crédito.

a) Diseñe una fórmula para el saldo insoluto U de un préstamo.

b) Grafique el saldo insoluto para el crédito hipotecario del ejercicio 53a) de la sección 4.2.

c) ¿Cuál es el saldo insoluto después de 10 años? Estime el número de años que se necesitan para pagar la mitad del préstamo.

d) Explique las condiciones que su gráfica debe satisfacer para ser correcta.

e) Explique la validez de sus resultados obtenidos a partir de la gráfica.

9 Explique *cuántas veces* se intersecan las gráficas de

$$y = 0.01(1.001)^x \qquad \text{y} \qquad y = x^3 - 99x^2 - 100x.$$

Aproxime los puntos de intersección. En general, compare el crecimiento de funciones polinomiales y funciones exponenciales.

10 Explique *cuántas veces* se intersecan las gráficas de

$$y = x \qquad \text{y} \qquad y\ 5\ (\ln x)^4.$$

Aproxime los puntos de intersección. ¿Qué se puede concluir sobre el crecimiento de $y = x$ y $y = (\ln x)^n$, donde n es un entero positivo, cuando x aumenta sin límite?

11 **Incrementos de sueldo** Suponga que comenzó en un trabajo que paga \$40,000 por año. En cinco años, está previsto que ganará \$60,000 por año. Determine la tasa exponencial anual de incremento que describe esta situación. Suponga que la misma tasa exponencial de incremento continuará durante 40 años. Usando la regla del 70 (página 292), estime mentalmente su sueldo anual en 40 años y compare la estimación con un cálculo real.

12 **Liberación de energía** Considere estos tres acontecimientos:

1) El 18 de mayo de 1980, la erupción volcánica del monte Santa Helena en Washington liberó aproximadamente 1.7×10^{18} joules de energía.

2) Cuando detona una bomba nuclear de 1 megatón, libera alrededor de 4×10^{15} joules de energía.

3) El terremoto de 1989 de San Francisco registró 7.1 en la escala de Richter.

a) Realice comparaciones (es decir, ¿cuánto de un acontecimiento es equivalente a otro?) en términos de energía liberada. (*Sugerencia*: consulte el ejercicio 72 en los ejercicios de repaso del capítulo 4.) *Nota*: las bombas atómicas arrojadas en la Segunda Guerra Mundial fueron de 1 kilotón (1,000 bombas de 1 kilotón = 1 bomba de un megatón).

b) ¿Qué lectura en la escala de Richter sería equivalente a la erupción del monte Santa Helena? ¿Ha habido alguna vez una lectura tan alta?

13 **Promedio Dow-Jones** El promedio industrial Dow-Jones es un índice de 30 de las mayores empresas de Estados Unidos y es la medida más común del desempeño de las acciones bursátiles en dicho país. La siguiente tabla contiene unas fechas de hitos de 1,000 puntos para el Dow.

Promedio Dow-Jones	Primer día que se alcanzó	Número de días desde el acontecimiento previo
1003.16	11/14/72	—
2002.25	1/8/87	5168
3004.46	4/17/91	1560
4003.33	2/23/95	1408
5023.55	11/21/95	271
6010.00	10/14/96	328
7022.44	2/13/97	122
8038.88	7/16/97	153
9033.23	4/6/98	264
10,006.78	3/29/99	357
11,014.69	5/3/99	35
12,011.73	10/20/06	2727
13,089.89	4/25/07	187
14,000.41	7/19/07	85

Encuentre el modelo exponencial para estos datos y úselo para predecir cuándo el índice Dow alcanzará 20,000. Encuentre la tasa anual promedio de rendimiento con base en el Dow. Explique algunas de las consideraciones prácticas relacionadas con estos cálculos.

14 **Promedio Nasdaq** El índice compuesto del mercado de valores Nasdaq experimentó un periodo de crecimiento fenomenal (que se muestra en las últimas líneas de la tabla).

Promedio Nasdaq	Primer día que se alcanzó	Número de días desde el acontecimiento previo
100 (inicio)	2/5/71	—
200.25	11/13/80	3569
501.62	4/12/91	3802
1005.89	7/17/95	1557
1000.56	7/16/98	10995
3028.51	11/3/99	475
4041.46	12/29/99	56
5046.86	3/9/00	71

El índice de empresas tecnológicas es considerado por muchos como el indicador de crecimiento más rápido en todo el mercado de valores de Estados Unidos.

Encuentre un modelo de regresión exponencial para los datos. Explique el ajuste del modelo a los datos y algunas posibles razones de la calidad del ajuste.

15 **Población total mundial** La Oficina del Censo de Estados Unidos dio las siguientes estimaciones y predicciones de la población total del mundo.

Año	Población
1950	2,556,518,868
1960	3,040,617,514
1970	3,707,921,742
1980	4,447,068,714
1990	5,274,320,491
2000	6,073,265,234
2010	6,838,220,183
2020	7,608,075,253
2030	8,295,925,812
2040	8,897,180,403
2050	9,404,296,384

a) Sea $t = 0$ correspondiente a 1950 y trace los datos en la pantalla $[-10, 110, 10]$ por $[0, 10^{10}, 10^9]$.

b) Explique si un modelo exponencial o logístico es más apropiado y por qué.

c) Encuentre un modelo del tipo seleccionado en el inciso b) y grafíquelo con los datos.

d) Con base en el modelo, ¿a qué se aproxima la población después de un largo periodo?

16 Explique cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\log_4 x + \log_7 x = 11$$

Resuelva la ecuación usando la fórmula de cambio de base.

17 Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ e identifique las asíntotas, si las hay, de la gráfica de f^{-1}. ¿Cómo se relacionan con las asíntotas de la gráfica de f?

CAPÍTULO 4 EXAMEN

1 Para $f(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$, encuentre $f^{-1}(x)$, su dominio y rango.

2 Para $f(x) = 7 - x^2$, $x \le 0$, encuentre $f^{-1}(x)$, su dominio y rango.

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 3$, encuentre $(f \circ g^{-1})(5)$.

4 Encuentre las intersecciones con x y y para $f(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + \frac{4}{9}$

5 Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene asíntota horizontal $y = 70$ e intersección con el eje y en 350 y que pasa por el punto (3, 105).

6 La vida media de una sustancia radiactiva es de 300 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Encuentre k.

7 **a)** Encuentre el pago mensual de un préstamo de $270,000 a 30 años si la tasa de interés es de 7%.

b) Encuentre el interés total pagado en el préstamo del inciso a). Use $M = \dfrac{Lrk}{12(k-1)}$, donde $k = [1 + (r/12)]^{12t}$, M es el pago mensual, L es el monto del préstamo, r la tasa de interés y t el número de años efectivos del préstamo.

8 Un artículo que costó $2 hace treinta años ahora cuesta $10. Encuentre una función exponencial sencilla de la forma $y = ab^t$ que modele el costo del artículo. (Aproxime el valor de b.)

9 En 1980 una población era de 100,000. Suponiendo que la población se incrementa de manera continua a una tasa de 4% anual, elabore un pronóstico de la población para el año 2020.

10 ¿Qué cantidad de dinero, invertido a una tasa de interés de 4% anual compuesto continuamente, debe generar $100,000 después de 10 años?

11 Un material radiactivo se desintegra continuamente a una tasa de 3.75% por hora. Aproxime el porcentaje restante de cualquier cantidad de material inicial después de 20 horas.

12 Resuelva $\log_2(5x + 1) = 4$ para x.

13 ¿Para qué valores de x es $e^{\ln(2x-3)} = 2x - 3$ un enunciado verdadero?

14 Resuelva $C = Da^{tk} - F$ para t, utilizando logaritmos de base a.

15 Suponga que el nivel de radiactividad de un material en un campo es cuatro veces mayor que el nivel de seguridad S y el material se desintegra con base en la fórmula $A(t) = A_0e^{-0.03t}$, donde A_0 es la cantidad actual en el campo y t el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminado el campo?

16 Resuelva $\log_4(6 - x) + \log_4(-x) = 2$ para x.

17 Resuelva $\log(x + 3) = 1 - \log(x - 5)$ para x.

18 Una población disminuye con base en la fórmula $y = y_0e^{-0.051t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 la población actual. ¿Cuántos años se necesitan para perder 30% de la población actual?

19 Resuelva $(e^x + 3)(e^x - 2)(4^x - 3) =$ para x.

20 Si $f(x) = \log x$, resuelva $(f \circ f \circ f)(x) = 0$ para x.

21 Utilice la fórmula de cambio de base para aproximar la intersección con el eje x de $f(x) = 2^x - 5$ a cuatro posiciones decimales.

22 ¿Aproximadamente cuánto tiempo tardará una cantidad de dinero en triplicarse si se invierte a una tasa de 5% anual compuesto trimestralmente?

5

Funciones trigonométricas

5.1 Ángulos

5.2 Funciones trigonométricas de los ángulos

5.3 Funciones trigonométricas de los números reales

5.4 Valores de las funciones trigonométricas

5.5 Gráficas trigonométricas

5.6 Gráficas trigonométricas adicionales

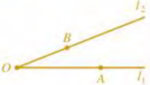
5.7 Problemas aplicados

La trigonometría fue inventada hace más de 2,000 años por los griegos, quienes necesitaban métodos precisos para medir los ángulos y los lados de los triángulos. De hecho, la palabra *trigonometría* se deriva de dos vocablos griegos: *trigonon* (triángulo) y *metria* (medida). Este capítulo comienza con el estudio de los ángulos y cómo se miden. A continuación se presentan las funciones trigonométricas mediante el uso de las razones de los lados de un triángulo recto. Luego de ampliar el dominio de las funciones trigonométricas a ángulos arbitrarios y números reales, se considerarán sus gráficas y las técnicas para trazarlas que hacen uso de amplitudes, periodos y desplazamientos de fase. El capítulo concluye con una sección de problemas aplicados.

5.1 Ángulos

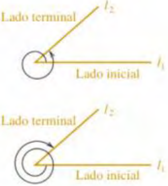
En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinados por dos rayos, o semirrectas, l_1 y l_2, que tienen el mismo punto de origen O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, como en la figura 1, nos referimos al **ángulo** $\boldsymbol{AOB}$ (que se denota $\angle AOB$). También puede considerarse que un ángulo tiene dos segmentos de recta finitos con un punto de origen común.

FIGURA 1



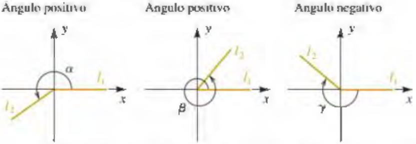
En trigonometría los ángulos se interpretan a menudo como rotaciones de rayos. Comienzan con un rayo fijo l_1, que tiene un punto de origen O, y gira alrededor de O, en un plano, hasta una posición especificada por el rayo l_2. l_1 se llama **lado inicial**, l_2 es el **lado terminal**, y O es el vértice del $\angle AOB$. La cantidad o dirección de la rotación no están restringidas de ninguna manera. l_1 podría realizar varios giros en cualquier dirección alrededor de O antes de llegar a la posición l_2, como ilustran las flechas curvas de la figura 2. Por consiguiente, muchos ángulos diferentes tienen los mismos lados iniciales y terminales. Dos ángulos así se llaman **ángulos coterminales**. Un **ángulo llano** es aquel cuyos lados yacen en la misma recta, pero se extienden en direcciones opuestas respecto a su vértice.

FIGURA 2
Ángulos coterminales



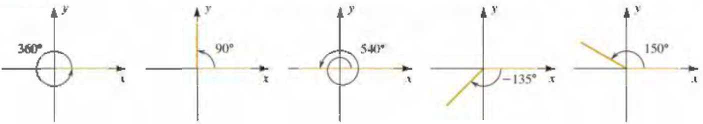
Si se utiliza un plano cartesiano (sistema de coordenadas rectangulares), la **posición estándar** de un ángulo se obtiene tomando el vértice en el origen y dejando que el lado inicial l_1 coincida con el eje x positivo. Si l_1 gira en dirección *contraria a las manecillas del reloj* hasta la posición terminal l_2, el ángulo se considera **positivo.** Si l_1 gira en la *dirección de las manecillas del reloj*, el ángulo es **negativo.** Para denotar los ángulos, con frecuencia se usan letras griegas minúsculas, como α (*alfa*), β(*beta*), γ (*gamma*), θ (*theta*), ϕ (*fi*), etcétera, para denotar los ángulos. La figura 3 contiene trazos de dos ángulos positivos, α y β, y de un ángulo negativo, γ. Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar está en un cierto cuadrante, se dice que el *ángulo* está en ese cuadrante. En la figura 3, α está en el cuadrante III, β en el cuadrante I y γ en el cuadrante II. Un ángulo se llama **ángulo cuadrantal** si su lado terminal yace en un eje de coordenadas.

FIGURA 3 Posición estándar de un ángulo



Una unidad de medida de los ángulos es el **grado.** El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en dirección contraria a la de las manecillas del reloj mide 360 grados, que se escribe 360°. Por lo tanto, un ángulo que mide 1 grado (1°) se obtiene por 1/360 de giro completo en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. En la figura 4 se muestran varios ángulos medidos en grados en posición estándar sobre sistemas de coordenadas regulares. Observe que los primeros tres ángulos son ángulos cuadrantales.

FIGURA 4



A lo largo de nuestro trabajo, una notación como $\theta = 60^\circ$ especifica un ángulo θ cuya medida es de 60°. También se le dice *ángulo de* 60°, en lugar de usar la frase más precisa (pero engorrosa) de *un ángulo que tiene una medida de* 60°.

EJEMPLO 1 **Cómo obtener ángulos coterminales**

Si $\theta = 60^\circ$ está en posición estándar, obtenga dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales de θ.

SOLUCIÓN El ángulo θ se muestra en posición estándar en el primer dibujo de la figura 5. Para encontrar ángulos coterminales positivos, podemos sumar 360° o 720° (o cualquier otro múltiplo entero positivo de 360°) a θ para obtener

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ \text{ y } 60^\circ + 720^\circ = 780^\circ$$

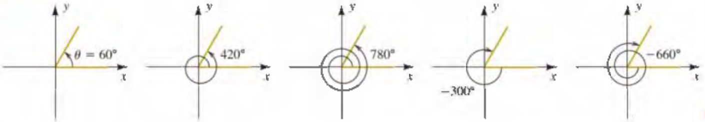
Estos ángulos coterminales también se muestran en la figura 5.

Para encontrar ángulos coterminales negativos, podemos sumar -360° o -720° (o cualquier otro múltiplo entero negativo de 360°) para obtener

$$60^\circ + (-360^\circ) = -300^\circ \text{ y } 60^\circ + (-720^\circ) = -660^\circ,$$

como se muestra en los últimos dos dibujos de la figura 5.

FIGURA 5



Un **ángulo recto** es la mitad de un ángulo llano y tiene una medida de 90°. La siguiente tabla contiene definiciones de otros tipos especiales de ángulos.

Terminología	Definición	Ejemplos
ángulo agudo θ	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	12°; 37°
ángulo obtuso θ	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	95°; 157°
ángulos complementarios α, β	$\alpha + b = 90^\circ$	20° y 70°; 7° y 83°
ángulos suplementarios, α, β	$\alpha + b = 180^\circ$	115° y 65°; 18° y 162°

Si se requieren medidas menores que el grado, podemos usar décimas, centésimas o milésimas de grado. Por otra parte, el grado se puede dividir en 60 partes iguales, llamadas **minutos** (denotados por ′) y cada minuto en 60 partes iguales, llamadas **segundos** (denotados por ″). Así, $1^\circ = 60''$, y $1' = 60''$. La notación $\theta = 73^\circ 56' 18''$ se refiere a un ángulo θ que tiene una medida de 73 grados, 56 minutos, 18 segundos.

EJEMPLO 2 **Cómo obtener ángulos complementarios**

Encuentre el ángulo que es complementario de θ.

a) $\theta = 25°43'37''$ **b)** $\theta = 73.26°$

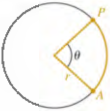
SOLUCIÓN Deseamos encontrar $90° - \theta$. Es conveniente escribir 90° como una medida equivalente: 89°59'60''.

a)
$$\begin{aligned} 90° &= 89°59'60'' \\ \underline{\quad\theta\quad} &= \underline{25°43'37''} \\ 90° - \theta &= 64°16'23'' \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 90° &= 90.00° \\ \underline{\quad\theta\quad} &= \underline{73.26°} \\ 90° - \theta &= 16.74° \end{aligned}$$

■

FIGURA 6
Ángulo central θ

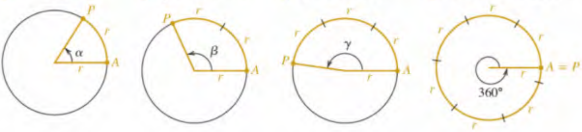


La medida en grados de los ángulos se usa en áreas aplicadas como topografía, navegación y el diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que exigen cálculo, se acostumbra emplear la *medida en radianes*. Para definir un ángulo que mide un radián 1, se considera un círculo con cualquier radio r. Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es el ángulo central que se ilustra en la figura 6, decimos que el **arco AP** que se denota $\overline{AP}$) del círculo **subtiende** θ o que θ **es subtendido por** $\overline{AP}$. Si la longitud de $\overline{AP}$ es igual al radio r del círculo, entonces θ tiene una medida de un radián, como en la siguiente definición.

Definición de medida en radianes	**Un radián** es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

Si consideramos un círculo de radio r, el ángulo α cuya medida es 1 radián interseca un arco AP de longitud r, como se ilustra en la figura 7a). El ángulo β en la figura 7b) mide 2 radianes, puesto que es subtendido por un arco de longitud $2r$. De modo similar, γ en c) de la figura mide 3 radianes, puesto que está subtendido por un arco de longitud $3r$.

FIGURA 7
a) $\alpha = 1$ radián b) $\beta = 2$ radianes c) $\gamma = 3$ radianes d) $360° = 2\pi \approx 6.28$ radianes



Para obtener la medida en radianes correspondiente a 360°, debemos calcular el número de veces que un arco circular de longitud r se puede superponer a lo largo de la circunferencia (vea la figura 7d)). Este número no es un entero, ni siquiera un número racional. En vista de que la circunferencia del círculo es $2\pi r$, el número de veces que pueden superponerse unidades de r es 2π. Por lo tanto, un ángulo cuya medida es de 2π corresponde a la medida en grados de 360°, lo cual se escribe $360° = 2\pi$ radianes. Este resultado da las siguientes relaciones.

Relaciones entre grados y radianes

1) $180° = \pi$ radianes

2) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radián ≈ 0.0175 radián

3) 1 radián $= \left(\dfrac{180°}{\pi}\right) \approx 57.2958°$

Cuando se usa la medida en radianes de un ángulo, no se indican las unidades. Por lo tanto, si la medida en radianes de un ángulo es 5, escribimos $\theta = 5$ en lugar de $\theta = 5$ *radianes*. No debe existir confusión en cuanto a si se está utilizando una medida en radianes o en grados, ya que si θ tiene una medida en *grados* de 5°, escribimos $\theta = 5°$ y *no* $\theta = 5$.

La siguiente tabla ilustra cómo cambiar de una medida angular a otra.

Cambio de medidas angulares

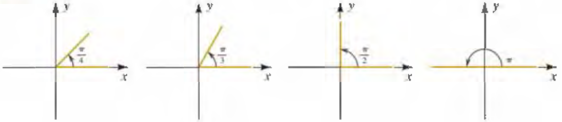
Para convertir	Multiplique por	Ejemplos
de grados a radianes	$\dfrac{\pi}{180°}$	$150° = 150°\left(\dfrac{\pi}{180°}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ $225° = 225°\left(\dfrac{\pi}{180°}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$
de radianes a grados	$\dfrac{180°}{\pi}$	$\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}\left(\dfrac{180°}{\pi}\right) = 315°$ $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{180°}{\pi}\right) = 60°$

Podemos usar las técnicas que se ilustran en la tabla anterior para obtener la siguiente tabla, que muestra las mediciones correspondientes en radianes y grados de ángulos especiales.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

Varios de estos ángulos especiales, en radianes, se muestran en posición estándar en la figura 8.

FIGURA 8

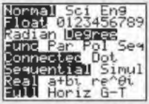


Conversión de medidas en radianes a medidas en grados

Las calculadoras graficadoras tienen algunas características especiales que facilitan la conversión de medidas en radianes en medidas en grados.

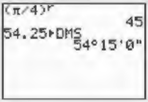
Seleccionar el modo de grados.

MODE ▽ ▽ ▷ ENTER



Convertir la medida en radianes en medida en grados.

(2nd π ÷ 4)
2nd ANGLE 3 ENTER



Convertir una medida en grados decimales en grados, minutos y segundos.

54.25 2nd ANGLE 4 ENTER

EJEMPLO 3 **Cambio de radianes a grados, minutos y segundos**

Si $\theta = 3$, aproxime θ en términos de grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
3 \text{ radianes} &= 3\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) && \text{multiplicar por } \frac{180^\circ}{\pi} \\
&\approx 171.8873^\circ && \text{aproximar} \\
&= 171^\circ + (0.8873)(60') && 1^\circ = 60' \\
&= 171^\circ + 53.238' && \text{multiplicar} \\
&= 171^\circ + 53' + (0.238)(60'') && 1' = 60'' \\
&= 171^\circ 53' + 14.28'' && \text{multiplicar} \\
&\approx 171^\circ 53' 14'' && \text{aproximar}
\end{aligned}
$$

■

EJEMPLO 4 **Cómo expresar minutos y segundos como grados decimales**

Exprese 19°47'23" como un decimal, hasta la diezmilésima más cercana de un grado.

SOLUCIÓN Puesto que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ y $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$$
\begin{aligned}
19^\circ 47' 23'' &= 19^\circ + \left(\tfrac{47}{60}\right)^\circ + \left(\tfrac{23}{3600}\right)^\circ \\
&\approx 19^\circ + 0.7833^\circ + 0.0064^\circ \\
&= 19.7897^\circ
\end{aligned}
$$

■

Los ejemplos 3 y 4 se manejan fácilmente con una calculadora graficadora (en modo de grados).

Convertir la medida en radianes del ejemplo 3 en grados, minutos y segundos.

3 [2nd] [ANGLE] [3] [2nd] [ANGLE]
[4] [ENTER]

Expresar el ángulo del ejemplo 4 como un grado decimal.

19 [2nd] [ANGLE] [1]
47 [2nd] [ANGLE] [2]
23 [ALPHA] ["(on+key)] [ENTER]

```
3r▸DMS
  171°53'14.419"
19°47'23"
      19.78972222
```

Una mnemotecnia en inglés para recordar que $s = r\theta$ es SRO (Standing Room Only)

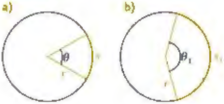
El siguiente resultado especifica la relación entre la longitud de un arco circular y el ángulo central que subtiende.

Fórmula para obtener la longitud de un arco circular

Si un arco de longitud s en un círculo de radio r subtiende un ángulo central que mide θ en radianes, entonces

$$s = r\theta$$

FIGURA 9



DEMOSTRACIÓN Un arco típico de longitud s y el correspondiente ángulo central θ se muestran en la figura 9a). La figura 9b) muestra un arco de longitud s_1 y un ángulo central θ_1. Si se usa la medida en radianes, entonces, según la geometría del plano, el cociente de las longitudes de los arcos es igual al cociente de las medidas angulares; es decir,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \qquad \text{o} \qquad s = \frac{\theta}{\theta_1} s_1$$

Si consideramos el caso especial en que θ_1 tiene una medida de 1 radián, entonces, según la definición de radián, $s_1 = r$ y la última ecuación cambia a

$$s = \frac{\theta}{1} \cdot r = r\theta$$ ■

Observe que si $\theta = 2\pi$, la fórmula para obtener la longitud de un arco circular cambia a $s = r(2\pi)$, que es simplemente la fórmula de la circunferencia de un círculo: $C = 2\pi r$.

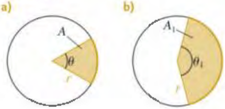
La siguiente fórmula se demuestra de manera similar.

Fórmula para obtener el área de un sector circular

Si θ es la medida en radianes de un ángulo central de un círculo de radio r y si A es el área del sector circular determinado por θ, entonces

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta$$

FIGURA 10



DEMOSTRACIÓN Si A y A_1 son las áreas de los sectores de las figuras 10a) y 10b), respectivamente, entonces, según la geometría del plano,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \qquad \text{o} \qquad A = \frac{\theta}{\theta_1}A_1$$

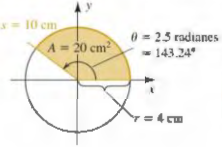
Si consideramos el caso especial de $\theta_1 = 2\pi$, entonces $A_1 = \pi r^2$ y

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$$

■

Cuando usamos las fórmulas anteriores, es importante recordar que se debe usar la medida en radianes de θ en lugar de la medida en grados, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 11



EJEMPLO 5 **Uso de las fórmulas de los arcos y sectores circulares**

En la figura 11, un ángulo central θ es subtendido por un arco de 10 centímetros de largo en un círculo de radio de 4 centímetros.

a) Aproxime la medida de θ en grados.

b) Obtenga el área del sector circular determinado por θ.

SOLUCIÓN Procedemos como se indica a continuación:

a) $s = r\theta$ — fórmula de la longitud de un arco circular

$\theta = \frac{s}{r}$ — despejamos θ

$= \frac{10}{4} = 2.5$ — sea $s = 10$, $r = 4$

Esta es la medida en radianes de θ. Cambiando a grados, obtenemos

$$\theta = 2.5\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{450°}{\pi} \approx 143.24°$$

b) $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ — fórmula del área de un sector circular

$= \frac{1}{2}(4)^2(2.5)$ — sea $r = 4$, $\theta = 2.5$ radianes

$= 20\text{ cm}^2$ — multiplicamos

■

FIGURA 12

La **velocidad angular** de una rueda que gira a velocidad constante es el ángulo generado en una unidad de tiempo por un segmento de recta del centro de la rueda a un punto P en la circunferencia (vea la figura 12). La **velocidad lineal** de un punto P en la circunferencia es la distancia que P recorre por unidad de tiempo. Al dividir ambos lados de la fórmula de un arco circular entre el tiempo t, obtenemos una relación entre velocidad lineal y velocidad angular; es decir,

$$\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}, \text{ o, de forma equivalente, } \underbrace{\frac{s}{t}}_{\text{velocidad lineal}} = r \cdot \underbrace{\frac{\theta}{t}}_{\text{velocidad angular}}$$

EJEMPLO 6 **Obtención de las velocidades angular y lineal**

Suponga que la rueda de la figura 12 gira a una velocidad de 800 rpm (revoluciones o giros por minuto).

a) Calcule la velocidad angular de la rueda.

b) Calcule la velocidad lineal (en in/min y mi/h) de un punto P en la circunferencia de la rueda.

SOLUCIÓN

a) Sea O el centro de la rueda y P un punto en la circunferencia. Dado que el número de giros por minuto es 800, y ya que cada revolución genera un ángulo de 2π radianes, el ángulo generado por el segmento de recta OP en un minuto tiene una medida en radianes de $(800)(2\pi)$; esto es,

$$\begin{array}{c}\text{velocidad}\\\text{angular}\end{array} = \frac{800 \text{ giros}}{1 \text{ minuto}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{1 \text{ giro}} = 1600\pi \text{ radianes por minuto.}$$

Tenga en cuenta que el diámetro de la rueda no es relevante en el cálculo de la velocidad angular.

b)
$$\begin{aligned}\text{velocidad lineal} &= \text{radio} \cdot \text{velocidad angular}\\ &= (12 \text{ in})(1600\ \pi \text{rad/min})\\ &= 19{,}200\pi \text{ in/min}\end{aligned}$$

Si convertimos in/min en mi/h, obtenemos:

$$\frac{19{,}200\pi \text{ in.}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hr}} \cdot \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \cdot \frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ ft}} \approx 57.1 \text{ mi/hr}$$

A diferencia de la velocidad angular, la velocidad lineal depende del diámetro de la rueda. ■

5.1 Ejercicios

Ejer. 1-4: Si el ángulo dado está en posición estándar, obtenga dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos.

1 **a)** $120°$ **b)** $135°$ **c)** $-30°$

2 **a)** $240°$ **b)** $315°$ **c)** $-150°$

3 **a)** $620°$ **b)** $\frac{5\pi}{6}$ **c)** $-\frac{\pi}{4}$

4 **a)** $570°$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $-\frac{5\pi}{4}$

Ejer. 5-6: Encuentre el ángulo que es complementario de θ.

5 **a)** $\theta = 12°37'24''$ **b)** $\theta = 43.87°$

6 **a)** $\theta = 76°4'53''$ **b)** $\theta = 5.08°$

Ejer. 7.8: Obtenga el ángulo que es suplementario de θ.

7 **a)** $\theta = 125°16'27''$ **b)** $\theta = 58.07°$

8 **a)** $\theta = 87°13'52''$ **b)** $\theta = 97.9°$

Ejer. 9-12: Calcule la medida exacta en radianes del ángulo.

9 **a)** $150°$ **b)** $-60°$ **c)** $225°$

10 **a)** $120°$ **b)** $-135°$ **c)** $210°$

11 **a)** $450°$ **b)** $72°$ **c)** $100°$

12 **a)** $630°$ **b)** $54°$ **c)** $95°$

Ejer. 13-16: Calcule la medida exacta en grados del ángulo.

13 **a)** $\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\frac{11\pi}{6}$ **c)** $\frac{3\pi}{4}$

14 **a)** $\frac{5\pi}{6}$ **b)** $\frac{4\pi}{3}$ **c)** $\frac{11\pi}{4}$

15 a) $-\dfrac{7\pi}{2}$ b) 7π c) $\dfrac{\pi}{9}$

16 a) $-\dfrac{5\pi}{2}$ b) 9π c) $\dfrac{\pi}{16}$

Ejer. 17-20: Exprese θ en términos de grados, minutos y segundos, redondeado al segundo más cercano.

17 $\theta = 1.57$ **19** $\theta = 3.1$

17 $\theta = 6.3$ **20** $\theta = 4.7$

Ejer. 21-24: Exprese el ángulo como decimal, redondeado a la diezmilésima de grado más cercana.

21 $120°16'$ **22** $53°47'$

23 $262°15'31''$ **24** $320°7'58''$

Ejer. 25-28: Exprese el ángulo en términos de grados, minutos y segundos, redondeado al segundo más cercano.

25 $63.169°$ **26** $12.864°$

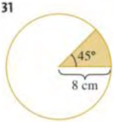
27 $310.6215°$ **28** $81.7238°$

Ejer. 29-30: Si un arco circular de la longitud dada s subtiende el ángulo central θ en un círculo, calcule el radio del círculo.

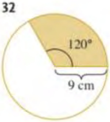
29 $s = 10$ cm, $\theta = 4$ **30** $s = 3$ km, $\theta = 20°$

Ejer. 31-32: a) Calcule la longitud del arco del sector sombreado en la figura. b) Calcule el área del sector.

31



32



Ejercicio 33-34: a) Calcule las medidas en radianes y grados del ángulo central θ subtendido por el arco dado de longitud s en un círculo de radio r. b) Calcule el área del sector determinado por θ.

33 $s = 7$ cm, $r = 4$ cm **34** $s = 3$ ft, $r = 20$ in

Ejer. 35-36: a) Calcule la longitud del arco que subtiende el ángulo central dado θ en un círculo de diámetro d. b) Calcule el área del sector determinado por θ.

35 $\theta = 50°$, $d = 16$ m **36** $\theta = 2.2$, $d = 120$ cm

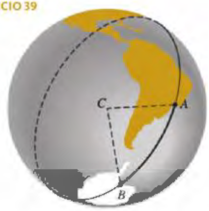
Ejer. 37-38: Si un arco circular de la longitud dada s subtiende el ángulo central θ en un círculo, exprese el área del sector determinado por θ como función de θ.

37 $s = 8$ **38** $s = 14$

39 **Medida de distancias en la Tierra** La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de un círculo cuyo centro C se encuentra en el centro de la Tierra y cuyo radio es igual a la distancia de C de la superficie (vea la figura). Si el diámetro de la Tierra es de aproximadamente 8,000 millas, aproxime la distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida indicada:

a) $60°$ b) $45°$ c) $30°$ d) $10°$ e) $1°$

EJERCICIO 39



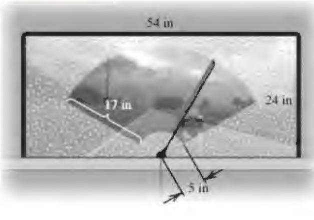
40 **Millas náuticas** Remítase al ejercicio 39. Si el ángulo ACB mide $1'$, la distancia entre A y B es una milla náutica. Aproxime el número de millas terrestres (estatutarias) en una milla náutica.

41 **Medida de ángulos usando distancia** Remítase al ejercicio 39. Si dos puntos A y B se encuentran separados por una distancia de 500 millas, exprese el ángulo ACB en radianes y grados.

42 Un hexágono está inscrito dentro de un círculo. Si la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono es de 24 m², utilice la fórmula del área de un sector para aproximar el radio r del círculo.

43 **Área de una ventana** Una ventana rectangular mide 54 por 24 pulgadas. Hay un limpiaparabrisas de 17 pulgadas insertado en un brazo de 5 pulgadas en el centro de la base de la ventana, como se muestra en la figura. Si el brazo gira $120°$, aproxime el porcentaje del área de la ventana que limpiará el limpiaparabrisas.

EJERCICIO 43



44 **Núcleo de un tornado** Un modelo sencillo del núcleo de un tornado es un cilindro circular recto que gira alrededor de su eje. Si el núcleo del tornado tiene un diámetro de 200 pies y velocidad máxima del viento de 180 mi/h (o 264 ft/s) en el perímetro del núcleo, aproxime el número de revoluciones que el núcleo completa cada minuto.

45 **Rotación de la Tierra** La Tierra gira sobre su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Aproxime el número de radianes que la Tierra gira en un segundo.

46 **Rotación de la Tierra** Remítase al ejercicio 45. El radio ecuatorial de la Tierra mide aproximadamente 3,963.3 millas. Calcule la velocidad lineal de un punto en el ecuador como resultado de la rotación de la Tierra.

Ejer. 47-48: Una rueda del radio dado gira a la velocidad indicada.

a) Calcule la velocidad angular (en radianes por minuto).

b) Calcule la velocidad lineal de un punto en la circunferencia (en ft/min).

47 radio 5 in, 40 rpm **48** radio 9 in, 2400 rpm

49 **Rotación de discos compactos (CD)** El motor de accionamiento de un reproductor de CD está controlado para girar a una velocidad de 200 rpm cuando lee una pista de 5.7 centímetros desde el centro del CD. La velocidad del motor de accionamiento debe variar para que la lectura de los datos tenga lugar a velocidad constante.

a) Calcule la velocidad angular (en radianes por minuto) del motor de accionamiento cuando lee una pista de 5.7 centímetros desde el centro del CD.

b) Calcule la velocidad lineal (en cm/s) de un punto en el CD que se encuentra a 5.7 centímetros del centro del CD.

c) Calcule la velocidad angular (en rpm) del motor de accionamiento cuando lee una pista que está a 3 centímetros del centro del CD.

d) Calcule una función S que da la velocidad del motor de accionamiento en rpm para cualquier radio r en centímetros, donde $2.3 \leq r \leq 5.9$. ¿Qué tipo de variación existe entre la velocidad del motor de accionamiento y el radio de la pista que se está leyendo? Compruebe su respuesta trazando una gráfica de S y calculando las velocidades de $r = 3$ y $r = 5.7$.

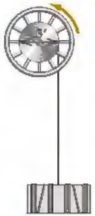
50 **Revoluciones de un neumático** Un neumático típico de un automóvil compacto mide 22 pulgadas de diámetro. Si el automóvil viaja a una velocidad de 60 mi/h, calcule el número de revoluciones que el neumático realiza por minuto.

51 **Malacate de carga** Un malacate grande de 3 pies de diámetro se usa para levantar carga, como se muestra en la figura.

a) Calcule la distancia que se levanta la carga si el malacate gira a través de un ángulo de $7\pi/4$ radianes.

b) Calcule el ángulo (en radianes) a través del cual debe girar el malacate para levantar la carga d pies.

EJERCICIO 51



52 **Oscilación de un péndulo** El péndulo de un reloj de pared mide 4 pies de largo y oscila de un lado al otro describiendo un arco de 6 pulgadas. Aproxime el ángulo (en grados) a través del cual pasa el péndulo durante una oscilación.

53 **Precios de pizzas** Un vendedor vende dos tamaños de pizza por rebanada. La rebanada *pequeña* es $\frac{1}{6}$ de una pizza circular de 18 pulgadas de diámetro, y se vende en \$2.00. La rebanada *grande* es $\frac{1}{8}$ de una pizza de 26 pulgadas de diámetro, y se vende en \$3.00. ¿Cuál rebanada rinde más pizza por dólar?

54 **Mecánica de bicicletas** La unidad de engranaje de la cadena de una bicicleta se muestra en la figura. Si la rueda dentada de radio r_1 gira a través de un ángulo de θ_1 radianes, calcule el ángulo de rotación correspondiente de la rueda dentada de radio r_2.

EJERCICIO 54

55 **Mecánica de bicicletas** Remítase al ejercicio 54. Un ciclista experto puede alcanzar una velocidad de 40 mi/h. Si la unidad de engranaje de cadena tiene $r_1 = 5$ in, $r_2 = 2$ in, y la rueda tiene un diámetro de 28 pulgadas, ¿aproximadamente cuántas revoluciones por minuto de la rueda dentada delantera producirá una velocidad de 40 mi/h? (*Sugerencia*: primero convierta 40 mi/h en in/s).

56 **Desplazamiento del polo magnético** El polo norte geográfico y el magnético tienen diferentes ubicaciones. En la actualidad, el polo norte magnético se está desplazando hacia el occidente 0.0017 radianes por año, donde el ángulo de desplazamiento tiene su vértice en el centro de la Tierra. Si este movimiento continúa, ¿cuántos años tardará aproximadamente el polo norte magnético en desplazarse un total de 5°?

5.2 Funciones trigonométricas de los ángulos

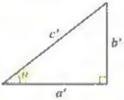
Las funciones trigonométricas se presentarán de la manera en que se originaron históricamente, es decir, como razones de los lados de un triángulo recto. Un triángulo es un **triángulo rectángulo** si uno de sus ángulos es un ángulo recto. Si θ es un ángulo agudo, podemos considerar que un triángulo recto tiene a θ como uno de sus ángulos, como en la figura 1, donde el símbolo ⌐ especifica el ángulo de 90°. Se pueden obtener seis razones con las longitudes a, b y c de los lados del triángulo:

FIGURA 1

$$\frac{b}{c},\quad \frac{a}{c},\quad \frac{b}{a},\quad \frac{a}{b},\quad \frac{c}{a},\quad \frac{c}{b}$$

Podemos demostrar que estas razones dependen sólo de θ, y no del tamaño del triángulo, como se indica en la figura 2. En vista de que los dos triángulos tienen ángulos iguales, son similares y, por lo tanto, las razones de los lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo,

FIGURA 2



$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},\quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'},\quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

Así, por cada θ, las seis razones se determinan de manera única y, por consiguiente, son funciones de θ. Se llaman **funciones trigonométricas*** y se designan como funciones **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante**, y se abrevian **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc**, respectivamente. El símbolo sen (θ), o sen θ, se usa para la razón b/c, que la función seno asocia con θ. Los valores de las otras cinco funciones se denotan de manera similar. Para resumir, si θ es el ángulo agudo del triángulo recto de la figura 1, entonces, por definición,

Nos referiremos a estas seis funciones trigonométricas como **las funciones trigonométricas. Aquí se presentan algunas otras funciones trigonométricas, menos comunes, que no se utilizarán en el libro.*

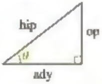
$$\text{vers}\ \theta = 1 - \cos\theta$$
$$\text{covers}\ \theta = 1 - \text{sen}\ \theta$$
$$\text{exsec}\ \theta = \sec\theta - 1$$
$$\text{hav}\ \theta = \tfrac{1}{2}\ \text{vers}\ \theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

El dominio de cada una de las seis funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. Más adelante en esta sección se ampliarán los dominios a conjuntos mayores de ángulos, y en la siguiente sección, a los números reales.

Si θ es el ángulo de la figura 1, los lados del triángulo, de longitudes a, b y c, se conocen como **cateto adyacente, cateto opuesto** e **hipotenusa**, respectivamente. Usaremos las abreviaturas **ady, op** e **hip** para denotar las longitudes de los lados. Así podremos representar el triángulo como en la figura 3. Con esta notación, las funciones trigonométricas se pueden expresar como sigue.

FIGURA 3



Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo recto

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$
$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Una mnemotecnia para recordar la primera fila de la definición es

SOH CAH TOA,

donde SOH es la abreviatura de Sen θ = Op/Hip, y así sucesivamente.

Las fórmulas de la definición precedente pueden aplicarse a cualquier triángulo rectángulo sin colocar en los lados los rótulos a, b, c. Dado que las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, *los valores de las seis funciones trigonométricas son positivas para cada ángulo agudo* θ. Además, la hipotenusa es siempre mayor que los catetos adyacente y opuesto y, por consiguiente, sen $\theta < 1$, $\cos\theta < 1$, $\csc\theta > 1$ y $\sec\theta > 1$ para cada ángulo agudo θ.

Tenga en cuenta que en vista de que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \text{y} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}},$$

sen θ y csc θ son recíprocos, lo que da las dos identidades de la columna izquierda del siguiente cuadro. De manera similar, cos θ y sec θ son recíprocos, lo mismo que tan θ y cot θ.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\ \theta = \frac{1}{\csc\ \theta} \qquad \cos\ \theta = \frac{1}{\sec\ \theta} \qquad \tan\ \theta = \frac{1}{\cot\ \theta}$$

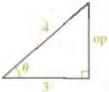
$$\csc\ \theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta} \qquad \cot\ \theta = \frac{1}{\tan\ \theta}$$

Otras identidades importantes relacionadas con las funciones trigonométricas se presentarán al final de esta sección.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar de los valores de las funciones trigonométricas**

Si θ es un ángulo agudo y $\cos\theta = \frac{3}{4}$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 4



SOLUCIÓN Para empezar, dibujamos un triángulo recto que tenga un ángulo agudo θ con ady = 3 e hip = 4, como se muestra en la figura 4, y procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3^2 + (\text{op})^2 &= 4^2 && \text{teorema de Pitágoras} \\ (\text{op})^2 &= 16 - 9 = 7 && \text{despejamos } (\text{op})^2 \\ \text{op} &= \sqrt{7} && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Si aplicamos la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo recto, obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

■

En el ejemplo 1 se podrían haber racionalizado los denominados de csc θ y cot θ, escribiendo

$$\csc\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \qquad \text{y} \qquad \cot\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

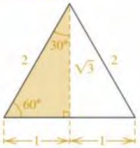
Sin embargo, en la mayoría de los ejemplos y ejercicios, dejaremos las expresiones sin racionalizar. Una excepción a esta práctica es la de los valores de las funciones trigonométricas especiales que corresponden a 60°, 30° y 45°, que se obtienen en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar los valores de las funciones trigonométricas de 60°, 30° y 45°**

Obtenga los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a θ:

a) $\theta = 60°$ **b)** $\theta = 30°$ **c)** $45°$

FIGURA 5



SOLUCIÓN Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 2. La mediana que va de un vértice al lado opuesto divide el ángulo en dos partes iguales en ese vértice, como ilustra la línea discontinua en la figura 5. Por el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto de 60° en el triángulo recto sombreado tiene longitud de $\sqrt{3}$. Con las fórmulas de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo recto, obtenemos los valores correspondientes a 60° y 30° como sigue:

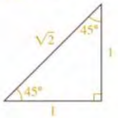
a) $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \sec 60° = \dfrac{2}{1} = 2$ $\qquad \cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\csc 30° = \dfrac{2}{1} = 2$ $\qquad \sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \cot 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

FIGURA 6



c) Para encontrar los valores de $\theta = 45°$, consideramos un triángulo recto isósceles cuyos dos lados iguales tienen longitud de 1, como ilustra la figura 6. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Por consiguiente, los valores correspondientes a 45° son los siguientes:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45° \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

■

Como referencia, presentamos los valores obtenidos en el ejemplo 2, junto con las medidas en radianes de los ángulos, en la siguiente tabla. Dos razones para hacer hincapié en estos valores son que son exactos y que se presentan con frecuencia en el trabajo de trigonometría. Debido a la importancia de estos valores especiales, es una buena idea memorizar la tabla o aprender a calcular los valores con rapidez usando triángulos, como en el ejemplo 2.

Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\dfrac{\pi}{6}$	30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\dfrac{\pi}{4}$	45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\dfrac{\pi}{3}$	60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

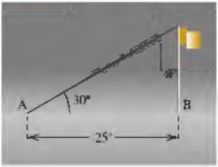
El siguiente ejemplo ilustra un uso práctico de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Otras aplicaciones relacionadas con triángulos rectos se considerarán en la sección 5.7.

EJEMPLO 3 **Cómo calcular la altura de un asta**

Un topógrafo observa que en un punto A, situado en suelo nivelado a una distancia de 25.0 pies de la base B de un asta, el ángulo entre el suelo y la parte más alta del asta es de 30°. Aproxime la altura h del asta a la décima más cercana de un pie.

SOLUCIÓN Al examinar la figura 7, observamos que lo que se necesita es relacionar el cateto opuesto y el cateto adyacente, h y 25, respectivamente, con el ángulo de 30°. Esto indica que debe utilizarse una función trigonométrica que relacione estos dos catetos, es decir, tan o cot. Por lo general, es más fácil solucionar el problema si se selecciona la función en la cual la variable está en el numerador. Por lo tanto, tenemos

FIGURA 7



$$\tan 30° = \frac{h}{25} \quad \text{o, de forma equivalente,} \quad h = 25 \tan 30°.$$

Para calcular h utilizamos el valor de tan 30° del ejemplo 2:

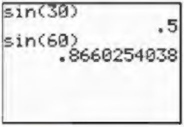
$$h = 25\,\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 14.4 \text{ pies}$$

Es posible aproximar, con cualquier grado de precisión, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo. Las calculadoras tienen teclas rotuladas (SEN), (COS) y (TAN) que pueden utilizarse para aproximar los valores de estas funciones. Los valores de csc, sec y cot pueden obtenerse después por medio de la tecla del recíproco. *Antes de usar una calculadora para obtener valores de funciones que correspondan a la medida en radianes de un ángulo agudo, asegúrese de que la calculadora esté en modo de radianes. Para valores correspondientes a las medidas en grados, seleccione el modo de grados.*

Como ilustración (vea la figura 8), para obtener sen 30° en una calculadora típica, colocamos la calculadora en modo de grados y se usa la tecla (SEN) para obtener sen 30° = 0.5, que es el valor exacto. Usando el mismo procedimiento con 60°, se obtiene una aproximación decimal a $\sqrt{3}/2$, como

$$\text{sen } 60° \approx 0.8660$$

FIGURA 8
En modo de grados

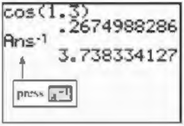


La mayoría de las calculadoras dan una precisión de ocho a diez decimales para estos valores de funciones; sin embargo, a lo largo del libro, por lo general se usarán valores redondeados a cuatro posiciones decimales.

Para determinar un valor como cos 1.3 (vea la figura 9), donde 1.3 es la medida en radianes de un ángulo agudo, colocamos la calculadora en el modo de radianes y usa la tecla (COS) para obtener

$$\cos 1.3 \approx 0.2675$$

FIGURA 9
En modo de radianes



Para sec 1.3, podemos obtener cos 1.3 y luego usar la tecla de recíproco, por lo general rotulada (1/x) o (x^{-1}) (como se muestra en la figura 9), para obtener

$$\sec 1.3 = \frac{1}{\cos 1.3} \approx 3.7383.$$

Las fórmulas incluidas en el cuadro de la siguiente página son, sin duda, las identidades más importantes en trigonometría, debido a que pueden usarse para simplificar y unificar muchos aspectos diferentes de la materia. Debido a que las fórmulas son parte del fundamento del trabajo en trigonometría, se llaman *identidades fundamentales.*

Tres de las identidades fundamentales requieren cuadrados, como $(\text{sen}\ \theta)^2$ y $(\cos\theta)^2$. En general, si n es un entero diferente de -1, una potencia como $(\cos\theta)^n$ se escribe $\cos^n\theta$. Los símbolos $\text{sen}^{-1}\theta$ y $\cos^{-1}\theta$ se reservan para funciones trigonométricas inversas, que estudiaremos en la sección 5.4, y con mayor detalle en el siguiente capítulo. Con este acuerdo en la notación, tenemos, por ejemplo,

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 = (\cos\theta)(\cos\theta)$$
$$\tan^3\theta = (\tan\theta)^3 = (\tan\theta)(\tan\theta)(\tan\theta)$$
$$\sec^4\theta = (\sec\theta)^4 = (\sec\theta)(\sec\theta)(\sec\theta)(\sec\theta)$$

Evaluación de potencias de las funciones trigonométricas (en modo de grados)

Es necesario tener precaución cuando se evalúan las potencias de las funciones trigonométricas en las calculadoras. Por ejemplo, considere la expresión con $\text{sen}^2\ 30°$. Dado que $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, tenemos

$$\text{sen}^2\ 30° = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Por la forma en que la expresión está escrita en la primera entrada de la siguiente pantalla, se esperaría que la calculadora evaluara 30^2 y luego obtuviera el seno de 900°, y eso es lo que ocurre. Sin embargo, esperaríamos lo mismo en la segunda entrada, donde la calculadora TI-83/4 Plus da el valor de $\text{sen}^2\ 30°$. Por lo tanto, en el futuro, para evaluar $\text{sen}^2\ 30°$, se usará el formato que se muestra en la tercera entrada.

```
sin((30)²)
               0
sin(30)²
             .25
(sin(30))²
             .25
```

A continuación se presentan todas las identidades fundamentales y luego se explicarán las demostraciones de las mismas. Estas identidades son válidas para cada ángulo agudo θ, y θ puede adoptar varias formas. Por ejemplo, usando la primera identidad pitagórica con $\theta = 4\alpha$, sabemos que

$$\text{sen}^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha = 1$$

Más adelante mostraremos que estas identidades también son válidas para otros ángulos y para los números reales.

Las identidades fundamentales

1) Las identidades recíprocas:

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

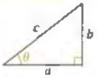
2) Las identidades tangente y cotangente:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

3) Las identidades pitagóricas:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

FIGURA 10



DEMOSTRACIONES

1) Las identidades recíprocas se establecieron antes en esta sección.

2) Para probar la identidad tangente, nos remitiremos al triángulo recto de la figura 10 y usaremos las definiciones de las funciones trigonométricas, como sigue:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Para verificar la identidad cotangente, usaremos una identidad recíproca y la identidad tangente:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

3) Las identidades pitagóricas se llaman así por el primer paso de la siguiente demostración. Remitiéndonos a la figura 10, obtenemos

$$b^2 + a^2 = c^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$
$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 \qquad \text{dividimos}$$
$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \qquad \text{definiciones de sen } \theta \text{ y cos } \theta$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1. \qquad \text{notación equivalente}$$

Podemos usar esta identidad para verificar la segunda identidad pitagórica como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{dividimos entre } \cos^2\theta$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{ecuación equivalente}$$
$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \qquad \text{ley de los exponentes}$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{identidades tangente y recíproca}$$

Para demostrar la tercera identidad pitagórica, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, dividimos ambos lados de la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ entre $\operatorname{sen}^2\theta$.

Podemos utilizar las identidades fundamentales para expresar cada función trigonométrica en términos de cualquier otra función trigonométrica. En el siguiente ejemplo se proporcionan dos ilustraciones.

EJEMPLO 4 Uso de las identidades fundamentales

Sea θ un ángulo agudo.

a) Exprese sen θ en términos de cos θ.

b) Exprese tan θ en términos de sen θ.

SOLUCIÓN

a) Podemos proceder como sigue:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{identidad pitagórica}$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{despejamos } \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad \operatorname{sen}\theta > 0 \text{ para ángulos agudos}$$

(continúa)

Más adelante en esta sección (ejemplo 12) consideraremos una simplificación relacionada con un ángulo *no agudo* θ.

b) Si comenzamos con la identidad fundamental

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

lo único que falta es expresar $\cos\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$. Para ello, resolvemos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para $\cos\theta$ y obtenemos

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$ ■

Al igual que con las manipulaciones algebraicas, se puede brindar apoyo numérico a los resultados de las manipulaciones trigonométricas mediante el examen de una tabla de valores. Las siguientes pantallas muestran que el resultado del ejemplo 4a), en el que $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ para θ agudo, se sustenta con la igualdad de Y_1 y Y_2 en la tabla de valores seleccionados. El soporte gráfico se analizará más adelante en el libro.

Las identidades fundamentales a menudo se usan para simplificar expresiones relacionadas con funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Demostración de que una ecuación es una identidad**

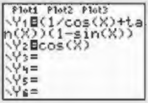
Demuestre que la siguiente ecuación es una identidad mediante la transformación del lado izquierdo en el lado derecho:

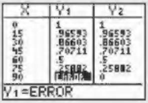
$$(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$$

SOLUCIÓN Comenzamos con el lado izquierdo y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) &= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{identidades recíproca y tangente}\\
&= \left(\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{sumamos fracciones}\\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} && \text{multiplicamos}\\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\\
&= \cos\theta && \text{cancelamos } \cos\theta
\end{aligned}$$ ■

Examinemos el resultado del ejemplo 5 desde el punto de vista numérico. Asignamos el lado izquierdo a Y_1 y el lado derecho a Y_2 y creamos una tabla de valores para $\theta = 0°$ a $\theta = 90°$. Observe que los valores de Y_1 y Y_2 en la tercera pantalla son iguales, excepto por $\theta = 90°$. El mensaje de ERROR ocurre porque sec 90° y tan 90° no están definidas.





Existen otras formas de simplificar la expresión del lado izquierdo en el ejemplo 5. Podríamos multiplicar primero los dos factores y luego simplificar y combinar los términos. El método que empleamos (cambiar todas las expresiones a otras que sólo incluyen senos y cosenos) a menudo es útil. Sin embargo, esa técnica no siempre conduce a la simplificación más corta posible.

En lo sucesivo, usaremos la frase *verificar una identidad* en lugar de *demostrar que una ecuación es una identidad.* Al comprobar una identidad, con frecuencia usamos identidades fundamentales y manipulaciones algebraicas para simplificar expresiones, como se hizo en el ejemplo anterior. Como ocurre con las identidades fundamentales, entendemos que una identidad que contiene fracciones es válida para todos los valores de las variables de tal modo que ningún denominador es cero.

EJEMPLO 6 **Comprobación de una identidad**

Compruebe la siguiente identidad transformando el lado izquierdo en el lado derecho:

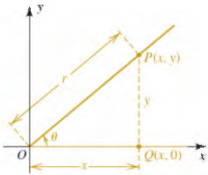
$$\frac{\tan\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \cot\theta$$

SOLUCIÓN Podemos transformar el lado izquierdo en el lado derecho como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} && \text{dividimos numerados por sen } \theta \\
&= \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta && \text{identidades tangente y cotangente} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \cot\theta && \text{regla de cocientes} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} + \cot\theta && \text{cancelamos } \cos\theta \\
&= \sec\theta + \cot\theta && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}$$

En la sección 6.1 verificaremos muchas otras identidades usando métodos similares a los que se utilizan en los ejemplos 5 y 6.

FIGURA 11

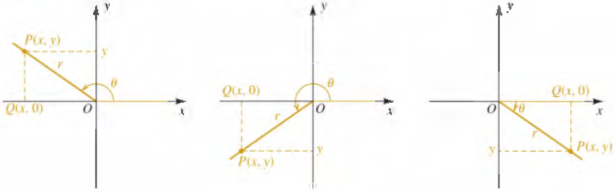


Debido a que muchos problemas aplicados se relacionan con ángulos que no son agudos, es necesario ampliar la definición de las funciones trigonométricas. Para hacer esta ampliación, usamos la posición estándar de un ángulo θ en un plano cartesiano. Si θ es agudo, tenemos la situación que se ilustra en la figura 11, donde hemos seleccionado un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ y donde $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Remitiéndonos al triángulo OQP, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{y}{x}$$

Ahora deseamos considerar los tipos de ángulos que se ilustran en la figura 12 (o cualquier *otro* ángulo, sea positivo, negativo o cero). Observe que en la figura 12 el valor de x o y puede ser negativo. En cada caso, el cateto QP (op en la figura 11) tiene longitud $|y|$, el cateto OQ (ady en la figura 11) tiene longitud $|x|$, y la hipotenusa OP tiene longitud r. Definiremos las seis funciones trigonométricas para que sus valores concuerden con las presentadas antes, siempre que el ángulo es agudo. Se sobrentiende que, si se presenta un denominador cero, el valor de la función correspondiente no está definido.

FIGURA 12



Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea θ un ángulo en posición estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea $P(x, y)$ cualquier punto diferente del origen O en el lado terminal de θ.

Si $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

Podemos mostrar, usando triángulos similares, que las fórmulas en esta definición no dependen del punto $P(x, y)$ que se eligen en el lado terminal de θ. Las identidades fundamentales, que se establecieron para los ángulos agudos, también son válidas para las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Los dominios de las funciones seno y coseno consisten en su totalidad de ángulos θ. Sin embargo, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ son indefinidas si $x = 0$ (es decir, si el lado terminal de θ está en el eje y). Por lo tanto, los dominios de las funciones tangente y secante constan de todos los ángulos *excepto* los que tienen la medida en radianes

$(\pi/2) + \pi n$ para cualquier entero n. Algunos casos especiales son: $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/2$ y $\pm5\pi/2$. Las medidas en grados correspondientes son: $\pm90°$, $\pm270°$ y $\pm450°$.

Los dominios de las funciones cotangente y cosecante constan de todos los ángulos, excepto los que tienen $y = 0$ (es decir, todos los ángulos excepto aquellos que tienen lados terminales en el eje x). Estos son los ángulos que miden πn en radianes (o que miden $180° \cdot n$ en grados) para cualquier entero n.

Este análisis de dominios se resume en la siguiente tabla, donde n denota cualquier entero.

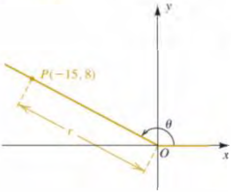
Función		Dominio
seno,	coseno	cada ángulo θ
tangente,	secante	cada ángulo θ excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n = 90° + 180° \cdot n$
cotangente,	cosecante	cada ángulo θ excepto $\theta = \pi n = 180° \cdot n$

Para cualquier punto $P(x, y)$ en la definición anterior, $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$ o, de forma equivalente, $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Por lo tanto,

$$|\text{sen }\theta| \leq 1,\ |\cos\theta| \leq 1,\ |\csc\theta| \geq 1 \text{ y } |\sec\theta| \geq 1$$

por cada θ en los dominios de estas funciones.

FIGURA 13



EJEMPLO 7 **Cómo encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar**

Si θ es un ángulo en posición estándar en un plano cartesiano y si $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ, obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN El punto $P(-15, 8)$ se muestra en la figura 13. Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con $x = -15$, $y = 8$ y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17,$$

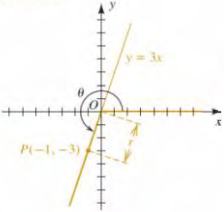
obtenemos lo siguiente:

$$\text{sen }\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{15}{17} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = -\frac{17}{15} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{15}{8}$$

■

FIGURA 14



EJEMPLO 8 **Cómo encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar**

Un ángulo θ está en posición estándar, y su lado terminal yace en el cuadrante III en la recta $y = 3x$. Obtenga los valores de las funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = 3x$ se muestra en la figura 14, junto con los lados inicial y terminal de θ. Dado que el lado terminal de θ se encuentra en el cuadrante III, para empezar seleccionamos un valor negativo conveniente de x, por ejemplo, $x = -1$.

(*continúa*)

Si sustituimos en $y = 3x$ nos da $y = 3(-1) = -3$ y, por lo tanto, $P(-1, -3)$ está en el lado terminal. Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo con

$$x = -1, \quad y = -3 \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

nos da

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \tan\theta = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{1} \qquad \cot\theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

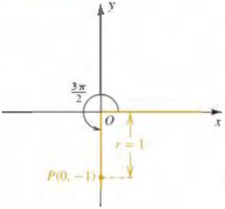
■

La definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo puede aplicarse si θ es un ángulo cuadrantal. El procedimiento se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Cómo encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuadrantal

Si $\theta = 3\pi/2$, obtenga los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 15



SOLUCIÓN Tenga en cuenta que $3\pi/2 = 270°$. Si θ se coloca en posición estándar, el lado terminal de θ coincide con el eje y negativo, como se muestra en la figura 15. Para aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, podemos elegir *cualquier* punto P en el lado terminal de θ. Para simplificar, usamos $P(0, -1)$. En este caso, $x = 0$, $y = -1$, $r = 1$, y por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0$$

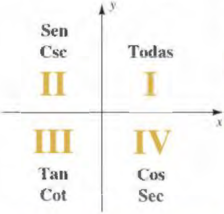
Las funciones tangente y secante no están definidas, puesto que las expresiones sin sentido $\tan\theta = (-1)/0$ y $\sec\theta = 1/0$ se presentan cuando sustituimos en las fórmulas correspondientes. ■

Determinemos los signos asociados con los valores de las funciones trigonométricas. Si θ está en el cuadrante II y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal, entonces x es negativo y y es positivo. Por consiguiente, $\operatorname{sen}\theta = y/r$ y $\csc\theta = r/y$ son positivas, y las otras cuatro funciones trigonométricas, las cuales todas contienen x, son negativas. Examinando los cuadrantes que quedan de manera similar, obtenemos la siguiente tabla.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante que contiene θ	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

FIGURA 16
Funciones trigonométricas positivas



Una mnemotecnia (en inglés) para recordar los cuadrantes en los que las funciones trigonométricas son positivas es: "A Smart Trig Class", que corresponde a All Sin Tan Cos.

El diagrama de la figura 16 puede ser útil para recordar los cuadrantes en los que las funciones trigonométricas son *positivas*. Si una función no se incluye (como cos en el cuadrante II), es que esa función es negativa. Concluimos esta sección con tres ejemplos que requieren utilizar la información de la tabla precedente.

EJEMPLO 10 **Cómo encontrar cuadrante que contiene un ángulo**

Obtenga el cuadrante que contiene θ si tanto $\cos\theta > 0$ como $\operatorname{sen}\theta < 0$.

SOLUCIÓN Remitiéndonos a la tabla de signos de la figura 16, observamos que $\cos\theta > 0$ (coseno es positivo) si θ está en el cuadrante I o IV y que $\operatorname{sen}\theta < 0$ (seno es negativo) si θ está en el cuadrante III o IV. Por lo tanto, para satisfacer ambas condiciones, θ tiene que estar en el cuadrante IV.

EJEMPLO 11 **Cómo determinar los valores de las funciones trigonométricas a partir de condiciones prescritas**

Si $\operatorname{sen}\theta = 3/5$ y $\tan\theta < 0$, use identidades fundamentales para obtener los valores de las otras cinco funciones trigonométricas.

SOLUCIÓN Puesto que $\operatorname{sen}\theta = 3/5 > 0$ (positivo) y $\tan\theta < 0$ (negativo), θ está en el cuadrante II. Con la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y el hecho de que $\cos\theta$ es negativo en el cuadrante II, tenemos

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\tfrac{16}{25}} = -\tfrac{4}{5}$$

A continuación utilizamos la identidad tangente para obtener

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

Por último, usando las identidades recíprocas, obtenemos

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-3/4} = -\frac{4}{3}$$

■

EJEMPLO 12 **Uso de identidades fundamentales**

Vuelva a escribir $\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\theta}$ en forma que no sea radical y sin usar valores absolutos para $\pi < \theta < 2\pi$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\theta} &= \sqrt{1 + \cot^2\theta} && \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\
&= \sqrt{\csc^2\theta} && 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \\
&= |\csc\theta| && \sqrt{x^2} = |x|
\end{aligned}$$

Dado que $\pi < \theta < 2\pi$, sabemos que θ está en el cuadrante III o IV. Por lo tanto, $\csc\theta$ es *negativo* y, por la definición de valor absoluto, tenemos

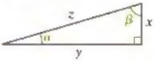
$$|\csc\theta| = -\csc\theta$$

■

5.2 Ejercicios

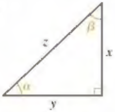
Ejer. 1-2: Use el sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos están dibujados a escala, y los ángulos están medidos en radianes.)

1



a) α	**A)** 7
b) β	**B)** 0.28
c) x	**C)** 24
d) y	**D)** 1.29
e) z	**E)** 25

2

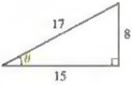


a) α	**A)** 23.35
b) β	**B)** 16
c) x	**C)** 17
d) y	**D)** 0.82
e) z	**E)** 0.76

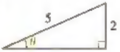
Ejer. 3-10: Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

3

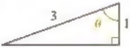
4



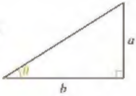
5



6

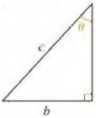


7

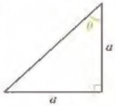


8

9

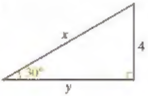


10



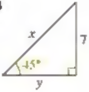
Ejer. 11-26: Obtenga los valores exactos de x y y.

11

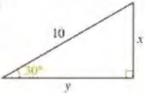


12

13

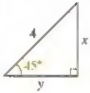


14



15

16



Ejer. 17-22: Obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

17 $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$

18 $\cos\theta = \frac{8}{17}$

19 $\tan\theta = \frac{5}{12}$

20 $\cot\theta = \frac{7}{24}$

21 $\sec\theta = \frac{6}{5}$

22 $\csc\theta = \frac{4}{3}$

23 **Altura de un árbol** Un guardabosque, a 200 pies de la base de una secuoya, observa que el ángulo entre el suelo y la punta del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol.

24 **Distancia al monte Fuji** El pico del monte Fuji en Japón mide aproximadamente 12,400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, a varias millas de distancia, observa que el ángulo entre el suelo a nivel y el pico es de 30°. Estime la distancia del estudiante al punto en el suelo a nivel directamente debajo del pico.

25 **Piedras de Stonehenge** Stonehenge, en las llanuras de Salisbury, Inglaterra, se construyó con bloques sólidos de piedra que pesan más de 99,000 libras cada uno. Para levantar una sola piedra se necesitaron 550 personas, que jalaban la piedra por una rampa inclinada a un ángulo de 9°. Aproxime la distancia que se movía la piedra para levantarla a una altura de 30 pies.

26 **Altura de un letrero publicitario** Colocado en 1990 y retirado en 1997, el letrero publicitario más alto del mundo fue una letra I situada en lo alto del edificio de 73 pisos del First Interstate World Center, en Los Ángeles. A una distancia de 200 pies desde un punto directamente debajo del letrero, el ángulo entre el suelo y la punta del letrero era de 78.87°. Aproxime la altura de la parte superior del letrero.

27 **Resolución de un telescopio** Dos estrellas que están muy cercanas pueden parecer que son una. La capacidad de un telescopio para separar las imágenes se llama resolución. Cuanto menor sea la resolución, mejor será la capacidad del telescopio para separar las imágenes en el cielo. En un telescopio de refracción, la resolución θ (vea la figura) puede mejorar con una lente con un diámetro D más grande. La relación entre θ en grados y D en metros está dada por sen $\theta = 1.22\lambda/D$, donde λ es la longitud de onda de la luz en metros. El mayor telescopio de refracción en el mundo está en la Universidad de Chicago. A una longitud de onda de $\lambda = 550 \times 10^{-9}$ metros, su resolución es de 0.00003769°. Aproxime el diámetro de la lente.

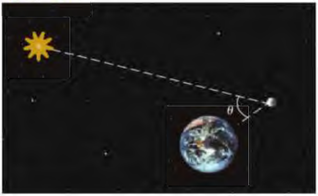
EJERCICIO 27

28 **Fases lunares** Las fases lunares pueden describirse utilizando el ángulo de fase θ, determinado por el Sol, la Luna y la Tierra, como se muestra en la figura. Debido a que la Luna orbita la Tierra, θ cambia durante el curso de un mes. El área de la región A de la Luna, que aparece iluminada para un observador en la Tierra, está dada por $A = \frac{1}{2}\pi R^2(1 + \cos\theta)$, donde $R = 1080$ mi es el radio de la Luna. Aproxime A para las siguientes posiciones de la Luna:

a) $\theta = 0°$ (luna llena) **b)** $\theta = 180°$ (luna nueva)

c) $\theta = 90°$ (cuarto creciente) **d)** $\theta = 103°$

EJERCICIO 28



Ejer. 29-34: Aproxime a cuatro posiciones decimales, cuando corresponda.

29 **a)** sen 73° **b)** cos 61°
c) csc 105° **d)** sec (−215°)

30 **a)** tan 282° **b)** cot (−81°)
c) sec 202° **d)** sen 97°

31 **a)** cot (π/13) **b)** csc 1.32
c) cos (−8.54) **d)** tan $\frac{15}{8}$

32 **a)** sen (−0.11) **b)** sec (2π/5)
c) tan $\left(-\frac{3}{13}\right)$ **d)** cos 2.4π

33 **a)** sen 30° **b)** sen 30
c) cos $\pi°$ **d)** cos π

34 **a)** sen 45° **b)** sen 45
c) cos (3π/2)° **d)** cos (3π/2)

Ejer. 35-38: Use las identidades pitagóricas para escribir la expresión como un entero.

35 **a)** $\tan^2 4\beta - \sec^2 4\beta$ **b)** $4\tan^2\beta - 4\sec^2\beta$

36 **a)** $\csc^2 3\alpha - \cot^2 3\alpha$ **b)** $3\csc^2\alpha - 3\cot^2\alpha$

37 **a)** $5\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 5\cos^2\theta$ **b)** $5\,\mathrm{sen}^2(\theta/4) + 5\cos^2(\theta/4)$

38 **a)** $7 \sec^2 \gamma - 7 \tan^2 \gamma$

b) $7 \sec^2 (\gamma/3) - 7 \tan^2 (\gamma/3)$

Ejer. 39-44: Simplifique la expresión.

39 $\dfrac{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$

40 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta - \cos^3 \theta}$

41 $\dfrac{9 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta - 5 \tan \theta + 6}$

42 $\dfrac{\cot^2 \alpha - 4}{\cot^2 \alpha - \cot \alpha - 6}$

43 $\dfrac{2 - \tan \theta}{2 \csc \theta - \sec \theta}$

44 $\dfrac{\csc \theta + 1}{(1/\operatorname{sen}^2 \theta) + \csc \theta}$

Ejer. 45-50: Use las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

45 $\cot \theta$, $\operatorname{sen} \theta$

46 $\tan \theta$, $\cos \theta$

47 $\sec \theta$, $\operatorname{sen} \theta$

48 $\csc \theta$, $\cos \theta$

49 $\operatorname{sen} \theta$, $\sec \theta$

50 $\cos \theta$, $\cot \theta$

Ejer. 51-74: Verifique la identidad mediante la transformación del lado izquierdo en el lado derecho.

51 $\cos \theta \sec \theta = 1$

52 $\tan \theta \cot \theta = 1$

53 $\operatorname{sen} \theta \sec \theta = \tan \theta$

54 $\operatorname{sen} \theta \cot \theta = \cos \theta$

55 $\dfrac{\csc \theta}{\sec \theta} = \cot \theta$

56 $\cot \theta \sec \theta = \csc \theta$

57 $(1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = \operatorname{sen}^2 2\theta$

58 $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1$

59 $\cos^2 \theta(\sec^2 \theta - 1) = \operatorname{sen}^2 \theta$

60 $(\tan \theta + \cot \theta) \tan \theta = \sec^2 \theta$

61 $\dfrac{\operatorname{sen} (\theta/2)}{\csc (\theta/2)} + \dfrac{\cos (\theta/2)}{\sec (\theta/2)} = 1$

62 $1 - 2 \operatorname{sen}^2 (\theta/2) = 2 \cos^2 (\theta/2) - 1$

63 $(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 - \operatorname{sen} \theta) = \dfrac{1}{\sec^2 \theta}$

64 $(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = 1$

65 $\sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \operatorname{sen} \theta$

66 $\csc \theta - \operatorname{sen} \theta = \cot \theta \cos \theta$

67 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 1 + \cot \theta$

68 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = 1 + \tan \theta$

69 $(\cot \theta + \csc \theta)(\tan \theta - \operatorname{sen} \theta) = \sec \theta - \cos \theta$

70 $\cot \theta + \tan \theta = \csc \theta \sec \theta$

71 $\sec^2 3\theta \csc^2 3\theta = \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$

72 $\dfrac{1 + \cos^2 3\theta}{\operatorname{sen}^2 3\theta} = 2 \csc^2 3\theta - 1$

73 $\log \csc \theta = -\log \operatorname{sen} \theta$

74 $\log \tan \theta = \log \operatorname{sen} \theta - \log \cos \theta$

Ejer. 75-78: Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y P en el lado terminal.

75 $P(12, -5)$

76 $P(-8, -15)$

77 $P(-2, -5)$

78 $P(-2, 3)$

Ejer. 79-84: Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ está en el cuadrante especificado y satisface la condición dada.

79 II; en la recta $y = -3x$

80 IV; en la recta $3y + 5x = 0$

81 IV; en una recta que tiene pendiente $-\frac{3}{4}$

82 III; biseca el cuadrante

83 III; paralelo a la recta $2y - 7x + 2 = 0$

84 II. paralelo a la recta hasta $A(1, 6)$ y $B(3, -2)$

Ejer. 85-86: Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada ángulo, siempre que sea posible.

85 **a)** $90°$ **b)** $0°$ **c)** $7\pi/2$ **d)** 3π

86 **a)** $180°$ **b)** $-90°$ **c)** 2π **d)** $5\pi/2$

Ejer. 87-88: Obtenga el cuadrante que contiene θ si las condiciones dadas son verdaderas.

87 **a)** $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

b) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$

c) $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < =$

d) $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

88 **a)** $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

b) $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

c) $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

d) $\cos\theta > 0$ y $\csc < 0$

Ejer. 89-96: Utilice las identidades fundamentales para obtener los valores de las funciones trigonométricas para las condiciones dadas.

89 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

90 $\cot\theta = \frac{3}{4}$ y $\cos\theta < 0$

91 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $\sec\theta > 0$

92 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

93 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

94 $\csc\theta = 5$ y $\cot\theta < 0$

95 $\sec\theta = 4$ y $\csc\theta > 0$

96 $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{5}$ y $\cos\theta > 0$

Ejer. 97-102: Rescriba la expresión en forma que no sea radical y sin usar valores absolutos para los valores indicados de θ.

97 $\sqrt{\sec^2\theta - 1}$; $\pi/2 < \theta < \pi$

98 $\sqrt{1 + \cot^2\theta}$; $0 < \theta < \pi$

99 $\sqrt{1 + \tan^2\theta}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

100 $\sqrt{\csc^2\theta - 1}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

101 $\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$; $2\pi < \theta < 4\pi$

102 $\sqrt{\cos^2(\theta/2)}$; $0 < \theta < \pi$

5.3 Funciones trigonométricas de los números reales

El dominio de cada función trigonométrica que hemos estudiado es un conjunto de ángulos. En cálculo y en muchas aplicaciones, los dominios de las funciones están compuestos por números reales. Para considerar el dominio de una función trigonométrica como un subconjunto de $\mathbb{R}$, podemos usar la siguiente definición.

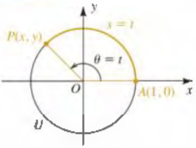
Definición de las funciones trigonométricas de los números reales

El **valor de una función trigonométrica en un número real t** es su valor en un ángulo de t radianes, siempre que exista dicho valor.

Usando esta definición, podemos interpretar una notación como sen 2, *ya sea* como el seno del número real 2 *o* el seno de un ángulo de 2 radianes. Como en la sección 5.2, si se utiliza la medida en grados, se escribirá sen 2°. Bajo este entendido,

$$\operatorname{sen} 2 \neq \operatorname{sen} 2°$$

FIGURA 1



Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de los números reales con una calculadora, se usa el modo de radianes.

Podemos interpretar las funciones trigonométricas de los números reales geométricamente usando un círculo unitario U, es decir, un círculo de radio 1, con centro en el origen O de un plano de coordenadas rectangular. El círculo U es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea t un número real tal que $0 < t < 2\pi$ y θ denota el ángulo (en posición estándar) de la medida en radianes t. Una posibilidad se ilustra en la figura 1, donde $P(x, y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ y el círculo unitario U y donde s es la longitud del arco circular de $A(1, 0)$ a $P(x, y)$. Con la fórmula $s = r\theta$ para la longitud de un arco circular, con $r = 1$ y $\theta = t$, vemos que

$$s = r\theta = 1(t) = t$$

Por lo tanto, *t puede considerarse ya sea como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco circular AP en U.*

A continuación, consideraremos *cualquier* número real no negativo t. Si consideramos que el ángulo θ de medida en radianes t fue generado por la rotación del segmento de recta OA alrededor de O en dirección contraria a las manecillas del reloj, entonces t es la distancia a lo largo de U que A recorre antes de llegar a su posición final $P(x, y)$. En la figura 2 hemos ilustrado un caso para $t < 2\pi$; sin embargo, si $t > 2\pi$, entonces A puede viajar alrededor de U varias veces en dirección contraria a las manecillas del reloj antes de llegar a $P(x, y)$.

Si $t < 0$, la rotación de OA es en el *sentido de las manecillas del reloj,* y la distancia que A recorre antes de llegar a $P(x, y)$ es $|t|$, como se ilustra en la figura 3.

FIGURA 2
$\theta = t, t > 0$

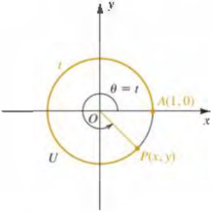
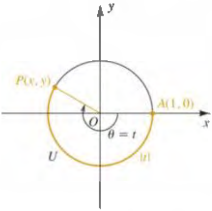


FIGURA 3
$\theta = t, t < 0$



El análisis precedente indica cómo *podemos asociar con cada número real t un punto único $P(x, y)$ en U.* Llamaremos a $P(x, y)$ el **punto en el círculo unitario U que corresponde a t.** Las coordenadas (x, y) de P pueden utilizarse para calcular las seis funciones trigonométricas de t. Entonces, por la definición de las funciones trigonométricas de los números reales junto con la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (proporcionada en la sección 5.2), observamos que

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

Utilizando el mismo procedimiento para las cinco funciones trigonométricas restantes, obtenemos las siguientes fórmulas.

Definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario

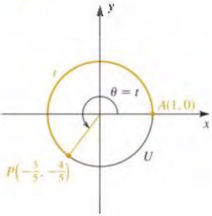
Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en el círculo unitario U que corresponde a t, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (\text{si } y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (\text{si } y \neq 0).$$

Las fórmulas en esta definición expresan valores de funciones en términos de las coordenadas de un punto P en un círculo unitario. Por ese motivo, las funciones trigonométricas se conocen en ocasiones como **funciones circulares.**

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Cómo determinar los valores de las funciones trigonométricas**

Un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario U que corresponde a un número real t se muestra en la figura 4 para $\pi < t < 3\pi/2$. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN Remitiéndonos a la figura 4, observamos que las coordenadas del punto $P(x, y)$ son

$$x = -\tfrac{3}{5}, \qquad y = -\tfrac{4}{5}$$

Utilizamos la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario para obtener

$$\operatorname{sen} t = y = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = x = -\frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} \quad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3} \quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

EJEMPLO 2 **Obtención de un punto en U relativo a un punto dado**

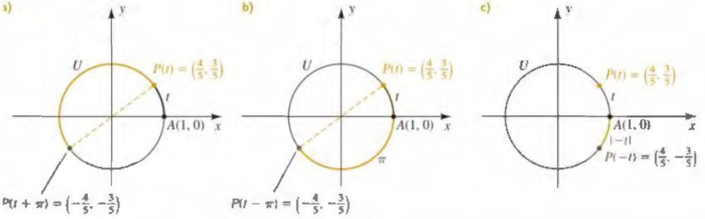
$P(t)$ denota el punto en el círculo unitario U que corresponde a t para $0 \leq t < 2\pi$. Si $P(t) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, obtenga

a) $P(t + \pi)$ **b)** $P(t - \pi)$ **c)** $P(-t)$

SOLUCIÓN

a) El punto $P(t)$ en U está trazado en la figura 5a), donde también se muestra el arco AP de longitud t. Para obtener $P(t + \pi)$, recorremos una distancia π en dirección *contraria a las manecillas del reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, como indica el arco color naranja en la figura. Dado que π es la mitad de la circunferencia de U, esto nos da el punto $P(t + \pi) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ diametralmente opuesto a $P(t)$.

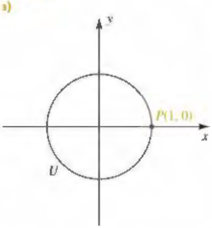
FIGURA 5

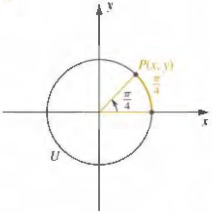


b) Para obtener $P(t - \pi)$, recorremos una distancia π en el *sentido de las manecillas del reloj* a lo largo de U desde $P(t)$, como se indica en la figura 5b). Esto nos da $P(t - \pi) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Tenga en cuenta que $P(t + \pi) = P(t - \pi)$

c) Para obtener $P(-t)$, recorremos a lo largo de U una distancia $|-t|$ en el *sentido de las manecillas del reloj* desde $A(1, 0)$, como indica la figura 5c). Esto es equivalente a reflejar $P(t)$ a través del eje x. Por lo tanto, simplemente se cambia el signo de la coordenada y a $P(t) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ para obtener $P(-t) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. ■

FIGURA 6





EJEMPLO 3 **Cómo encontrar valores especiales de las funciones trigonométricas**

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t:

a) $t = 0$ **b)** $t = \frac{\pi}{4}$ **c)** $t = \frac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN

a) El punto P en el círculo unitario U que corresponde a $t = 0$ tiene coordenadas $(1, 0)$, como se muestra en la figura 6a). Por lo tanto, sea $x = 1$ y $y = 0$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, para obtener

$$\operatorname{sen} 0 = y = 0 \qquad \cos 0 = x = 1$$
$$\tan 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 0 = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

Observe que csc 0 y cot 0 no están definidos, puesto que $y = 0$ es el denominador.

b) Si $t = \pi/4$, el ángulo de medida en radianes $\pi/4$ que se muestra en la figura 6b) biseca el primer cuadrante y el punto $P(x, y)$ yace en la recta $y = x$. Dado que $P(x, y)$ está en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y que $y = x$, obtenemos

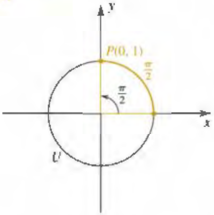
$$x^2 + x^2 = 1, \qquad \text{o} \qquad 2x^2 = 1$$

Despejamos x y, tomando en cuenta que $x > 0$, obtenemos

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, P es el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Si $x = \sqrt{2}/2$ y $y = \sqrt{2}/2$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, obtenemos

FIGURA 6
c)



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\csc\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

c) El punto P en U que corresponde a $t = \pi/2$ tiene coordenadas $(0, 1)$, como se ilustra en la figura 6c). Por lo tanto, si $x = 0$ y $y = 1$ en la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, obtenemos

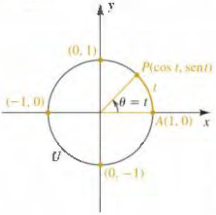
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Las funciones tangente y secante no están definidas, puesto que $x = 0$ es el denominador en cada caso. ■

En el apéndice IV se presenta un resumen de las funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Usaremos la formulación del círculo unitario de las funciones trigonométricas para obtener sus gráficas. Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto en el círculo unitario U que corresponde a t, entonces, por la definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario,

FIGURA 7



$$x = \cos t \qquad \text{y} \qquad y = \operatorname{sen} t$$

Por consiguiente, como se muestra en la figura 7, podemos denotar $P(x, y)$ así:

$$P(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Si $t > 0$, el número real t puede interpretarse ya sea como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco AP.

Si t aumenta de 0 a 2π radianes, el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ viaja alrededor del círculo unitario U una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si observamos la variación de las coordenadas x y y de P, obtenemos la siguiente tabla. La notación $0 \to \pi/2$ en la primera fila de la tabla significa que t aumenta de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \to (0, 1)$ denota la variación correspondiente de $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ a medida que recorre U de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Si t aumenta de 0 a $\pi/2$, sen t aumenta de 0 a 1, que se denota con $0 \to 1$. Además, sen t asume cada valor entre 0 y 1. Si t aumenta de $\pi/2$ a π, entonces sen t disminuye de 1 a 0, que se denota con $1 \to 0$. Las demás entradas en la tabla pueden interpretarse de manera similar.

t	$P(\cos t, \operatorname{sen} t)$	$\cos t$	$\operatorname{sen} t$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \to (0, 1)$	$1 \to 0$	$0 \to 1$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$(0, 1) \to (-1, 0)$	$0 \to -1$	$1 \to 0$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \to (0, -1)$	$-1 \to 0$	$0 \to -1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$(0, -1) \to (1, 0)$	$0 \to 1$	$-1 \to 0$

Si t aumenta de 2π a 4π, el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ en la figura 7 sigue la trayectoria del círculo unitario U de nuevo y los patrones de sen t y cos t se repiten, es decir,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

por cada t en el intervalo $[0, 2\pi]$. Lo mismo es válido si t aumenta de 4π a 6π, de 6π a 8π, y así sucesivamente. En general, tenemos el siguiente teorema.

Teorema sobre valores repetidos de funciones de sen y cos

Si n es cualquier entero, entonces

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi n) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi n) = \cos t$$

La variación repetitiva de las funciones seno y coseno es *periódica* en el sentido de la siguiente definición.

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo k de tal modo que

$$f(t + k) = f(t)$$

para cada t en el dominio de f. El menor de estos números reales positivos k, si existe, es el **periodo de** f.

De seguro ya comprende a nivel intuitivo el concepto del periodo de una función. Por ejemplo, si un lunes le preguntaran: "¿Qué día de la semana será dentro de 15 días?", su respuesta sería "martes" debido a su comprensión que los días de la semana se repiten cada 7 días y 15 es un día más que dos periodos completos de 7 días. De la explicación del teorema anterior se desprende que el periodo de las funciones seno y coseno es 2π.

Ahora podemos obtener fácilmente las gráficas de las funciones seno y coseno. Como deseamos trazar estar gráficas en un plano xy, sustituiremos la variable t por x y consideraremos las ecuaciones

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = \cos x$$

Podemos pensar que x es la medida en radianes de cualquier ángulo; sin embargo, en cálculo, x se considera por lo general un número real. Estos son puntos de vista equivalentes, puesto que el seno (o coseno) de un ángulo de x radianes es igual al seno (o coseno) del número real x. La variable y denota el valor de la función que corresponde a x.

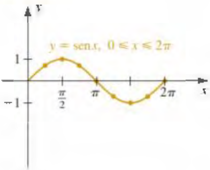
x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

La tabla al margen presenta las coordenadas de varios puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le 2\pi$. Se pueden determinar puntos adicionales con los resultados de ángulos especiales, como

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.8660$$

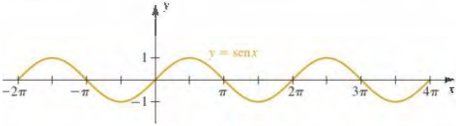
Para dibujar la gráfica de $0 \le x \le 2\pi$, trazamos los puntos dados por la tabla y recordamos que sen x aumenta en $[0, \pi/2]$, disminuye en $[\pi/2, \pi]$ y $[\pi, 3\pi/2]$ y aumenta en $[3\pi/2, 2\pi]$. Esto nos da el dibujo de la figura 8. Dado que la función seno es periódica, el patrón que se muestra en la figura 8 se repite a la derecha y a la izquierda, en intervalos de longitud 2π. Esto nos da el dibujo de la figura 9.

FIGURA 8



x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
2π	1

FIGURA 9



Podemos usar el mismo procedimiento para dibujar la gráfica de $y = \cos x$. La tabla al margen presenta las coordenadas de varios puntos en la gráfica para $0 \le x \le 2\pi$. Trazar estos puntos conduce a la parte de la gráfica que se muestra en la figura 10. Al repetir este patrón a la derecha y a la izquierda, en intervalos de longitud 2π, obtenemos el dibujo de la figura 11.

FIGURA 10

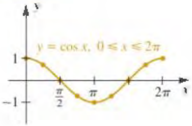
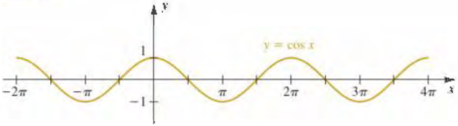


FIGURA 11



La parte de la gráfica de la función seno o coseno correspondiente a $0 \le x \le 2\pi$ es un **ciclo**. En ocasiones, un ciclo se conoce como **onda sinusoidal** u **onda cosinusoidal**.

El rango de las funciones seno y coseno consta de todos los números reales en el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Puesto que $\csc x = 1/\operatorname{sen} x$ y $\sec x = 1/\cos x$, se desprende que el rango de las funciones cosecante y secante consta de todos los números reales que tienen valor absoluto mayor o igual que 1.

Como veremos, el rango de las funciones tangente y cotangente consta de todos los números reales.

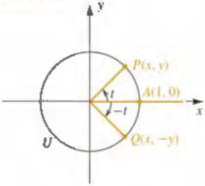
Antes de analizar las gráficas de las demás funciones trigonométricas, estableceremos fórmulas que incluyen las funciones de $-t$ para cualquier t. Dado que se incluye un signo menos, las llamaremos *fórmulas para negativos*.

Fórmulas para negativos

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

FIGURA 12



DEMOSTRACIONES Considere el círculo unitario U de la figura 12. A medida que aumenta t de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ describe la trayectoria del círculo unitario U una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj y el punto $Q(x, -y)$, correspondiente a $-t$, describe U una vez en el sentido de las manecillas del reloj. Si aplicamos la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$), tenemos

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$
$$\cos(-t) = x = \cos t$$
$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Las demostraciones de las tres fórmulas restantes son similares. ■

En los siguientes ejemplos, las fórmulas para negativos se utilizan para obtener el valor exacto de cada función trigonométrica.

EJEMPLOS **Uso de fórmulas para negativos**

- $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
- $\csc(-30°) = -\csc 30° = -2$
- $\sec(-60°) = \sec 60° = 2$
- $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

A continuación usaremos las fórmulas para negativos para verificar una identidad trigonométrica.

EJEMPLO 4 **Uso de fórmulas para negativos para demostrar una identidad**

Demuestre la siguiente identidad mediante la transformación del lado izquierdo en el lado derecho:

$$\operatorname{sen}(-x)\tan(-x) + \cos(-x) = \sec x$$

SOLUCIÓN Podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-x)\tan(-x) + \cos(-x) &= (-\operatorname{sen} x)(-\tan x) + \cos x && \text{fórmulas para negativos}\\
&= \operatorname{sen} x\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x && \text{identidad tangente}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x && \text{multiplicamos}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} && \text{sumamos términos}\\
&= \frac{1}{\cos x} && \text{identidad pitagórica}\\
&= \sec x && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}$$

■

Podemos usar las fórmulas para negativos para probar el siguiente teorema.

Teorema sobre funciones trigonométricas pares e impares

1) Las funciones coseno y secante son pares.
2) Las funciones seno, tangente, cotangente y cosecante son impares.

DEMOSTRACIONES Probaremos el teorema para las funciones coseno y seno. Si $f(x) = \cos x$, entonces

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x),$$

lo que significa que la función coseno es par.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces,

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$$

Por lo tanto, la función seno es impar. ■

Como la función seno es impar, su gráfica es simétrica respecto al origen (figura 13). Como la función coseno es par, su gráfica es simétrica respecto al eje y (vea la figura 14).

FIGURA 13 seno es impar

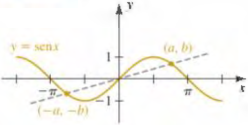
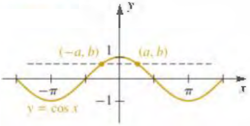


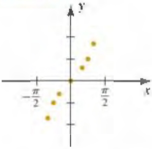
FIGURA 14 coseno es par



Por el teorema anterior, la función tangente es impar y, por consiguiente, la gráfica de $y = \tan x$ es simétrica respecto al origen. La tabla al margen presenta algunos puntos en la gráfica si $-\pi/2 < x < \pi/2$. Los puntos correspondientes se trazan en la figura 15.

x	$y = \tan x$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.7$

FIGURA 15



Los valores de $\tan x$ cercanos a $x = \pi/2$ requieren atención especial. Si consideramos que $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, entonces, a medida que x aumenta hacia $\pi/2$, el numerador $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y el denominador $\cos x$ se aproxima a 0. En consecuencia, $\tan x$ asume valores positivos grandes. A continuación se presentan varias aproximaciones $\tan x$ para x cercana a $\pi/2 \approx 1.5708$:

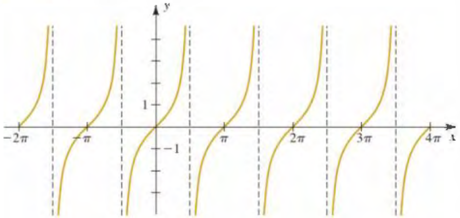
$$\begin{aligned}
\tan 1.57000 &\approx 1{,}255.8\\
\tan 1.57030 &\approx 2{,}014.8\\
\tan 1.57060 &\approx 5{,}093.5\\
\tan 1.57070 &\approx 10{,}381.3\\
\tan 1.57079 &\approx 158{,}057.9
\end{aligned}$$

Observe la rapidez con que aumenta tan x a medida que x se aproxima a $\pi/2$. Se dice que tan x *aumenta sin límite a medida que x se aproxima a $\pi/2$ a través de valores menores que $\pi/2$*. De manera similar, si x se aproxima a $-\pi/2$ a través de valores *mayores*, entonces tan x *disminuye sin límite*. Podemos denotar esta variación con la notación de flecha como sigue:

$$\text{a medida que} \quad x \to \frac{\pi}{2}^{-}, \quad \tan x \to \infty$$
$$\text{a medida que} \quad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}, \quad \tan x \to -\infty$$

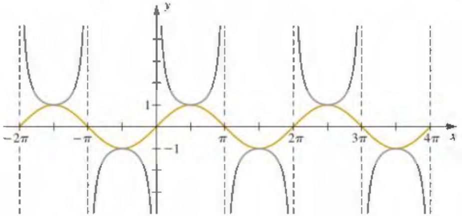
Esta variación de tan x en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ilustra en la figura 16. Esta parte de la gráfica se conoce como una **rama** de la tangente. Las rectas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica. El mismo patrón se repite en los intervalos abiertos $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 5\pi/2)$, y en intervalos similares de longitud π, como se muestra en la figura. Por lo tanto, *la función tangente es periódica con el periodo π.*

FIGURA 16 $y = \tan x$



Podemos usar las gráficas de $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$ para trazar las gráficas de las tres funciones trigonométricas restantes. Por ejemplo, dado que $\csc x = 1/\text{sen}\, x$, podemos obtener la coordenada y de un punto en la gráfica de la función cosecante con el recíproco de la coordenada y correspondiente en la gráfica del seno para cada valor de x, excepto $x = \pi n$ para cualquier entero n. (Si $x = \pi n$, sen $x = 0$ y, por lo tanto, $1/\text{sen}\, x$ no está definido.) Como ayuda para dibujar la gráfica de la función cosecante, conviene trazar la gráfica de la función seno (que se muestra en color naranja en la figura 17) y luego determinar los recíprocos para obtener puntos en la gráfica de la función cosecante.

FIGURA 17 $y = \csc x$, $y = \operatorname{sen} x$



Observe la manera en que la función cosecante aumenta o disminuye sin límite, a medida que x se aproxima a πn para cualquier entero n. La gráfica tiene asíntotas verticales $x = \pi n$, como indica la figura. Hay una **rama superior** de la cosecante en el intervalo $(0, \pi)$ y una **rama inferior** en el intervalo $(\pi, 2\pi)$; en conjunto, componen un *ciclo* de la cosecante.

Puesto que $\sec x = 1/\cos x$ y $\cot x = 1/\tan x$, podemos obtener las gráficas de las funciones secante y cotangente si obtenemos los recíprocos de las coordenadas y de los puntos en las gráficas de las funciones coseno y tangente, como se ilustra en las figuras 18 y 19.

En el apéndice III se presenta un resumen gráfico de las seis funciones trigonométricas y sus inversas (que se analizan en la sección 6.6).

FIGURA 18 $y = \sec x$, $y = \cos x$

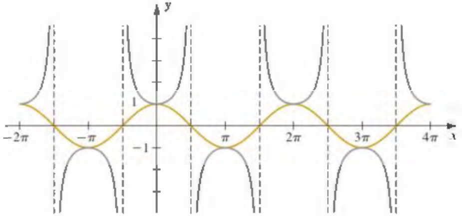
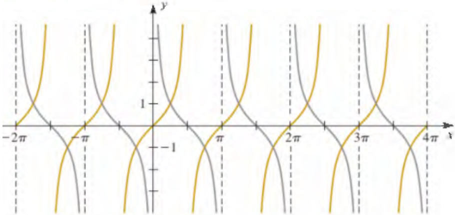
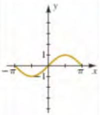
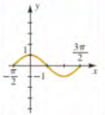
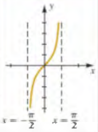
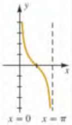
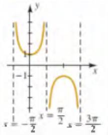
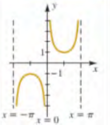


FIGURA 19 $y = \cot x$, $y = \tan x$



Hemos considerado muchas propiedades de las seis funciones trigonométricas de x, donde x es un número real o la medida en radianes de un ángulo. El siguiente cuadro contiene un resumen de características importantes de estas funciones (n denota un entero arbitrario).

Resumen de características de las funciones trigonométricas y sus gráficas

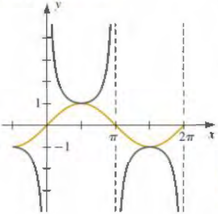
Característica	$y = \operatorname{sen} x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
Gráfica (un periodo)						
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$
Asíntotas verticales	ninguna	ninguna	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$
Rango	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Intersecciones x	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	ninguna	ninguna
Intersección y	0	1	0	ninguna	1	ninguna
Periodo	2π	2π	π	π	2π	2π
Par o impar	impar	par	impar	impar	par	impar
Simetría	origen	eje y	origen	origen	eje y	origen

EJEMPLO 5 **Investigación de la variación de $\csc x$**

Investigue la variación de $\csc x$ a medida que

$$x \to \pi^-, \quad x \to \pi^+, \quad x \to \frac{\pi}{2}^-, \quad \text{y} \quad x \to \frac{\pi}{6}^+$$

FIGURA 20
$y = \csc x$, $y = \operatorname{sen} x$



SOLUCIÓN Remitiéndonos a la gráfica de $y = \csc x$ en la figura 20 y utilizando nuestro conocimiento de los valores especiales de las funciones seno y cosecante, obtenemos lo siguiente:

a medida que $x \to \pi^-$, $\operatorname{sen} x \to 0$ (a través de valores positivos) y $\csc x \to \infty$
a medida que $x \to \pi^+$, $\operatorname{sen} x \to 0$ (a través de valores positivos) y $\csc x \to -\infty$
a medida que $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $\operatorname{sen} x \to 1$ y $\csc x \to 1$
a medida que $x \to \dfrac{\pi}{6}^+$, $\operatorname{sen} x \to \dfrac{1}{2}$ y $\csc x \to 2$ ■

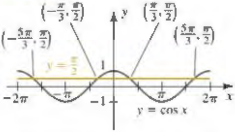
EJEMPLO 6 **Resolución de ecuaciones y desigualdades relacionadas con una función trigonométrica**

Obtenga todos los valores de x en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, de tal modo que

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos x > \frac{1}{2}$ **c)** $\cos x < \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN Este problema puede resolverse fácilmente si nos remitimos a las gráficas de $y = \cos x$ y $y = \frac{1}{2}$, dibujadas en el mismo plano xy en la figura 21 para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

FIGURA 21



a) Los valores de x tales que $\cos x = \frac{1}{2}$ son las coordenadas x de los puntos en los que las gráficas se intersecan. Recuerde que $x = \pi/3$ satisface la ecuación. Por simetría, $x = -\pi/3$ es otra solución de $\cos x = \frac{1}{2}$. Dado que la función coseno tiene el periodo 2π, los otros valores de x en $[-2\pi, 2\pi]$, de tal manera que $\cos x = \frac{1}{2}$, son

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

b) Los valores de x tales que $\cos x > \frac{1}{2}$ se obtienen determinando dónde la gráfica de $y = \cos x$ en la figura 21 se encuentra *por encima* de la recta $y = \frac{1}{2}$. Esto nos da los intervalos de x

$$\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

c) Para resolver $\cos x < \frac{1}{2}$, de nuevo en la figura 21 observamos dónde la gráfica de $y = \cos x$ se encuentra *por debajo* de la recta $y = \frac{1}{2}$. Esto nos da los intervalos de x

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

(continúa)

Otro método para resolver $\cos x < \frac{1}{2}$ es observar que las soluciones son los subintervalos abiertos de $[-2\pi, 2\pi]$ que *no* están incluidos en los intervalos obtenidos en el inciso b). ■

El resultado analizado en el siguiente ejemplo desempeña una función importante en matemáticas avanzadas.

EJEMPLO 7 **Trazo de la gráfica de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$**

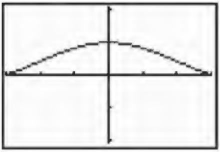
Si $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, dibuje la gráfica de f en $[-\pi, \pi]$ e investigue el comportamiento de $f(x)$ a medida que $x \to 0^-$ y que $x \to 0^+$.

SOLUCIÓN Tenga en cuenta que f no está definida en $x = 0$, porque la sustitución produce la expresión 0/0 que carece de sentido.

Asignamos $(\operatorname{sen} x)/x$ a Y_1. Debido a que la pantalla tiene una proporción de 3:2 (horizontal : vertical), usamos el visor rectangular $[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$ (puesto que $\frac{2}{3}\pi \approx 2.1$) y obtenemos un dibujo parecido al de la figura 22. Utilizando las características de seguimiento y zoom, parece que

$$\text{a medida que } x \to 0^-, f(x) \to 1 \text{ y a medida que } x \to 0^+, f(x) \to 1$$

FIGURA 22
$[-\pi, \pi]$ por $[-2.1, 2.1]$



Hay un agujero en la gráfica en el punto (0, 1); sin embargo, la mayoría de las aplicaciones para gráficas no son capaces de mostrar este hecho.

Esta técnica gráfica no *prueba* que $f(x) \to 1$ a medida que $x \to 0$, pero hace que parezca altamente probable. Una prueba rigurosa, basada en la definición de sen x y consideraciones geométricas, se encuentra en los libros de cálculo. ■

Un resultado interesante obtenido del ejemplo 7 es que *si x está en radianes* y

$$\text{si } x \approx 0, \quad \text{entonces } \frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 \text{ y, por lo tanto, } \operatorname{sen} x \approx x$$

Este último enunciado nos da una *fórmula de aproximación* para sen x si x es cercana a 0. Para ilustrar, usando una calculadora obtenemos lo siguiente:

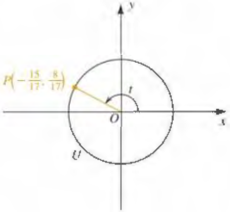
$$\operatorname{sen}(0.03) \approx 0.029\,995\,5 \approx 0.03$$
$$\operatorname{sen}(0.02) \approx 0.019\,9998\,7 \approx 0.02$$
$$\operatorname{sen}(0.01) \approx 0.009\,999\,8 \approx 0.01$$

Hemos estudiado hasta ahora dos tratamientos diferentes de las funciones trigonométricas. El desarrollo en términos de ángulos y razones, introducido en la sección 5.2, tiene muchas aplicaciones en las ciencias y la ingeniería. La definición en términos de un círculo unitario, considerada en esta sección, destaca el hecho de que las funciones trigonométricas tienen dominios compuestos por números reales. Dichas funciones son los elementos fundamentales del cálculo. Además, el método del círculo unitario es útil para estudiar las gráficas y derivar identidades trigonométricas. Debe esforzarse por adquirir competencia en el uso de ambas formulaciones de las funciones trigonométricas, ya que cada una refuerza a la otra, y así facilita el dominio de aspectos más avanzados de la trigonometría.

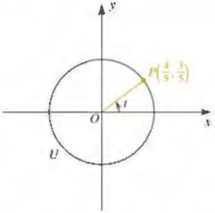
5.3 Ejercicios

Ejer. 1-4: Un punto $P(x, y)$ se muestra en el círculo unitario U correspondiente al número real t. Obtenga los valores de las funciones trigonométricas en t.

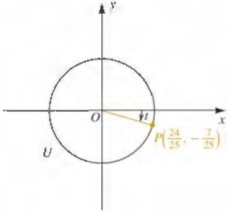
1



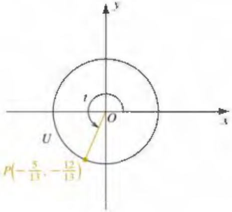
2



3



4



Ejer. 5-8: Sea $P(t)$ el punto en el círculo unitario U que corresponde a t. Si $P(t)$ tiene las coordenadas rectangulares dadas, obtenga

a) $P(t + \pi)$ **b)** $P(t - \pi)$ **c)** $P(-t)$ **d)** $P(-t - \pi)$

5 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

6 $\left(-\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

7 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

8 $\left(\frac{7}{25}, -\frac{24}{25}\right)$

Ejer 9-16: Sea P el punto en el círculo unitario U que corresponde a t. Obtenga las coordenadas de P y los valores exactos de las funciones trigonométricas de t, siempre que sea posible.

9 **a)** 2π **b)** -3π

10 **a)** $-\pi$ **b)** 6π

11 **a)** $3\pi/2$ **b)** $-7\pi/2$

12 **a)** $5\pi/2$ **b)** $-\pi/2$

13 **a)** $9\pi/4$ **b)** $-5\pi/4$

14 **a)** $3\pi/4$ **b)** $-7\pi/4$

15 a) $5\pi/4$ b) $-\pi/4$

16 a) $7\pi/4$ b) $-3\pi/4$

Ejer. 17-20: Use una fórmula para negativos para obtener el valor exacto.

17 a) $\operatorname{sen}(-90°)$ b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ c) $\tan(-135°)$

18 a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\cos(-225°)$ c) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

19 a) $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $\sec(-45°)$ c) $\csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

20 a) $\cot(-225°)$ b) $\sec(-\pi)$ c) $\csc(-45°)$

Ejer. 21-26: Verifique la identidad mediante la transformación del lado izquierdo en el lado derecho.

21 $\operatorname{sen}(-x)\sec(-x) = -\tan x$

22 $\csc(-x)\cos(-x) = -\cot x$

23 $\dfrac{\cot(-x)}{\csc(-x)} = \cos x$ **24** $\dfrac{\sec(-x)}{\tan(-x)} = -\csc x$

25 $\dfrac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x)\operatorname{sen}(-x) = \cos x$

26 $\cot(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\csc x$

Ejer. 27-38: Complete el enunciado remitiéndose a la gráfica de una función trigonométrica.

27 a) Como $x \to 0^+$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

b) Como $x \to (-\pi/4)$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

28 a) Como $x \to (-\pi/2)$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

b) Como $x \to (\pi/6)^-$, $\operatorname{sen} x \to$ ____

29 a) Como $x \to (\pi/4)^+$, $\cos x \to$ ____

b) Como $x \to 3\pi/2$, $\cos x \to$ ____

30 a) Como $x \to \pi$, $\cos x \to$ ____

b) Como $x \to (-\pi/3)^-$, $\cos x \to$ ____

31 a) Como $x \to \pi$, $\tan x \to$ ____

b) Como $x \to (\pi/2)^+$, $\tan x \to$ ____

32 a) Como $x \to \pi/4$, $\tan x \to$ ____

b) Como $x \to (-\pi/2)^-$, $\tan x \to$ ____

33 a) Como $x \to \pi/6$, $\cot x \to$ ____

b) Como $x \to 0^+$, $\cot x \to$ ____

34 a) Como $x \to (-\pi/4)$, $\cot x \to$ ____

b) Como $x \to \pi^-$, $\cot x \to$ ____

35 a) Como $x \to (\pi/2)^-$, $\sec x \to$ ____

b) Como $x \to 0$, $\sec x \to$ ____

36 a) Como $x \to (\pi/2)^+$, $\sec x \to$ ____

b) Como $x \to \pi/4$, $\sec x \to$ ____

37 a) Como $x \to 0^-$, $\csc x \to$ ____

b) Como $x \to \pi/4$, $\csc x \to$ ____

38 a) Como $x \to \pi^+$, $\csc x \to$ ____

b) Como $x \to \pi/2$, $\csc x \to$ ____

Ejer. 39-46: Remítase a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ o $y = \cos x$ para obtener los valores exactos de x en el intervalo $[0, 4\pi]$ que satisfacen la ecuación.

39 $\operatorname{sen} x = -1$ **40** $\operatorname{sen} x = 1$

41 $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **42** $\operatorname{sen} x = -\sqrt{2}/2$

43 $\cos x = 1$ **44** $\cos x = -1$

45 $\cos x = \sqrt{2}/2$ **46** $\cos x = -\frac{1}{2}$

Ejer. 47-50: Remítase a la gráfica de $y = \tan x$ para obtener los valores exactos de x en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ que satisfacen la ecuación.

47 $\tan x = 1$ **48** $\tan x = \sqrt{3}$

49 $\tan x = 0$ **50** $\tan x = -1/\sqrt{3}$

Ejer. 51-54: Remítase a la gráfica de la ecuación en el intervalo especificado. Obtenga todos los valores de x de modo que para el número real a, a) $y = a$, b) $y > a$ y c) $y < a$.

51 $y = \operatorname{sen} x$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = \frac{1}{2}$

52 $y = \cos x$; $[0, 4\pi]$; $a = \sqrt{3}/2$

53 $y = \cos x$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = -\frac{1}{2}$

54 $y = \operatorname{sen} x$; $[0, 4\pi]$; $a = -\sqrt{2}/2$

Ejer. 55-62: Use la gráfica de una función trigonométrica para dibujar la gráfica de la ecuación sin trazar los puntos.

55 $y = 2 + \operatorname{sen} x$

56 $y = 3 + \cos x$

57 $y = \cos x - 2$

58 $y = \operatorname{sen} x - 1$

59 $y = 1 + \tan x$

60 $y = \cot x - 1$

61 $y = \sec x - 2$

62 $y = 1 + \csc x$

Ejer. 63-66: Obtenga los intervalos entre -2π y 2π en el que la función dada a) aumenta o b) disminuye.

63 secante

64 cosecante

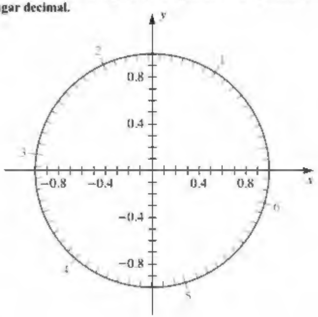
65 tangente

66 cotangente

67 Practique y dibuje la gráfica de la función seno, tomando diferentes unidades de longitud en los ejes horizontal y vertical. Practique y dibuje las gráficas de las funciones coseno y tangente de la misma manera. Continúe esta práctica hasta llegar a una etapa en la que, si lo despertaran de un sueño profundo en mitad de la noche y le pidieran dibujar una de estas gráficas, usted podría hacerlo en menos de treinta segundos.

68 Trabaje el ejercicio 67 con las funciones cosecante, secante y cotangente.

Ejer. 69-72: Use la figura para aproximar lo siguiente a un lugar decimal.



69 **a)** $\operatorname{sen} 4$ **b)** $\operatorname{sen}(-1.2)$

c) Todos los números t entre 0 y 2π, de modo que $\operatorname{sen} t = 0.5$

70 **a)** $\operatorname{sen} 2$ **b)** $\operatorname{sen}(-2.3)$

c) Todos los números t entre 0 y 2π, de modo que $\operatorname{sen} t = -0.2$

71 **a)** $\cos 4$ **b)** $\cos(-1.2)$

c) Todos los números t entre 0 y 2π, de modo que $\cos t = -0.6$

72 **a)** $\cos 2$ **b)** $\cos(-2.3)$

c) Todos los números t entre 0 y 2π, de modo que $\cos t = 0.2$

73 **Relación entre temperatura y humedad** El 17 de marzo de 1981, en Tucson, Arizona, la temperatura en grados Fahrenheit podía describirse por la ecuación

$$T(t) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60,$$

mientras que la humedad relativa en porcentaje podía expresarse por

$$H(t) = 20 \cos \frac{\pi}{12}t \quad + 60,$$

donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

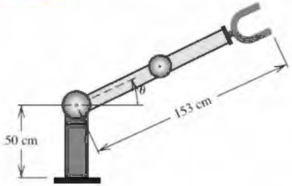
a) Elabore una tabla que presente cada tres horas la temperatura y la humedad relativa, a partir de la medianoche.

b) Determine las horas en que ocurrieron los máximos y mínimos par T y H.

c) Explique la relación entre la temperatura y la humedad relativa ese día.

74 **Movimiento de un brazo robótico** Las funciones trigonométricas se usan muy comúnmente en el diseño de robots industriales. Suponga que la articulación del hombro de un robot está motorizada, de tal modo que el ángulo θ aumenta a una tasa constante de $\pi/12$ radianes por segundo a partir de un ángulo inicial de $\theta = 0$. Suponga que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se muestra en la figura.

FIGURA 74



a) Suponga que $h = 50$ cm cuando $\theta = 0$. Elabore una tabla que presente el ángulo θ y la altura h de la mano robótica cada segundo, mientras que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

b) Determine si un aumento constante en el ángulo θ produce o no un aumento constante en la altura de la mano.

c) Obtenga la distancia total que se mueve la mano.

Ejer. 75-76: Grafique la ecuación y estime los valores de x en el intervalo especificado que correspondan al valor dado de y.

75 $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $[-2, 2]$; $y = 0.5$

76 $y = \tan\left(\sqrt{x}\right)$, $[0, 25]$; $y = 5$

Ejer. 77-78: Grafique f en el intervalo especificado y estime las coordenadas de los puntos alto y bajo.

77 $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $[-2\pi, 2\pi]$

78 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x$, $[-2.5, 2.5]$

Ejer. 79-84: A medida que $x \to 0^+$, $f(x) \to L$ para un número real L. Use una gráfica para predecir L.

79 $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

80 $f(x) = \dfrac{6x - 6 \operatorname{sen} x}{x^3}$

81 $f(x) = x \cot x$

82 $f(x) = \dfrac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

83 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

84 $f(x) = \dfrac{\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{x}$

5.4 Valores de las funciones trigonométricas

En secciones anteriores calculamos los valores especiales de las funciones trigonométricas mediante el uso de la definición de las funciones trigonométricas en términos de un ángulo o un círculo unitario. En la práctica, con mucha frecuencia usamos una calculadora para aproximar valores de funciones.

A continuación mostramos cómo se puede encontrar el valor de cualquier función trigonométrica en un ángulo de θ grados o en un número real t a partir de su valor en el intervalo de θ $(0°, 90°)$ o el intervalo de t $(0, \pi/2)$, respectivamente. Esta técnica es necesaria en ocasiones cuando se usa una calculadora para obtener todos los ángulos o números reales que corresponden al valor dado de una función.

Empleremos el siguiente concepto.

Definición de ángulo de referencia

Sea θ un ángulo no cuadrantal en posición estándar. El **ángulo de referencia** de θ es el ángulo agudo θ_R que el lado terminal de θ forma con el eje x.

La figura 1 ilustra el ángulo de referencia θ_R para un ángulo no cuadrantal θ, con $0° < \theta < 360°$ o $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

FIGURA 1 Ángulos de referencia

a) Cuadrante I b) Cuadrante II c) Cuadrante III d) Cuadrante IV

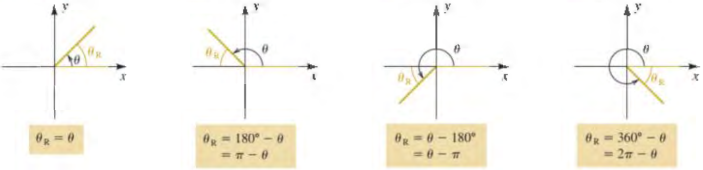
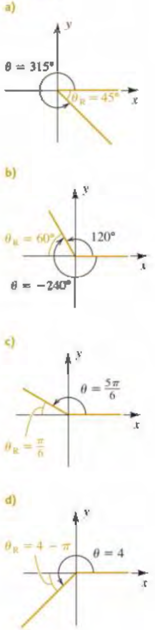


FIGURA 2



Las fórmulas debajo de los ejes en la figura 1 pueden usarse para obtener la medida en grados o radianes de θ_R cuando θ está en grados o radianes, respectivamente. *Para un ángulo no cuadrantal mayor que 360° o menor que 0°, primero se obtiene el ángulo coterminal θ con $0° < \theta < 360°$ o $0 < \theta < 2\pi$*, y luego se usan las fórmulas de la figura 1.

EJEMPLO 1 **Obtención de ángulos de referencia**

Obtenga el ángulo de referencia θ_R para θ, y dibuje θ y θ_R en posición estándar en el mismo plano de coordenadas.

a) $\theta = 315°$ **b)** $\theta = -240°$ **c)** $\theta = \frac{\pi}{6}$ **d)** $\theta = 4$

SOLUCIÓN

a) El ángulo $\theta = 315°$ está en el cuadrante IV y, por lo tanto, como en la figura 1d),

$$\theta_R = 360° - 315° = 45°.$$

Los ángulos θ y θ_R están trazados en la figura 2a).

b) El ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con $\theta = -240°$ es

$$-240° + 360° = 120°,$$

que está en el cuadrante II. Con la fórmula de la figura 1b) obtenemos

$$\theta_R = 180° - 120° = 60°$$

Los ángulos θ y θ_R están trazados en la figura 2b).

c) Puesto que el ángulo $\theta = 5\pi/6$ está en el cuadrante II, tenemos

$$\theta_R = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

como se muestra en la figura 2c).

d) Puesto que $\pi < 4 < 3\pi/2$, el ángulo $\theta = 4$ está en el cuadrante III. Con la fórmula de la figura 1c) obtenemos

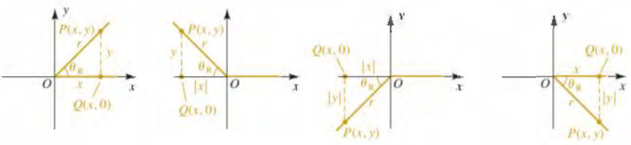
$$\theta_R = 4 - \pi$$

Los ángulos están trazados en la figura 2d). ■

A continuación demostraremos cómo se usan los ángulos de referencia para obtener los valores de las funciones trigonométricas.

Si θ es un ángulo no cuadrantal con ángulo de referencia θ_R, entonces tenemos $0° < \theta_R < 90°$ o $0 < \theta_R < \pi/2$. Sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ, y con-

FIGURA 3



sideremos el punto $Q(x, 0)$ en el eje x. La figura 3 ilustra una situación típica para θ en cada cuadrante. En cada caso, las longitudes de los lados del triángulo OQP son

$$d(O, Q) = |x|, \quad d(Q, P) = |y| \quad \text{y} \quad d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Podemos aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo y también usar el triángulo OQP para obtener las siguientes fórmulas:

$$|\operatorname{sen}\theta| = \left|\frac{y}{r}\right| = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \operatorname{sen}\theta_R$$
$$|\cos\theta| = \left|\frac{x}{r}\right| = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos\theta_R$$
$$|\tan\theta| = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} = \tan\theta_R$$

Estas fórmulas conducen al siguiente teorema. Si θ es un ángulo cuadrantal, la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo deben usarse para obtener valores.

Teorema sobre los ángulos de referencia

Si θ es un ángulo no cuadrantal en posición estándar, para obtener el valor de una función trigonométrica en θ, obtenga su valor para el ángulo de referencia θ_R y coloque como prefijo el signo que corresponda.

El "signo que corresponda" al que alude el teorema se puede determinar con la tabla de signos de las funciones trigonométricas que se presenta en la página 344.

EJEMPLO 2 **Uso de ángulos de referencia**

Use ángulos de referencia para obtener los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ si

a) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $\theta = 315°$

FIGURA 4

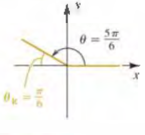
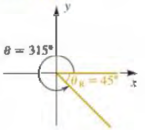


FIGURA 5



SOLUCIÓN

a) El ángulo $\theta = 5\pi/6$ y su ángulo de referencia $\theta_R = \pi/6$ están trazados en la figura 4. Puesto que θ está en el cuadrante II, sen θ es positivo y tanto cos θ como tan θ son negativos. Por consiguiente, por el teorema sobre los ángulos de referencia y los resultados conocidos acerca de los ángulos especiales, obtenemos los siguientes valores:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = +\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{6} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) El ángulo $\theta = 315°$ y su ángulo de referencia $\theta_R = 45°$ están trazados en la figura 5. Dado que θ está en el cuadrante IV, sen $\theta < 0$, cos $\theta > 0$ y tan $\theta < 0$. Por lo tanto, por el teorema sobre los ángulos de referencia, obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 315^\circ &= -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos 315^\circ &= +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\tan 315^\circ &= -\tan 45^\circ = -1
\end{aligned}$$

Si usamos una calculadora para aproximar los valores de las funciones, los ángulos de referencia no son, por lo general, necesarios (vea el Ejercicio para análisis 2 al final del capítulo). Como ejemplo, para obtener sen 210°, colocamos la calculadora en modo de grados y obtenemos sen $210^\circ = -0.5$, que es el valor exacto. Siguiendo el mismo procedimiento para 240°, obtenemos una representación decimal:

$$\operatorname{sen} 240^\circ \approx -0.8660$$

No debe usarse una calculadora para obtener el valor *exacto* de sen 240°. En este caso, obtenemos el ángulo de referencia 60° de 240° y aplicamos el teorema sobre los ángulos de referencia, junto con los resultados conocidos acerca de ángulos especiales, para obtener

$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A continuación se considerará el problema de resolver una ecuación del siguiente tipo:

Problema: Si θ es un ángulo agudo y sen $\theta = 0.6635$, aproxime θ.

La mayoría de las calculadoras tienen una tecla rotulada $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$ que puede usarse para resolver la ecuación. Con algunas calculadoras, puede ser necesario usar otra tecla o una secuencia de teclas, como $\boxed{\text{SEN}}\boxed{\text{INV}}$ (consulte el manual del usuario de su calculadora). Se usará la siguiente notación para obtener θ, donde $0 \le k \le 1$:

$$\text{si } \operatorname{sen}\theta = k, \text{ entonces } \theta = \operatorname{sen}^{-1} k$$

Esta notación es similar a la empleada para función inversa f^{-1} de una función f en la sección 4.1, donde vimos que en ciertas condiciones

$$\text{si } f(x) = y, \text{ entonces } x = f^{-1}(y)$$

Para el problema sen $\theta = 0.6635$, f es la función seno, $x = \theta$ y $y = 0.6635$. La notación sen^{-1} se basa en las *funciones trigonométricas inversas* que se estudian en la sección 6.6. En esta etapa de nuestro trabajo, *se considerará que* sen^{-1} *es simplemente una entrada hecha en una calculadora con la tecla* $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$. Por lo tanto, para el problema enunciado, obtenemos

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57^\circ \approx 0.7255$$

Como se indicó, al calcular un ángulo, por lo general se redondea la medida en grados al 0.01° más cercano y la medida en radianes a cuatro posiciones decimales.

Del mismo modo, dado $\cos\theta = k$ o $\tan\theta = k$, donde θ es agudo, escribimos

$$\theta = \cos^{-1} k \text{ o } \theta = \tan^{-1} k$$

para indicar el uso de una tecla $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ o $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ en una calculadora.

Dados csc θ, sec θ o cot θ, se usa una relación recíproca para obtener θ, como se indica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS **Obtención de soluciones de ecuaciones en ángulos agudos con una calculadora**

- $\operatorname{sen}\theta = 0.5$ $\quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.5) = 30° \approx 0.5236$
- $\cos\theta = 0.5$ $\quad \theta = \cos^{-1}(0.5) = 60° \approx 1.0472$
- $\tan\theta = 0.5$ $\quad \theta = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.57° \approx 0.4636$
- $\csc\theta = 2$ $\quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30° \approx 0.5236$
- $\sec\theta = 2$ $\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° \approx 1.0472$
- $\cot\theta = 2$ $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.57° \approx 0.4636$

La misma técnica puede emplearse si θ es cualquier ángulo o número real. Por lo tanto, usando la tecla $\boxed{\text{SEN}^{-1}}$, obtenemos, en modo de grados o radianes,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57° \approx 0.7255,$$

que es el ángulo de referencia de θ. Si sen θ es negativo, la calculadora da el *negativo* del ángulo de referencia. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}^{-1}(-0.6635) \approx -41.57° \approx -0.7255.$$

Del mismo modo, dados $\cos\theta$ o $\tan\theta$, θ se obtiene con una calculadora utilizando $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ o $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$, respectivamente. El intervalo que contiene θ se presenta en la siguiente tabla. Es importante notar que si $\cos\theta$ es negativo, entonces θ no es el negativo del ángulo de referencia, sino que está en el intervalo $\pi/2 < \theta \leq \pi$, o $90° < \theta \leq 180°$. Las razones para usar estos intervalos se explican en la sección 6.6. Podemos usar relaciones recíprocas para resolver ecuaciones similares que incluyen $\csc\theta$, $\sec\theta$ y $\cot\theta$.

Ecuación	Valores de k	Solución mediante calculadora	Intervalo que contiene θ si se usa una calculadora
$\operatorname{sen}\theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, o $-90° \leq \theta \leq 90°$
$\cos\theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \cos^{-1} k$	$0 \leq \theta \leq \pi$, o $0° \leq \theta \leq 180°$
$\tan\theta = k$	cualquier k	$\theta = \tan^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, o $-90° < \theta < 90°$

El siguiente ejemplo contiene algunos ejemplos específicos tanto del modo de grados como del modo de radianes.

EJEMPLOS **Cómo encontrar ángulos con una calculadora**

Ecuación — **Solución mediante calculadora (grados y radianes)**

- $\operatorname{sen}\theta = -0.5$ $\quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}(-0.5) = -30° \approx -0.5236$
- $\cos\theta = -0.5$ $\quad \theta = \cos^{-1}(-0.5) = 120° \approx 2.0944$
- $\tan\theta = -0.5$ $\quad \theta = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57° \approx -0.4636$

Cuando use una calculadora para obtener θ, asegúrese de tener presentes las restricciones sobre θ. Si deseamos otros valores, pueden emplearse los ángulos de referencia u otros métodos, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

FIGURA 6

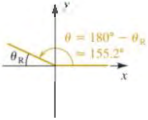


FIGURA 7

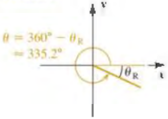


FIGURA 8

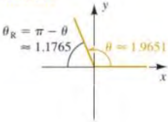
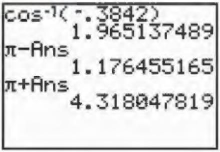


FIGURA 9

FIGURA 10



EJEMPLO 3 **Aproximación de un ángulo con una calculadora**

Si $\tan\theta = -0.4623$ y $0° \leq \theta < 360°$, obtenga θ al 0.1° más cercano.

SOLUCIÓN Como se señaló en el análisis anterior, si usamos una calculadora (en modo de grados) para obtener θ cuando $\tan\theta$ es negativa, la medida en grados estará dentro del intervalo $(-90°, 0°)$. En particular, obtenemos lo siguiente:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.4623) \approx -24.8°$$

Dado que lo que deseamos es obtener valores de θ entre 0° y 360°, usamos el ángulo de referencia (aproximado) $\theta_R \approx 24.8°$. Existen dos valores posibles de θ para que $\tan\theta$ sea negativo: uno en el cuadrante II y el otro en el cuadrante IV. Si θ está en el cuadrante II y $0° \leq \theta < 360°$, tenemos la situación que se muestra en la figura 6 y

$$\theta = 180° - \theta_R \approx - 180° - 24.8° = 155.2°$$

Si θ está en el cuadrante IV y $0° \leq \theta < 360°$, entonces, como en la figura 7,

$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 24.8° = 335.2°$$ ■

EJEMPLO 4 **Aproximación de un ángulo con una calculadora**

Si $\cos\theta = -0.3842$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, obtenga θ al 0.0001 radián más próximo.

SOLUCIÓN Si usamos una calculadora (en modo de radianes) para obtener θ cuando $\cos\theta$ es negativo, la medida en radianes estará dentro del intervalo $[0, \pi]$. En particular, obtenemos lo siguiente (se muestra en la figura 8):

$$\theta = \cos^{-1}(-0.3842) \approx 1.965137489$$

Dado que lo que se desea es obtener valores de θ entre 0 y 2π, usamos el ángulo de referencia (aproximado)

$$\theta_R = \pi - \theta \approx 1.176455165$$

Existen dos valores posibles de θ para que $\cos\theta$ sea negativo: uno se encuentra en el cuadrante II y el otro en el cuadrante III. Si θ está en el cuadrante III, entonces

$$\theta = \pi + \theta_R \approx 4.318047819,$$

como se muestra en la figura 9.

La pantalla de calculadora de la figura 10 presenta el soporte numérico de las respuestas

$$\theta \approx 1.9651 \qquad \text{y} \qquad \theta \approx 4.3180$$

Este problema también podría resolverse gráficamente encontrando los puntos de intersección de $Y_1 = \cos(X)$ y $Y_2 = -0.3842$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Sin embargo, el propósito de esta solución fue ilustrar el uso de los ángulos de referencia. ■

5.4 Ejercicios

Ejer. 1-6: Obtenga el ángulo de referencia θ_R si θ tiene la medida dada.

1 a) $310°$ b) $260°$ c) $-235°$ d) $-660°$

2 a) $290°$ b) $195°$ c) $-185°$ d) $400°$

3 a) $3\pi/4$ b) $4\pi/3$ c) $-\pi/6$ d) $9\pi/4$

4 a) $7\pi/4$ b) $2\pi/3$ c) $-3\pi/4$ d) $-23\pi/6$

5 a) 3 b) -2 c) 5.5 d) 100

6 a) 6 b) -4 c) 4.5 d) 80

Ejer. 7-18: Obtenga el valor exacto.

7 a) $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ b) $\operatorname{sen}(-5\pi/4)$

8 a) $\operatorname{sen} 210°$ b) $\operatorname{sen}(-315°)$

9 a) $\cos 150°$ b) $\cos(-60°)$

10 a) $\cos(5\pi/4)$ b) $\cos(-11\pi/6)$

11 a) $\tan(5\pi/6)$ b) $\tan(-\pi/3)$

12 a) $\tan 330°$ b) $\tan(-225°)$

13 a) $\cot 120°$ b) $\cot(-150°)$

14 a) $\cot(3\pi/4)$ b) $\cot(-2\pi/3)$

15 a) $\sec(2\pi/3)$ b) $\sec(-\pi/6)$

16 a) $\sec 135°$ b) $\sec(-210°)$

17 a) $\csc 240°$ b) $\csc(-330°)$

18 a) $\csc(3\pi/4)$ b) $\csc(-2\pi/3)$

Ejer. 19-24: Aproxime a tres posiciones decimales.

19 a) $\operatorname{sen} 24°20'$ b) $\cos 0.68$

20 a) $\cos 88°30'$ b) $\operatorname{sen} 1.48$

21 a) $\tan 73°10'$ b) $\cot 1.13$

22 a) $\cot 9°10'$ b) $\tan 0.75$

23 a) $\sec 67°50'$ b) $\csc 0.32$

24 a) $\csc 43°40'$ b) $\sec 0.26$

Ejer. 25-36: Aproxime el ángulo agudo θ al a) 0.01° y b) 1' más cercano.

25 $\operatorname{sen}\theta = 0.42$

26 $\operatorname{sen}\theta = 0.6612$

27 $\cos\theta = 0.8620$

28 $\cos\theta = 0.8$

29 $\tan\theta = 3.7$

30 $\tan\theta = 4.91$

31 $\cot\theta = 4$

32 $\cot\theta = 0.361$

33 $\sec\theta = 4.246$

34 $\sec\theta = 1.15$

35 $\csc\theta = 2.54$

36 $\csc\theta = 11$

Ejer. 37-38: Aproxime a cuatro posiciones decimales.

37 a) $\operatorname{sen} 98°10'$ b) $\cos 623.7°$ c) $\tan 3$
d) $\cot 231°40'$ e) $\sec 1175.1°$ f) $\csc 0.82$

38 a) $\operatorname{sen} 496.4°$ b) $\cos 0.65$ c) $\tan 105°40'$
d) $\cot 1030.2°$ e) $\sec 1.46$ f) $\csc 320°50'$

Ejer. 39-40: Aproxime, al 0.1° más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0°, 360°)$ que satisfagan la ecuación.

39 a) $\operatorname{sen}\theta = -0.5640$ b) $\cos\theta = 0.7490$
c) $\tan\theta = 2.798$ d) $\cot\theta = -0.9601$
e) $\sec\theta = -1.116$ f) $\csc\theta = 1.485$

40 a) $\operatorname{sen}\theta = 0.8225$ b) $\cos\theta = -0.6604$
c) $\tan\theta = -1.5214$ d) $\cot\theta = 1.3752$
e) $\sec\theta = 1.4291$ f) $\csc\theta = -2.3179$

Ejer. 41–42: Aproxime, al 0.01 radián más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfagan la ecuación.

41 a) $\operatorname{sen}\theta = 0.4195$ b) $\cos\theta = -0.1207$

c) $\tan\theta = -3.2504$ d) $\cot\theta = 2.6815$

e) $\sec\theta = 1.7452$ f) $\csc\theta = -4.8521$

42 a) $\operatorname{sen}\theta = -0.0135$ b) $\cos\theta = 0.9235$

c) $\tan\theta = 0.42$ d) $\cot\theta = -2.731$

e) $\sec\theta = -3.51$ f) $\csc\theta = 1.258$

43 **Espesor de la capa de ozono** El espesor de la capa de ozono se puede estimar con la fórmula

$$\ln I_0 - \ln I = kx \sec\theta,$$

donde I_0 es la intensidad de una longitud de onda particular de luz del Sol antes de llegar a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar a través de una capa de ozono de x centímetros de espesor, k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda, y θ es el ángulo agudo que la luz solar forma con la vertical. Suponga que para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros con $k \approx 1.88$, I_0/I se mide como 1.72 y $\theta = 12°$. Aproxime el espesor de la capa de ozono al 0.01 centímetro más cercano.

44 **Cálculos del ozono** Remítase al ejercicio 43. Si se estima que la capa de ozono mide 0.31 centímetros de espesor y que, para una longitud de onda de 3055×10^{-8} centímetros, I_0/I se mide como 2.05, aproxime el ángulo que la luz del sol formaba con la vertical en el momento de la medición.

45 **Radiación solar** La cantidad de luz solar que ilumina la pared de un edificio puede afectar en gran medida la eficiencia energética del edificio. La radiación solar que cae sobre una pared vertical que da al oriente está dada por la fórmula

$$R = R_0 \cos\theta \operatorname{sen}\phi,$$

donde R_0 es la máxima radiación solar posible, θ es el ángulo que el Sol forma con la horizontal y ϕ es la dirección del Sol en el cielo, con $\phi = 90°$ cuando el Sol está en el oriente y $\phi = 0°$ cuando está en el sur.

a) ¿Cuándo cae la máxima radiación solar R_0 sobre la pared?

b) ¿Qué porcentaje de R_0 cae sobre la pared cuando θ es igual a 60° y el Sol está en el sureste?

46 **Cálculos meteorológicos** En las latitudes medias a veces es posible estimar la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si ϕ es la latitud (en grados), r es el radio de la Tierra (en kilómetros) y v es la velocidad horizontal del viento (en km/h), la distancia d (en kilómetros) de un área de baja presión a la siguiente puede estimarse con la fórmula

$$d = 2\pi\left(\frac{vR}{0.52 \cos\phi}\right)^{1/3}$$

a) A una latitud de 48°, el radio de la Tierra mide aproximadamente 6,369 kilómetros. Aproxime d si la velocidad del viento es de 45 km/h.

b) Si v y r son constantes, ¿cómo varía d a medida que aumenta la latitud?

47 **Brazo robótico** Los puntos en los lados terminales de los ángulos desempeñan una función importante en el diseño de los brazos robóticos. Suponga que un robot tiene un brazo extendido de 18 pulgadas de largo que puede girar alrededor del origen en un plano de coordenadas. Si la mano del robot se sitúa en (18, 0) y luego gira a través de un ángulo de 60°, ¿cuál será la nueva ubicación de la mano?

48 **Brazo robótico** Suponga que el brazo robótico del ejercicio 47 puede cambiar su longitud además de girar alrededor del origen. Si la mano está al principio en (12, 12), ¿aproximadamente cuántos grados debe girar el brazo y cuánto debe cambiar su longitud para mover la mano a (−16, 10)?

5.5 Gráficas trigonométricas

En esta sección se consideran las gráficas de las ecuaciones

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c) \qquad \text{y} \qquad y = a\cos(bx + c)$$

para los números reales a, b y c. Nuestra meta es dibujar estas gráficas sin trazar muchos puntos. Para ello, usaremos los hechos sobre las gráficas de las funciones seno y coseno que se estudiaron en la sección 5.3.

Para comenzar, se considerará el caso especial de $c = 0$ y $b = 1$, es decir,

$$y = a \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = a\cos x$$

Para encontrar las coordenadas y de los puntos en las gráficas, se multiplican las coordenadas y de los puntos en las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ por a. Para ilustrar, si $y = 2 \operatorname{sen} x$, se multiplica la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \text{sen } x$ por 2. Esto produce la figura 1, donde, para efectos de comparación, también se muestra la gráfica de $y = \text{sen } x$. El procedimiento es igual que el que se sigue para la ampliación vertical de la gráfica de una función, que se explicó en la sección 2.5

Como otra ilustración, si $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, multiplicamos las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $y = \text{sen } x$ por $\frac{1}{2}$. Esta multiplicación comprime verticalmente la gráfica de $y = \text{sen } x$ un factor de 2, como se ilustra en la figura 2.

FIGURA 1

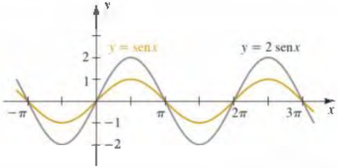
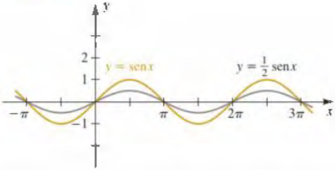


FIGURA 2



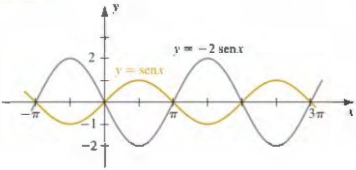
El siguiente ejemplo ilustra una gráfica de $y = a \text{ sen } x$ con un valor negativo de a.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una ecuación que incluye sen x**

Trace la gráfica de la ecuación $y = -2 \text{ sen } x$.

SOLUCIÓN La gráfica de $y = -2 \text{ sen } x$ dibujada en la figura 3 puede obtenerse así: primero se dibuja la gráfica de $y = \text{sen } x$ (se muestra en la figura) y luego se multiplican las coordenadas y por -2. Un método alterno consiste en reflejar la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ (vea la figura 1) a través del eje x.

FIGURA 3



■

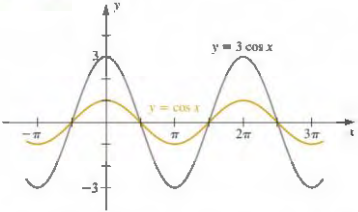
Para cualquier $a \neq 0$, la gráfica de $y = a \text{ sen } x$ tiene la apariencia general de una de las gráficas que se ilustran en las figuras 1, 2 y 3. La cantidad de ampliación de la gráfica de $y = \text{sen } x$, y si la gráfica se refleja, quedan determinados por el valor absoluto de a y el signo de a, respectivamente. La coordenada y más grande $|a|$ es la **amplitud de la gráfica** o, de forma equivalente, la **amplitud de la función** f dada por $f(x) = a \text{ sen } x$. En las figuras 1 y 3 la amplitud es 2. En la figura 2 la amplitud es de $\frac{1}{2}$. Observaciones y técnicas similares aplican si $y = a \cos x$.

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de una ecuación que incluye cos x**

Obtenga la amplitud y dibuje la gráfica de $y = 3 \cos x$.

SOLUCIÓN Por el análisis anterior, la amplitud es 3. Como indica la figura 4, primero dibujamos la gráfica de $y = \cos x$ y luego multiplicamos por 3 los valores de y.

FIGURA 4



Enseguida consideramos $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$ para los números reales diferentes de cero a y b. Como antes, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, entonces ocurre exactamente un ciclo a medida que bx aumenta de 0 a 2π o, de forma equivalente, a medida que aumenta x de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y ocurre un ciclo a medida que aumenta x de 0 a $2\pi/(-b)$. Por lo tanto, el periodo de la función f dado por $f(x) = a \operatorname{sen} bx$ o $f(x) = a \cos bx$ es $2\pi/|b|$. Por conveniencia, también nos referiremos a $2\pi/|b|$ como el periodo de la *gráfica de f*. El siguiente teorema resume nuestro análisis.

Teorema sobre amplitudes y periodos

Si $y = a \operatorname{sen} bx$ o $y = a \cos bx$ para los números reales diferentes de cero a y b, entonces la gráfica tiene amplitud $|a|$ y periodo $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

Además, se puede relacionar el papel de b con el análisis de compresión y ampliación horizontal de una gráfica en la sección 2.5. Si $|b| > 1$, podemos considerar que la gráfica de $y = \operatorname{sen} bx$ o $y = \cos bx$ está comprimida horizontalmente por un factor de b. Si $0 < |b| < 1$, las gráficas se amplían horizontalmente por un factor de $1/b$. Este concepto se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

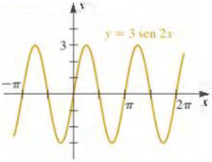
EJEMPLO 3 **Cómo encontrar una amplitud y un periodo**

Obtenga la amplitud y el periodo y trace la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 3$ y $b = 2$, obtenemos lo siguiente:

(*continúa*)

FIGURA 5



$$\text{amplitud:} \quad |a| = |3| = 3$$

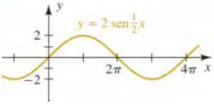
$$\text{periodo:} \quad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Por lo tanto, existe exactamente una onda sinusoidal de amplitud 3 en el intervalo x $[0, \pi]$. Si dibujamos esta onda y luego extendemos la gráfica a la derecha e izquierda, obtenemos la figura 5. ■

EJEMPLO 4 **Cómo encontrar una amplitud y un periodo**

Obtenga la amplitud y el periodo y dibuje la gráfica de $y = 2$ sen $\frac{1}{2}x$.

FIGURA 6



SOLUCIÓN Aplicando el teorema sobre amplitudes y periodos con $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, obtenemos lo siguiente:

$$\text{amplitud:} \quad |a| = |2| = 2$$

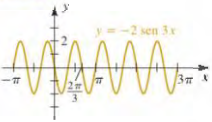
$$\text{periodo:} \quad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Por lo tanto, hay una onda sinusoidal de amplitud 2 en el intervalo $[0, 4\pi]$. Si dibujamos esta onda y la extendemos a la izquierda y derecha, obtenemos la gráfica de la figura 6. ■

Si $y = a$ sen bx y si b es un número positivo grande, el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas seno están muy cerca unas de otras, con b ondas seno en el intervalo $[0, 2\pi]$; es decir, b ciclos en dicho intervalo. Por ejemplo, en la figura 5, $b = 2$ y hay dos ondas seno en $[0, 2\pi]$. Si b es un número positivo pequeño, entonces el periodo $2\pi/b$ es grande y las ondas están lejos unas de otras. Para ilustrar, si $y =$ sen $\frac{1}{10}x$, entonces un décimo de una onda sinusoidal ocurre en $[0, 2\pi]$ y un intervalo de 20π unidades de largo se requiere para tener un ciclo completo. (Vea también la figura 6; para $y = 2$ sen $\frac{1}{2}x$, una mitad de una onda sinusoidal ocurre en $[0, 2\pi]$.)

Si $b < 0$, podemos usar el hecho de que sen $(-x) = -$sen x para obtener la gráfica de $y = a$ sen bx. Para ilustrar, la gráfica de $y =$ sen $(-2x)$ es la misma que la de $y = -$sen $2x$.

FIGURA 7



EJEMPLO 5 **Cómo encontrar una amplitud y un periodo**

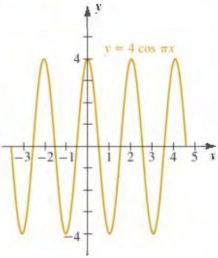
Obtenga la amplitud y el periodo, y trace la gráfica de la ecuación $y = 2$ sen $(-3x)$.

SOLUCIÓN Dado que la función seno es impar, sen $(-3x) = -$sen $3x$, y la ecuación se puede escribir como $y = -2$ sen $3x$. La amplitud es $|-2| = 2$, y el periodo es $2\pi/3$. Por consiguiente, hay un ciclo en un intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo negativo indica un reflejo a través del eje x. Si se considera el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y se dibuja una onda sinusoidal de amplitud 2 (reflejada a través del eje x), la forma de la gráfica es evidente. La parte de la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite periódicamente, como se ilustra en la figura 7. ■

EJEMPLO 6 **Cómo encontrar una amplitud y un periodo**

Obtenga la amplitud y el periodo y dibuje la gráfica de $y = 4$ cos πx.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La amplitud es $|4| = 4$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Por lo tanto, hay exactamente una onda cosinusoidal de amplitud 4 en el intervalo $[0, 2]$. Dado que el periodo no contiene el número π, conviene usar marcas de enteros en el eje x. Al dibujar esta onda y extenderla a la izquierda y derecha obtenemos la gráfica de la figura 8.

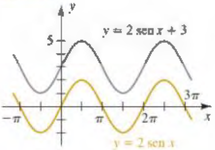
Como se explica en la sección 2.5, si f es una función y c un número real positivo, la gráfica de $y = f(x) + c$ puede obtenerse si se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia arriba a una distancia c. Para la gráfica de $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia abajo a una distancia de c. En el siguiente ejemplo se aplica esta técnica a una gráfica trigonométrica.

EJEMPLO 7 **Desplazamiento vertical de una gráfica trigonométrica**

Dibuje la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$.

SOLUCIÓN Es importante hacer notar que $y \neq 2 \operatorname{sen}(x + 3)$. La gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ está dibujada en color oro en la figura 9. Si esta gráfica se desplaza verticalmente hacia arriba a una distancia de 3, obtenemos la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$.

FIGURA 9



A continuación consideremos la gráfica de

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c)$$

Como antes, la amplitud es $|a|$, y el periodo es $2\pi/|b|$. Un ciclo ocurre si $bx + c$ aumenta de 0 a 2π. Por lo tanto, podemos obtener un intervalo que contenga exactamente una onda sinusoidal si se resuelve la siguiente desigualdad para x:

$$\begin{aligned} 0 \leq bx + c &\leq 2\pi \\ -c \leq bx &\leq 2\pi - c && \text{restamos } c \\ -\frac{c}{b} \leq x &\leq \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} && \text{dividimos entre } b \end{aligned}$$

El número $-c/b$ es el **desplazamiento de fase** asociado con la gráfica. Podemos obtener la gráfica de $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ mediante el desplazamiento de la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$ a la izquierda si el desplazamiento de fase es negativo o a la derecha si el desplazamiento de fase es positivo.

Resultados análogos son válidos para $y = a \cos(bx + c)$. El siguiente teorema resume esta exposición.

Teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase

Si $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ o $y = a \cos(bx + c)$ para números reales diferentes de cero a y b, entonces

1) la amplitud es $|a|$, el periodo es $2\pi/|b|$ y el desplazamiento de fase es $-c/b$;

2) para encontrar un intervalo que contenga exactamente un ciclo, se resuelve la desigualdad

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi$$

En ocasiones $y = a \text{ sen } (bx + c)$ se escribe en la forma equivalente

$$y = a \text{ sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right].$$

EJEMPLO 8 **Cómo encontrar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase**

Obtenga la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y dibuje la gráfica de

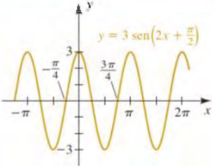
$$y = 3 \text{ sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

SOLUCIÓN La ecuación es de la forma $y = a \text{ sen } (bx + c)$ con $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Por lo tanto, la amplitud es $|a| = 3$, y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

Por el inciso 2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, podemos obtener el desplazamiento de fase y un intervalo que contiene una onda sinusoidal resolviendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \le 2x + \frac{\pi}{2} &\le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le 2x \quad &\le \frac{3\pi}{2} \quad \text{restamos } \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \le x \quad &\le \frac{3\pi}{4} \quad \text{dividimos entre 2} \end{aligned}$$

FIGURA 10



Por lo tanto, el desplazamiento de fase es $-\pi/4$, y una onda sinusoidal de amplitud 3 ocurre en el intervalo $[-\pi/4, 3\pi/4]$. Para trazar la gráfica de la figura 10, dibujamos la onda y luego repetimos a la derecha y a la izquierda.

EJEMPLO 9 **Cómo encontrar una amplitud, un periodo y un desplazamiento de fase**

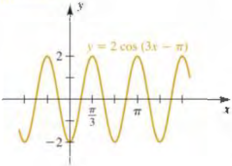
Obtenga la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y trace la gráfica de $y = 2 \cos (3x - \pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = a \cos (bx + c)$ con $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Por lo tanto, la amplitud es $|a| = 2$, y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/3$.

Por el inciso 2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, el desplazamiento de fase y un intervalo que contiene un ciclo se encuentran resolviendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \le 3x - \pi &\le 2\pi \\ \pi \le 3x \quad &\le 3\pi \quad \text{sumamos } \pi \\ \frac{\pi}{3} \le x \quad &\le \pi \quad \text{dividimos entre 3} \end{aligned}$$

FIGURA 11



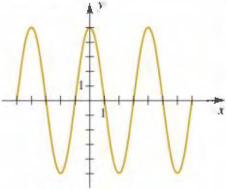
Por consiguiente, el desplazamiento de fase es $\pi/3$, y un ciclo tipo coseno (de máximo a máximo) de amplitud 2 ocurre en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Dibujamos esa parte de la gráfica y luego repetimos a la derecha y a la izquierda para obtener el dibujo de la figura 11.

Si resolvemos la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2} \le 3x - \pi \le \frac{3\pi}{2} \qquad \text{en lugar de} \qquad 0 \le 3x - \pi \le 2\pi,$$

obtenemos el intervalo $\pi/6 \le x \le 5\pi/6$, que da un ciclo entre intersecciones con x en lugar de un ciclo entre máximos. ■

FIGURA 12



EJEMPLO 10 **Cómo encontrar una ecuación para una onda sinusoidal**

Exprese la ecuación de la onda sinusoidal que se muestra en la figura 12 en la forma de

$$y = a \text{ sen } (bx + c)$$

para $a > 0$, $b > 0$, y el número real positivo más pequeño c.

SOLUCIÓN Las coordenadas y mayor y menor de los puntos en la gráfica son 5 y -5, respectivamente. Por consiguiente, la amplitud es $a = 5$.

Puesto que una onda sinusoidal ocurre en el intervalo $[-1, 3]$, el periodo tiene valor de $3 - (-1) = 4$. Por lo tanto, por el teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase (con $b > 0$),

$$\frac{2\pi}{b} = 4 \qquad \text{o, de forma equivalente,} \qquad b = \frac{\pi}{2}$$

El desplazamiento de fase es $-c/b = -c/(\pi/2)$. Dado que c es positivo, el desplazamiento de fase debe ser *negativo*; es decir, la gráfica de la figura 12 debe obtenerse desplazando a la *izquierda* la gráfica de $y = 5$ sen $[(\pi/2)x]$. Como deseamos que c sea tan pequeño como sea posible, seleccionamos el desplazamiento de fase -1. De ahí que,

$$-\frac{c}{\pi/2} = -1 \qquad \text{o, de forma equivalente,} \qquad c = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación que deseamos es

$$y = 5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Hay muchas otras ecuaciones para la gráfica. Por ejemplo, podríamos utilizar los desplazamientos de fase -5, -9, -13, etcétera, pero no nos darían el valor positivo *más bajo* de c. Otras dos ecuaciones para la gráfica son

$$y = 5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad y = -5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Sin embargo, ninguna de estas ecuaciones satisface el criterio dado para a, b y c, porque en la primera, $c < 0$, y en la segunda, $a < 0$ y c no tiene su valor positivo más bajo.

Como solución alterna, podemos escribir

$$y = a \text{ sen}(bx + c) \qquad \text{como} \qquad y = a \text{ sen}\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$$

Como antes, obtenemos $a = 5$ y $b = \pi/2$. Ahora, como la gráfica tiene una intersección con el eje x en $x = -1$, podemos considerar que esta gráfica es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = 5$ sen $[(\pi/2)x]$ a la izquierda por una unidad, es decir, x se reemplaza con $x + 1$. Por lo tanto, una ecuación es

$$y = 5 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{2}(x + 1)\right] \qquad \text{o} \qquad y = 5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza varían de manera cíclica o rítmica. En ocasiones es posible representar tales fenómenos por medio de funciones trigonométricas, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 11 **Análisis del proceso de respiración**

El proceso rítmico de respirar consta de periodos alternantes de inhalación y exhalación. Un ciclo completo normalmente tiene lugar cada 5 segundos. Si $F(t)$ denota el flujo de aire en el tiempo t (en litros por segundo) y si el flujo máximo es de 0.6 litros por segundo, encuentre una fórmula de la forma $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ en la que encaje esta información.

SOLUCIÓN Si $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ para $b > 0$, entonces el periodo de F es $2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es de 5 segundos y, por consiguiente,

$$\frac{2\pi}{b} = 5 \qquad \text{o} \qquad b = \frac{2\pi}{5}$$

Puesto que el flujo máximo corresponde a la amplitud a de F, sea $a = 0.6$. Esto nos da la fórmula

$$F(t) = 0.6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

■

EJEMPLO 12 **Aproximación del número de horas de luz natural en un día**

El número de horas de luz natural $D(t)$ en un momento determinado del año se puede aproximar por

$$D(t) = \frac{K}{2} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

para t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. La constante K determina la variación total de la longitud del día y depende de la latitud del lugar.

a) Para Boston, $K \approx 6$. Dibuje la gráfica de D para $0 \leq t \leq 365$.

b) ¿Cuándo es el día más largo? ¿Y el más corto?

SOLUCIÓN

a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$, y podemos escribir $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12,$$

donde

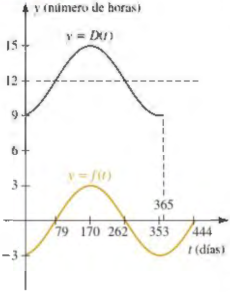
$$f(t) = 3 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right]$$

Trazaremos la gráfica de f y luego aplicaremos un desplazamiento vertical a través de una distancia 12.

Como en el inciso 2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, podemos obtener un intervalo t que contenga exactamente un ciclo resolviendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{2\pi}{365}&(t - 79) \leq 2\pi \\ 0 \leq\ & t - 79 \leq 365 \qquad \text{multiplicamos por } \frac{365}{2\pi} \\ 79 \leq\ & t \leq 444 \qquad \text{sumamos 79} \end{aligned}$$

FIGURA 13



Por lo tanto, una onda sinusoidal ocurre en el intervalo [79, 444]. Este intervalo se divide en cuatro partes iguales para obtener la siguiente tabla de valores, que indica el patrón familiar de la onda sinusoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	−3	0

Si $t = 0$,

$$f(0) = 3\ \mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(-79)\right] \approx 3\ \mathrm{sen}(-1.36) \approx -2.9$$

En vista de que el periodo f es 365, esto implica que $f(365) \approx -2.9$.

La gráfica de f para el intervalo [0, 444] está dibujada en la figura 13, con diferentes escalas en los ejes y t redondeado al día más cercano.

Al aplicar un desplazamiento vertical de 12 unidades, obtenemos la gráfica de D para $0 \le t \le 365$ que se muestra en la figura 13.

b) El día más largo, es decir, el valor más grande de $D(t)$, ocurre 170 días después del 1 de enero. Excepto en un año bisiesto, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto ocurre 353 días después del 1 de enero, o el 20 de diciembre. ■

En el siguiente ejemplo se usa una utilería de gráficas para aproximar la solución de una desigualdad que implica expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 13 **Aproximación de soluciones de una desigualdad trigonométrica**

Aproxime la solución de la desigualdad

$$\mathrm{sen}\ 3x < x + \mathrm{sen}\ x$$

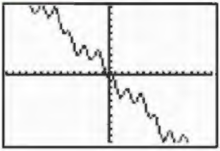
SOLUCIÓN La desigualdad dada es equivalente a

$$\mathrm{sen}\ 3x - x - \mathrm{sen}\ x < 0$$

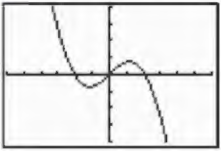
Si asignamos sen $3x - x -$ sen x a Y_1, el problema dado es equivalente a calcular dónde se sitúa la gráfica de Y_1 debajo del eje x. Usando el visor rectangular estándar obtenemos un dibujo similar al de la figura 14 a), donde se observa que la gráfica de Y_1 interseca el eje x en c entre -1 y 0. Parece que la gráfica queda por debajo del eje x en el intervalo (c, ∞); sin embargo, este hecho no es perfectamente claro, debido a la escala pequeña de los ejes.

FIGURA 14

a) $[-15, 15]$ por $[-10, 10]$



b) $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$



Usando el visor rectangular $[-1.5, 1.5, 0.25]$ por $[-1, 1, 0.25]$, obtenemos la figura 14b), donde se observa que las intersecciones con el eje x se encuentran aproximadamente en -0.5, 0 y 0.5. Si usamos la aplicación o característica para calcular la raíz, produce 0.51, un valor positivo más preciso. Como la función en cuestión es impar, el valor negativo es de aproximadamente -0.51. Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad están en los intervalos (aproximados)

$$(-0.51, 0) \cup (0.51, \infty)$$

■

EJEMPLO 14 **Investigación de la corriente alterna en un circuito eléctrico**

La corriente I (en amperes) en un circuito con corriente alterna en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right)$$

Aproxime el valor más pequeño de t para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Sea $I = 15$ en la fórmula dada para obtener

$$15 = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right)$$

o, de forma equivalente

$$\operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

Si se asigna $\operatorname{sen}(50\pi x - 7\pi/3) - \frac{1}{2}$ a Y_1, el problema dado es equivalente a aproximar la intersección más pequeña de la gráfica en x.

Puesto que el periodo de Y_1 es

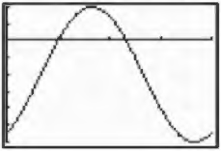
$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04$$

y dado que $-\frac{3}{2} \leq Y_1 \leq \frac{1}{2}$, seleccionamos el visor rectangular dado y obtenemos un dibujo similar al de la figura 15. Usamos la característica de raíz para obtener $t \approx 0.01$ s.

■

FIGURA 15

$[0, 0.04, 0.01]$ por $[-1.5, 0.5, 0.25]$



Volveremos a trabajar en el ejemplo anterior en la sección 6.2 para demostrar cómo se obtiene el valor exacto de t sin la ayuda de la herramienta de gráficas.

5.5 Ejercicios

1 Obtenga la amplitud y el periodo y dibuje la gráfica de la ecuación:

a) $y = 4 \operatorname{sen} x$ **b)** $y = \operatorname{sen} 4x$

c) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$ **d)** $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

e) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$ **f)** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$

g) $y = -4 \operatorname{sen} x$ **h)** $y = \operatorname{sen}(-4x)$

2 Para ecuaciones análogas a las de a)–h) del ejercicio 1, pero relacionadas con el coseno, obtenga la amplitud y el periodo y trace la gráfica.

3 Obtenga la amplitud y el periodo y trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3 \cos x$ **b)** $y = \cos 3x$

c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ **d)** $y = \cos \frac{1}{3}x$

e) $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$ **f)** $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

g) $y = -3 \cos x$ **h)** $y = \cos(-3x)$

4 Para ecuaciones análogas a las de a)−h) del ejercicio 3, pero relacionadas con el seno, obtenga la amplitud y el periodo y trace la gráfica.

Ejer. 5−40: Obtenga la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase y trace la gráfica de la ecuación.

5 $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

6 $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

7 $y = 3\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

8 $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

9 $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

10 $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

11 $y = 4\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

12 $y = 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

13 $y = \operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$

14 $y = -\operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$

15 $y = -\cos(6x + \pi) - 2$

16 $y = \cos(2x - \pi) + 2$

17 $y = -5\operatorname{sen}(3x + \pi)$

18 $y = 3\cos(3x - \pi)$

19 $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

20 $y = 7\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

21 $y = 6\operatorname{sen}\pi x$

22 $y = 3\cos\dfrac{\pi}{2}x$

23 $y = 2\cos\dfrac{\pi}{2}x$

24 $y = 4\operatorname{sen}2\pi x$

25 $y = \dfrac{3}{4}\operatorname{sen}2\pi x$

26 $y = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}x$

27 $y = 5\operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

28 $y = -4\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

29 $y = -3\cos\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

30 $y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

31 $y = -5\cos\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

32 $y = 4\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

33 $y = 3\cos(\pi x + 4\pi)$

34 $y = -2\operatorname{sen}(2\pi x + \pi)$

35 $y = -8\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

36 $y = 9\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -2\operatorname{sen}(2x - \pi) + 3$

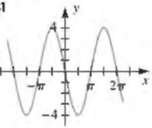
38 $y = 3\cos(x + 3\pi) - 2$

39 $y = 5\cos(2x + 2\pi) + 2$

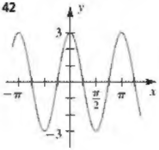
40 $y = -4\operatorname{sen}(3x - \pi) - 3$

Ejer. 41−44: La gráfica de una ecuación se muestra en la figura. a) Obtenga la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase. b) Escriba la ecuación en la forma $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ para $a > 0$, $b > 0$, y el menor número real positivo c.

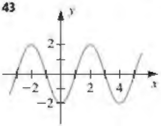
41



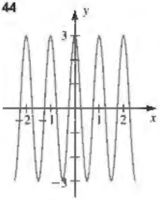
42



43

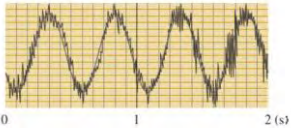


44



45 **Electroencefalografía** En la figura se muestra un electroencefalograma de ondas del cerebro humano durante el sueño profundo. Si usamos $W = a \operatorname{sen}(bt + c)$ para representar estas ondas, ¿cuál será el valor de b?

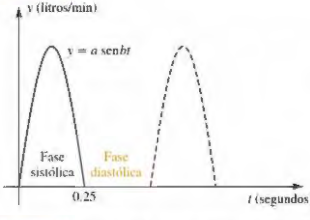
EJERCICIO 45



46 **Intensidad de la luz natural** En un cierto día de primavera con 12 horas de luz natural, la intensidad de la luz I alcanza al mediodía su mayor valor de 510 calorías/cm². Si $t = 0$ corresponde al amanecer, obtenga una fórmula $I = a \operatorname{sen} bt$ que concuerde con esta información.

47 **Acción del corazón** La acción de bombeo del corazón consiste en la fase sistólica, en la que la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y la fase diastólica, durante la cual el músculo cardiaco se relaja. La función cuya gráfica se muestra en la figura se usa en ocasiones para modelar un ciclo completo de este proceso. Para una persona determinada, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un caudal máximo de 8 litros por minuto. Calcule a y b.

EJERCICIO 47



48 **Biorritmos** La popular teoría del biorritmo utiliza las gráficas de tres funciones seno sencillas para hacer predicciones acerca del potencial físico, emocional e intelectual de una persona en un día determinado. Las gráficas están dadas por $y = a \operatorname{sen} bt$ para t en días, con $t = 0$ correspondiente al nacimiento y $a = 1$ para denotar el 100% de potencial.

a) Obtenga el valor de b para el ciclo físico, que tiene un periodo de 23 días; para el ciclo emocional (periodo de 28 días); y para el ciclo intelectual (periodo 33 días).

b) Evalúe los ciclos de biorritmo de una persona que acaba de cumplir 21 años y tiene exactamente 7,670 días de edad.

48 **Componentes de la marea** La altura de la marea en un punto particular en la orilla del mar puede predecirse con siete funciones trigonométricas (llamadas componentes de la marea) de la forma

$$f(t) = a \cos(bt + c).$$

El principal componente lunar puede aproximarse por

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{11\pi}{12}\right)$$

donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Dibuje la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

50 **Componentes de la marea** Remítase al ejercicio 49. El principal componente solar diurno puede aproximarse por

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{7\pi}{12}\right)$$

Dibuje la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

51 **Horas de luz natural en Fairbanks** Si la fórmula de $D(t)$ en el ejemplo 12 se usa para Fairbanks, Alaska, entonces $K \approx 12$. Dibuje la gráfica de D en este caso para $0 \leq t \leq 365$.

52 **Temperatura baja en Fairbanks** Con base en años de datos meteorológicos, la temperatura baja esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, puede aproximarse por

$$T = 36 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 14,$$

donde t está en días y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

a) Trace la gráfica de t para $0 \leq t \leq 365$.

b) Pronostique cuándo será el día más frío del año.

Ej. 53–54: Grafique la ecuación $y = f(t)$ en el intervalo [0, 24]. Si y representa la temperatura exterior (en °F) en el tiempo t (en horas), donde $t = 0$ corresponde a las 9 A.M., describa la temperatura durante el intervalo de 24 horas.

53 $y = 20 + 15 \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}t$

54 $y = 80 + 22 \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 3)\right]$

Ejer. 55–58: Los científicos a veces usan la fórmula

$$f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$$

para simular variaciones de temperatura durante el día, con el tiempo t en horas, temperatura $f(t)$ en °C y $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Suponga que $f(t)$ disminuye a la medianoche.

a) Determine los valores de a, b, c y d que correspondan a la información.

b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 24$.

55 La temperatura alta es de 10 °C y la temperatura baja de −10 °C ocurre a las 4 a.m.

56 La temperatura a la medianoche es de 15 °C, y las temperaturas máxima y mínima son de 20 °C y 10 °C.

57 La temperatura varía entre 10 °C y 30 °C, y la temperatura promedio de 20 °C ocurre por primera vez a las 9 A.M.

58 La temperatura máxima de 28 °C ocurre a las 2 P.M., y la temperatura promedio de 20 °C ocurre 6 horas más tarde.

59 **Precipitación en el South Lake Tahoe** La precipitación mensual promedio P (en pulgadas) en South Lake Tahoe, California, se presenta en la tabla.

Mes	P	Mes	P	Mes	P
Ene.	6.1	Mayo	1.2	Sep.	0.5
Feb.	5.4	Jun.	0.6	Oct.	2.8
Mar.	3.9	Jul.	0.3	Nov.	3.1
Abril	2.2	Ago.	0.2	Dic.	5.4

a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero, $t = 2$ a febrero, ..., $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Trace los puntos de datos para un periodo de dos años.

b) Obtenga una función $P(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que aproxime la precipitación mensual promedio. Trace los datos y la función P en los mismos ejes de coordenadas.

60 **Profundidad del río Támesis** Cuando un río fluye hacia el océano, su profundidad varía cerca de su desembocadura a consecuencia de las mareas. La información sobre este cambio de profundidad es crucial para la seguridad. La siguiente tabla presenta la profundidad D (en pies) del río Támesis en Londres para un periodo de 24 horas.

Hora	D	Hora	D	Hora	D
12 A.M.	27.1	1 A.M.	20.0	1 A.M.	34.0
1 A.M.	30.1	1 A.M.	18.0	1 A.M.	32.4
1 A.M.	33.0	1 A.M.	18.3	1 A.M.	29.1
1 A.M.	34.3	1 A.M.	20.6	1 A.M.	25.2
1 A.M.	33.7	1 A.M.	24.2	1 A.M.	21.9
1 A.M.	31.1	1 A.M.	28.1	1 A.M.	19.6
1 A.M.	27.1	1 A.M.	31.7	1 A.M.	18.6
1 A.M.	23.2	1 A.M.	33.7	1 A.M.	19.6

a) Trace una gráfica de los datos, con la hora en el eje horizontal y la profundidad en el eje vertical. $t = 0$ corresponde a las 12:00 A.M.

b) Determine una función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$, donde $D(t)$ representa la profundidad del agua en el puerto a la hora t. Grafique la función D con los datos. (*Sugerencia:* para determinar b, obtenga el tiempo entre profundidades máximas.)

c) Si un barco requiere por lo menos 24 pies de agua para navegar sin riesgo por el Támesis, determine geográficamente el intervalo o intervalos de horas en los que la navegación *no* es segura.

61 **Horas de luz natural** El número de horas de luz natural D en un lugar específico varía dependiendo tanto del mes como de la latitud. En la tabla se presenta el número de horas de luz natural el primer día de cada mes a 60 °N de latitud.

Mes	P	Mes	P	Mes	P
Ene.	6.03	Mayo	15.97	Sep.	14.18
Feb.	7.97	Jun.	18.28	Oct.	11.50
Mar.	10.43	Jul.	18.72	Nov.	8.73
Abril	13.27	Ago.	16.88	Dic.	5.88

a) Sea t el tiempo en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero, $t = 2$ a febrero, ..., $t = 12$ a diciembre, $t = 13$ a enero, y así sucesivamente. Trace la gráfica con estos datos para un periodo de dos años.

b) Obtenga una función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que aproxime el número de horas de luz natural. Grafique la función D con los datos.

62 **Horas de luz natural** Remítase al ejercicio 61. El máximo número de horas de luz natural a 40 °N es 15.02 horas y ocurre el 21 de junio. El número mínimo de horas de luz natural es de 9.32 y ocurre el 22 de diciembre.

a) Determine la función $D(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$ que modele el número de horas de luz natural, donde t está en meses y $t = 1$ corresponde al 1 de enero.

b) Grafique la función D utilizando el visor rectangular $[0.5, 24.5, 4]$ por $[0, 20, 4]$.

c) Pronostique el número de horas de luz natural el 1 de febrero y el 1 de septiembre. Compare sus respuestas con los valores verdaderos de 10.17 y 13.08 horas, respectivamente.

Ejer. 63–66: Grafique la ecuación en el intervalo $[-2, 2]$ y describa el comportamiento de y a medida que $x \to 0^-$ y $x \to 0^+$.

63 $y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

64 $y = |x| \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

65 $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

66 $y = \dfrac{1 - \cos 3x}{x}$

Ejer. 67–68: Grafique la ecuación en el intervalo $[-20, 20]$ y estime la asíntota horizontal.

67 $y = x^2 \operatorname{sen}^2 \left(\dfrac{2}{x}\right)$

68 $y = \dfrac{1 - \cos^2 (2/x)}{\operatorname{sen} (1/x)}$

Ejer. 69–70: Use una gráfica para resolver la desigualdad en el intervalo $[0, \pi]$.

69 $\cos 3x \geq \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$

70 $\frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{3}x^2\right) < \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{20}x^2$

5.6 Gráficas trigonométricas adicionales

Los métodos desarrollados en la sección 5.5 para seno y coseno se pueden aplicar a las otras cuatro funciones trigonométricas; sin embargo, hay varias diferencias. Puesto que las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen valores máximos, la noción de amplitud carece de significado. Además, no hacen referencia a ciclos. Para algunas gráficas de funciones tangente y cotangente, se dibuja primero la parte entre las asíntotas verticales sucesivas y luego se repite ese patrón a la derecha y a la izquierda.

La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ puede obtenerse ampliando o comprimiendo la gráfica de $y = \tan x$. Si $a < 0$, entonces también se usa un reflejo alrededor del eje x. Dado que la función tangente tiene periodo π, basta dibujar la rama entre las dos asíntotas verticales sucesivas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. El mismo patrón se presenta a la derecha y a la izquierda, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una ecuación que incluye tan x**

Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = 3 \tan x$ **b)** $y = \frac{1}{3} \tan x$

SOLUCIÓN Para empezar, dibujamos la gráfica de una rama de $y = \tan x$, como se muestra en color naranja en las figuras 1 y 2, entre las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

a) Para $y = 3 \tan x$, se multiplica la coordenada y de cada punto por 3 y luego se extiende la rama resultante a la derecha y a la izquierda, como se muestra en la figura 1.

FIGURA 1 $y = 3 \tan x$, $y = \tan x$

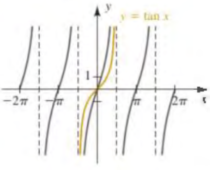
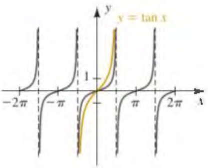


FIGURA 2 $y = \frac{1}{3} \tan x$, $y = \tan x$

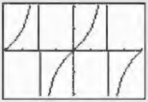


b) Para $y = \frac{1}{3} \tan x$, multiplicamos las coordenadas y por $\frac{1}{3}$ para obtener el dibujo de la figura 2. ■

El método que se emplea en el ejemplo 1 puede aplicarse a otras funciones. Por lo tanto, para dibujar la gráfica de $y = 3 \sec x$, primero dibujamos la gráfica de una rama de $y = \sec x$ y luego multiplicamos por 3 la coordenada y de cada punto.

La figura que se muestra enseguida es una gráfica típica de una calculadora graficadora de $y = \tan x$. Parece que la calculadora ha incluido las asíntotas, pero las líneas verticales en realidad son resultado del esfuerzo de la calculadora por conectar pixeles consecutivos.

$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.1, 2.1]$



El siguiente teorema es un análogo del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase enunciado en la sección 5.5 para las funciones seno y coseno.

Teorema sobre la gráfica de $y = a \tan (bx + c)$

Si $y = a \tan (bx + c)$ para los números reales diferentes de cero a y b, entonces

1) el periodo es $\dfrac{\pi}{|b|}$ y el desplazamiento de fase es $-\dfrac{c}{b}$

2) las asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama se encuentran resolviendo la desigualdad

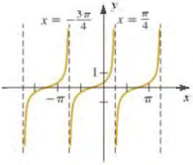
$$-\frac{\pi}{2} < bx + c < \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \tan (bx + c)$**

Encuentre el periodo y trace la gráfica de $y = \dfrac{1}{3} \tan \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

FIGURA 3

$y = \dfrac{1}{3} \tan \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma dada en el teorema precedente con $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ y $c = \pi/4$. Por lo tanto, por el inciso 1), el periodo está dado por $\pi/|b| = \pi/1 = \pi$.

Como en el inciso 2), para obtener las asíntotas verticales sucesivas, resolvemos la siguiente desigualdad:

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} < x \qquad < \frac{\pi}{4} \quad \text{restamos } \frac{\pi}{4}$$

Debido a que $a = \frac{1}{3}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{3} \tan x$ (vea la figura 2). Dibujamos esa rama y la extendemos a la derecha y a la izquierda para obtener la figura 3.

Observe que dado que $c = \pi/4$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase es $-c/b = -\pi/4$. Por consiguiente, la gráfica también puede obtenerse si se desplaza a la izquierda la gráfica de $y = \frac{1}{3} \tan x$ en la figura 2 una distancia de $\pi/4$.

Si $y = a \cot(bx + c)$, tenemos una situación similar a la que se expuso en el teorema anterior. La única diferencia es el inciso 2). Dado que las asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de $y = \cot x$ son $x = 0$ y $x = \pi$ (vea la figura 19 en la sección 5.3), obtenemos asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama de $y = a \cot(bx + c)$ resolviendo la desigualdad

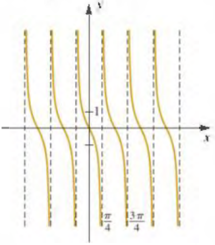
$$0 < bx + c < \pi$$

EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \cot(bx + c)$**

Encuentre el periodo y trace la gráfica de $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

FIGURA 4

$y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$



SOLUCIÓN Utilizando la notación acostumbrada, observamos que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -\pi/2$. El periodo es $\pi/|b| = \pi/2$. Por consiguiente, la gráfica se repite a intervalos de longitud $\pi/2$.

Como en la explicación que antecedió a este ejemplo, para encontrar dos asíntotas verticales sucesivas para la gráfica de una rama, resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 < 2x - \frac{\pi}{2} &< \pi \\ \frac{\pi}{2} < 2x \quad &< \frac{3\pi}{2} \qquad \text{sumamos } \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < x \quad &< \frac{3\pi}{4} \qquad \text{dividimos entre 2} \end{aligned}$$

Puesto que a es positivo, se dibuja una rama con forma de cotangente en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y luego se repite a la derecha y a la izquierda en intervalos de longitud $\pi/2$, como se muestra en la figura 4. ■

Las gráficas que se relacionan con las funciones secante y cosecante se obtienen con métodos similares a los de las funciones tangente y cotangente o con los recíprocos de las gráficas correspondientes de las funciones seno y coseno.

EJEMPLO 4 **Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \sec(bx + c)$**

Trace la gráfica de la ecuación:

a) $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $y = 2\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $y = \sec x$ está trazada (sin asíntotas) en color naranja en la figura 5. La gráfica de $y = \cos x$ está trazada en negro; observe que las asíntotas de $y = \sec x$ corresponden a los ceros de $y = \cos x$. Para obtener la gráfica de $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ desplazamos la gráfica de $y = \sec x$ a la derecha una distancia de $\pi/4$, como se muestra en negro en la figura 5.

b) Para dibujar esta gráfica, multiplicamos por 2 las coordenadas y de la gráfica en el inciso a). Esto produce la figura 6.

FIGURA 5 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

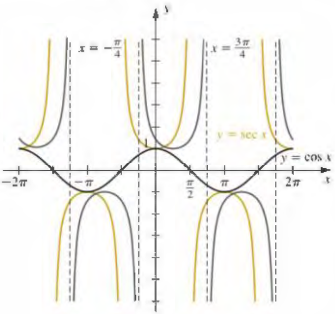
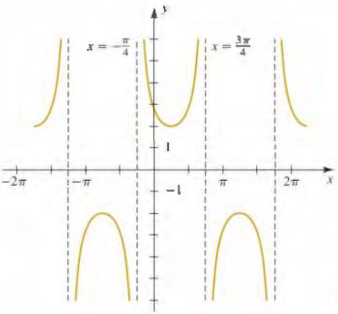


FIGURA 6 $y = 2\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



EJEMPLO 5 **Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a \csc (bx + c)$**

Trace la gráfica de $y = \csc (2x + \pi)$.

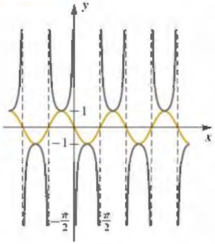
SOLUCIÓN Dado que $\csc \theta = 1/\text{sen}\, \theta$, la ecuación dada podemos escribirla como

$$y = \frac{1}{\text{sen}(2x + \pi)}$$

Por consiguiente, para obtener la gráfica de $y = \csc (2x + \pi)$, trazamos la gráfica de $y = \text{sen}\,(2x + \pi)$ y luego obtenemos el recíproco de la coordenada y de cada punto. Utilizando $a = 1$, $b = 2$ y $c = \pi$, observamos que la amplitud de $y = \text{sen}\,(2x + \pi)$ es 1 y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$. Para obtener un intervalo que contenga un ciclo, resolvemos la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 < 2x + \pi &< 2\pi \\ -\pi < 2x \quad &< \pi \\ -\frac{\pi}{2} < x \quad &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

FIGURA 7 $y = \csc (2x + \pi)$

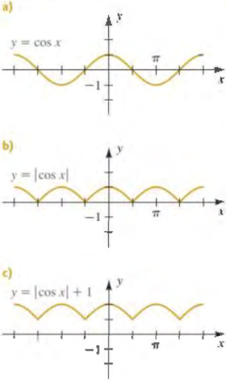


Esto conduce a la gráfica en color naranja de la figura 7. Calculamos los recíprocos para obtener la gráfica de $y = \csc (2x + \pi)$, que se muestra en negro en la figura. Tenga en cuenta que los ceros de la curva seno corresponden a las asíntotas de la gráfica de la función cosecante. ■

El siguiente ejemplo es acerca del valor absoluto de una función trigonométrica.

FIGURA 8

a)



EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una ecuación que requiere un valor absoluto**

Trace la gráfica de $y = |\cos x| + 1$.

SOLUCIÓN Trazaremos la gráfica en tres etapas. Primero trazamos la gráfica de $y = \cos x$, como en la figura 8a).

A continuación obtenemos la gráfica de $y = |\cos x|$ reflejando las coordenadas y negativas de la figura 8a) a través del eje x. Esto produce la figura 8b).

Por último, la gráfica de b) se desplaza verticalmente hacia arriba una unidad para obtener la figura 8c).

Para efectos de claridad, se han utilizado por separado tres gráficas. En la práctica, se pueden dibujar las gráficas sucesivamente en un plano de coordenadas. ■

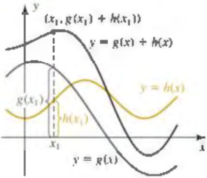
Las aplicaciones matemáticas a menudo requieren una función f que es una suma de dos o más funciones. Para ilustrar, suponga que

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

donde f, g y h tienen el mismo dominio D. Antes de que se inventaran las calculadoras graficadoras, en ocasiones se usaba una técnica conocida como **adición de coordenadas y** para trazar la gráfica de f. El método se ilustra en la figura 9, donde para cada x_1, la coordenada y $f(x_1)$ de un punto en la gráfica de f es la *suma de* $g(x_1) + h(x_1)$ de las coordenadas y de los puntos en las gráficas de g y h. La gráfica de f se obtiene *sumando gráficamente* un número suficiente de estas coordenadas y, una tarea que es mejor dejársela a una calculadora graficadora.

A veces es útil comparar la gráfica de una suma de funciones con las funciones individuales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 9



EJEMPLO 7 **Trazo de la gráfica de una suma de dos funciones trigonométricas**

Trace la gráfica de $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x + \operatorname{sen} x$ en el mismo plano de coordenadas para $0 \leq x \leq 3\pi$.

SOLUCIÓN Realizamos las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \cos x, \qquad Y_2 = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad Y_3 = Y_1 + Y_2$$

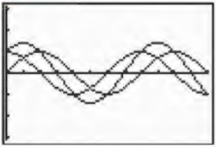
Como deseamos una proporción de pantalla de 3:2 (horizontal:vertical), seleccionamos el visor rectangular $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-\pi, \pi]$, y obtenemos la figura 10a). La claridad de la gráfica se puede mejorar si se cambia el visor rectangular a $[0, 3\pi, \pi/4]$ por $[-1.5, 1.5]$, como en la figura 10b) en la siguiente página.

Observe que la gráfica de Y_3 interseca la gráfica de Y_1 cuando $Y_2 = 0$, y la gráfica de Y_2 cuando $Y_1 = 0$. Las intersecciones x para Y_3 corresponden a las soluciones de $Y_2 = -Y_1$. Finalmente, observamos que los valores máximo y mínimo de Y_3 ocurren cuando $Y_1 = Y_2$ (es decir, cuando $x = \pi/4$, $5\pi/4$ y $9\pi/4$). Estos valores y son

$$\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{2}/2 + \left(-\sqrt{2}/2\right) = -\sqrt{2} \quad ■$$

FIGURA 10

a) $[0, 3\pi, \pi/4]$ by $[-\pi, \pi]$

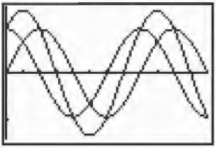


La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = f(x) \operatorname{sen}(ax + b) \qquad \text{o} \qquad y = f(x) \cos(ax + b),$$

FIGURA 10

b) $[0, 3\pi, \pi/4]$ by $[-\pi, \pi]$



donde f es una función exponencial y a y b son números reales, se llama **onda sinusoidal amortiguada** u **onda cosinusoidal amortiguada,** respectivamente, y $f(x)$ se llama **factor de amortiguación.** El siguiente ejemplo ilustra un método para graficar estas ecuaciones.

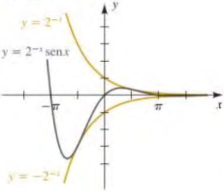
EJEMPLO 8 **Trazo de la gráfica de una onda sinusoidal amortiguada**

Trace la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x}$ sen x.

SOLUCIÓN En primer término, examinamos el valor absoluto de f.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |2^{-x}\,\mathrm{sen}\,x| && \text{valor absoluto de ambos lados} \\ &= |2^{-x}||\mathrm{sen}\,x| && |ab| = |a||b| \\ &\le |2^{-x}| \cdot 1 && |\mathrm{sen}\,x| \le 1 \\ |f(x)| &\le 2^{-x} && |2^{-x}| = 2^{-x} \text{ puesto que } 2^{-x} > 0 \\ -2^{-x} \le f(x) &\le 2^{-x} && |x| \le a \iff -a \le x \le a \end{aligned}$$

FIGURA 11



La última desigualdad implica que la gráfica de f está situada entre las gráficas de las ecuaciones $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincidirá con una de estas gráficas si $|\mathrm{sen}\,x| = 1$, es decir, si $x = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n.

Dado que $2^{-x} > 0$, las intersecciones x en la gráfica de f ocurren en sen $x = 0$, es decir, en $x = \pi n$. Debido a que existe un número infinito de intersecciones x, este es un ejemplo de una función que interseca su asíntota horizontal un número infinito de veces. Con esta información, obtenemos el dibujo que se muestra en la figura 11. ■

El factor de amortiguación en el ejemplo 8 es 2^{-x}. Cuando se usan diferentes factores de amortiguación, se obtienen otras variaciones comprimidas o expandidas de ondas sinusoidales. El análisis de estas gráficas es importante en física e ingeniería.

5.6 Ejercicios

Ejer. 1–52: Obtenga el periodo y dibuje la gráfica de la ecuación. Muestre las asíntotas.

1 $y = 4 \tan x$

2 $y = \frac{1}{4} \tan x$

3 $y = \frac{1}{3} \cot x$

4 $y = 3 \cot x$

5 $y = 2 \csc x$

6 $y = \frac{1}{2} \csc x$

7 $y = \frac{1}{4} \sec x$

8 $y = 4 \sec x$

9 $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

10 $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

11 $y = \tan 2x$

12 $y = \tan \frac{1}{2}x$

13 $y = \tan \dfrac{\pi}{6}x$

14 $y = \tan \dfrac{\pi}{3}x$

15 $y = 2 \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

16 $y = \dfrac{1}{3} \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

17 $y = -\dfrac{1}{4} \tan\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

18 $y = -3 \tan\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

19 $y = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

20 $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

21 $y = \cot \frac{1}{2}x$

22 $y = \cot 2x$

23 $y = \cot \dfrac{\pi}{2}x$

24 $y = \cot \dfrac{\pi}{4}x$

25 $y = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

26 $y = -\frac{1}{3}\cot(3x - \pi)$

27 $y = -\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

28 $y = 4\cot\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

29 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

30 $y = \sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

31 $y = \sec 2x$

32 $y = \sec \frac{1}{2}x$

33 $y = \sec \frac{\pi}{3}x$

34 $y = \sec \frac{2\pi}{3}x$

35 $y = 2\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

36 $y = \frac{1}{2}\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -\frac{1}{3}\sec\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

38 $y = -3\sec\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$

39 $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

40 $y = \csc\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

41 $y = \csc \frac{1}{2}x$

42 $y = \csc 2x$

43 $y = \csc \pi x$

44 $y = \csc \frac{\pi}{4}x$

45 $y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

46 $y = -\frac{1}{2}\csc(2x - \pi)$

47 $y = -\frac{1}{4}\csc\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

48 $y = 4\csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 49–50: Obtenga las ecuaciones de dos asíntotas verticales sucesivas de la gráfica de f.

49 $f(x) = \cot(2x - \pi)$

50 $f(x) = \tan(3x + 1)$

Ejer. 51–52: Obtenga una intersección x de la gráfica de f.

51 $f(x) = \tan(4x - 3)$

52 $f(x) = \cot\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 53–54: Obtenga el punto más bajo en una rama superior de f.

53 $f(x) = 3\csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

54 $f(x) = 4\sec\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$

Ejer. 55–56: Obtenga rango de f.

55 $f(x) = 3\sec(2x + 5) + 1$

56 $f(x) = 4\csc(2x - \pi) - 3$

57 Obtenga una ecuación utilizando la función cotangente que tiene la misma gráfica que $y = \tan x$.

58 Obtenga una ecuación utilizando la función cosecante que tiene la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejer. 59–64: Como ayuda, use la gráfica de una función trigonométrica para dibujar la gráfica de la ecuación sin trazar los puntos.

59 $y = |\operatorname{sen} x|$

60 $y = |\cos x|$

61 $y = |\operatorname{sen} x| + 2$

62 $y = |\cos x| - 3$

63 $y = -|\cos x| + 1$

64 $y = -|\operatorname{sen} x| - 2$

Ejer. 65–70: Dibuje la gráfica de la ecuación.

65 $y = x + \cos x$

66 $y = x - \operatorname{sen} x$

67 $y = 2^{-x}\cos x$

68 $y = e^{x}\operatorname{sen} x$

69 $y = |x|\operatorname{sen} x$

70 $y = |x|\cos x$

Ejer. 71–76: Grafique la función f en el visor rectangular $[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$. Use la gráfica de f para predecir la gráfica de g. Verifique su predicción y grafique g en el mismo visor rectangular.

71 $f(x) = \tan 0.5x$; $g(x) = \tan\left[0.5\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

72 $f(x) = 0.5\csc 0.5x$; $g(x) = 0.5\csc 0.5x - 2$

73 $f(x) = 0.5\sec 0.5x$; $g(x) = 0.5\sec\left[0.5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1$

74 $f(x) = \tan x - 1$; $g(x) = -\tan x + 1$

75 $f(x) = 3\cos 2x$; $g(x) = |3\cos 2x| - 1$

76 $f(x) = 1.2^{-x}\cos x$; $g(x) = 1.2^{x}\cos x$

Ejer. 77–78: Identifique el factor de amortiguación $f(x)$ para la onda amortiguada. Trace las gráficas de $y = \pm f(x)$ y la ecuación en el mismo plano de coordenadas para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

77 $y = e^{-x/4} \operatorname{sen} 4x$ **77** $y = 3^{-x/4} \cos 2x$

Ejer. 79–80: Grafique la función f en $[-\pi, \pi]$, y estime los puntos alto y bajo.

79 $f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} x$

80 $f(x) = \tan \frac{1}{4}x - 2 \operatorname{sen} 2x$

Ejer. 81–82: Use una gráfica para estimar el intervalo más grande $[a, b]$, con $a < 0$ y $b > 0$, en el que f sea uno a uno.

81 $f(x) = \operatorname{sen}(2x + 2) \cos(1.5x - 1)$

82 $f(x) = 1.5 \cos\left(\frac{1}{3}x - 0.3\right) + \operatorname{sen}(1.5x + 0.5)$

Ejer. 83–84: Use una gráfica para resolver la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

83 $\cos(2x - 1) + \operatorname{sen} 3x \geq \operatorname{sen} \frac{1}{3}x + \cos x$

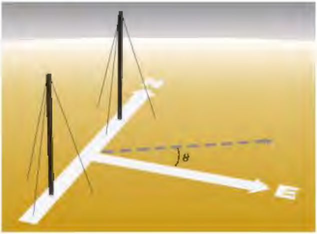
84 $\frac{1}{2} \cos 2x + 2 \cos(x - 2) < 2 \cos(1.5x + 1) + \operatorname{sen}(x - 1)$

85 **Intensidad de una señal de radio** Las estaciones de radio a menudo tienen más de una torre de radiodifusión, porque la normativa federal no permite por lo general que una estación transmita su señal en todas direcciones con igual potencia. Dado que las ondas de radio pueden viajar largas distancias, es importante controlar sus patrones direccionales para que las estaciones no se interfieran mutuamente. Suponga que una estación tiene dos torres de radiodifusión localizadas a lo largo de una línea norte-sur, como se muestra en la figura. Si la estación de radio transmite a una longitud de onda λ y la distancia entre las dos torres de radiodifusión es igual a $\frac{1}{2}\lambda$, la intensidad I de la señal en la dirección θ está dada por

$$I = \tfrac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \operatorname{sen} \theta)],$$

donde I_0 es la intensidad máxima. Aproxime I en términos de I_0 para cada θ.

EJERCICIO 85



86 **Intensidad de una señal de radio** Remítase al ejercicio 85.

a) Determine las direcciones en que I tiene los valores máximo y mínimo.

b) Grafique I en el intervalo $[0, 2\pi)$. Aproxime gráficamente θ a tres posiciones decimales, cuando I es igual a $\frac{1}{3}I_0$. (*Sugerencia:* sea $I_0 = 1$.)

87 **Campo magnético de la Tierra** La fuerza del campo magnético de la Tierra varía con la profundidad debajo de la superficie. La fuerza a la profundidad z y el tiempo t a veces pueden aproximarse con una onda sinusoidal amortiguada

$$S = A_0 e^{-\alpha z} \operatorname{sen}(kt - \alpha z),$$

donde A_0, α y k son constantes.

a) ¿Cuál es el factor de amortiguación?

b) Obtenga el desplazamiento de fase a la profundidad z_0.

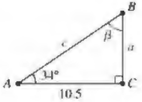
c) ¿A qué profundidad está la amplitud de la onda a la mitad de la amplitud de la fuerza superficial?

5.7 Problemas aplicados

La trigonometría se desarrolló para ayudar a resolver problemas relacionados con ángulos y longitudes de los lados de los triángulos. Los problemas de ese tipo ya no son las aplicaciones más importantes; sin embargo, todavía surgen preguntas sobre los triángulos en situaciones físicas. Al considerar tales preguntas en esta sección, el análisis lo limitaremos a los triángulos rectos. Los triángulos que no contienen un ángulo recto se considerarán en el capítulo 7.

Con frecuencia utilizaremos la siguiente notación. Los vértices de un triángulo se denotarán por A, B y C; los ángulos en A, B y C se denotarán por α, β y γ, respectivamente; y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, por a, b y c, respectivamente. El triángulo propiamente dicho se denominará *triángulo ABC*

FIGURA 2



(o se denotará por ΔABC). Si un triángulo es un triángulo rectángulo y si se conocen uno de los ángulos agudos y un lado, o si se dan dos lados, se pueden encontrar las partes restantes mediante las fórmulas de la sección 5.2 que expresan las funciones trigonométricas como razones de los lados de un triángulo. Nos referiremos al proceso de obtener las partes restantes como **resolver el triángulo**.

En todos los ejemplos *se supone que usted sabe determinar los valores de las funciones trigonométricas y los ángulos, ya sea usando una calculadora o los resultados de ángulos especiales.*

EJEMPLO 1 **Solución de un triángulo rectángulo**

Resuelva ΔABC, dado $\gamma = 90°$, $\alpha = 34°$ y $b = 10.5$.

SOLUCIÓN Puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Al resolver el ángulo desconocido β, obtenemos

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 34° - 90° = 56°$$

Remitiéndonos a la figura 1, obtenemos

$$\tan 34° = \frac{a}{10.5} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$a = (10.5)\tan 34° \approx 7.1 \qquad \text{resolvemos para } a\text{; aproximamos}$$

Para obtener el lado c, usamos la función coseno o la función cosecante, como sigue en 1) o 2), respectivamente:

1) $$\cos 34° = \frac{10.5}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$c = \frac{10.5}{\cos 34°} \approx 12.7 \qquad \text{resolvemos para } c\text{; aproximamos}$$

2) $$\sec 34° = \frac{c}{10.5} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$c = (10.5)\sec 34° \approx 12.7 \qquad \text{resolvemos para } c\text{; aproximamos}$$

■

Ayuda para tareas

Organice su trabajo en una tabla para que le resulte más fácil ver qué partes faltan de encontrar. A continuación se presentan algunas instantáneas del aspecto que podría tener una tabla típica para el ejemplo 1.

Después de obtener β:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	a
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	c

Después de obtener a:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	$a \approx 7.1$
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	c

Después de obtener c:

Ángulos	*Lados opuestos*
$\alpha = 34°$	$a \approx 7.1$
$\beta = 56°$	$b = 10.5$
$\gamma = 90°$	$c \approx 12.7$

Como se ilustra en el ejemplo 1, al trabajar con triángulos, por lo general redondeamos las respuestas. Una razón para hacerlo es que en la mayoría de las aplicaciones las longitudes de los lados de los triángulos y las medidas de los ángulos se obtienen por dispositivos mecánicos y, por consiguiente, son sólo aproximaciones de los valores exactos. En consecuencia, se supone que un número como 10.5 en el ejemplo 1 se ha redondeado a la décima más cercana. No se puede esperar más exactitud en los valores calculados para los lados restantes y, por lo tanto, también deben redondearse a la décima más cercana.

Al calcular los ángulos, las respuestas deben redondearse como se indica en la siguiente tabla.

Número de cifras significativas para los lados	Redondear la medida en grados de los ángulos al más cercano
2	1°
3	0.1°, o 10′
4	0.01°, o 1′

La justificación de esta tabla exige un análisis cuidadoso de los problemas que requieren aproximar datos.

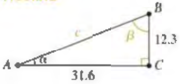
EJEMPLO 2 **Solución de un triángulo rectángulo**

Resuelva ΔABC, dado $\gamma = 90°$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$.

SOLUCIÓN Remitiéndonos al triángulo ilustrado en la figura 2, obtenemos

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6}$$

FIGURA 2



Dado que los lados están dados con tres cifras significativas, la regla establecida en la tabla anterior indica que α debe redondearse al 0.1° más cercano, o el múltiplo de 10′ más cercano. Utilizando el modo de grados de una calculadora, tenemos

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{12.3}{31.6} \approx 21.3° \quad \text{o, de forma equivalente,} \quad \alpha \approx 21°20'$$

Puesto que α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 21.3° = 68.7°$$

La única parte que falta por encontrar es c. Podemos usar varias relaciones que incluyen c para determinar su valor. Entre éstas figuran

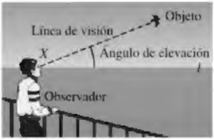
$$\cos \alpha = \frac{31.6}{c}, \qquad \sec \beta = \frac{c}{12.3} \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

Siempre que sea posible, es mejor usar una relación que incluya sólo la información dada, puesto que no depende de ningún valor previamente calculado. Por lo tanto, con $a = 12.3$ y $b = 31.6$, tenemos

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.3)^2 + (31.6)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9$$ ■

Como se ilustra en la figura 3, si un observador en el punto X ve un objeto, el ángulo que la línea de visión forma con la línea horizontal l es el **ángulo de elevación** del objeto, si el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal, o el **ángulo de depresión** del objeto, si el objeto está por debajo de la línea horizontal. Esta terminología se usa en los siguientes dos ejemplos.

FIGURA 3



EJEMPLO 3 **Uso de un ángulo de elevación**

Desde un punto en suelo nivelado a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación de la parte más alta de la torre es de 57°20′. Aproxime la altura de la torre.

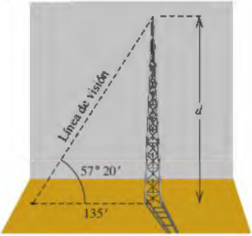
SOLUCIÓN Si d denota la altura de la torre, los datos proporcionados se representan por el triángulo de la figura 4. Remitiéndonos a la figura, obtenemos

$$\tan 57°20' = \frac{d}{135} \qquad \tan 57°20' = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$d = 135 \tan 57°20' \approx 211 \qquad \text{despejamos } d\text{; aproximamos}$$

La torre mide aproximadamente 211 pies de altura.

FIGURA 4



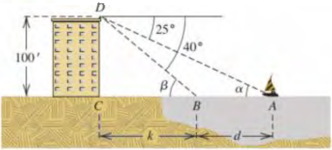
■

EJEMPLO 4 **Uso de ángulos de depresión**

Desde la cima de un edificio que da al océano, un observador ve un bote que navega directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies sobre el nivel del mar y si el ángulo de depresión del barco cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, aproxime la distancia que recorre el barco.

SOLUCIÓN Como en la figura 5, sean A y B las posiciones del barco que corresponden a los ángulos de 25° y 40°, respectivamente. Suponga que el observador se encuentra en el punto D y que C es el punto a 100 pies directamente debajo. d denota la distancia que recorre el barco y k denota la distancia que hay de B a C. Si α y β denotan los ángulos DAC y DCB, respectivamente, se desprende de la geometría (ángulos interiores alternos) que $\alpha = 25°$ y $\beta = 40°$.

FIGURA 5



Del triángulo BCD:

$$\cot \beta = \cot 40° = \frac{k}{100} \qquad \cot \beta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$k = 100 \cot 40° \qquad \text{despejamos } k$$

Observe que $d = \overline{AC} - \overline{BC}$, y si se usa tan en vez de cot, obtenemos la ecuación equivalente

$$d = \frac{100}{\tan 25°} - \frac{100}{\tan 40°}.$$

Del triángulo DAC:

$$\begin{aligned}
\cot \alpha = \cot 25° &= \frac{d + k}{100} && \cot \alpha = \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\
d + k &= 100 \cot 25° && \text{multiplicamos por mcd} \\
d &= 100 \cot 25° - k && \text{despejamos } d \\
&= 100 \cot 25° - 100 \cot 40° && k = 100 \cot 40° \\
&= 100(\cot 25° - \cot 40°) && \text{factorizamos 100} \\
&\approx 100(2.145 - 1.192) \approx 95 && \text{aproximamos}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el barco recorre aproximadamente 95 pies.

En ciertos problemas de navegación o topografía, la **dirección**, u **orientación**, de un punto P a un punto Q se especifica así: se plantea el ángulo agudo que el segmento PQ forma con la línea norte-sur a través de P. También se plantea si Q está al norte o sur y al este u oeste de P. La figura 6 ilustra cuatro posibilidades. La orientación de P a Q_1 es 25° este del norte y se denota por N25°E. También nos referimos a la **dirección** N25°E, que quiere decir la dirección de P a Q_1. La orientación de P a Q_2, a Q_3 y a Q_4 se representan de manera similar en la figura. Observe que cuando se usa esta notación para dar la orientación o dirección, *N* o *S* siempre aparecen a la *izquierda* del ángulo y O o E a la *derecha*.

FIGURA 6

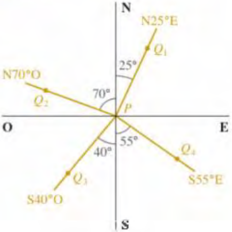
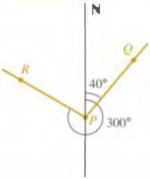


FIGURA 7



En navegación aérea, las direcciones y orientaciones se especifican midiendo desde el norte en la *dirección de las manecillas del reloj*. En este caso, una medida positiva se asigna al ángulo en lugar de la medida negativa a la que estamos acostumbrados para las rotaciones en la dirección de las manecillas del reloj. Remitiéndose a la figura 7, se observa que la dirección de PQ es 40° y la dirección de PR es 300°.

EJEMPLO 5 **Uso de orientaciones**

Dos barcos salen del puerto al mismo tiempo, y un barco navega en la dirección N23°E a una velocidad de 11 mi/h y otro en la dirección S67°E a 15 mi/h. Aproxime la orientación del segundo barco respecto al primero, una hora después.

FIGURA 8

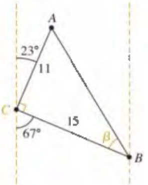
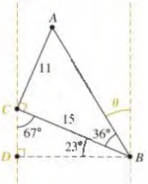


FIGURA 9



SOLUCIÓN El trazo de la figura 8 indica las posiciones del primer y segundo barcos en los puntos A y B, respectivamente, después de una hora. El punto C representa el puerto. Deseamos encontrar la orientación de B con respecto a A. Tenga en cuenta que

$$\angle ACB = 180° - 23° - 67° = 90°,$$

y, por lo tanto, el triángulo ACB es un triángulo rectángulo. Así,

$$\tan\beta = \frac{11}{15} \qquad \tan\beta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\beta = \tan^{-1}\tfrac{11}{15} \approx 36°. \qquad \text{despejamos } \beta\text{; aproximamos}$$

Hemos redondeado β al grado más cercano, porque los lados de los triángulos están dados con dos cifras significativas.

Remitiéndose a la figura 9, obtenemos lo siguiente:

$$\angle CBD = 90° - \angle BCD = 90° - 67° = 23°$$
$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD \approx 36° + 23° = 59°$$
$$\theta = 90° - \angle ABD \approx 90° - 59° = 31°$$

Por lo tanto, la orientación de B respecto a A es aproximadamente N31°O. ■

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación del movimiento vibratorio y oscilatorio, como el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra que vibra o un resorte que se comprime o alarga y luego se suelta para que oscile de un lado a otro. El tipo fundamental de desplazamiento de partículas en estas ilustraciones es el *movimiento armónico*.

Definición de movimiento armónico simple o movimiento en línea recta

Un punto que se mueve sobre una recta coordenada está en **movimiento armónico simple** si su distancia d del punto de equilibrio en el tiempo t está dado por

$$d = a\cos\omega t \qquad \text{o} \qquad d = a \operatorname{sen}\omega t,$$

donde a y ω son constantes, con $\omega > 0$.

En la definición anterior, la **amplitud** del movimiento es el máximo desplazamiento $|a|$ del punto a partir del punto de equilibrio. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ requerido para una oscilación completa. El recíproco del periodo, $\omega/(2\pi)$, es el número de oscilaciones o ciclos por unidad de tiempo y se llama **frecuencia**.

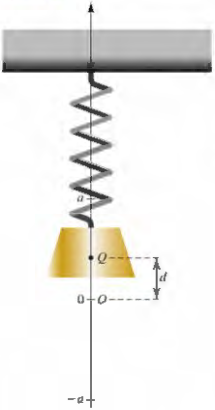
Para obtener una interpretación física del movimiento armónico simple, se considera un resorte con una pesa atada a uno de sus extremos y el otro extremo fijo, que oscila verticalmente en relación con una coordenada recta, como se ilustra en la figura 10. El número d representa la coordenada de un punto fijo Q en la pesa, y se supone que la amplitud a del movimiento es constante. En este caso, ninguna fuerza friccional retarda el movimiento. Si hay fricción, la amplitud disminuye con el tiempo, y se dice que el movimiento se *amortigua*.

EJEMPLO 6 **Descripción del movimiento armónico**

Suponga que la oscilación de la pesa que se muestra en la figura 10 está dada por

$$d = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

FIGURA 10



con t medido en segundos y d en centímetros. Explique el movimiento de la pesa.

SOLUCIÓN Por definición, el movimiento es armónico simple, con amplitud $a = 10$ cm. Dado que $\omega = \pi/6$, obtenemos lo siguiente:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

Por lo tanto, en 12 segundos la pesa describe una oscilación completa. La frecuencia es de $\frac{1}{12}$, lo que significa un doceavo de una oscilación tiene lugar cada segundo. La siguiente tabla indica la posición de Q a diferentes tiempos.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{6}t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
d	10	$5\sqrt{3} \approx 8.7$	5	0	-5	$-5\sqrt{3} \approx -8.7$	-10

La posición inicial de Q es de 10 centímetros sobre el origen O. Se mueve hacia abajo, cobrando velocidad hasta que llega a O. Observe que Q recorre aproximadamente $10 - 8.7 = 1.3$ cm durante el primer segundo, $8.7 - 5 = 3.7$ cm durante el siguiente segundo, y $5 - 0 = 5$ cm durante el tercer segundo. Luego se desacelera hasta llegar a un punto 10 centímetros por debajo de O al cabo de 6 segundos. La dirección del movimiento se invierte y la pesa se mueve hacia arriba, cobrando velocidad hasta llegar a O. Una vez que llega a O, se desacelera hasta que vuelve a su posición original al final de 12 segundos. La dirección del movimiento se invierte de nuevo y el mismo patrón se repite de manera indefinida. ■

5.7 Ejercicios

Ejer. 1–8: Dadas las partes del triángulo ABC que se indican con $\gamma = 90°$, obtenga los valores exactos de las partes restantes.

1 $\alpha = 30°$, $b = 20$

2 $\beta = 45°$, $b = 35$

3 $\beta = 45°$, $c = 30$

4 $\alpha = 60°$, $c = 6$

5 $a = 5$, $b = 5$

6 $a = 4\sqrt{3}$, $c = 8$

7 $b = 5\sqrt{3}$, $c = 10\sqrt{3}$

8 $b = 7\sqrt{2}$, $c = 14$

Ejer. 9–16: Dadas las partes del triángulo ABC que se indican con $\gamma = 90°$, aproxime las partes restantes.

9 $\alpha = 37°$, $b = 24$

10 $\beta = 64°20'$, $a = 20.1$

11 $\beta = 71°51'$, $b = 240.0$

12 $\alpha = 31°10'$, $a = 510$

13 $a = 25$, $b = 45$

14 $a = 31$, $b = 9.0$

15 $c = 5.8$, $b = 2.1$

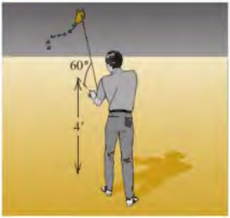
16 $a = 0.42$, $c = 0.68$

Ejer. 17–24: Dadas las partes del triángulo ABC que se indican con $\gamma = 90°$, exprese la tercera parte en términos de las primeras dos.

17 $\alpha, c;\ b$ | **18** $\beta, c;\ b$
19 $\beta, b;\ a$ | **20** $\alpha, b;\ a$
21 $\alpha, a;\ c$ | **22** $\beta, a;\ c$
23 $\alpha, c;\ b$ | **24** $\alpha, b;\ c$

25 **Altura de una cometa** Una persona que vuela una cometa de papel mantiene la cuerda a cuatro pies por encima del nivel del suelo. La cuerda de la cometa está tensa y forma un ángulo de 60° con la horizontal (vea la figura). Aproxime la altura de la cometa sobre el nivel del suelo, si se sueltan 500 pies de cuerda.

EJERCICIO 25



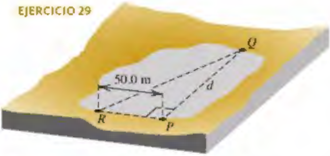
26 **Levantamiento topográfico** Desde un punto a 15 metros sobre el nivel del suelo, un topógrafo mide el ángulo de depresión de un objeto en el suelo a 68°. Aproxime la distancia del objeto al punto en el suelo directamente debajo del topógrafo.

27 **Aterrizaje de un avión** Un piloto, que vuela a una altitud de 5,000 pies, desea aproximarse a los números en una pista en un ángulo de 10°. Aproxime, a los 100 pies más cercanos, la distancia del avión a los números al inicio del descenso.

28 **Antena de radio** Un cable de sujeción se fija en la parte superior de una antena de radio y en un punto en el suelo horizontal que está a 40.0 metros de la base de la antena. Si el cable forma un ángulo de 58°20′ con el suelo, aproxime la longitud del cable.

29 **Levantamiento topográfico** Para obtener la distancia d entre dos puntos P y Q en orillas opuestas de un lago, el topógrafo localiza un punto R que se encuentra a 50.0 metros de P, de tal forma que RP es perpendicular a PQ, como se muestra en la figura. A continuación, usando un teodolito, el topógrafo mide el ángulo PRQ y obtiene el valor de 72°40′. Encuentre d.

EJERCICIO 29

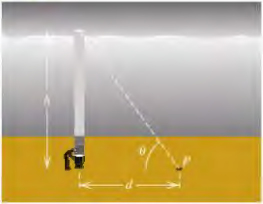


30 **Cálculos meteorológicos** Para medir la altura h de un manto de nubes, un estudiante de meteorología dirige verticalmente un reflector desde el suelo hacia arriba. Desde un punto P en suelo nivelado que está a d metros del reflector, mide el ángulo de elevación θ de la imagen de luz en las nubes (vea la figura).

a) Exprese h en términos de d y θ.

b) Aproxime h si $d = 1000$ m y $\theta = 59°$.

EJERCICIO 30



31 **Altitud de un cohete** Se dispara un cohete al nivel del mar y sube a un ángulo constante de 75° a través de una distancia de 10,000 pies. Aproxime la altitud al pie más cercano.

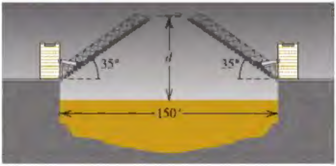
32 **Despegue de un avión** Un avión despega a un ángulo de 10° y viaja a la velocidad de 250 ft/s. ¿Aproximadamente cuánto tarda el avión en alcanzar la altitud de 15,000 pies?

33 **Diseño de un puente levadizo** Un puente levadizo mide 150 pies de largo cuando está extendido sobre un río. Como se muestra en la figura de la página siguiente, las dos secciones del puente pueden girarse hacia arriba a través de un ángulo de 35°.

a) Si el nivel del agua es de 15 pies por debajo del puente cerrado, obtenga la distancia d entre el fin de una sección y el nivel del agua cuando el puente está totalmente abierto.

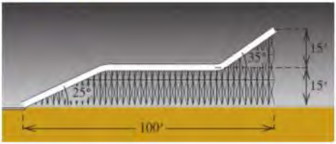
b) ¿Aproximadamente a qué distancia están los extremos de las dos secciones cuando el puente está totalmente abierto, como se muestra en la figura?

EJERCICIO 33



34 **Diseño de un tobogán** En la figura se muestra una parte del diseño de un tobogán. Calcule la longitud total del tobogán al pie más cercano.

EJERCICIO 34



35 **Elevación del Sol** Aproxime el ángulo de elevación α del Sol si una persona que mide 5.0 pies de estatura proyecta una sombra de 4.0 pies de largo en el suelo nivelado (vea la figura).

EJERCICIO 35

36 **Construcción de una rampa** Un constructor desea construir una rampa de 24 pies de largo que suba a una altura de 5.0 pies por encima del suelo nivelado. Aproxime el ángulo que la rampa debe formar con la horizontal.

37 **Videojuego** En la figura se muestra la pantalla de un videojuego sencillo en el cual los patos se mueven de A a B a una velocidad de 7 cm/s. Las balas disparadas desde el punto O viajan a 25 cm/s. Si un jugador dispara en cuanto aparece un pato en A, ¿a qué ángulo φ debe apuntar el rifle para anotar un tanto directo?

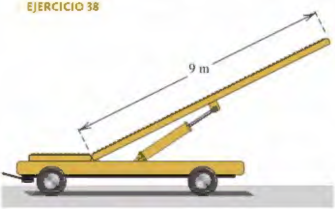
EJERCICIO 37

38 **Banda transportadora** Una banda transportadora de 9 metros de largo puede levantarse por medios hidráulicos hasta un ángulo de 40° para bajar la carga de los aviones (vea la figura).

a) Calcule, hasta el grado más cercano, el ángulo a través del cual debe levantarse la banda transportadora para alcanzar una puerta que está 4 metros por encima de la plataforma que soporta la banda.

b) Aproxime la altura máxima por encima de la plataforma que la banda puede alcanzar.

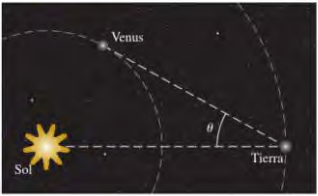
EJERCICIO 38



39 **La estructura más alta** La estructura más alta hecha por el hombre en todo el mundo es una torre de teletransmisión situada cerca de Mayville, Dakota del Norte. Desde una distancia de una milla en suelo nivelado, su ángulo de elevación es de 21°20′24″. Determine la altura al pie más cercano.

40 **Elongación de Venus** La *elongación* del planeta Venus se define como el ángulo θ determinado por el Sol, la Tierra y Venus, como se muestra en la figura de la página siguiente. La máxima elongación de Venus ocurre cuando la Tierra se encuentra a su distancia mínima D_e del Sol y Venus está a su distancia máxima D_v del Sol. Si $D_e = 91{,}500{,}000$ mi y $D_v = 68{,}000{,}000$ mi, aproxime la elongación máxima $\theta_{\text{máx}}$ de Venus. Suponga que la órbita de Venus es circular.

EJERCICIO 40

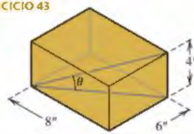


41 **Superficie del Pentágono** El Pentágono es el edificio de oficinas más grande del mundo en términos de superficie. El perímetro del edificio tiene la forma de un pentágono regular y cada lado mide 921 pies de longitud. Encuentre el área que encierra el perímetro del edificio.

42 Un octágono regular está inscrito en un círculo de 12.0 centímetros de radio. Aproxime el perímetro del octágono.

43 Una caja rectangular tiene las siguientes dimensiones: $8'' \times 6'' \times 4''$. Aproxime, a la décima de grado más cercana, el ángulo θ formado por una diagonal de la base y la diagonal de la caja, como se muestra en la figura.

EJERCICIO 43



44 **Volumen de un vaso cónico** Un vaso de papel cónico tiene un radio de 2 pulgadas. Aproxime, al grado más cercano, el ángulo β (vea la figura) para que el cono tenga un volumen de 20 in^3.

EJERCICIO 44

45 **Altura de una torre** Desde un punto P en suelo nivelado, el ángulo de elevación de la punta de una torre es de 26°50′. Desde un punto 25.0 metros más cercano a la torre y en la misma línea con P y la base de la torre, el ángulo de elevación de la punta es de 53°30′. Aproxime la altura de la torre.

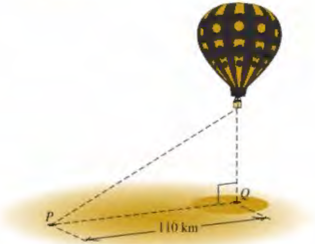
46 **Cálculos para escaleras** Una escalera de mano de 20 pies de largo está apoyada en el costado de un edificio, y el ángulo entre la escalera y el edificio es de 22°.

a) Aproxime la distancia del pie de la escalera al edificio.

b) Si la distancia del pie de la escalera al edificio aumenta 3.0 pies, ¿aproximadamente qué distancia se mueve la parte superior de la escalera hacia abajo del edificio?

47 **Ascenso de un globo aerostático** A medida que un globo aerostático se eleva, su ángulo de elevación desde un punto P en suelo nivelado a 110 kilómetros del punto Q directamente debajo del globo cambia de 19°20′ a 31°50′ (vea la figura). ¿Aproximadamente cuánto se eleva el globo durante este periodo?

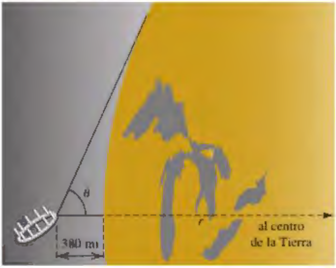
EJERCICIO 47



48 **Altura de un edificio** Desde un punto A que está a 8.20 metros sobre suelo nivelado, el ángulo de elevación de la parte más alta del edificio es de 31°20′ y el ángulo de depresión de la base del edificio es de 12°50′. Aproxime la altura del edificio.

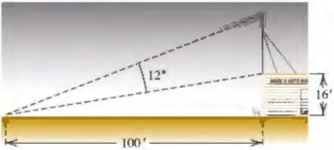
49 **Radio de la Tierra** Un laboratorio espacial orbita la Tierra a una altitud de 380 millas. Cuando un astronauta ve el horizonte de la Tierra, el ángulo θ que se muestra en la figura (en la página siguiente) mide 65.8°. Use esta información para estimar el radio de la Tierra.

EJERCICIO 49



50 Longitud de una antena Una antena CB está situada encima de una cochera que mide 16 pies de altura. Desde un punto en suelo nivelado que se encuentra a 100 pies desde un punto directamente debajo de la antena, ésta subtiende un ángulo de 12°, como se muestra en la figura. Aproxime la longitud de la antena.

EJERCICIO 50



51 Velocidad de un avión Un avión que vuela a una altitud de 10,000 pies pasa directamente sobre un objeto fijo en el suelo. Un minuto después, el ángulo de depresión del objeto es de 42°. Aproxime la velocidad del avión a la milla más cercana por hora.

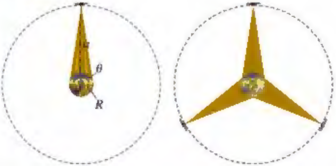
52 Altura de una montaña Un automovilista, que viaja por una autopista nivelada a una velocidad de 60 km/h directamente hacia una montaña, observa que entre la 1:00 P.M. y la 1:10 P.M. el ángulo de elevación de la cima de la montaña cambia de 10° a 70°. Aproxime la altura de la montaña.

53 Satélite de telecomunicaciones En la parte izquierda de la figura se muestra un satélite de telecomunicaciones con una órbita ecuatorial, es decir, una órbita casi circular en el plano determinado por el ecuador de la Tierra. Si el satélite orbita la Tierra a una altitud de $a = 22{,}300$ mi, su velocidad es la misma que la velocidad de rotación de la Tierra; para un observador en el ecuador, el satélite parece estacionario, es decir, su órbita es sincrónica.

a) Si $R = 4{,}000$ mi es el radio de la Tierra, determine el porcentaje del ecuador que está dentro del alcance de la señal de dicho satélite.

b) Como se muestra en la parte derecha de la figura, tres satélites están situados a igual distancia uno del otro en órbitas ecuatoriales sincrónicas. Use el valor de θ obtenido en el inciso a) para explicar por qué todos los puntos en el ecuador se encuentran dentro del alcance de la señal de por lo menos uno de los tres satélites.

EJERCICIO 53

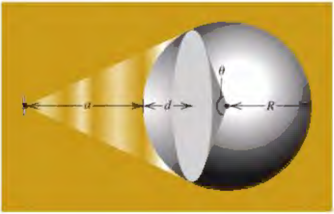


54 Satélite de telecomunicaciones Remítase al ejercicio 53. En la figura se muestra el área a la que da servicio un satélite de telecomunicaciones que orbita un planeta de radio R a una altitud a. La parte de la superficie del planeta dentro del alcance de la señal del satélite es un casquete esférico de profundidad d y área superficial $A = 2\pi Rd$.

a) Exprese d en términos de R y θ.

b) Estime el porcentaje de la superficie del planeta que está dentro del alcance de la señal de un solo satélite en órbita ecuatorial sincrónica.

EJERCICIO 54



55 Altura de una cometa Generalice el ejercicio 25 al caso en el que el ángulo es α, el número de pies que se suelta la cuerda es d, y el extremo de la cuerda se mantiene a c pies sobre el nivel del suelo. Exprese la altura h de la cometa en términos de α, d y c.

56 **Levantamiento topográfico** Generalice el ejercicio 26 al caso en el que el punto está a d metros sobre el suelo nivelado y el ángulo de depresión es α. Exprese la distancia x en términos de d y α.

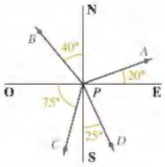
57 **Altura de una torre** Generalice el ejercicio 45 al caso en el que el primer ángulo es α, el segundo ángulo es β y la distancia entre los dos puntos es d. Exprese la altura h de la torre en términos de d, α y β.

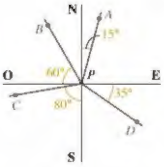
58 Generalice el ejercicio 42 al caso de un polígono de n lados inscrito en un círculo de radio r. Exprese el perímetro P en términos de n y r.

59 **Ascenso de un globo aerostático** Generalice el ejercicio 47 al caso en el que la distancia de P a Q es d kilómetros y el ángulo de elevación cambia de α a β.

60 **Altura de un edificio** Generalice el ejercicio 48 al caso en el que el punto A está a d metros sobre el suelo y los ángulos de elevación y depresión son α y β. Exprese la altura h del edificio en términos de d, α y β.

Ejer. 61–62: Obtenga la orientación de P respecto a cada uno de los puntos A, B, C y D.





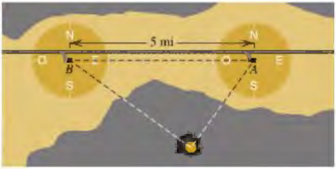
63 **Orientación de un barco** Un barco sale del puerto a la 1:00 P.M. y navega en la dirección N34°O a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale del puerto a la 1:30 P.M. y navega en la dirección N56°E a una velocidad de 18 mi/h.

a) ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran los barcos a las 3:00 P.M.?

b) ¿Cuál es la orientación, al grado más cercano, del primer barco respecto al segundo?

64 **Determinación del lugar de un incendio forestal** Desde un punto de observación A, un guardabosques descubre un incendio en la dirección S35°50′O (vea la figura). Desde un punto B, 5 millas al oeste de A, otro guardabosques ve el mismo incendio en la dirección S54°10′E. Aproxime, a la décima de milla más cercana, la distancia del incendio a A.

EJERCICIO 64



65 **Vuelo de un avión** Un avión que vuela a una velocidad de 360 mi/h viaja del punto A en la dirección 137° durante 30 minutos y luego vuela en la dirección 227° durante 45 minutos. Aproxime, a la milla más cercana, la distancia del avión a A.

66 **Plan de vuelo de un avión** Un avión que vuela a una velocidad de 400 mi/h se desplaza del punto A en la dirección 153° durante una hora y luego vuela en la dirección 63° durante una hora.

a) ¿En qué dirección necesita volar el avión para regresar al punto A?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en volver al punto A?

Ejer. 67–70: La fórmula especifica la posición de un punto P que se mueve armónicamente en un eje vertical, donde t está en segundos y d en centímetros. Determine la amplitud, periodo y frecuencia, y describa el movimiento del punto durante una oscilación completa (comenzando en $t = 0$).

67 $d = 10 \operatorname{sen} 6\pi t$

68 $d = \dfrac{1}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} t$

69 $d = 4 \cos \dfrac{3\pi}{2} t$

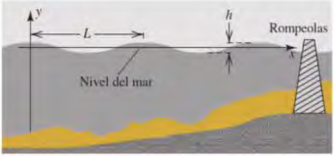
70 $d = 6 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3} t$

71 Un punto P en movimiento armónico simple tiene un periodo de 3 segundos y una amplitud de 5 centímetros. Exprese el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \cos \omega t$.

72 Un punto P en movimiento armónico simple tiene una frecuencia de $\frac{1}{2}$ oscilación por minuto y una amplitud de 4 pies. Exprese el movimiento de P por medio de una ecuación de la forma $d = a \operatorname{sen} \omega t$.

73 **Tsunami** Un tsunami es una ola gigantesca provocada por un maremoto en el fondo del mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y viajar a grandes velocidades. Los ingenieros, en ocasiones, representan estas olas por medio de expresiones trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$ y usan estas representaciones para estimar la eficacia de los rompeolas. Suponga que una ola tiene una altura $h = 50$ ft y periodo de 30 minutos y que viaja a la velocidad de 180 ft/s.

EJERCICIO 73



a) Sea (x, y) un punto en la ola representada en la figura. Exprese y como función de t si $y = 25$ ft cuando $t = 0$.

b) La longitud de onda L es la distancia entre dos crestas sucesivas de la ola. Aproxime L en pies.

74 **Algunos tsunamis hawaianos** Para un intervalo de 45 minutos, los tsunamis cerca de Hawai provocados por el terremoto de Chile de 1960 pueden modelarse con la ecuación $y = 8 \text{ sen } \pi/6\, t$, donde y está en pies y t está en minutos.

a) Encuentre la amplitud y el periodo de las olas.

b) Si la distancia de una cresta de la ola a la siguiente era de 21 kilómetros, ¿cuál era la velocidad de la ola? (Los tsunamis pueden tener velocidades de más de 700 km/h en aguas profundas.)

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO

1 Obtenga la medida en radianes que corresponde a cada medida en grados: 330°, 405°, −150°, 240°, 36°.

2 Obtenga la medida en grados que corresponde a cada medida en radianes:

$$\frac{9\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 5\pi, \frac{\pi}{5}.$$

3 Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 20 centímetros de largo en un círculo de 2 metros de radio.

a) Obtenga la medida en radianes de θ.

b) Obtenga el área del sector determinado por θ.

4 **a)** Obtenga la longitud del arco que subtiende un ángulo que mide 70° en un círculo de 15 centímetros de diámetro.

b) Obtenga el área del sector en el inciso a).

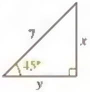
5 **Velocidad angular de discos fonográficos** Dos tipos de discos fonográficos, álbumes LP y sencillos, tienen diámetros de 12 y 7 pulgadas, respectivamente. El álbum gira a una velocidad de $33\frac{1}{3}$ rpm y el sencillo a 45 rpm. Obtenga la velocidad angular (en radianes por minuto) del álbum y del sencillo.

6 **Velocidad lineal en discos fonográficos** Utilizando la información del ejercicio 5, obtenga la velocidad lineal (en ft/min) de un punto en la circunferencia del álbum y del sencillo.

Ejer. 7–8: Obtenga los valores exactos de x y y.

7

8



Ejer. 9–10: Use las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

9 $\tan\theta, \quad \sec\theta$ **10** $\cot\theta, \quad \csc\theta$

Ejer. 11–20: Verifique la identidad mediante la transformación del lado izquierdo en el lado derecho.

11 $\text{sen } \theta (\csc\theta - \text{sen } \theta) = \cos^2\theta$

12 $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$

13 $(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) = 1 - \sec^2\theta$

14 $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$ **15** $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \csc^2\theta$

16 $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{\sec\theta - \csc\theta} = \dfrac{\text{sen } \theta + \cos\theta}{\text{sen } \theta - \cos\theta}$

17 $\dfrac{\cot\theta - 1}{1 - \tan\theta} = \cot\theta$ **18** $\dfrac{1 + \sec\theta}{\tan\theta + \text{sen } \theta} = \csc\theta$

19 $\dfrac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan\theta} = -\csc^2\theta$

20 $\dfrac{1}{(-\theta)} - \dfrac{\cot(-\theta)}{(-\theta)} = \csc\theta$

21 Si θ es un ángulo agudo de un triángulo recto y si el cateto adyacente y la hipotenusa miden 4 y 7 de longitud, respectivamente, obtenga los valores de las funciones trigonométricas de θ.

22 Siempre que sea posible, obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y satisface la condición planteada.

a) El punto $(30, -40)$ está en el lado terminal de θ.

b) El lado terminal de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

c) El lado terminal de θ está en el eje negativo y.

23 Determine el cuadrante que contiene θ si θ está en posición estándar.

a) $\sec\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

b) $\cot\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$

c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

24 Obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas restantes si

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$

b) $\csc\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ y $\cot\theta = -\dfrac{3}{2}$

Ejer. 25–26: $P(t)$ denota el punto en el círculo unitario U que corresponde al número real t.

25 Obtenga las coordenadas rectangulares de $P(-5\pi/2)$, $P(-9\pi/2)$, $P(-3\pi/4)$, $P(18\pi)$ y $P(\pi/6)$.

26 Si $P(t)$ tiene coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, obtenga las coordenadas de $P(t + 3\pi)$, $P(t - \pi)$, $P(-t)$ y $P(2\pi - t)$.

27 **a)** Obtenga el ángulo de referencia para cada medida en radianes:
$\dfrac{5\pi}{4}, -\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{9\pi}{8}$

b) Obtenga el ángulo de referencia para cada medida en grados: $245°$, $137°$, $892°$.

28 Sin usar calculadora, obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas que corresponden a cada número real, siempre que sea posible.

a) $\dfrac{9\pi}{2}$ **b)** $-\dfrac{5\pi}{4}$ **c)** 0 **d)** $\dfrac{11\pi}{6}$

29 Obtenga el valor exacto.

a) $\cos 225°$ **b)** $\tan 150°$ **c)** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

d) $\sec\dfrac{4\pi}{3}$ **e)** $\cot\dfrac{7\pi}{4}$ **f)** $\csc 300°$

30 Si $\operatorname{sen}\theta = -0.7604$ y $\sec\theta$ es positivo, aproxime θ al $0.1°$ más cercano para $0° \le \theta < 360°$.

31 Si $\tan\theta = 2.7381$, aproxime θ al 0.0001 radián más cercano para $0 \le \theta < 2\pi$.

32 Si $\sec\theta = 1.6403$, aproxime θ al $0.01°$ más cercano para $0° \le \theta < 360°$.

Ejer. 33–40: Obtenga la amplitud y el periodo y trace la gráfica de la ecuación.

33 $y = 5\cos x$

34 $y = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

35 $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$

36 $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}x$

37 $y = -3\cos\frac{1}{2}x$

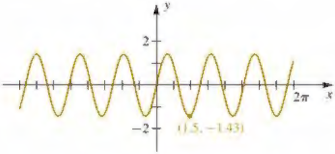
38 $y = 4\operatorname{sen} 2x$

39 $y = 2\operatorname{sen}\pi x$

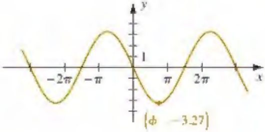
40 $y = 4\cos\dfrac{\pi}{2}x - 2$

Ejer. 41–44: La gráfica de una ecuación se muestra en la figura. a) Obtenga la amplitud y el periodo. b) Exprese la ecuación en la forma $y = a$ sen bx o en la forma $y = a \cos bx$.

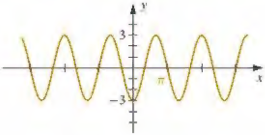
41



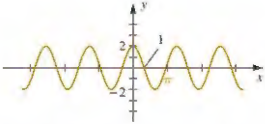
42



43



44



Ejer. 45–56: Trace la gráfica de la ecuación.

45 $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ **46** $y = -3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

47 $y = -4 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ **48** $y = 5 \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

49 $y = 2 \tan\left(\dfrac{1}{2}x - \pi\right)$ **50** $y = -3 \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

51 $y = -4 \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **52** $y = 2 \cot\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

53 $y = \sec\left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$ **54** $y = \sec\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

55 $y = \csc\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **56** $y = \csc\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ejer. 57–60: Dadas las partes indicadas del triángulo ABC con $\gamma = 90°$, aproxime las partes restantes.

57 $\beta = 60°$, $b = 40$ **58** $\alpha = 54°40'$, $b = 220$

59 $a = 62$, $b = 25$ **60** $a = 9.0$, $c = 41$

61 **Propulsor de un avión** La longitud del propulsor de avión más grande que se haya usado en la historia fue de 22 pies 7.5 pulgadas. El avión funcionaba con cuatro motores que hacían girar el propulsor a 545 revoluciones por minuto.

a) ¿Cuál era la velocidad angular del propulsor en radianes por segundo?

b) ¿Aproximadamente a qué velocidad (en mi/h) la punta del propulsor describía el círculo que generaba?

62 **La Torre Eiffel** Cuando la punta de la Torre Eiffel se observa a una distancia de 200 pies de la base, el ángulo de elevación es de 79.2°. Estime la altura de la torre.

63 **Rayos láser y velocidades** Los rayos láser se usan para medir con precisión la velocidad de los objetos. La luz láser produce un campo electromagnético oscilatorio E con una frecuencia constante f que puede describirse por

$$E = E_0 \cos(2\pi f t)$$

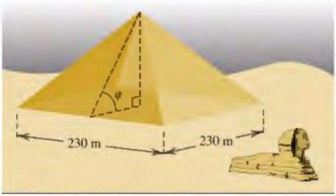
Si un rayo láser apunta hacia un objeto que se mueve hacia el láser, la luz se reflejará hacia el láser a una frecuencia ligeramente más alta, de manera muy parecida a como el silbato de un tren suena más alto a medida que el tren se acerca. Si Δf es este cambio en frecuencia y v es la velocidad del objeto, la ecuación

$$\Delta f = \frac{2fv}{c}$$

puede utilizarse para determinar v, donde $c = 186{,}000$ mi/s es la velocidad de la luz. Aproxime la velocidad v de un objeto si $\Delta f = 10^8$ y $f = 10^{14}$.

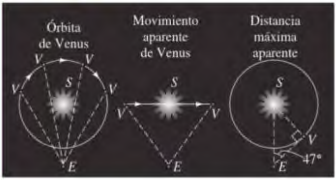
64 **La Gran Pirámide** La Gran Pirámide de Egipto mide 147 metros de altura y tiene una base cuadrada de 230 metros de lado (vea la figura en la página siguiente). Aproxime, al grado más cercano, el ángulo φ formado cuando un observador se encuentra en el punto medio de uno de los lados y ve el ápice de la pirámide.

EJERCICIO 64



65 **Venus** Cuando se observa desde la Tierra durante un cierto periodo, el planeta Venus da la impresión de moverse de un lado a otro a lo largo de un segmento de recta con el Sol en el centro (vea la figura). Si ES mide aproximadamente 92,900,000 millas, la máxima distancia aparente de Venus con respecto al Sol ocurre cuando el ángulo SEV mide aproximadamente 47°. Suponga que la órbita de Venus es circular y estime la distancia de Venus al Sol.

EJERCICIO 65



66 **Levantamiento topográfico** Desde un punto a 233 pies sobre suelo nivelado, un topógrafo mide el ángulo de depresión de un objeto en el suelo y determina que es de 17°. Aproxime la distancia del objeto al punto en suelo directamente debajo del topógrafo.

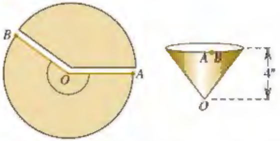
67 **Cálculos para escaleras** Una escalera de mano de 16 pies de largo está apoyada en el costado de un edificio y el ángulo entre la escalera y el edificio es de 25°.

a) Aproxime la distancia del pie de la escalera al edificio.

b) Si la distancia del pie de la escalera al edificio disminuye 1.5 pies, ¿aproximadamente cuánto se mueve la parte superior de la escalera hacia arriba del edificio?

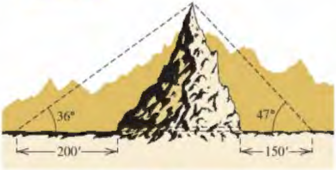
68 **Fabricación de un vaso cónico** Un vaso cónico de papel se fabrica quitando un sector de un círculo de 5 pulgadas de radio y adhiriendo la orilla OA a OB (vea la figura). Obtenga el ángulo AOB que se necesita para que el vaso tenga una profundidad de 4 pulgadas.

EJERCICIO 68



69 **Longitud de un túnel** Un túnel para una nueva autopista se abrirá a través de una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies desde la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (vea la figura). Desde una distancia de 150 pies del otro lado, el ángulo de elevación es de 47°. Aproxime la longitud del túnel al pie más cercano.

EJERCICIO 69

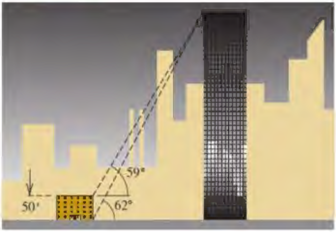


70 **Altura de un rascacielos** Cuando un cierto rascacielos se observa desde lo alto de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es de 59° (vea la figura). Cuando se observa desde la calle siguiente al edificio más bajo, el ángulo de elevación es de 62°.

a) ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentran las dos estructuras?

b) Aproxime la altura del rascacielos a la décima más cercana de un pie.

EJERCICIO 70



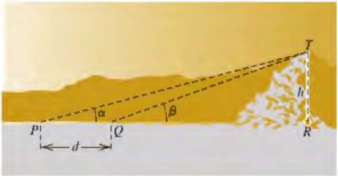
71 **Altura de una montaña** Cuando se observa la cima de una montaña desde el punto P que se muestra en la figura, el ángulo de elevación es α. Desde un punto Q, que está d millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación aumenta a β.

a) Muestre que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

b) Si $d = 2$ mi, $\alpha = 15°$ y $\beta = 20°$, aproxime la altura de la montaña.

EJERCICIO 71

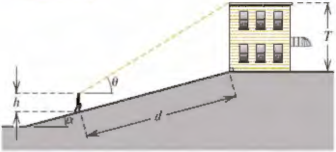


72 **Altura de un edificio** Un observador de estatura h se encuentra en una pendiente a una distancia d de la base de un edificio de altura T, como se muestra en la figura. El ángulo de elevación del observador a lo alto del edificio es θ, y la pendiente forma un ángulo de α con la horizontal.

a) Exprese T en términos de h, d, α y θ.

b) Si $h = 6$ ft, $d = 50$ ft, $\alpha = 15°$ y $\theta = 31.4°$, estime la altura del edificio.

EJERCICIO 72



73 **Iluminancia** Un reflector con intensidad de 5,000 candelas está situado 15 pies arriba de un escenario. Si el reflector gira a través de un ángulo θ como se muestra en la figura, la iluminancia E (en pies-candelas) en el área iluminada del escenario está dada por

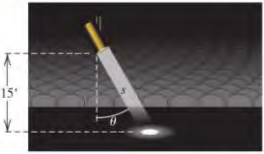
$$E = \frac{5000 \cos \theta}{s^2},$$

donde s es la distancia (en pies) que la luz debe viajar.

a) Encuentre la iluminancia si el reflector gira a través de un ángulo de 30°.

b) La iluminancia máxima ocurre cuando $\theta = 0°$. ¿Para qué valor de θ la iluminancia es la mitad del valor máximo?

EJERCICIO 73



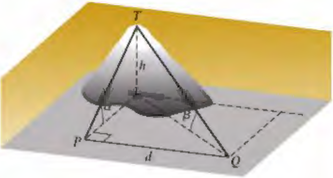
74 **Altura de una montaña** Si la cima de una montaña se observa desde un punto P al sur de la montaña, el ángulo de elevación es α (ver la figura). Si se observa desde un punto Q que está d millas al este de P, el ángulo de elevación es β.

a) Muestre que la altura h de la montaña está dada por

$$h = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta}}$$

b) Si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$ y $d = 10$ mi, aproxime h a la centésima de milla más cercana.

EJERCICIO 74

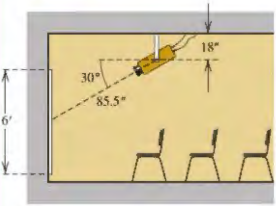


75 **Montaje de una unidad de proyección** El fabricante de un sistema computarizado de proyección recomienda que la unidad de proyección se monte en el techo como se muestra en la figura en la página siguiente. La distancia desde el extremo del soporte de montaje hasta el centro de la pantalla es de 85.5 pulgadas, y el ángulo de depresión es de 30°.

a) Si el espesor de la pantalla no se toma en cuenta, ¿a qué distancia de la pared debe montarse el soporte?

b) Si el soporte mide 18 pulgadas de largo y la pantalla tiene 6 pies de altura, determine la distancia del techo al borde superior de la pantalla.

EJERCICIO 75

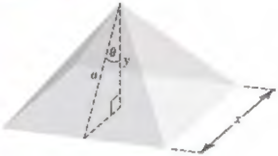


76 **Relaciones piramidales** Una pirámide tiene una base cuadrada y caras triangulares congruentes. Sea θ el ángulo que la altitud a de una cara triangular forma con la altitud y de la pirámide, y sea x la longitud de un lado (vea la figura).

a) Exprese el área superficial total S de las cuatro caras en términos de a y θ.

b) El volumen V de la pirámide es igual a una tercera parte del área de la base multiplicada por la altitud. Exprese V en términos de a y θ.

EJERCICIO 76



77 **Levantamiento topográfico de un risco** Con ayuda de un teodolito, un topógrafo observa la orilla b de un risco, como se muestra en la parte izquierda de la figura (no dibujada a escala). Debido a la curvatura de la Tierra, la verdadera elevación h del risco es mayor que la medida por el topógrafo. Una vista esquemática de sección transversal de la Tierra se muestra en la parte derecha de la figura.

a) Si s es la longitud del arco PQ y R la distancia de P al centro C de la Tierra, exprese h en términos de R y s.

b) Si $R = 4000$ mi y $s = 50$ mi, estime la elevación del risco en pies.

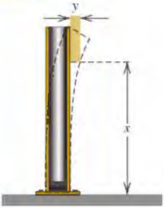
EJERCICIO 77

78 **Respuesta a un terremoto** Para simular la respuesta de una estructura a un terremoto, un ingeniero debe elegir la forma del desplazamiento inicial de las vigas del edificio. Cuando la viga tiene una longitud de L pies y el desplazamiento máximo es a pies, la ecuación

$$y = a - a\cos\frac{\pi}{2L}x$$

ha sido utilizada por los ingenieros para estimar el desplazamiento y (vea la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, trace la gráfica de la ecuación para $0 \leq x \leq 10$.

EJERCICIO 78



79 **Ritmos circadianos** La variación de la temperatura corporal es un ejemplo de un ritmo circadiano, esto es, un ciclo de un proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura corporal es más alta alrededor de las 5 P.M. y más baja a las 5 A.M. Sea y la temperatura corporal (en °F) y $t = 0$ correspondiente a la medianoche. Si las temperaturas corporales mínima y máxima son de 98.3° y 98.9°, respectivamente, obtenga una ecuación de la forma $y = 98.6 + a\,\mathrm{sen}\,(bt + c)$ que concuerde con esta información.

80 **Variación de la temperatura en Ottawa** La variación anual de temperatura t (en °C) en Ottawa, Canadá, puede aproximarse por

$$T(t) = 15.8\,\mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 3)\right] + 5,$$

donde t es el tiempo en meses y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

a) Trace la gráfica de t para $0 \leq t \leq 12$.

b) Obtenga la temperatura más alta del año y la fecha en la que ocurre.

81 **Demanda de agua** Un embalse suministra agua a una comunidad. Durante los meses de verano, la demanda $D(t)$ de agua (en $\text{ft}^3/\text{día}$) está dada por

$$D(t) = 2000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{90} t + 4000,$$

donde t es el tiempo en días y $t = 0$ corresponde al principio del verano.

a) Trace la gráfica de D para $0 \leq t \leq 90$.

b) ¿Cuándo es mayor la demanda de agua?

82 **Corcho que se balancea** Un corcho se balancea de arriba abajo en un lago. La distancia del fondo del lago al centro del corcho en el tiempo $t \geq 0$ está dada por $s(t) = 12 + \cos \pi t$, donde $s(t)$ está en pies y t en segundos.

a) Describa el movimiento del corcho para $0 \leq t \leq 2$.

b) ¿Durante qué intervalos de tiempo se eleva el corcho?

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 Grafique $y = \operatorname{sen}(ax)$ en $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1, 1]$ para $a = 15$, 30 y 45. Explique la exactitud de las gráficas y las capacidades de representación gráfica (en términos de precisión) de su calculadora graficadora. (*Nota:* si algo extraño no ocurre para $a = 45$, siga aumentando a hasta que suceda.)

2 Obtenga el máximo entero k en su calculadora para poder evaluar sen (10^k). Ahora explique cómo se puede evaluar sen (10^{k+1}) en la misma calculadora y luego proceda a obtener ese valor.

3. Determine el número de soluciones de la ecuación

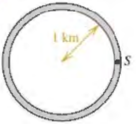
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \pi.$$

4 Explique las relaciones entre funciones periódicas, funciones uno a uno y funciones inversas. Teniendo presentes estas relaciones, explique lo que debe suceder para que las funciones trigonométricas tengan inversos.

5 Grafique $y_1 = x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$, y $y_3 = \tan x$ en $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$. Cree una tabla de valores para estas tres funciones, con valores positivos pequeños (del orden de 10^{-10}, más o menos). ¿A qué conclusión se puede llegar con base en la gráfica y la tabla?

6 **Coordenadas de una pista de carreras** En la figura se muestra una pista de carreras circular de dos kilómetros de diámetro. Todas las carreras comienzan en S y proceden en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Aproxime, a cuatro posiciones decimales, las coordenadas del punto en que terminan las siguientes carreras en relación con un sistema de coordenadas rectangulares con origen en el centro de la pista y S en eje positivo x.

EJERCICIO 6

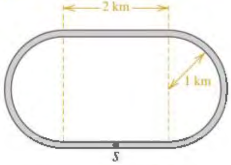


a) Una carrera de drágsters de 2 kilómetros de longitud.

b) Una carrera de resistencia de 500 kilómetros de longitud.

7 **Coordenadas de una pista de carreras** Trabaje el ejercicio 6 para la pista que se muestra en la figura, si el origen del sistema de coordenadas rectangulares está en el centro de la pista y S en el eje negativo y.

EJERCICIO 7



8 **Propulsor de motor fuera de borda** Un motor fuera de borda de 90 caballos de fuerza, a toda velocidad, hace girar su propulsor a 5,000 revoluciones por minuto.

a) Obtenga la velocidad angular ω del propulsor en radianes por segundo.

b) El centro de un propulsor de 10 pulgadas de diámetro está situado a 18 pulgadas bajo la superficie del agua. Exprese la profundidad $D(t) = a \cos(\omega t + c) + d$ de un punto en el borde de un aspa del propulsor como una función del tiempo t, donde t está en segundos. Suponga que el punto está inicialmente a una profundidad de 23 pulgadas.

c) Determine gráficamente el número de veces que el propulsor gira en 0.12 segundos.

CAPÍTULO 5 EXAMEN

1 Si un arco circular de 14 centímetros subtiende el ángulo central de $35°$ en un círculo, aproxime el radio del círculo.

2 Aproxime, a dos posiciones decimales, el área de un sector de un círculo que tiene un radio de 8 pulgadas y un ángulo central de $32°17'$.

3 Obtenga el área de un sector que tiene un arco de 6 pies de longitud en un círculo de 4 pies de diámetro.

4 Obtenga la medida en grados, al minuto más cercano, de un ángulo central de un sector que tiene un arco de 9 metros de longitud en un círculo cuyo radio mide 4 metros.

5 Una rueda de 7 pulgadas de radio gira a 1,200 rpm.

a) Obtenga la velocidad angular en radianes por minuto.

b) Obtenga la velocidad lineal de un punto en la circunferencia en pies por minuto

6 En un triángulo recto, sabemos que $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{8}$. Obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

7 Use las identidades fundamentales para escribir $\cot \theta$ en términos de $\cos \theta$ para cualquier ángulo agudo θ.

8 Verifique la identidad $\left(\dfrac{\csc \theta - 1}{\csc \theta}\right)\left(\dfrac{\csc \theta + 1}{\csc \theta}\right) = \dfrac{1}{\sec^2 \theta}$

9 Obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ si θ está en posición estándar y $P(12, -5)$ está en el lado terminal.

10. Obtenga los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ dado que $\tan \theta = \frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen} \theta < 0$.

11 Reescriba $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$ en forma que no sea radical sin usar valores absolutos si $\pi/2 < \theta < \pi$.

12 Si $P(t) = (-\frac{15}{17}, \frac{8}{17})$ es un punto en el círculo unitario U que corresponde a un ángulo t, obtenga las coordenadas rectangulares de $P(-t - \pi)$.

13 Verifique la identidad $\operatorname{sen}(-x) \sec^2(-x) = -\tan x \sec x$.

14 Encuentre todos los valores de x, de tal modo que sen $x > -\frac{1}{2}$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$.

15 Encuentre el ángulo de referencia θ_R si $\theta = 60$ radianes.

16 Encuentre el valor exacto de $\csc \dfrac{4\pi}{3}$.

17 Aproxime, al 0.1° más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo [0°, 360) que satisfacen $\cos \theta = 0.6357$.

18 Aproxime, al 0.01 radián más cercano, todos los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfacen $\tan \theta = -1.8224$.

19 ¿Cuántos ciclos de $y = 4 \operatorname{sen} 3\pi x + 2$ hay en el intervalo [0, 50]?

20 Encuentre las coordenadas de cualquiera de los puntos más altos de la gráfica de $y = f(x) = 3 \cos\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 1$

21 Grafique un ciclo de $y = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Rotule los puntos alto y bajo, así como los puntos finales.

22 Una función de la forma $y = f(x) = a \operatorname{sen} bx + d$ tiene su punto más alto en $(\pi, 5)$ y su punto más bajo en $(3\pi, -1)$. Obtenga una ecuación para f.

23 Encuentre las ecuaciones de dos asíntotas verticales sucesivas de la gráfica de $y = \tan(3x - 7)$.

24 Encuentre una intersección x de la gráfica de $y = \cot\left(\dfrac{1}{8}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

25 Encuentre el punto más bajo de una rama superior de $y = 2 \sec(2x + \pi)$.

26 Encuentre el rango de $y = 3 \csc(x - \pi) - 2$.

27 Encuentre una ecuación con la función cosecante que tiene la misma gráfica que $y = |\sec x|$.

28 En el triángulo ABC, sabemos que $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$ y $c = 20°$. Encuentre los valores exactos de las partes restantes.

29 En el triángulo ABC, se sabe que $\beta = 73°14'$, $\gamma = 90°$ y $b = 821.0$. Obtenga los valores aproximados de las partes restantes.

30 Dados α y b en el triángulo ABC con $\gamma = 90°$, exprese a en términos de las partes dadas.

31 Un pentágono regular está inscrito en un círculo de 18 pulgadas de radio. Aproxime, a una posición decimal, el perímetro del pentágono.

32 Desde un punto A que está a 10 metros sobre el suelo nivelado, el ángulo de elevación de la parte más alta de un edificio es de 42° y el ángulo de depresión de la base del edificio es de 8°. Aproxime la altura del edificio.

6

Trigonometría analítica

6.1 Verificación de identidades trigonométricas

6.2 Ecuaciones trigonométricas

6.3 Fórmulas de suma y resta

6.4 Fórmulas de múltiplos de un ángulo

6.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

6.6 Funciones trigonométricas inversas

En matemáticas avanzadas, ciencias naturales e ingeniería, en ocasiones es necesario simplificar expresiones trigonométricas complejas y resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas. Estos temas se analizan en las primeras dos secciones de este capítulo, luego se deducen numerosas fórmulas útiles respecto a sumas, diferencias y múltiplos. Además de las manipulaciones formales, también se consideran numerosas aplicaciones de estas fórmulas. La última sección contiene las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

6.1

Verificación de identidades trigonométricas

Una **expresión trigonométrica** contiene símbolos relacionados con funciones trigonométricas.

EJEMPLOS **Expresiones trigonométricas**

- $x + \operatorname{sen} x$
- $\dfrac{\sqrt{\theta} + 2^{\operatorname{sen}\theta}}{\cot \theta}$
- $\dfrac{\cos(3t + 1)}{t^2 + \tan^2(2 - t^2)}$

Partimos del supuesto que el dominio de cada variable en una expresión trigonométrica es el conjunto de números reales o ángulos para los cuales la expresión está definida. Para ofrecer la práctica en la simplificación de expresiones trigonométricas complejas, usaremos las identidades fundamentales (vea la página 338) y manipulaciones algebraicas, como en los ejemplos 5 y 6 de la sección 5.2. En los primeros tres ejemplos, el método consiste en transformar el lado izquierdo de una identidad dada en el lado derecho, o viceversa.

EJEMPLO 1 **Verificación de una identidad**

Verifique la identidad $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha$.

SOLUCIÓN El lado izquierdo lo transformamos en el derecho:

$$\begin{aligned}
\sec\alpha - \cos\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha && \text{identidad recíproca}\\
&= \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} && \text{sumamos las expresiones}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} && \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\
&= \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) && \text{expresión equivalente}\\
&= \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha && \text{identidad tangente}
\end{aligned}$$

En la sección 5.2 explicamos cómo proporcionar apoyo numérico a las identidades mediante el examen de una tabla de valores. También se puede brindar apoyo gráfico a las identidades mediante el examen de las gráficas de los lados izquierdo y derecho de la identidad propuesta. Si las gráficas son iguales (con la excepción de huecos en ellas), decimos que las gráficas apoyan la identidad. Si las gráficas no coinciden, la identidad propuesta es falsa.

La gráfica de la figura 1 proporciona apoyo gráfico a la verificación del ejemplo 1. Es la gráfica (en modo de radianes y puntos) de

$$Y_1 = 1/\cos(X) - \cos(X) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{sen}(X)\tan(X)$$

FIGURA 1

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-5, 5]$

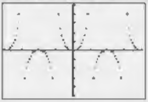
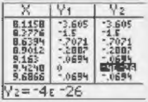


FIGURA 2



X	Y1	Y2
8.1158	-3.605	-3.605
8.3776	-1.5	-1.5
8.6394	-.7071	-.7071
8.9012	-.2887	-.2887
9.163	-.0694	-.0694
9.4248	0	-4ε-26
9.6866	-.0694	-.0694

Y2=-4ε-26

Los valores de Y_1 y Y_2 de la figura 2 también brindan apoyo numérico a la verificación. Puede haber discrepancias pequeñas entre los valores, como ilustra el valor resaltado.

Otras variaciones de apoyo gráfico para el ejemplo 1

1) Grafique Y_1 y $Y_3 = Y_2 + 1$, como se muestra en las figuras 3 y 4. Esto permite ver la gráfica de Y_2 desplazada una unidad hacia arriba, en vez de sobre Y_1.

FIGURA 3

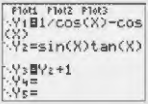
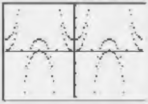


FIGURA 4

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$



2) Grafique $Y_3 = Y_1 - Y_2 + 1$, como se muestra en las figuras 5 y 6. Si la identidad propuesta es verdadera, entonces $Y_1 - Y_2$ será cero, por lo que la gráfica de Y_3 será la gráfica de la recta $y = 1$ con vacíos donde Y_1 o Y_2 no están definidas.

FIGURA 5

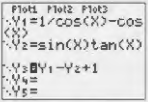


FIGURA 6

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

3) Grafique $Y_3 = (Y_1 = Y_2)$, como se muestra en las figuras 7 y 8. Cuando $Y_1 = Y_2$ es verdadera, el valor de Y_3 es 1. La gráfica de Y_3 será la gráfica de la recta $y = 1$ con vacíos donde Y_1 o Y_2 no están definidas.

FIGURA 7

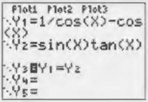


FIGURA 8

$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

EJEMPLO 2 **Verificación de una identidad**

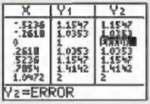
Verifique la identidad $\sec\theta = \operatorname{sen}\theta(\tan\theta + \cot\theta)$.

SOLUCIÓN Como la expresión del lado derecho es más compleja que la del lado izquierdo, el lado derecho lo transformamos en el izquierdo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta(\tan\theta + \cot\theta) &= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidades tangente y cotangente} \\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{sumamos las fracciones} \\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidad de Pitágoras} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} && \text{cancelamos sen }\theta \\
&= \sec\theta && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}
$$

■

FIGURA 9



X	Y1	Y2
-.5236	1.1547	1.1547
-.2618	1.0353	1.0353
0	1	ERROR
.2618	1.0353	1.0353
.5236	1.1547	1.1547
.7854	1.4142	1.4142
1.0472	2	2

Y2 =ERROR

La tabla (con $\Delta\text{Tbl} = \pi/12$) en la figura 9 muestra algunos valores de

$$Y_1 = 1/\cos(X) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \operatorname{sen}(X)(\tan(X) + 1/\tan(X)),$$

los lados izquierdo y derecho de la identidad del ejemplo 2. Observe que para $X = 0$, $Y_1 = 1$, pero Y_2 tiene "ERROR". Esto resulta del uso de $1/\tan(X)$ para $\cot(X)$ en Y_2; para $x = 0$, intentamos dividir entre cero.

EJEMPLO 3 **Verificación de una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

SOLUCIÓN Como el denominador del lado izquierdo es un binomio y el denominador del lado derecho es un monomio, cambiamos la forma de la fracción del lado izquierdo multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y luego usamos una de las identidades de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\cdot\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} && \text{multiplicamos el numerador y el denominador por } 1 + \operatorname{sen} x \\
&= \frac{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{propiedad de cocientes} \\
&= \frac{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} && \text{cancelamos } \cos x
\end{aligned}
$$

■

Otra técnica para mostrar que una ecuación $p = q$ es una identidad consiste en transformar el lado izquierdo p en otra expresión s, asegurándose de que cada paso sea *reversible*, es decir, que sea posible transformar de nuevo s en p al invertir el procedimiento seguido en cada paso. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. A continuación, como ejercicio *por separado*, mostramos que el lado derecho q también puede transformarse en la expresión s por medio de pasos reversibles y que, por lo tanto, $q = s$ es una identidad. Se deduce entonces que $p = q$ es una identidad. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Verificación de una identidad**

Verifique la identidad $(\tan\theta - \sec\theta)^2 = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

SOLUCIÓN Para verificar la identidad, demostraremos que cada lado de la ecuación puede transformarse en la misma expresión. En primer término, trabajaremos sólo con el lado izquierdo:

Trabaje con el lado izquierdo.

$$\begin{aligned}
(\tan\theta - \sec\theta)^2 &= \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta && \text{expresión al cuadrado}\\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 && \text{identidades tangente y recíproca}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} && \text{expresión equivalente}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos^2\theta} && \text{sumamos las fracciones}
\end{aligned}$$

En este punto, tal vez no sea obvio cómo se puede obtener el lado derecho de la ecuación dada a partir de la última expresión. Por lo tanto, a continuación trabajamos sólo con el lado derecho para tratar de obtener la última expresión. La multiplicación del numerador y el denominador por el conjugado del denominador da lo siguiente:

expresiones equivalentes

Trabaje con el lado derecho.

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} &= \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} && \text{multiplicamos el numerador y el denominador por } 1 - \operatorname{sen}\theta\\
&= \frac{1 - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta} && \text{propiedad de cocientes}\\
&= \frac{1 - 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1
\end{aligned}$$

La última expresión es igual a la que se obtuvo de $(\tan\theta - \sec\theta)^2$. Como todos los pasos son reversibles, la ecuación dada es una identidad. ■

EJEMPLO 5 **Demostración de que una ecuación no es una identidad**

Demuestre que $\cot x = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ no es una identidad.

SOLUCIÓN Lo único que requerimos es encontrar un valor de x que haga que cada lado de la ecuación tenga un valor diferente. Podemos probar con valores aleatorios de x, pero investigar una identidad conocida puede ayudar en la selección de un valor para x.

(continúa)

Una identidad pitagórica, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$, relaciona las funciones cotangente (cot) y cosecante (csc). Si despejamos de la identidad $\cot x$, obtenemos $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y luego $\cot x = \pm\sqrt{\csc^2 x - 1}$. El símbolo $\pm$ es la clave: cualquier valor de x que hace que $\cot x$ sea negativa demuestra que la ecuación dada *no* es una identidad. En concreto, ya que cot es negativa en los cuadrantes II y IV, seleccionamos $3\pi/4$ como valor de x. Entonces, el lado izquierdo es $\cot(3\pi/4) = -1$ y el lado derecho es

$$\sqrt{\csc^2(3\pi/4) - 1} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$ ■

Los lados no son iguales, por lo que la ecuación dada no es una identidad.

En cálculo, a veces conviene cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas y realizar una **sustitución trigonométrica,** como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Cómo realizar una sustitución trigonométrica**

Exprese $\sqrt{a^2 - x^2}$ en términos de una función trigonométrica de θ, sin radicales, mediante la sustitución $x = a \operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ y $a > 0$.

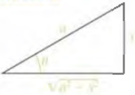
SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen}\theta)^2} && \text{sea } x = a \operatorname{sen}\theta \\
&= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} && \text{ley de los exponentes} \\
&= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} && \text{factorizamos } a^2 \\
&= \sqrt{a^2 \cos^2\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\
&= \sqrt{(a\cos\theta)^2} && c^2d^2 = (cd)^2 \\
&= |a\cos\theta| && \sqrt{c^2} = |c| \\
&= |a||\cos\theta| && |cd| = |c||d| \\
&= a\cos\theta && \text{vemos a continuación}
\end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera porque 1) si $a > 0$, entonces $|a| = a$, y 2) si $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces $\cos\theta \ge 0$ y, por lo tanto, $|\cos\theta| = \cos\theta$.

También podemos usar una solución geométrica. Si $x = a \operatorname{sen}\theta$, entonces $\operatorname{sen}\theta = x/a$, y el triángulo de la figura 10 ilustra el problema para $0 < \theta < \pi/2$. El tercer lado del triángulo, $\sqrt{a^2 - x^2}$, se obtiene con el teorema de Pitágoras. En la figura podemos observar que

FIGURA 10



$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \qquad \text{o, de forma equivalente,} \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta.$$ ■

6.1 Ejercicios

Ejer. 1–50: Verifique la identidad.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta\cos\theta$

2 $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$

3 $\dfrac{\sec^2 2u - 1}{\sec^2 2u} = \operatorname{sen}^2 2u$

4 $\tan t + 2\cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$

5 $\dfrac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

6 $(\tan u + \cot u)(\cos u + \operatorname{sen} u) = \csc u + \sec u$

7 $\dfrac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t} + \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t} = 2\csc 3t$

8 $\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha\,\operatorname{sen}^2\alpha$

9 $\dfrac{1}{1-\cos\gamma} + \dfrac{1}{1+\cos\gamma} = 2\csc^2\gamma$

10 $\dfrac{1+\csc 3\beta}{\sec 3\beta} - \cot 3\beta = \cos 3\beta$

11 $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

12 $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \csc\theta - \sec\theta$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = \csc^2 t + \cot^2 t$

14 $\cos^4 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta = \cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^4 2\theta$

15 $\dfrac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} = \sec\beta + \tan\beta$

16 $\dfrac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$

17 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

18 $\dfrac{\cot x}{\csc x + 1} = \dfrac{\csc x - 1}{\cot x}$

19 $\dfrac{\cot 4u - 1}{\cot 4u + 1} = \dfrac{1-\tan 4u}{1+\tan 4u}$

20 $\dfrac{1+\sec 4x}{\operatorname{sen} 4x + \tan 4x} = \csc 4x$

21 $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

22 $\operatorname{sen}^4\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

23 $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2\sec^2 k$

24 $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^2 u + \tan^4 u$

25 $(\sec t + \tan t)^2 = \dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}$

26 $\sec^2\gamma + \tan^2\gamma = (1-\operatorname{sen}^4\gamma)\sec^4\gamma$

27 $(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1$

28 $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \csc t + \cot t$ **29** $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta + \cos\beta} = \sec\beta$

30 $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x\cos x$

31 $(\csc t - \cot t)^4(\csc t + \cot t)^4 = 1$

32 $(a\cos t - b\operatorname{sen} t)^2 + (a\operatorname{sen} t + b\cos t)^2 = a^2 + b^2$

33 $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

34 $\dfrac{\tan u - \tan v}{1+\tan u\tan v} = \dfrac{\cot v - \cot u}{\cot u\cot v + 1}$

35 $\dfrac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha} + \dfrac{1+\sec\alpha}{\tan\alpha} = 2\csc\alpha$

36 $\dfrac{\csc x}{1+\csc x} - \dfrac{\csc x}{1-\csc x} = 2\sec^2 x$

37 $\dfrac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

38 $\dfrac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y\cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$

39
$\sec\theta + \csc\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta$

40 $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t = (1 - \operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t + \cos t)$

41 $(1-\tan^2\phi)^2 = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi$

42 $\cos^4 w + 1 - \operatorname{sen}^4 w = 2\cos^2 w$

43 $\dfrac{\cot(-t) + \tan(-t)}{\cot t} = -\sec^2 t$

44 $\dfrac{\csc(-t) - \operatorname{sen}(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \cot^2 t$

45 $\log 10^{\tan t} = \tan t$ **46** $10^{\log|\operatorname{sen} t|} = |\operatorname{sen} t|$

47 $\ln\cot x = -\ln\tan x$ **48** $\ln\sec\theta = -\ln\cos\theta$

49 $\ln|\sec\theta + \tan\theta| = -\ln|\sec\theta - \tan\theta|$

50 $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

Ejer. 51–60: Demuestre que la ecuación *no* es una identidad. (*Sugerencia:* encuentre un número para el cual la ecuación es falsa.)

51 $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

52 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \operatorname{sen} t + \cos t$

53 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \operatorname{sen} t$

54 $\sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$

55 $(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 = \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta$

56 $\log \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \right) = \dfrac{1}{\log \operatorname{sen} t}$

57 $\cos (-t) = -\cos t$

58 $\operatorname{sen} (t + \pi) = \operatorname{sen} t$

59 $\cos (\sec t) = 1$

60 $\cot (\tan \theta) = 1$

Ejer. 61–64: Demuestre que la ecuación *es* una identidad o que la ecuación *no* es una identidad.

61 $(\sec x + \tan x)^2 = 2 \tan x (\tan x + \sec x)$

62 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \sec x$

63 $\cos x(\tan x + \cot x) = \csc x$

64 $\csc^2 x + \sec^2 x = \csc^2 x \sec^2 x$

Ejer. 65–68: Consulte el ejemplo 6. Realice la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y $a > 0$. Use identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

65 $\dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$

66 $\dfrac{(a^2 - x^2)^2}{x^2}$

67 $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$

68 $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Ejer. 69–72: Realice la sustitución trigonométrica

$$x = a \tan \theta \quad \text{para } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \text{ y } a > 0$$

Simplificamos la expresión resultante.

69 $\dfrac{x^4}{(a^2 + x^2)^2}$

70 $\dfrac{a^2 + x^2}{x^2}$

71 $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

72 $\dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$

Ejer. 73–76: Realice la sustitución trigonométrica

$$x = a \sec \theta \quad \text{para } 0 < 0 < \pi/2 \text{ y } a > 0$$

Simplificamos la expresión resultante.

73 $\dfrac{(x^2 - a^2)^2}{x^2}$

74 $\dfrac{x}{x^2 - a^2}$

75 $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$

76 $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Ejer. 77–80: Use la gráfica de f para encontrar la expresión más sencilla $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esta identidad.

77 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x}$

78 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x + \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}$

79 $f(x) = \sec x (\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x$

80 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x}{\csc x} + \dfrac{\cos^3 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\sec x}$

6.2 Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es aquella que contiene expresiones trigonométricas. Cada identidad considerada en la sección anterior es un ejemplo de una ecuación trigonométrica con cada número (o ángulo) en el dominio de la variable como una solución de la ecuación. Si la ecuación trigonométrica no es una identidad, a menudo encontramos las soluciones mediante el uso de técnicas semejantes a las que se emplean para las ecuaciones algebraicas. La principal diferencia es que primero resolvemos la ecuación trigonométrica para $\operatorname{sen} x$, $\cos \theta$, y así sucesivamente, y después se encuentran los valores de x o θ que satisfacen la ecuación. Las soluciones pueden expresarse ya sea como números reales o como ángulos. A lo largo de nuestro trabajo usaremos la siguiente regla: *si no se especifica la medida en grados, las soluciones de una ecuación trigonométrica deben expresarse en su medida en radianes (o como números reales).* Si deseamos soluciones medidas en grados, hay que incluir la indicación correspondiente en el ejemplo o ejercicio.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación trigonométrica que contiene la función seno**

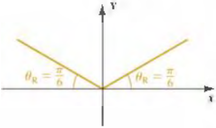
Encuentre las soluciones de la ecuación sen $\theta = \frac{1}{2}$ si

a) θ está en el intervalo $[0, 2\pi)$

b) θ es cualquier número real

SOLUCIÓN

FIGURA 11



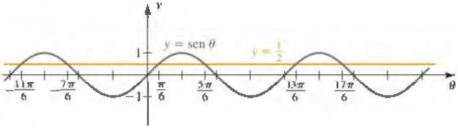
a) Si sen $\theta = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia de θ es $\theta_R = \pi/6$. Si consideramos que θ es un ángulo en posición estándar, entonces, dado que sen $\theta > 0$, el lado terminal está ya sea en el cuadrante I o en el cuadrante II, como se ilustra en la figura 1. Por lo tanto, hay dos soluciones para $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

b) Puesto que la función seno tiene periodo 2π, podemos obtener todas las soluciones sumando múltiplos de 2π a $\pi/6$ y $5\pi/6$. Esto da

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para cada entero } n.$$

FIGURA 2



Una solución (gráfica) alterna requiere determinar dónde la gráfica de $y = \text{sen}\,\theta$ interseca la línea horizontal $y = \frac{1}{2}$, como se ilustra en la figura 2.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación trigonométrica que contiene la función tangente.**

Encuentre las soluciones de la ecuación tan $u = -1$.

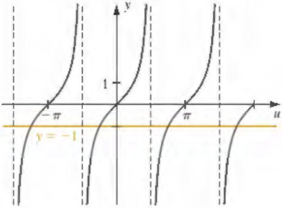
SOLUCIÓN En vista de que la función tangente tiene periodo π, basta encontrar un número real u tal que tan $u = -1$ y luego se suman múltiplos de π.

Una parte de la gráfica de $y = \tan u$ se presenta en la figura 3 en la página siguiente. Puesto que $\tan(3\pi/4) = -1$, una solución es $3\pi/4$; por lo tanto,

$$\text{si } \tan u = -1, \text{ entonces } u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para cada entero } n.$$

(continúa)

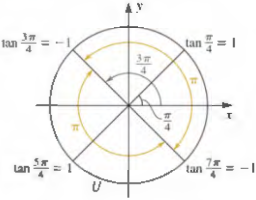
FIGURA 3 $y = \tan u$



También podríamos haber elegido $-\pi/4$ (o algún otro número u tal que $\tan u = -1$) como solución inicial y haber escrito

$$u = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para cada entero } n$$

FIGURA 4



Una solución alterna requiere un círculo unitario. Si se usa $\tan 3\pi/4 = -1$ y el hecho de que el periodo de la tangente es π, se observa en la figura 4 que las soluciones deseadas son

$$u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para cada entero } n$$

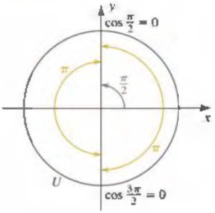
■

EJEMPLO 3 **Solución de una ecuación trigonométrica que incluye varios ángulos**

a) Resuelva la ecuación $\cos 2x = 0$, y exprese las soluciones tanto en radianes como en grados.

b) Obtenga las soluciones que están dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ y, de forma equivalente, $[0°, 360°)$.

FIGURA 5



SOLUCIÓN

a) Procedemos como se indica a continuación, donde n denota cualquier entero:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 0 && \text{dado} \\ \cos\theta &= 0 && \text{sea } \theta = 2x \\ \theta &= \frac{\pi}{2} + \pi n && \text{referente a la figura 5} \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + \pi n && \theta = 2x \\ x &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n && \text{dividimos entre 2} \end{aligned}$$

En grados, tenemos $x = 45° + 90°n$.

b) Podemos encontrar soluciones particulares de la ecuación sustituyendo enteros para n en cualquiera de las fórmulas para x obtenidas en el inciso a). Varias de estas soluciones se presentan en la siguiente tabla.

n	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$	$45° + 90°n$
-1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(-1) = -45°$
0	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(0) = 45°$
1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(1) = \frac{3\pi}{4}$	$45° + 90°(1) = 135°$
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2) = \frac{5\pi}{4}$	$45° + 90°(2) = 225°$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(3) = \frac{7\pi}{4}$	$45° + 90°(3) = 315°$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4) = \frac{9\pi}{4}$	$45° + 90°(4) = 405°$

Observe que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ o, de forma equivalente, $[0°, 360°)$ están dadas por $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Estas soluciones son

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad \text{o, de forma equivalente,} \quad 45°, 135°, 225°, 315°.$$

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN

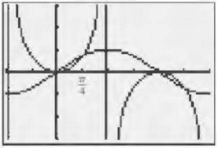
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta \tan\theta &= \operatorname{sen}\theta && \text{dado}\\
\operatorname{sen}\theta \tan\theta - \operatorname{sen}\theta &= 0 && \text{igualamos a 0 un lado}\\
\operatorname{sen}\theta\,(\tan\theta - 1) &= 0 && \text{factorizamos sen }\theta\\
\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \tan\theta - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\operatorname{sen}\theta = 0, \quad \tan\theta &= 1 && \text{resolvemos para sen }\theta\text{ y tan }\theta
\end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Por lo tanto,

$$\text{si } \operatorname{sen}\theta = 0, \text{ entonces } \theta = \pi n \text{ para cada entero } n.$$

FIGURA 6

$Y_1 = \operatorname{sen}(X)\tan(X)$
$Y_2 = \operatorname{sen}(X)$



$[-\pi/2, 3\pi/2, \pi/4]$ por $[-3, 3]$

La función tangente tiene periodo π y, por lo tanto, obtenemos las soluciones de la ecuación $\tan\theta = 1$ que están en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y luego sumamos múltiplos de π. Dado que la única solución de $\tan\theta = 1$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $\pi/4$, observamos que

$$\text{si } \tan\theta = 1, \text{ entonces } \theta = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ para cada entero } n$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son

$$\pi n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para cada entero } n$$

Algunas soluciones *particulares*, obtenidas con $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = -1$, son

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad 2\pi, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad -\pi, \quad \text{y} \quad -\frac{3\pi}{4}.$$

La gráfica de la figura 6 sustenta esta conclusión. ■

En el ejemplo 4 habría sido incorrecto comenzar dividiendo ambos lados entre $\operatorname{sen}\theta$, puesto que se hubieran perdido las soluciones de $\operatorname{sen}\theta = 0$.

EJEMPLO 5 **Solución de una ecuación trigonométrica por factorización**

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$, y exprese las soluciones en radianes y grados.

SOLUCIÓN Parece que tenemos una ecuación cuadrática con $\operatorname{sen} t$ o $\cos t$. No existe una sustitución sencilla para $\cos t$ en términos de $\operatorname{sen} t$, pero tenemos una para $\operatorname{sen}^2 t$ en términos de $\cos^2 t$ ($\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$), por lo que primero expresaremos la ecuación sólo en términos de $\cos t$ y luego la resolveremos por factorización.

Esta es una ecuación cuadrática en cos t, por lo que usted puede usar la fórmula cuadrática en este punto. Si la usa, recuerde resolver para cos t y no para t.

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 &= 0 && \text{dado}\\
2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 &= 0 && \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1\\
-2\cos^2 t - \cos t + 1 &= 0 && \text{simplificamos}\\
2\cos^2 t + \cos t - 1 &= 0 && \text{multiplicamos por } -1\\
(2\cos t - 1)(\cos t + 1) &= 0 && \text{factorizamos}\\
2\cos t - 1 = 0, \quad \cos t + 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\cos t = \tfrac{1}{2}, \quad \cos t &= -1 && \text{despejamos cos } t
\end{aligned}$$

Debido a que la función coseno tiene periodo 2π, podemos encontrar todas las soluciones de estas ecuaciones sumando múltiplos de 2π a las soluciones que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/3$ (o $60°$). Como $\cos t$ es positivo, el ángulo de medida en radianes t está en el cuadrante I o en el cuadrante IV. Por consiguiente, en el intervalo $[0, 2\pi)$, observamos que

$$\text{si } \cos t = \frac{1}{2}, \text{ entonces } t = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

En referencia a la gráfica de la función coseno, observamos que

$$\text{si } \cos t = -1, \text{ entonces } t = \pi$$

Así, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes, donde n es cualquier entero:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \pi + 2\pi n$$

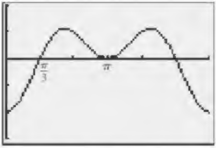
Medidas en grados, tenemos

$$60° + 360°n, \quad 300° + 360°n \quad \text{y} \quad 180° + 360°n$$

La gráfica de la figura 7 sustenta esta conclusión. ■

FIGURA 7

$Y_1 = 2(\text{sen}(X))^2 - \cos(X) - 1$



$[0, 2\pi, \pi/3]$ por $[-3, 2]$

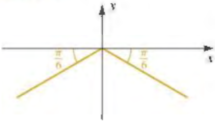
EJEMPLO 6 **Solución de una ecuación trigonométrica por factorización**

Obtenga las soluciones de $4 \text{ sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$ que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

$4 \text{ sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$	dado
$\tan x\,(4 \text{ sen}^2 x - 1) = 0$	factorizamos $\tan x$
$\tan x = 0, \quad 4 \text{ sen}^2 x - 1 = 0$	teorema del factor cero
$\tan x = 0, \quad \text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$	despejamos $\tan x$, $\text{sen}^2 x$
$\tan x = 0, \quad \text{sen } x = \pm\frac{1}{2}$	despejamos $\text{sen } x$

FIGURA 8



El ángulo de referencia $\pi/6$ para el tercero y cuarto cuadrantes se muestra en la figura 8. Estos ángulos, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, son las soluciones de la ecuación $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ para $0 \le x < 2\pi$. Las soluciones de las tres ecuaciones se presentan en la siguiente tabla.

Ecuación	Soluciones en $[0, 2\pi)$	Consulta
$\tan x = 0$	$0, \pi$	Figura 3
$\text{sen } x = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Ejemplo 1
$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	Figura 8 (use ángulo de referencia)

Por lo tanto, la ecuación dada tiene las seis soluciones que se presentan en la segunda columna de la tabla. ■

EJEMPLO 7 **Solución de una ecuación trigonométrica que contiene ángulos múltiples**

Obtenga las soluciones de $\csc^4 2u - 4 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\csc^4 2u - 4 &= 0 && \text{dado}\\
(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) &= 0 && \text{diferencia de dos cuadrados}\\
\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\csc^2 2u = 2, \qquad \csc^2 2u &= -2 && \text{despejamos } \csc^2 2u\\
\csc 2u = \pm\sqrt{2}, \quad \csc 2u &= \pm\sqrt{-2} && \text{obtenemos raíces cuadradas}
\end{aligned}$$

La segunda ecuación no tiene solución porque $\sqrt{-2}$ no es un número real. La primera ecuación es equivalente a

$$\operatorname{sen} 2u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dado que el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$, obtenemos la siguiente tabla, en la cual n denota cualquier entero.

Ecuación	Soluciones para $2u$	Solución para u
$\operatorname{sen} 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\operatorname{sen} 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

Las soluciones de la ecuación dada se presentan en la última columna. Observe que *todas* estas soluciones pueden escribirse en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n.$$

■

El siguiente ejemplo ilustra el uso de una calculadora para resolver una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 Cálculo de las soluciones de una ecuación trigonométrica

Calcule, al grado más cercano, las soluciones de la siguiente ecuación en el intervalo $[0°, 360°)$:

$$5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 6 = 0$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 6 &= 0 && \text{dado}\\
(5 \operatorname{sen} \theta \tan \theta - 10 \tan \theta) + (3 \operatorname{sen} \theta - 6) &= 0 && \text{agrupamos términos}\\
5\tan \theta (\operatorname{sen} \theta - 2) + 3(\operatorname{sen} \theta - 2) &= 0 && \text{factorizamos cada grupo}\\
(5 \tan \theta + 3)(\operatorname{sen} \theta - 2) &= 0 && \text{factorizamos } (\operatorname{sen} \theta - 2)\\
5 \tan \theta + 3 = 0, \qquad \operatorname{sen} \theta - 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\tan \theta = -\tfrac{3}{5}, \qquad \operatorname{sen} \theta &= 2 && \text{despejamos } \tan \theta \text{ y } \operatorname{sen} \theta
\end{aligned}$$

La ecuación sen $\theta = 2$ no tiene solución, puesto que $-1 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$ para todo θ. Para tan $\theta = -3/5$, se usa una calculadora en el modo de grados para obtener

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\tfrac{3}{5}\right) \approx -31°$$

Por lo tanto, el ángulo de referencia es $\theta_R \approx 31°$. Puesto que θ está en el cuadrante II o en el cuadrante IV, obtenemos las siguientes soluciones:

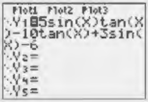
$$\theta = 180° - \theta_R \approx 180° - 31° = 149°$$
$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 31° = 329°$$

■

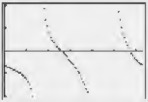
Veamos cómo puede ayudarnos una calculadora graficadora a resolver la ecuación del ejemplo 8.

Cálculo aproximado de las soluciones de una ecuación trigonométrica

Seleccionamos el modo de radianes y puntos. Asignamos el lado izquierdo de la ecuación a Y_1.



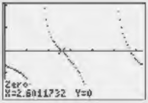
Ajustamos el visor rectangular a $[0, 2\pi]$ por $[-20, 20, 10]$. Graficamos Y_1.



Estimamos el cero entre 2 y 3.

2nd CALC 2

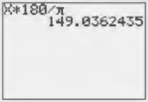
2 ENTER 3 EN 2.5



Convertimos a grados; la ubicación X de la memoria contiene la estimación de la raíz.

2nd QUIT X,T,θ,n

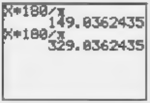
× 180 ÷ 2nd π ENTER



(continúa)

Estimamos el cero entre 5 y 6.

GRAPH 2nd CALC 2
5 ENTER 6 ENTER 5.5 ENTE[redacted]
2nd QUIT 2nd ENTRY E[redacted]



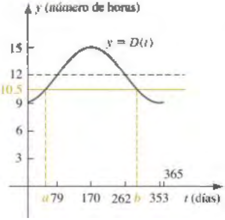
EJEMPLO 9 Investigación del número de horas de luz natural

En Boston, el número de horas de luz natural $D(t)$ en una época específica del año puede aproximarse por

$$D(t) = 3 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

con t en días y $t = 0$ correspondiente al 1 de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz natural?

FIGURA 9



SOLUCIÓN La gráfica de D la explicamos en el ejemplo 12 de la sección 5.5 y se vuelve a trazar en la figura 9. Como se ilustra en la figura, si podemos encontrar dos números a y b con $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$ y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz natural en el t-ésimo día del año si $a < t < b$.

Resolvemos la ecuación $D(t) = 10.5$ como sigue:

$$3 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12 = 10.5 \qquad \text{sea } D(t) = 10.5$$

$$3 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] = -1.5 \qquad \text{restamos 12}$$

$$\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] = -0.5 = -\frac{1}{2} \qquad \text{dividimos entre 3}$$

Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y el ángulo θ está en el cuadrante III o en el cuadrante IV. Por lo tanto, para hallar los números a y b resolvemos las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{7\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{11\pi}{6}$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 213$$

y, por lo tanto,

$$t \approx 213 + 79, \qquad \text{o} \qquad t \approx 292$$

Del mismo modo, la segunda ecuación da $t \approx 414$. Dado que el periodo de la función D es de 365 días (vea la figura 9), obtenemos

$$t \approx 414 - 365, \qquad \text{o} \qquad t \approx 49$$

Por consiguiente, habrá por lo menos 10.5 horas de luz natural de $t = 49$ a $t = 292$; es decir, durante 243 días del año. ■

Una solución gráfica del siguiente ejemplo se presenta en el ejemplo 14 de la sección 5.5.

EJEMPLO 10 **Cómo determinar la corriente mínima en un circuito eléctrico**

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right)$$

Obtenga el valor exacto más pequeño de t para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Sea $I = 15$ en la fórmula dada, para obtener

$$15 = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) \text{ o, de forma equivalente, } \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y, en consecuencia,

$$50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \text{o} \qquad 50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

donde n es cualquier entero. Despejamos t para obtener

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2n}{50} \qquad \text{o} \qquad t = \frac{\frac{19}{6} + 2n}{50}$$

El valor positivo mínimo de t ocurre cuando uno de los numeradores de estas dos fracciones tiene su mínimo valor positivo. Dado que $\frac{15}{6} = 2.5$, $\frac{19}{6} \approx 3.17$ y $2(-1) = -2$, observamos que el valor positivo más pequeño de t ocurre cuando $n = -1$ en la primera fracción, es decir, cuando

$$t = \frac{\frac{15}{6} + 2(-1)}{50} = \frac{1}{100}$$ ■

El siguiente ejemplo ilustra cómo puede ayudar una calculadora graficadora a resolver una ecuación trigonométrica compleja.

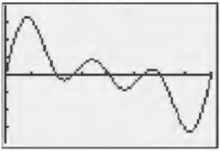
EJEMPLO 11 **Uso de una gráfica para determinar las soluciones de una ecuación trigonométrica**

Obtenga las soluciones de la siguiente ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

FIGURA 10

$[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$



SOLUCIÓN Asignamos $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$ a Y_1. Dado que $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$ para $\theta = x$, $2x$ y $3x$, el lado izquierdo de la ecuación está entre -3 y 3, seleccionamos el visor rectangular $[0, 2\pi, \pi/4]$ por $[-3, 3]$ y obtenemos un bosquejo similar al de la figura 10. Usando una función de raíz, obtenemos las siguientes aproximaciones para las intersecciones con el eje x, es decir, las soluciones aproximadas de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$:

$$0,\ 1.57,\ 2.09,\ 3.14,\ 4.19,\ 4.71$$

(continúa)

Cambiando la medida a grados y redondeando al grado más cercano obtenemos

$$0°, 90°, 120°, 180°, 240° \text{ y } 270°$$

Estas medidas en grados se convierten en medidas en radianes y obtenemos

$$0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{2}$$

Al comprobar estos valores en la ecuación dada, observamos que las seis son soluciones. La figura 10 indica que la gráfica tiene periodo 2π. Después de estudiar la sección 6.4, podremos cambiar la forma de Y_1 y *demostrar* que el periodo es 2π y, por lo tanto, que *todas* las soluciones de la ecuación dada pueden obtenerse sumando múltiplos enteros de 2π. ■

En el ejemplo anterior pudimos usar una calculadora graficadora para obtener soluciones *exactas* de la ecuación. Sin embargo, con muchas ecuaciones que se presentan en las aplicaciones, sólo es posible aproximar las soluciones.

6.2 Ejercicios

Ejer. 1–42: Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

1 $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\cos t = -1$

3 $\tan \theta = \sqrt{3}$

4 $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5 $\sec \beta = 2$

6 $\csc \gamma = \sqrt{2}$

7 $\operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$

8 $\cos x = -\frac{\pi}{3}$

9 $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$

10 $\csc \theta \operatorname{sen} \theta = 1$

11 $2 \cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$

12 $2 \operatorname{sen} 3\theta + \sqrt{2} = 0$

13 $\sqrt{3} \tan \frac{1}{3}t = 1$

14 $\cos \frac{1}{4}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

16 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

17 $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

18 $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

19 $2 \cos t + 1 = 0$

20 $4 \cos \theta - 2 = 0$

21 $\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \beta = 0$

22 $2 \cos x = \sqrt{3}$

23 $(\cos \theta - 1) \operatorname{sen} \theta = 0$

24 $(\operatorname{sen} t - 1) \cos t = 0$

25 $\tan^2 x = 1$

26 $\cot^2 \theta - 1 = 0$

27 $\sec^2 \alpha - 4 = 0$

28 $3 - \tan^2 \beta = 0$

29 $\cot^2 x - 3 = 0$

30 $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

31 $(2 \operatorname{sen} \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$

32 $(2 \operatorname{sen} u - 1)(\cos u - \sqrt{2}) = 0$

33 $\cos x + 1 = 2 \operatorname{sen}^2 x$

34 $2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

35 $\operatorname{sen} 2x\,(\csc 2x - 2) = 0$

36 $\cos 2x\,(\sec 2x + 2) = 0$

37 $\cot x + \cot^2 x = 0$

38 $\tan \alpha + \tan^2 \alpha = 0$

39 $\cos(\ln x) = 0$

40 $\operatorname{sen}(\log x) = 0$

41 $\log(\cos x) = 0$

42 $\ln(\operatorname{sen} x) = 0$

Ejer. 43–70: Encuentre las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43 $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

44 $\operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

45 $2 - 8\cos^2 t = 0$

46 $1 + 8\operatorname{sen}^3 x = 0$

47 $\tan^2 x = \tan x$

48 $\cot^2 \theta - \cot \theta = 0$

49 $2\operatorname{sen}^2 u = 1 - \operatorname{sen} u$

50 $2\cos^2 t + 3\cos t = -1$

51 $\tan^2 x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

52 $\sec^2 x \cos x = \cos x$

53 $\sec x \csc x = \sqrt{2} \sec x$

54 $\sec \beta \csc \beta = 2\csc \beta$

55 $2\cos^2 \gamma + \cos \gamma = 0$

56 $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

57 $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 6 = 0$

58 $2\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{sen} u - 6 = 0$

59 $1 - \operatorname{sen} t = \sqrt{3}\cos t$

60 $\cos \theta - \operatorname{sen} \theta = 1$

61 $\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 1$

62 $\sqrt{3}\operatorname{sen} t + \cos t = 1$

63 $2\tan t - \sec^2 t = 0$

64 $\tan \theta + \sec \theta = 1$

65 $\cot \alpha + \tan \alpha = \csc \alpha \sec \alpha$

66 $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$

67 $2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$

68 $\sec^5 \theta = 4\sec \theta$

69 $2\tan t \csc t + 2\csc t + \tan t + 1 = 0$

70 $2\operatorname{sen} v \csc v - \csc v = 4\operatorname{sen} v - 2$

Ejer. 71–76: Aproxime, a los 10′ más cercanos, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0°, 360°)$.

71 $\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t + 1 = 0$

72 $\cos^2 t - 4\cos t + 2 = 0$

73 $\tan^2 \theta + 3\tan \theta + 2 = 0$

74 $2\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$

75 $12\operatorname{sen}^2 u - 5\operatorname{sen} u - 2 = 0$

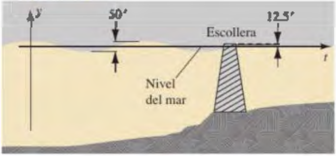
76 $5\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha - 2 = 0$

77 **Tsunami** Un tsunami que tiene 50 pies de altura y periodo de 30 minutos se aproxima a una escollera que mide 12.5 pies sobre el nivel del mar (vea la figura). Desde un punto particular en la orilla, la distancia y del nivel del mar a la cresta de la ola está dado por

$$y = 25\cos\frac{\pi}{15}t,$$

donde t se expresa en minutos. ¿Durante aproximadamente cuántos minutos de cada periodo de 30 minutos la cresta de la ola está arriba del nivel de la parte más alta de la escollera?

EJERCICIO 77



78 **Temperatura en Fairbanks** La temperatura baja T (en °F) esperada en Fairbanks, Alaska, puede aproximarse por

$$T = 36 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 14$$

donde t está en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. ¿Durante cuántos días del año la temperatura baja esperada será inferior a -4 °F?

79 **Temperatura en Chicago** El promedio mensual de temperatura alta T (en °F) en Chicago, Illinois, puede aproximarse con la función

$$T(t) = 26.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 56.5$$

donde t está en meses y $t = 1$ corresponde a enero.

a) Grafique T sobre el intervalo de dos años [1, 25].

b) Calcule el promedio de temperatura alta en julio y en octubre.

c) Aproxime gráficamente los meses cuando el promedio de temperatura alta es de 69 °F o superior.

d) Explique por qué una función seno es la función apropiada para aproximar estas temperaturas.

80 **Temperatura en Augusta** El promedio mensual de temperatura alta T (en °F) en Augusta, Georgia, puede aproximarse con la función

$$T(t) = 17 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 75$$

donde t está en meses y $t = 1$ corresponde a enero.

a) Grafique T sobre el intervalo de dos años [1, 25].

b) Calcule el promedio de temperatura alta en abril y diciembre.

c) Aproxime gráficamente los meses cuando el promedio de temperatura alta es de 67 °F o inferior.

81 **Intensidad de la luz diurna** En un día despejado con D horas de luz natural, la intensidad de la luz diurna I (en calorías/cm²) puede aproximarse con

$$I = I_M \text{ sen}^3 \frac{\pi t}{D} \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq D$$

donde $t = 0$ corresponde al amanecer e I_M es la máxima intensidad. Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después del amanecer es $I = \frac{1}{2}I_M$?

82 **Intensidad de la luz diurna** Consulte el ejercicio 81. En días nublados, una mejor aproximación de la intensidad del Sol I está dada por

$$I = I_M \text{ sen}^2 \frac{\pi t}{D}$$

Si $D = 12$, ¿cuántas horas después del amanecer es $I = \frac{1}{2}I_M$?

83 **Protección contra la luz solar** Refiérase los ejercicios 81 y 82. Una dermatóloga recomienda protegerse del Sol cuando la intensidad I es superior a 75% de la intensidad máxima. Si $D = 12$ horas, aproxime el número de horas en las que se requiere la protección en

a) un día despejado

b) un día nublado.

84 **Ingeniería de carreteras** En el estudio de problemas de penetración de hielo en ingeniería de carreteras, la temperatura T en el tiempo de t horas y la profundidad de x pies están dadas por

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \text{ sen } (\omega t - \lambda x)$$

donde T_0, ω y λ son constantes, y el periodo de T es 24 horas.

a) Obtenga la fórmula de la temperatura en la superficie.

b) ¿A qué horas está al mínimo la temperatura en la superficie?

c) Si $\lambda = 2.5$, obtenga las horas en que la temperatura está al mínimo a la profundidad de 1 pie.

85 **Población de conejos** Muchas poblaciones de animales, como la de conejos, fluctúan a lo largo de ciclos de 10 años. Suponga que el número de conejos en el tiempo t (en años) está dado por

$$N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5}t + 4000$$

a) Trace la gráfica de N para $0 \leq t \leq 10$.

b) ¿Para qué valores de t en el inciso a) la población de conejos es superior a 4,500?

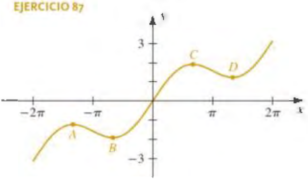
86 **Caudal de un río** El caudal (o tasa de descarga de agua) en la desembocadura del río Orinoco en América del Sur puede aproximarse con

$$F(t) = 26{,}000 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 5.5)\right] + 34{,}000$$

donde t es el tiempo en meses y $F(t)$ el caudal en m³/s. ¿Durante aproximadamente cuántos meses de cada año el caudal es superior a 55,000 m³/s?

87 En la figura se muestra una gráfica de $y = \frac{1}{2}x + \text{sen } x$ para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Usando cálculo, podemos demostrar que las coordenadas x de los puntos críticos A, B, C y D en la gráfica son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determine las coordenadas de estos puntos.

EJERCICIO 87



88 En la figura se muestra la gráfica de la ecuación

$$y = e^{-x/2}\,\text{sen}\,2x.$$

Las coordenadas x de los puntos críticos en la gráfica son soluciones de $4\cos 2x - \text{sen}\,2x = 0$. Aproxime las coordenadas x de estos puntos para $x > 0$.

EJERCICIO 88

Ejer. 89–90: Si $I(t)$ es la corriente (en amperes) en un circuito de corriente alterna en el tiempo t (en segundos), obtenga el mínimo valor exacto de t para el que $I(t) = k$.

89 $I(t) = 20\,\text{sen}\,(60\pi t - 6\pi);\quad k = -10$

90 $I(t) = 40\,\text{sen}\,(100\pi t - 4\pi);\quad k = 20$

Ejer. 91–94: Aproxime la solución de cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.

91 $\cos x \geq 0.3$

92 $\text{sen}\,x < -0.6$

93 $\cos 3x < 2\,\text{sen}\,x$

94 $\tan \dfrac{1}{2}x \leq \text{sen}\,2x$

Ejer. 95–96: Grafique f en el visor rectangular $[0, 3]$ por $[-1.5, 1.5]$.

a) Aproxime a no menos de cuatro posiciones decimales la solución más grande de $f(x) = 0$ en $[0, 3]$.

b) Explique lo que sucede con la gráfica de f cuando aumenta x.

c) Examine las gráficas de la función f en el intervalo $[0, c]$, donde $c = 0.1, 0.01, 0.001$. ¿Cuántos ceros parece tener f en el intervalo $[0, c]$, donde $c > 0$?

95 $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$

96 $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{1}{x^2}$

Ejer. 97–100: Debido a que los planetas no se mueven en órbitas precisamente circulares, el cálculo de la posición de un planeta exige la solución de la ecuación de Kepler, la cual no puede resolverse algebraicamente. Tiene la forma $M = \theta + e\,\text{sen}\,\theta$, donde M es la anomalía media, e la excentricidad de la órbita, y θ un ángulo llamado anomalía excéntrica. Para los valores especificados de M y e, use técnicas gráficas para resolver la ecuación de Kepler y determinar θ a tres posiciones decimales.

97 Posición de Mercurio $M = 5.241,\quad e = 0.206$

98 Posición de Marte $M = 4.028,\quad e = 0.093$

99 Posición de la Tierra $M = 3.611,\quad e = 0.0167$

100 Posición de Plutón $M = 0.09424,\quad e = 0.255$

Ejer. 101–106: Estime las soluciones de la ecuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

101 $\text{sen}\,2x = 2 - x^2$

102 $\cos^3 x + \cos 3x - 2\,\text{sen}^3 x = 0$

103 $\ln(1 + \text{sen}^2 x) = \cos x$

104 $e^{\text{sen}\,x} = \sec\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)$

105 $3\cos^4 x - 2\cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

106 $\cos 2x + \text{sen}\,3x + \tan \frac{1}{3}x = 0$

107 Peso a varias latitudes El peso W de una persona en la superficie de la Tierra es directamente proporcional a la fuerza de la gravedad g (en m/s^2). Debido a la rotación, la Tierra está aplanada en los polos y, como consecuencia, el peso varía a diferentes latitudes. Si θ es la latitud, g puede aproximarse por $g = 9.8066(1 - 0.00264\cos 2\theta)$.

a) ¿En qué latitud es $g = 9.8$?

b) Si una persona pesa 150 libras en el ecuador ($\theta = 0°$), ¿a qué latitud pesará la persona 150.5 libras?

6.3 Fórmulas de suma y resta

En esta sección obtendremos las fórmulas que incluyen las funciones trigonométricas de $u + v$ o $u - v$ para cualesquiera números reales o ángulos u y v. Estas fórmulas se conocen como *fórmulas de suma* y *resta*, respectivamente, o como *identidades de suma* y *diferencia*. La primera fórmula que consideraremos puede plantearse como sigue.

Fórmula de resta para coseno $\quad \cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

FIGURA 1

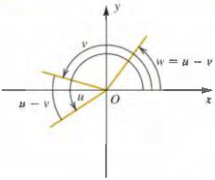
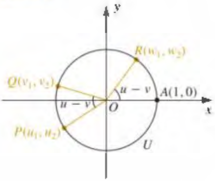


FIGURA 2



DEMOSTRACIÓN Sean u y v números reales cualesquiera, y considere ángulos de medida en radianes u y v. Sea $w = u - v$. La figura 1 ilustra una posibilidad con los ángulos en posición estándar. Por conveniencia, partimos del supuesto que tanto u como v son positivos y que $0 \leq u - v < v$.

Como en la figura 2, sea $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$ y $R(w_1, w_2)$ los puntos en los lados terminales de los ángulos indicados que están cada uno a una distancia 1 del origen. En este caso, P, Q y R están en el círculo unitario U con centro en el origen. De la definición de funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario,

$$\begin{array}{lll} \cos u = u_1 & \cos v = v_1 & \cos(u - v) = w_1 \\ \operatorname{sen} u = u_2 & \operatorname{sen} v = v_2 & \operatorname{sen}(u - v) = w_2 \end{array} \qquad (*)$$

A continuación se observa que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia entre Q y P, porque los ángulos AOR y QOP tienen la misma medida, $u - v$. Con la fórmula de distancia, obtenemos

$$d(A, R) = d(Q, P)$$
$$\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos las expresiones bajo los radicales, obtenemos

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2.$$

Como los puntos (u_1, u_2), (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están en el círculo unitario U y en vista de que una ecuación para U es $x^2 + y^2 = 1$, podemos sustituir 1 por cada $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$ y $w_1^2 + w_2^2$. Después de hacer esto y simplificar, obtenemos

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2$$

que se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Sustituyendo a partir de las fórmulas planteadas en (*), obtenemos

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

que es lo que deseamos demostrar. Es posible extender esta explicación a todos los valores de u y v. ■

En el siguiente ejemplo se muestra el uso de la fórmula de resta para obtener el valor *exacto* de cos 15°. Por supuesto, si sólo deseamos una aproximación, podemos usar una calculadora.

EJEMPLO 1 **Uso de la fórmula de resta para coseno**

Encuentre el valor exacto de cos 15°; use el hecho de que $15° = 60 - 45°$.

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula de resta para coseno con $u = 60°$ y $v = 45°$:

$$\begin{aligned} \cos 15° &= \cos(60° - 45°) \\ &= \cos 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45° \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

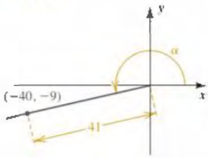
■

EJEMPLO 2 **Uso de la fórmula de resta para cosecante**

Si $\csc \alpha = -\frac{41}{9}$ y $\cot \alpha > 0$, obtenga el valor exacto de $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

SOLUCIÓN Dado que la cosecante de α es negativa y la cotangente de α es positiva, α tiene que estar en el cuadrante III. Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, sabemos que x y y son negativas y que $\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{41}{-9}$. Para encontrar x, tenemos $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 = r^2 - y^2$, que da lo siguiente:

FIGURA 3



$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{r^2 - y^2} && \text{x es negativa} \\ &= -\sqrt{41^2 - (-9)^2} && \text{sea } r = 41, y = -9 \\ &= -40 && \text{simplificamos el radical} \end{aligned}$$

El ángulo α y el punto $(-40, -9)$ en el lado terminal de α se ilustran en la figura 3. Ahora podemos usar la fórmula de resta para el coseno y obtener el valor exacto deseado como sigue:

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} && \text{fórmula de resta} \\ &= \frac{-40}{41}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-9}{41}\frac{1}{2} && \text{de la figura 3} \\ &= \frac{-40\sqrt{3} - 9}{82} && \text{sumamos las fracciones} \end{aligned}$$

■

Es relativamente fácil obtener una fórmula para $\cos(u + v)$. Para empezar, $u + v$ se escribe como $u - (-v)$ y luego utilizamos la fórmula de resta para coseno:

$$\begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos[u - (-v)] \\ &= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v)] \end{aligned}$$

Usando las fórmulas para negativos, $\cos(-v) = \cos v$ y $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$, obtenemos la siguiente fórmula de suma para coseno.

Fórmula de suma para coseno $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

EJEMPLO 3 **Uso de la fórmula de suma para coseno**

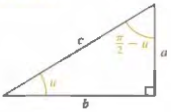
Obtenga el valor exacto de $\frac{7\pi}{12}$; para ello, use el hecho de que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

SOLUCIÓN Aplicamos la fórmula de suma para coseno:

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

■

FIGURA 4



Las funciones seno y coseno se denominan **cofunciones** una de la otra. Del mismo modo, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, lo mismo que las funciones secante y cosecante. Si u es la medida en radianes de un ángulo agudo, el ángulo con la medida en radianes $\pi/2 - u$ es complementario de u, y podemos considerar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 4. Usando razones, observamos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} u &= \frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\\ \cos u &= \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\\ \tan u &= \frac{a}{b} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\end{aligned}$$

Estas tres fórmulas y sus análogos para sec u, csc u, y cot u indican que *el valor de la función de u es igual a la cofunción del ángulo complementario $\pi/2 - u$.*

En las siguientes fórmulas se usan fórmulas de resta para extender estas relaciones a cualquier número real u, siempre que los valores de las funciones estén definidos.

Fórmulas de cofunciones Si u es un número real o la medida en radianes de un ángulo, entonces

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$ 2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$ 4) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

5) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$ 6) $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

DEMOSTRACIONES Usando la fórmula de resta para coseno, obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u$$
$$= 0)\cos u + (1)\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u$$

Esto nos aporta la fórmula 1.

Si sustituimos $\pi/2 - v$ por u en la primera fórmula, obtenemos

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

o

$$\cos v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

Dado que el símbolo v es arbitrario, esta ecuación es equivalente a la segunda fórmula de cofunción:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

Usando la identidad tangente, las fórmulas de cofunción 1 y 2 y la identidad cotangente, obtenemos una prueba de la tercera fórmula:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \cot u$$

Las demostraciones de las tres fórmulas restantes son similares. ■

Una forma sencilla de recordar las fórmulas de cofunciones es consultar el triángulo de la figura 4.

Ahora podemos demostrar las siguientes identidades.

Fórmulas de suma y resta para seno y tangente

1) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

2) $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

3) $\tan(u + v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

4) $\tan(u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

DEMOSTRACIONES Probaremos las fórmulas 1 y 3. Las fórmulas de cofunciones y la fórmula de resta para coseno se usan para verificar la fórmula 1:

$$\operatorname{sen}(u + v) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (u + v)\right]$$
$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v$$
$$= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

Para verificar la fórmula 3, comenzamos de la siguiente manera:

$$\tan(u+v) = \frac{\operatorname{sen}(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}$$

Dividimos entre cos u cos v para obtener una expresión que contenga tangentes; dividimos entre sen u sen v para obtener una expresión que contenga cotangentes.

Si $\cos u \cos v \neq 0$, podemos dividir el numerador y el denominador entre $\cos u \cos v$, para obtener

$$\tan(u+v) = \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}{\left(\dfrac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Si $\cos u \cos v = 0$, entonces $\cos u = 0$ o $\cos v = 0$. En este caso, $\tan u$ o $\tan v$ no está definida y la fórmula no es válida. Las demostraciones de las fórmulas 2 y 4 se dejan como ejercicios. ■

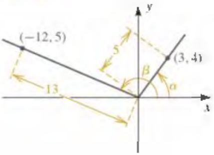
EJEMPLO 4 **Uso de las fórmulas de suma para encontrar el cuadrante que contiene un ángulo**

Suponga que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, donde α está en el cuadrante I y β está en el cuadrante II.

a) Obtenga los valores exactos de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$

b) Obtenga el cuadrante que contiene $\alpha+\beta$

FIGURA 5



SOLUCIÓN Los ángulos α y β se ilustran en la figura 5. No hay pérdida de generalidad al considerar que α y β son ángulos positivos entre 0 y 2π, como se ha hecho en la figura. En vista de que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, podemos elegir el punto (3, 4) en el lado terminal de α. Del mismo modo, dado que $\beta = -\frac{12}{13}$, el punto $(-12, 5)$ está en el lado terminal de β. Si consultamos la figura 5 y empleamos la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, obtenemos que

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{5}, \quad \tan\alpha = \tfrac{4}{3}, \quad \operatorname{sen}\beta = \tfrac{5}{13}, \quad \tan\beta = -\tfrac{5}{12}$$

a) Las fórmulas de suma dan lo siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{12}{13}\right) + \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{5}{13}\right) = -\tfrac{33}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} \cdot \frac{36}{36} = \frac{33}{56}$$

b) Dado que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es negativo y $\tan(\alpha+\beta)$ es positivo, el ángulo $\alpha+\beta$ debe estar en el cuadrante III. ■

FIGURA 6

```
sin⁻¹(4/5)→A
           .927295218
cos⁻¹(-12/13)→B
          2.746801534
sin(A+B)►Frac
               -33/65
tan(A+B)►Frac
                33/56
```

A continuación se indica cómo se puede usar una calculadora graficadora para encontrar los valores exactos del ejemplo 4. Puesto que α está en el cuadrante I, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ implica que $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5}$, y dado que β está en el cuadrante II, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ implica que $\beta = \cos^{-1}(-\frac{12}{13})$. (Si los ángulos estuvieran en cuadrantes distintos, podríamos usar los ángulos de referencia como se hizo en la sección 5.4.) En la figura se almacenaron los ángulos α y β en las posiciones A y B y luego encontramos los valores exactos de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$ como fracciones. Los valores coinciden con los obtenidos en el ejemplo 4.

El siguiente ejemplo ilustra un tipo de simplificación del cociente de diferencias (introducido en la sección 2.4) con la función seno. La forma resultante es útil en cálculo.

EJEMPLO 5 **Una fórmula empleada en cálculo**

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $h \neq 0$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

SOLUCIÓN Usamos la definición de f y la fórmula de suma para seno:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x\operatorname{sen} h}{h}\\ &= \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\end{aligned}$$

Las fórmulas de suma también pueden utilizarse para obtener **fórmulas de reducción.** A su vez, las fórmulas de reducción pueden usarse para cambiar expresiones como

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{para cualquier entero } n$$

en expresiones que sólo incluyen $\operatorname{sen}\theta$ o $\cos\theta$. Fórmulas similares son válidas para otras funciones trigonométricas. En vez de obtener fórmulas de reducción generales, se ilustrarán dos casos especiales en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Obtención de fórmulas de reducción**

Exprese en términos de una función trigonométrica sólo de θ:

a) $\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\cos(\theta + \pi)$

SOLUCIÓN Utilizando las fórmulas de resta y suma, obtenemos lo siguiente:

a) $$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta \cos\frac{3\pi}{2} - \cos\theta \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$
$$= \operatorname{sen}\theta \cdot (0) - \cos\theta \cdot (-1) = \cos\theta$$

b) $$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi$$
$$= \cos\theta \cdot (-1) - \operatorname{sen}\theta \cdot (0) = -\cos\theta$$

EJEMPLO 7 **Combinación de una suma que contiene las funciones seno y coseno**

Sean a y b números reales con $a > 0$. Demuestre que, para toda x,

$$a\cos Bx + b\operatorname{sen} Bx = A\cos(Bx - C)$$

Dado que $u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$, también podríamos escribir la suma en términos de una función seno.

donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan C = \dfrac{b}{a}$ con $-\dfrac{\pi}{2} < C < \dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN Dado que $a\cos Bx + b\operatorname{sen} Bx$, consideraremos $C = b/a$ con $-\pi/2 < C < \pi/2$. Por lo tanto, $b = a\tan C$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}
a\cos Bx + b\operatorname{sen} Bx &= a\cos Bx + (a\tan C)\operatorname{sen} Bx \\
&= a\cos Bx + a\frac{\operatorname{sen} C}{\cos C}\operatorname{sen} Bx \\
&= \frac{a}{\cos C}(\cos C\cos Bx + \operatorname{sen} C\operatorname{sen} Bx) \\
&= (a\sec C)\cos(Bx - C)
\end{aligned}$$

Para completar la demostración, estableceremos que $a\sec C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dado que $-\pi/2 < C < \pi/2$, se desprende que $\sec C$ es positivo y, por lo tanto,

$$a\sec C = a\sqrt{1 + \tan^2 C}$$

Si usamos $\tan C = b/a$ y $a > 0$, obtenemos

$$a\sec C = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 8 **Una aplicación del ejemplo 7**

Si $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, use las fórmulas dadas en el ejemplo 7 para expresar $f(x)$ en la forma $A\cos(Bx - C)$, y luego trace la gráfica de f.

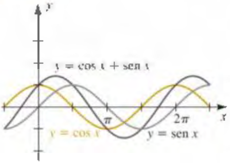
SOLUCIÓN Sean $a = 1$, $b = 1$ y $B = 1$ en las fórmulas del ejemplo 7, tenemos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \tan C = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $\tan C = 1$ y $-\pi/2 < C < \pi/2$, tenemos $C = \pi/4$. Si sustituimos para a, b, A, B y C en la fórmula

$$a\cos Bx + b\operatorname{sen} Bx = A\cos(Bx - C)$$

FIGURA 7



obtenemos

$$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Si comparamos la última fórmula con la ecuación $y = a\cos(bx + c)$, que analizamos en la sección 5.5, observamos que la amplitud de la gráfica es $\sqrt{2}$, el periodo es 2π, y el desplazamiento de fase es $\pi/4$. La gráfica de f se presenta en la figura 7, donde también se muestran las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$. El trazo concuerda con el obtenido en el capítulo 5 mediante calculadora graficadora. (Vea la figura 10 de la sección 5.6.) ■

6.3 Ejercicios

Ejer. 1–4: Exprese como cofunción de un ángulo complementario.

1 a) $\operatorname{sen} 15°20'$ b) $\cos 73°12'$

c) $\tan\frac{\pi}{6}$ d) $\sec 17.28°$

2 a) $\tan 37°50'$ b) $\operatorname{sen} 89°41'$

c) $\cos\frac{\pi}{3}$ d) $\cot 61.87°$

3 a) $\cos\frac{\pi}{8}$ b) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}$

c) $\tan 1$ d) $\csc 0.53$

4 a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ b) $\cos\frac{1}{5}$

c) $\tan\sqrt{2}$ d) $\sec 1.2$

Ejer. 5–10: Obtenga los valores exactos.

5 a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$

b) $\cos\frac{5\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

6 a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

7 a) $\tan 60° + \tan 225°$

b) $\tan 285°$ (use $285° = 60° + 225°$)

8 a) $\cos 225° - \cos 30°$

b) $\cos 195°$ (use $195° = 225° - 30°$)

9 a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

10 a) $\tan\frac{3\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}$

b) $\tan\frac{7\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

Ejer. 11–16: Exprese como una función trigonométrica de un ángulo.

11 $\cos 70° \cos 53° + \operatorname{sen} 70° \operatorname{sen} 53°$

12 $\cos 6° \cos 25° - \operatorname{sen} 6° \operatorname{sen} 25°$

13 $\cos 61° \operatorname{sen} 82° - \operatorname{sen} 61° \cos 82°$

14 $\operatorname{sen} 57° \cos 4° + \cos 57° \operatorname{sen} 4°$

15 $\cos 3 \operatorname{sen}(-2) - \cos 2 \operatorname{sen} 3$

16 $\operatorname{sen}(-5)\cos 2 + \cos 5 \operatorname{sen}(-2)$

Ejer. 17−22: Utilice las condiciones dadas para obtener el valor exacto de la expresión.

17 $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\tan \alpha > 0$, $\operatorname{sen}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$

18 $\cos \alpha = \dfrac{24}{25}$, $\operatorname{sen} \alpha < 0$, $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$

19 $\sec x = 3$, $\csc x < 0$, $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

20 $\tan x = \dfrac{1}{4}$, $\sec x > 0$, $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

21 $\cot x = \sqrt{3}$, $\cos x < 0$, $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

22 $\csc x = -\dfrac{5}{3}$, $\cot x > 0$, $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23 Si α y β son ángulos agudos tales que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ y $\beta = \frac{8}{15}$, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$

c) el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

24. Si α y β son ángulos agudos tales que $\csc \alpha = \frac{13}{12}$ y $\cot \beta = \frac{4}{3}$, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$

c) el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

25 Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\sec \beta = \frac{5}{3}$ para un ángulo α en el tercer cuadrante y un ángulo β en el primer cuadrante, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$

c) el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

26 Si $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$ y $\cot \beta = \frac{3}{4}$ para un ángulo α en el segundo cuadrante y un ángulo β en el tercer cuadrante, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\tan(\alpha + \beta)$

a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $\tan(\alpha - \beta)$

27 Si α y β son ángulos en el tercer cuadrante tales que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ y $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$

c) el cuadrante que contiene $\alpha - \beta$

28 Si α y β son ángulos en el segundo cuadrante tales que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$ y $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, obtenga

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha + \beta)$

c) el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$

Ejer. 29−40: Verifique la fórmula de reducción.

29 $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$ 30 $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

31 $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = -\cos x$ 32 $\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos \theta$

33 $\cos(\theta - \pi) = -\cos \theta$ 34 $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

35 $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ 36 $\cos\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \theta$

37 $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$ 38 $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

39 $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$ 40 $\tan(x + \pi) = \tan x$

Ejer. 41−50: Verifique la identidad.

41 $\operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$

42 $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)]$

43 $\tan\left(u + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

44 $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

45 $\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v$

46 $\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$

47 $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

48 $\cos(u + v) \cdot \cos(u - v) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

49 $\dfrac{1}{\cot \alpha - \cot \beta} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$

50 $\dfrac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} = \dfrac{\cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

51 Exprese $\operatorname{sen}(u + v + w)$ en términos de las funciones trigonométricas de u, v y w. (*Sugerencia:* escriba

$$\operatorname{sen}(u + v + w) \text{ como } \operatorname{sen}[(u + v) + w]$$

y use fórmulas de suma.)

52 Exprese $\tan(u + v + w)$ en términos de las funciones trigonométricas de u, v y w.

53 Deduzca la fórmula $\cot(u + v) = \dfrac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}$

54 Si α y β son ángulos complementarios, demuestre que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta = 1$$

55 Obtenga la fórmula de resta para la función seno.

56 Deduzca la fórmula de resta para la función tangente.

57 Si $f(x) = \cos x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

58 Si $f(x) = \tan x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sec^2 x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\frac{1}{\cos h - \operatorname{sen} h \tan x}$$

Ejer. 59–60: a) Compare las aproximaciones decimales de ambos lados de la ecuación 1). b) Obtenga el ángulo agudo α tal que la ecuación 2) sea una identidad. c) ¿Cómo se relaciona la ecuación 1) con la ecuación 2)?

59 **1)** $\operatorname{sen} 63° - \operatorname{sen} 57° = \operatorname{sen} 3°$
2) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \beta$

60 **1)** $\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 25° = \cos 5°$
2) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos \beta$

Ejer. 61–66: Use una fórmula de suma o resta para obtener las soluciones de las ecuaciones que están en el intervalo $[0, \pi)$.

61 $\operatorname{sen} 4t \cos t = \operatorname{sen} t \cos 4t$

62 $\cos 5t \cos 3t = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(-5t) \operatorname{sen} 3t$

63 $\cos 5t \cos 2t = -\operatorname{sen} 5t \operatorname{sen} 2t$

64 $\operatorname{sen} 3t \cos t + \cos 3t \operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$

65 $\tan 2t + \tan t = 1 - \tan 2t \tan t$

66 $\tan t - \tan 4t = 1 + \tan 4t \tan t$

Ejer. 67–70: a) Utilice la fórmula del ejemplo 7 para expresar f en términos de la función coseno. b) Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de f. c) Trace la gráfica de f.

67 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

68 $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 4x$

69 $f(x) = 2 \cos 3x - 2 \operatorname{sen} 3x$

70 $f(x) = 5 \cos 10x - 5 \operatorname{sen} 10x$

Ejer. 71–72: Para ciertas aplicaciones en ingeniería eléctrica, la suma de varias señales de voltaje u ondas de radio de la misma frecuencia se expresa en la forma compacta $y = A \cos(Bt - C)$. Exprese la señal dada en esta forma.

71 $y = 50 \operatorname{sen} 60\pi t + 40 \cos 60\pi t$

72 $y = 10 \operatorname{sen}\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \operatorname{sen} 120\pi t$

73 **Movimiento de una masa** Si una masa que está unida a un resorte se eleva y_0 pies y se suelta con una velocidad vertical inicial de v_0 ft/s, la posición subsiguiente y de la masa está dada por

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

donde t es el tiempo en segundos y ω una constante positiva.

a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ pies, y $v_0 = 3$ ft/s, exprese y en la forma $A \cos(Bt - C)$, y encuentre la amplitud y el periodo del movimiento resultante.

b) Determine los tiempos en que $y = 0$; es decir, los tiempos en los que la masa pasa por la posición de equilibrio.

74 **Movimiento de una masa** Consulte el ejercicio 73. Si $y_0 = 1$ y $\omega = 2$, obtenga las velocidades iniciales que dan por resultado una amplitud de 4 pies.

75 **Presión en el tímpano** Si se hace vibrar un diapasón y luego se sostiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en el exterior del tímpano en el tiempo t puede representarse por $p_1(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, donde A y ω son constantes positivas. Si un segundo diapasón idéntico se hace vibrar con una fuerza posiblemente diferente y se sostiene a una distancia diferente del tímpano (vea la figura de la página siguiente), su efecto puede representarse por la ecuación $p_2(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \tau)$, donde B es una constante positiva y $0 \le \tau \le 2\pi$. La presión total $p(t)$ en el tímpano está dada por

$$p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen}(\omega t + \tau)$$

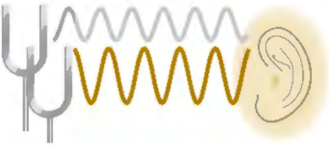
a) Demuestre que $p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$, donde

$$a = B \operatorname{sen} \tau \quad \text{y} \quad b = A + B \cos \tau$$

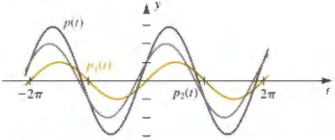
b) Demuestre que la amplitud C de p está dada por

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau$$

EJERCICIO 75



EJERCICIO 77



76 **Interferencia destructiva** Refiérase al ejercicio 75. Cuando se hacen vibrar dos diapasones, ocurre interferencia destructiva si la amplitud de la onda acústica resultante es menor que A. Suponga que se hacen vibrar dos diapasones con la misma fuerza, es decir, $A = B$.

a) Cuando ocurre la interferencia destructiva total, la amplitud de p es cero y no se escucha ningún sonido. Encuentre el valor positivo más bajo de τ en el cual ocurre esto.

b) Determine el intervalo de τ (a, b) donde ocurre interferencia destructiva y a tiene su menor valor positivo.

77 **Interferencia constructiva** Refiérase al ejercicio 75. Cuando se hacen vibrar dos diapasones, ocurre interferencia constructiva si la amplitud C de la onda acústica resultante es mayor que A o B (vea la figura).

a) Demuestre que $C \leq A + B$.

b) Encuentre los valores de τ de modo que $C = A + B$.

c) Si $A \geq B$, determine una condición en la cual ocurrirá interferencia constructiva.

78 **Presión en el tímpano** Refiérase al ejercicio 75. Si se hacen vibrar dos diapasones con diferentes tonos al mismo tiempo con fuerzas diferentes, la presión total $p(t)$ en el tímpano en el tiempo t está dado por

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \text{ sen } \omega_1 t + B \text{ sen } (\omega_2 t + \tau)$$

donde A, B, ω_1, ω_2 y τ son constantes.

a) Grafique p para $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ si $A = B = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 20$ y $\tau = 3$.

b) Use la gráfica para describir la variación de tono que se produce.

Ejer. 79–80: Consulte el ejercicio 77. Grafique la ecuación para $-\pi \leq t \leq \pi$, y calcule los intervalos en los que ocurre interferencia constructiva.

79 $y = 3 \text{ sen } 2t + 2 \text{ sen } (4t + 1)$

80 $y = 2 \text{ sen } t + 2 \text{ sen } (3t + 3)$

6.4 Fórmulas de múltiplos de un ángulo

Las fórmulas consideradas en esta sección se conocen como **fórmulas de múltiplos de un ángulo**. En particular, las siguientes identidades son **fórmulas de ángulo doble**, porque contienen la expresión $2u$.

Fórmulas de ángulo doble

1) $\text{sen } 2u = 2 \text{ sen } u \cos u$

2) **a)** $\cos 2u = \cos^2 u - \text{sen}^2 u$

b) $\cos 2u = 1 - 2 \text{ sen}^2 u$

c) $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

3) $\tan 2u = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

DEMOSTRACIONES Cada una de estas fórmulas se puede probar con $v = u$ en la fórmula de suma apropiada. Si usamos la fórmula para sen $(u + v)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2u &= \operatorname{sen}(u + u)\\ &= \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u\\ &= 2 \operatorname{sen} u \cos u\end{aligned}$$

Si usamos la fórmula para $\cos(u + v)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos(u + u)\\ &= \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u\\ &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u\end{aligned}$$

Para obtener las otras dos formas para $\cos 2u$ en 2b) y 2c), utilizamos la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$. Así,

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u\\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 u) - \operatorname{sen}^2 u\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u\end{aligned}$$

Del mismo modo, si sustituimos $\operatorname{sen}^2 u$ en lugar de $\cos^2 u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u)\\ &= 2\cos^2 u - 1\end{aligned}$$

La fórmula 3 para $\tan 2u$ se puede obtener si $v = u$ en la fórmula para $\tan(u + v)$. ■

EJEMPLO 1 **Uso de fórmulas de ángulo doble**

Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y α es un ángulo agudo, encuentre los valores exactos de $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

SOLUCIÓN Si consideramos α como un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como se observa en la figura 1, obtenemos $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. A continuación sustituimos en las fórmulas de ángulo doble:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{24}{25}\\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 - \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \tfrac{9}{25} - \tfrac{16}{25} = -\tfrac{7}{25}\end{aligned}$$ ■

FIGURA 1

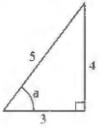
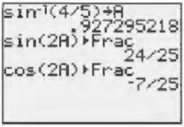


FIGURA 2



La figura 2 muestra una forma de calcular los valores del ejemplo 1 en una calculadora.

El siguiente ejemplo demuestra cómo cambiar una expresión de múltiplos de un ángulo en una expresión de un solo ángulo.

EJEMPLO 2 **Cambio de la forma de cos 3θ**

Exprese $\cos 3\theta$ en términos de $\cos \theta$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) && 3\theta = 2\theta + \theta\\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta && \text{fórmula de suma}\\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta && \text{fórmulas de ángulo doble}\\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta && \text{multiplicamos}\\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = && \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1\\ &4\cos^3 \theta - 3\cos \theta && \text{simplificamos}\end{aligned}$$ ■

A cada una de las siguientes tres fórmulas les damos el nombre de **identidad de semiángulo**, porque el número u es la mitad del número $2u$.

Identidades de semiángulo

$$\textbf{1)}\ \operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \textbf{2)}\ \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\textbf{3)}\ \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

DEMOSTRACIONES La primera identidad puede verificarse como sigue:

$$\begin{aligned} \cos 2u &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u && \text{fórmula 2b) de ángulo doble} \\ 2\operatorname{sen}^2 u &= 1 - \cos 2u && \text{despejamos } 2\operatorname{sen}^2 u \\ \operatorname{sen}^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2} && \text{dividimos entre 2} \end{aligned}$$

La segunda identidad se puede deducir en forma semejante comenzando con

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$$

La tercera identidad puede obtenerse de las identidades 1 y 2 al notar que

$$\tan^2 u = (\tan u)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} \qquad \blacksquare$$

Es posible usar identidades de semiángulo para expresar potencias pares de funciones trigonométricas en términos de funciones con exponente 1, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 3 **Uso de identidades de semiángulo para verificar una identidad**

Verifique la identidad $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) && \text{identidades de semiángulo} \\ &= \tfrac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) && \text{multiplicamos} \\ &= \tfrac{1}{4}(\operatorname{sen}^2 2x) && \operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) && \text{identidad de semiángulo con } u = 2x \\ &= \tfrac{1}{8}(1 - \cos 4x) && \text{multiplicamos} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 **Uso de identidades de semiángulo para reducir una potencia de cos t**

Exprese $\cos^4 t$ en términos de valores de la función coseno con exponente 1.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\cos^4 t &= (\cos^2 t)^2 && \text{ley de los exponentes}\\
&= \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 && \text{identidad de semiángulo}\\
&= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) && \text{elevamos al cuadrado}\\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) && \text{identidad de semiángulo con } u = 2t\\
&= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t && \text{simplificamos}
\end{aligned}$$

■

Sustituyendo $v/2$ por u en las tres identidades de semiángulo obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{2} \qquad \cos^2\frac{v}{2} = \frac{1+\cos v}{2} \qquad \tan^2\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{1+\cos v}$$

Si obtenemos las raíces cuadradas de ambos lados de cada una de estas ecuaciones, obtenemos las siguientes, a las que llamaremos *fórmulas de semiángulo* para distinguirlas de las identidades de semiángulo.

Fórmulas de semiángulo

$$\textbf{1)}\ \operatorname{sen}\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}} \qquad \textbf{2)}\ \cos\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$

$$\textbf{3)}\ \tan\frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}}$$

Al utilizar una fórmula de semiángulo, seleccionamos ya sea + o −, dependiendo del cuadrante que contenga el ángulo $v/2$ medido en radianes. Entonces, para sen ($v/2$) usamos + si $v/2$ es un ángulo en los cuadrantes I o II, o − si $v/2$ está en los cuadrantes III o IV. Para cos ($v/2$) usamos + si $v/2$ está en los cuadrantes I o IV, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 **Uso de fórmulas de semiángulo para seno y coseno**

Encuentre valores exactos para

a) sen 22.5° **b)** cos 112.5°

SOLUCIÓN

a) Seleccionamos el signo positivo porque 22.5° está en el cuadrante I y, por lo tanto, sen 22.5° > 0.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 22.5^\circ &= +\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} && \text{fórmula de semiángulo para seno con } v = 45^\circ\\
&= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} && \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} && \text{multiplicamos el radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplificamos}
\end{aligned}$$

(*continúa*)

b) De manera similar, seleccionamos el signo negativo, porque 112.5° está en el cuadrante II y, por lo tanto, cos 112.5° < 0.

$$\cos 112.5° = -\sqrt{\frac{1 + \cos 225°}{2}} \qquad \text{fórmula de semiángulo para coseno } v = 225°$$

$$= -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} \qquad \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \qquad \text{multiplicamos el radicando por } \frac{2}{2} \text{ y simplificamos}$$

■

Podemos obtener una forma alterna para la fórmula de semiángulo con tan $(v/2)$. Multiplicamos por $1 - \cos v$ el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula del semiángulo y obtenemos

$$\tan \frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} \cdot \frac{1 - \cos v}{1 - \cos v}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos v)^2}{1 - \cos^2 v}}$$

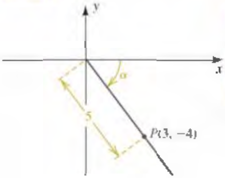
$$= \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos v)^2}{\operatorname{sen}^2 v}} = \pm\frac{1 - \cos v}{\operatorname{sen} v}$$

Podemos eliminar el signo $\pm$ de la fórmula precedente. Primero observe que el numerador $1 - \cos v$ nunca es negativo. Podemos demostrar que tan $(v/2)$ y sen v siempre tienen el mismo signo. Por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y, en consecuencia, sen v y tan $(v/2)$ son positivos. Si $\pi < v < 2\pi$, entonces $\pi/2 < v/2 < \pi$ y, por lo tanto, sen v y tan $(v/2)$ son negativos, lo cual da la primera de las siguientes dos identidades. La segunda identidad para tan $(v/2)$ puede obtenerse al multiplicar el numerador y el denominador del radicando de la tercera fórmula del semiángulo por $1 + \cos v$.

Fórmulas de semiángulo para la tangente

1) $\tan \dfrac{v}{2} = \dfrac{1 - \cos v}{\operatorname{sen} v}$ 2) $\tan \dfrac{v}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} v}{1 + \cos v}$

FIGURA 3



EJEMPLO 6 **Uso de una fórmula de semiángulo para la tangente**

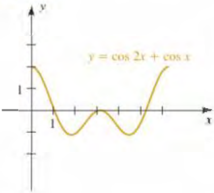
Si $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ y α está en el cuadrante IV, encuentre $\tan \frac{\alpha}{2}$.

SOLUCIÓN Si seleccionamos el punto $(3, -4)$ en el lado terminal de α, como se ilustra en la figura 3, entonces sen $\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Aplicando la primera fórmula del semiángulo para la tangente, obtenemos

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}$$

■

FIGURA 4



EJEMPLO 7 **Cómo encontrar los puntos de intersección con el eje x de la gráfica**

Una gráfica de la ecuación $y = \cos 2x + \cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ aparece en la figura 4. Los puntos de intersección con el eje x parecen estar aproximadamente en 1.1, 3.1 y 5.2. Encuentre los valores exactos y aproximaciones a tres posiciones decimales.

SOLUCIÓN Para encontrar los puntos de intersección con el eje x, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x &= 0 && \text{sea } y = 0 \\ (2\cos^2 x - 1) + \cos x &= 0 && \text{fórmula 2c) del ángulo doble} \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 && \text{ecuación equivalente} \\ (2\cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0 && \text{factorizamos} \\ 2\cos x - 1 = 0, \quad \cos x + 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ \cos x = \tfrac{1}{2}, \quad \cos x &= -1 && \text{despejamos } \cos x \end{aligned}$$

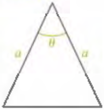
Las soluciones de las últimas dos ecuaciones del intervalo $[0, 2\pi]$ dan los siguientes puntos de intersección con el eje x exactos y aproximados:

$$\frac{\pi}{3} \approx 1.047, \quad \frac{5\pi}{3} \approx 5.236, \quad \pi \approx 3.142$$ ■

EJEMPLO 8 **Obtención de una fórmula para el área de un triángulo isósceles**

Un **triángulo isósceles** tiene dos lados iguales de longitud a y el ángulo entre ellos es θ (vea la figura 5). Exprese el área A del triángulo en términos de a y θ.

FIGURA 5

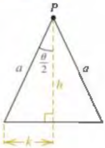


SOLUCIÓN En la figura 6 observamos que la altura desde el punto P biseca θ y que $A = \frac{1}{2}(2k)h = kh$. Entonces, tenemos lo siguiente, donde $\theta/2$ es un ángulo agudo:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{a} \qquad \text{vea la figura 6}$$

$$k = a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad h = a\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{despejamos } k \text{ y } h$$

FIGURA 6



A continuación obtenemos el área:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} && \text{sustituimos en } A = kh \qquad (*) \\ &= a^2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} && \text{fórmulas de semiángulo con } \theta/2 \text{ en el cuadrante I} \\ &= a^2\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}} && \text{ley de radicales} \\ &= a^2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ &= \tfrac{1}{2}a^2|\operatorname{sen}\theta| && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \\ &= \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen}\theta && \operatorname{sen}\theta > 0 \text{ para } 0° < \theta < 180° \end{aligned}$$

Otro método para simplificar (*) es escribir la fórmula de ángulo doble para el seno, $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u\cos u$, como

(continúa)

$$\operatorname{sen} u \cos u = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2u \qquad (**)$$

y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} A &= a^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} && \text{sustituimos en } A = kh \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) && \text{sea } u = \frac{\theta}{2} \text{ en } (**) \\ &= \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}\theta && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

■

6.4 Ejercicios

Ejer. 1–4: Encuentre los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ para los valores dados de θ.

1 $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $0° < \theta < 90°$

2 $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $180° < \theta < 270°$

3 $\sec\theta = -\frac{13}{12}$; $90° < \theta < 180°$

4 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}$; $270° < \theta < 360°$

5 Si $\tan\alpha = 3$ y α es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de sen 2α.

6 Si $\cot\alpha = 2$ y α es agudo, encuentre el valor exacto de cos 2α.

Ejer. 7–12: Encuentre los valores exactos de sen $(\theta/2)$, cos $(\theta/2)$ y tan $(\theta/2)$ para las condiciones dadas.

7 $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $0° < \theta < 90°$

8 $\csc\theta = -\frac{5}{3}$; $-90° < \theta < 0°$

9 $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$; $90° < \theta < 180°$

10 $\tan\theta = -\frac{5}{12}$; $270° < \theta < 360°$

11 $\tan\theta = 1$; $-180° < \theta < -90°$

12 $\sec\theta = -4$; $180° < \theta < 270°$

13 Si $\cos\beta = \frac{9}{41}$ y β está en el cuarto cuadrante, encuentre el valor exacto de $\tan(\beta/2)$.

14 Si $\sec\theta = -\frac{25}{7}$, ¿qué posibles valores puede tener $(\theta/2)$?

Ejer. 15–16: Use fórmulas de semiángulo para determinar los valores exactos.

15 a) $\cos 67°30'$ b) $\operatorname{sen} 15°$ c) $\tan\dfrac{\pi}{8}$

16 a) $\cos 165°$ b) $\operatorname{sen} 157°30'$ c) $\tan\dfrac{\pi}{8}$

Ejer. 17–38: Verifique la identidad.

17 $\operatorname{sen} 10\theta = 2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 5\theta$

18 $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = \cos 6x$

19 $4 \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} x$

20 $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 4 - 4\operatorname{sen}^2\alpha$

21 $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1 + \cos x)}$

22 $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1 - \cos x)}$

23 $(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2t$

24 $\csc 2u = \frac{1}{2}\csc u \sec u$

25 $\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen} u\,(3 - 4\operatorname{sen}^2 u)$

26 $\operatorname{sen} 4t = 4 \operatorname{sen} t \cos t\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$

27 $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

28 $\cos 6t = 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1$

29 $\operatorname{sen}^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$

30 $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

31 $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$ **32** $\cot 2u = \dfrac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$

33 $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 1$

34 $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$

35 $\tan 3u = \dfrac{\tan u\,(3 - \tan^2 u)}{1 - 3\tan^2 u}$

36 $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2v + \cos 2v}{1 + \operatorname{sen} 2v - \cos 2v} = \cot v$

37 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

38 $\tan^2\dfrac{\theta}{2} = 1 - 2\cot\theta\csc\theta + 2\cot^2\theta$

Ejer. 39–42: Exprese en términos de la función coseno con exponente 1.

39 $\cos^4\dfrac{\theta}{2}$ **40** $\cos^4 2x$

41 $\operatorname{sen}^4 2x$ **42** $\operatorname{sen}^4\dfrac{\theta}{2}$

Ejer. 43–52: Encuentre las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

43 $\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t = 0$ **44** $\cos t - \operatorname{sen} 2t = 0$

45 $\cos u + \cos 2u = 0$ **46** $\cos 2\theta - \tan\theta = 1$

47 $\tan 2x = \tan x$ **48** $\tan 2t - 2\cos t = 0$

49 $\operatorname{sen}\frac{1}{2}u + \cos u = 1$ **50** $2 - \cos^2 x = 4\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x$

51 $\tan(x/2) = \operatorname{sen} x$ **52** $\tan(x/2) = \cot x$

53 Si $a > 0$, $b > 0$ y $0 < u < \pi/2$ demuestre que

$$a\operatorname{sen} u + b\cos u = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(u + v)$$

para $0 < v < \pi/2$, con

$$\operatorname{sen} v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

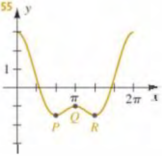
54 Use el ejercicio 53 para expresar $8\operatorname{sen} u + 15\cos u$ en la forma $c\operatorname{sen}(u + v)$.

55 Una gráfica de $y = \cos 2x + 2\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la figura.

a) Aproxime los puntos de intersección con el eje x a dos posiciones decimales.

b) Las coordenadas x de los puntos críticos P, Q y R en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$. Obtenga las coordenadas de estos puntos.

EJERCICIO 55

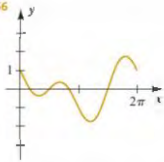


56 Una gráfica de $y = \cos x - \operatorname{sen} 2x$ para $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la figura.

a) Encuentre los puntos de intersección con el eje x.

b) Las coordenadas x de los ocho puntos críticos en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 0$. Aproxime estas coordenadas x a dos posiciones decimales.

EJERCICIO 56

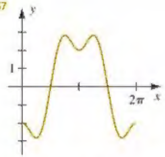


57 Una gráfica de $y = \cos 3x - 3\cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$ aparece en la figura de la siguiente página.

a) Encuentre los puntos de intersección con el eje x. (*Sugerencia*: use la fórmula para $\cos 3\theta$ dada en el ejemplo 2.)

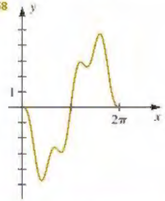
b) Las coordenadas x de los siete puntos críticos en la gráfica son soluciones de $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$. Encuentre estas coordenadas x. (*Sugerencia*: use la fórmula para $\operatorname{sen} 3u$ del ejercicio 25.)

EJERCICIO 57



58 Una gráfica de $y = \operatorname{sen} 4x - 4 \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ se muestra en la figura. Encuentre los puntos de intersección con el eje x. (*Sugerencia*: use la fórmula para sen $4t$ del ejercicio 26.)

EJERCICIO 58

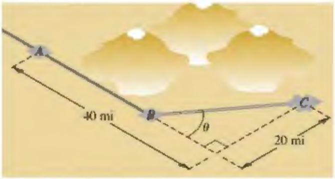


59 **Planeación de una ruta de ferrocarril** En la figura se muestra una ruta de ferrocarril propuesta que pasa por tres ciudades localizadas en los puntos A, B y C. En B, la vía da vuelta hacia C a un ángulo θ.

a) Demuestre que la distancia total d de A a C está dada por $d = 20 \tan \frac{1}{2}\theta + 40$.

b) Debido a las montañas entre A y C, el punto crítico B debe estar por lo menos a 20 millas de A. ¿Hay una ruta que evite las montañas y mida exactamente 50 millas?

EJERCICIO 59



60 **Alcance de un proyectil** Si un proyectil es disparado desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de v ft/s y a un ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil está dado por

$$R = \frac{v^2}{16} \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

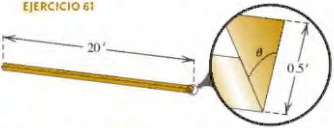
Si $v = 80$ ft/s, aproxime los ángulos que produzcan un alcance de 150 pies.

61 **Construcción de un canal para lluvia** En la figura se muestra un diseño de un canal para lluvia.

a) Exprese el volumen V como función de θ. (*Sugerencia*: vea el ejemplo 8.)

b) Aproxime el ángulo agudo θ que produzca un volumen de 2 ft^3.

EJERCICIO 61

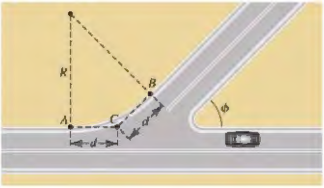


62 **Diseño de un bordillo** Un ingeniero de carreteras está diseñando el bordillo de una calle en un crucero donde se encuentran dos carreteras en un ángulo ϕ, como se muestra en la figura. Se ha de construir un bordillo entre los puntos A y B usando un círculo que sea tangente a la carretera en estos dos puntos.

a) Demuestre que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d de la figura está dada por la ecuación $d = R \tan(\phi/2)$.

b) Si $\phi = 45°$ y $d = 20$ pies, calcule R y la longitud del bordillo.

EJERCICIO 62

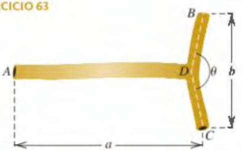


63 **Bifurcación arterial** Una forma común de derivación cardiovascular es una bifurcación, donde una arteria se divide en dos vasos sanguíneos más pequeños. El ángulo de bifurcación θ es el ángulo formado por las dos arterias más pequeñas. En la figura, la línea que va de A a D biseca el ángulo θ y es perpendicular a la línea que va de B a C.

a) Demuestre que la longitud l de la arteria de A a B está dada por $l = a + \dfrac{b}{2} \tan \dfrac{\theta}{4}$

b) Calcule la longitud l con las tres mediciones $a = 10$ mm, $b = 6$ mm y $\theta = 156°$.

EJERCICIO 63

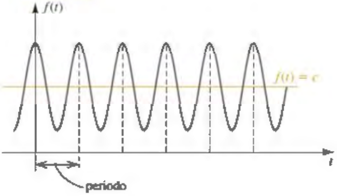


64 **Producción de calor en un circuito de CA** Por definición, el valor promedio de $f(t) = c + a \cos bt$ para uno o más ciclos completos es c (vea la figura).

a) Use una fórmula de ángulo doble para encontrar el valor promedio de $f(t) = \operatorname{sen}^2 \omega t$ para $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, con t en segundos.

b) En un circuito eléctrico con corriente alterna $I = I_a \operatorname{sen} \omega t$, la tasa r (en calorías/s) a la cual se produce calor en un resistor de R ohms está dada por $r = RI^2$. Encuentre la tasa promedio a la cual se produce calor durante un ciclo completo.

EJERCICIO 64



Ejer. 65–66: Use la gráfica de f para encontrar la expresión más sencilla $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esta identidad.

65 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\cos 2x + \cos x + 1}$

66 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x\,(1 + \cos 2x)}{\operatorname{sen} 2x}$

Ejer. 67–72: Resuelva gráficamente la ecuación trigonométrica en el intervalo indicado a dos posiciones decimales.

67 $\tan\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$; $[-2\pi, 2\pi]$

68 $\sec(2x + 1) = \cos \frac{1}{2}x + 1$; $[-\pi/2, \pi/2]$

69 $\csc\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 1.5 - \cos 2x$; $[-\pi, \pi]$

70 $3 \operatorname{sen}(2x) + 0.5 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$; $[-\pi, \pi]$

71 $2 \cos \frac{1}{4}x = 1 - \sec \frac{1}{2}x$; $[-2\pi, 2\pi]$

72 $\tan\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$; $[-\pi, \pi]$

6.5 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

Las siguientes fórmulas se pueden usar para cambiar la forma de ciertas expresiones trigonométricas de productos a sumas. Nos referimos a éstas como **fórmulas de producto a suma** aun cuando dos de las fórmulas expresan un producto como una diferencia, porque cualquier diferencia $x - y$ entre dos números reales también es una suma $x + (-y)$. Estas fórmulas se usan con frecuencia en cálculo como ayuda en un proceso llamado *integración*.

Fórmulas de producto a suma

1) $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

2) $\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

3) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

4) $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

DEMOSTRACIONES Sumemos los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno, como sigue:

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen}(u+v) = & \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen}(u-v) = & \underline{\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v} \\ \hline \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) = & 2 \operatorname{sen} u \cos v \end{array}$$

Si dividimos entre 2 ambos lados de la última ecuación, tendremos la fórmula 1.

La fórmula 2 se obtiene *restando* los lados izquierdo y derecho de las fórmulas de suma y resta para la función seno. Las fórmulas 3 y 4 se desarrollan de modo semejante, usando las fórmulas de suma y resta para la función coseno. ■

EJEMPLO 1 **Uso de fórmulas de producto a suma**

Exprese como suma:

a) $\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta$ **b)** $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

a) Utilizamos la fórmula 1 de producto a suma con $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(4\theta + 3\theta) + \operatorname{sen}(4\theta - 3\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 7\theta + \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

También podemos obtener esta relación usando la fórmula 2 de producto a suma.

b) Utilizamos la fórmula 4 de producto a suma con $u = 3x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - x) - \cos(3x + x)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \end{aligned}$$

■

Podemos usar las fórmulas de producto a suma para expresar una suma o diferencia como producto. Para obtener formas que pueden aplicarse con más facilidad, cambiaremos la notación como sigue. Si

$$u + v = a \qquad \text{y} \qquad u - v = b$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, que se simplifica a

$$u = \frac{a + b}{2}$$

Del mismo modo, como $(u + v) - (u - v) = a - b$, obtenemos

$$v = \frac{a - b}{2}$$

Ahora sustituimos por $u + v$ y $u - v$ en los lados derechos de las fórmulas de producto a suma y por u y v en los lados izquierdos. Si entonces multiplicamos por 2, obtenemos las siguientes fórmulas de suma a producto.

Fórmulas de suma a producto

1) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

2) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}$

3) $\cos a + \cos b = 2 \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

4) $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}$

EJEMPLO 2 **Uso de una fórmula de suma a producto**

Exprese $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x$ como producto.

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula 2 de suma a producto con $a = 5x$ y $b = 3x$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x &= 2\cos\frac{5x+3x}{2}\operatorname{sen}\frac{5x-3x}{2}\\ &= 2\cos 4x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 **Uso de fórmulas de suma a producto para verificar una identidad**

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$

SOLUCIÓN Primero utilizamos una fórmula de suma a producto para el numerador y una para el denominador:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} &= \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{3t+5t}{2}\cos\dfrac{3t-5t}{2}}{-2\operatorname{sen}\dfrac{3t+5t}{2}\operatorname{sen}\dfrac{3t-5t}{2}} && \text{fórmulas 1 y 4 de suma a producto}\\ &= \frac{2\operatorname{sen} 4t\cos(-t)}{-2\operatorname{sen} 4t\operatorname{sen}(-t)} && \text{simplificamos}\\ &= \frac{\cos(-t)}{-\operatorname{sen}(-t)} && \text{cancelamos } 2\operatorname{sen} 4t\\ &= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} && \text{fórmulas para negativos}\\ &= \cot t && \text{identidad cotangente}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 **Uso de una fórmula de suma a producto para resolver una ecuación**

Encuentre las soluciones de $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 0$.

SOLUCIÓN Cambiar una suma a producto nos permite usar el teorema del factor cero para resolver la ecuación:

(continúa)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x &= 0 && \text{dado}\\
2 \operatorname{sen}\frac{5x + x}{2} \cos\frac{5x - x}{2} &= 0 && \text{fórmula 1 de suma a producto}\\
\operatorname{sen} 3x \cos 2x &= 0 && \text{simplificamos y dividimos entre 2}\\
\operatorname{sen} 3x = 0, \quad \cos 2x &= 0 && \text{teorema del factor cero}
\end{aligned}$$

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones son

$$3x = \pi n \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

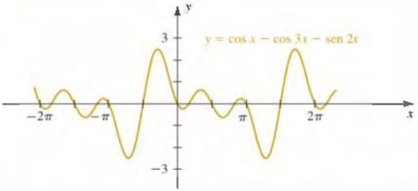
Si dividimos entre 3 y 2, respectivamente, obtenemos

$$\frac{\pi}{3}n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \quad \text{para todo entero } n$$

EJEMPLO 5 **Determinación de los puntos de intersección con el eje x de una gráfica**

Una gráfica de la ecuación $y = \cos x - \cos 3x - \operatorname{sen} 2x$ se muestra en la figura 1. Encuentre los 13 puntos de intersección con el eje x que están en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

FIGURA 1



SOLUCIÓN Para encontrar los puntos de intersección con el eje x, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos 3x - \operatorname{sen} 2x &= 0 && \text{sea } y = 0\\
(\cos x - \cos 3x) - \operatorname{sen} 2x &= 0 && \text{agrupamos los primeros dos términos}\\
-2 \operatorname{sen}\frac{x + 3x}{2} \operatorname{sen}\frac{x - 3x}{2} - \operatorname{sen} 2x &= 0 && \text{fórmula 4 de suma a producto}\\
-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen} 2x &= 0 && \text{simplificamos}\\
2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x &= 0 && \text{fórmula para negativos}\\
\operatorname{sen} 2x\,(2 \operatorname{sen} x - 1) &= 0 && \text{factorizamos sen } 2x\\
\operatorname{sen} 2x = 0, \quad 2 \operatorname{sen} x - 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero}\\
\operatorname{sen} 2x = 0, \quad \operatorname{sen} x &= \tfrac{1}{2} && \text{despejamos sen } x
\end{aligned}$$

La ecuación $\operatorname{sen} 2x = 0$ tiene soluciones $2x = \pi n$, o bien, dividiendo entre 2,

$$x = \frac{\pi}{2}n \quad \text{para todo entero } n$$

Si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 4, obtenemos nueve puntos de intersección con el eje x en $[-2\pi, 2\pi]$:

$$0, \quad \pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\pi, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \quad \pm 2\pi$$

Las soluciones de la ecuación sen $x = \frac{1}{2}$ son

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{para todo entero } n$$

Las cuatro soluciones en $[-2\pi, 2\pi]$ se obtienen si $n = 0$ y $n = -1$:

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{11\pi}{6}, \quad -\frac{7\pi}{6}$$

■

6.5 Ejercicios

Ejer. 1–8: Exprese como una suma o diferencia.

1 $\operatorname{sen} 7t \operatorname{sen} t$

2 $\operatorname{sen}(-4x) \cos 8x$

3 $\cos 6u \cos(-4u)$

4 $\cos 2t \operatorname{sen} 6t$

5 $2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 3\theta$

6 $2 \operatorname{sen} 7\theta \operatorname{sen} 5\theta$

7 $3 \cos x \operatorname{sen} 2x$

8 $5 \cos 4u \cos 5u$

Ejer. 9–16: Exprese como producto.

9 $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta$

10 $\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} 8\theta$

11 $\cos 5x - \cos 3x$

12 $\cos 5t + \cos 6t$

13 $\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} 9t$

14 $\cos 3\theta - \cos 5\theta$

15 $\cos x + \cos 2x$

16 $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 2t$

Ejer. 17–24: Verifique la identidad.

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

18 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

19 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} = \tan \dfrac{1}{2}(u + v)$

20 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\cos u - \cos v} = -\cot \dfrac{1}{2}(u + v)$

21 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(u - v)}{\tan \frac{1}{2}(u + v)}$

22 $\dfrac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\tan \dfrac{1}{2}(u + v) \tan \dfrac{1}{2}(u - v)$

23 $4 \cos x \cos 2x \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$

24 $\dfrac{\cos t + \cos 4t + \cos 7t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 7t} = \cot 4t$

Ejer. 25–26: Exprese como suma.

25 $(\operatorname{sen} ax)(\cos bx)$

26 $(\cos au)(\cos bu)$

Ejer. 27–34: Use fórmulas de suma a producto para encontrar las soluciones de la ecuación.

27 $\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 3t = 0$

28 $\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen} 2t$

29 $\cos x = \cos 3x$

30 $\cos 4x - \cos 3x = 0$

31 $\cos 3x + \cos 5x = \cos x$

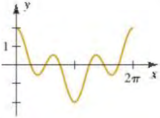
32 $\cos 3x = -\cos 6x$

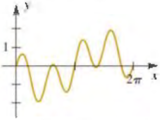
33 $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x = 0$

34 $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 3x$

Ejer. 35–36: En la figura se muestra una gráfica de la función f para $0 \leq x \leq 2\pi$. Use una fórmula de suma a producto para ayudar a encontrar los puntos de intersección con el eje x.

35 $f(x) = \cos x + \cos 3x$ **36** $f(x) = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} x$





37 Refiérase al ejercicio 57 de la sección 6.4. La gráfica de la ecuación $y = \cos 3x - 3 \cos x$ tiene siete puntos críticos para $0 \leq x \leq 2\pi$. Las coordenadas x de estos puntos son soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para encontrar estas coordenadas x.

38 Consulte el ejercicio 58 de la sección 6.4. Las coordenadas x de los puntos críticos en la gráfica de $y = \operatorname{sen} 4x - 4 \operatorname{sen} x$ son soluciones de $\cos 4x - \cos x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para encontrar estas coordenadas x para $0 \leq x \leq 2\pi$.

39 **Vibración de una cuerda de violín** El análisis matemático de una cuerda de violín de longitud l en vibración contiene funciones tales que

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cos\left(\frac{k\pi n}{l}t\right)$$

donde n es un entero, k una constante y t el tiempo. Exprese f como una suma de dos funciones sinusoidales.

40 **Presión en el tímpano** Si dos diapasones se hacen vibrar de forma simultánea con la misma fuerza y luego se sostienen a la misma distancia del tímpano, la presión en el exterior el tímpano en el tiempo t está dada por

$$p(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t$$

donde a, ω_1 y ω_2 son constantes. Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, se produce un tono que alterna entre sonoridad y silencio virtual. Este fenómeno se conoce como pulsación.

a) Use una fórmula de suma a producto para expresar $p(t)$ como producto.

b) Demuestre que $p(t)$ puede considerarse como una onda coseno con periodo aproximado de $2\pi/\omega_1$ y amplitud variable $f(t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. Encuentre la máxima amplitud.

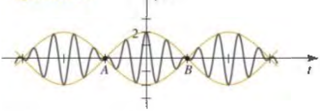
c) En la figura se ve una gráfica de la ecuación

$$p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t$$

El casi silencio se presenta en los puntos A y B, donde la amplitud variable $f(t)$ en el inciso b) es cero. Encuentre las coordenadas de estos puntos y determine con qué frecuencia se presenta el casi silencio.

d) Use la gráfica para demostrar que la función p en el inciso c) tiene periodo 4π. Concluya que la máxima amplitud de 2 ocurre cada 4π unidades de tiempo.

EJERCICIO 40



Ejer. 41–42: Grafique f en el intervalo $[-\pi, \pi]$. a) Estime los puntos de intersección con el eje x. b) Use fórmulas de suma a producto para encontrar los valores exactos de los puntos de intersección con el eje x.

41 $f(x) = \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x$ **42** $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$

Ejer. 43–44: Use la gráfica de f para encontrar la expresión más sencilla $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esta identidad.

43 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

44 $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}$

6.6 Funciones trigonométricas inversas

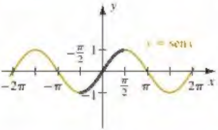
Recuerde de la sección 4.1 que para definir la función inversa f^{-1} de una función f, es esencial que f sea biunívoca; esto es, si $a \neq b$ en el dominio de f, entonces $f(a) \neq f(b)$. La función inversa f^{-1} *invierte* la correspondencia dada por f; esto es,

$$u = f(v) \qquad \text{si y sólo si} \qquad v = f^{-1}(u)$$

Las siguientes relaciones generales entre f y f^{-1} se estudiaron en la sección 4.1.

Relaciones entre f^{-1} y f	
	1) $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, donde x está en el dominio de f^{-1} y y está en el dominio de f.
	2) dominio de f^{-1} = rango de f
	3) rango de f^{-1} = dominio de f
	4) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}
	5) $f^{-1}(f(y)) = y$ para toda y en el dominio de f
	6) El punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}.
	7) Las gráficas de f^{-1} y f son reflejos una de la otra a través de la recta $y = x$.

FIGURA 1



Usaremos la relación 1 para definir cada una de las funciones trigonométricas inversas.

La función seno no es biunívoca, porque números diferentes, por ejemplo, $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$, dan el mismo valor de función $(\frac{1}{2})$. Si restringimos el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces, como se ilustra en la parte gris de la curva de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en la figura 1, obtenemos una función biunívoca (creciente) que toma todo valor de la función seno una vez y sólo una vez. Utilizamos esta *nueva* función con dominio $[-\pi/2, \pi/2]$ y rango $[-1, 1]$ para definir la *función seno inversa*.

Definición de la función seno inversa	
	La **función seno inversa**, que se denota con sen^{-1}, está definida por $$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \operatorname{sen} y$$ para $-1 \le x \le 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

Nota sobre notación: aunque $(\operatorname{sen} x)^{-1} = 1/\operatorname{sen} x = \csc x$, ***ninguna*** *de éstas es igual a $\operatorname{sen}^{-1} x$.*

El dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$, y el rango es $[-\pi/2, \pi/2]$.

La notación $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ a veces se lee "y es el seno inverso de x". La ecuación $x = \operatorname{sen} y$ de la definición nos permite ver a y como ángulo, de modo que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ también se puede leer "y es el ángulo cuyo seno es x" (con $-\pi/2 \le y \le \pi/2$).

La función seno inversa también se denomina **función arcseno**, y $\operatorname{arcsen} x$ se puede usar en lugar de $\operatorname{sen}^{-1} x$. Si $t = \operatorname{arcsen} x$, entonces $\operatorname{sen} t = x$, y t se puede interpretar como una *longitud de arco* en el círculo unitario U con centro en el origen. En todo nuestro trabajo usaremos ambas notaciones, sen^{-1} y arcsen.

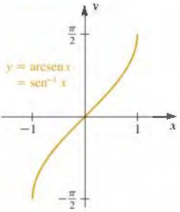
En la siguiente tabla aparecen diversos valores de la función seno inversa.

¡Atención!

Es esencial seleccionar el valor de y en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$ de sen^{-1}. Así, aun cuando $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, el número $y = 5\pi/6$ *no* es el valor de la función inversa $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \operatorname{sen}^{-1}(1)$	$\operatorname{sen} y = 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcsen}(0)$	$\operatorname{sen} y = 0$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\operatorname{sen} y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

FIGURA 2



Hemos justificado el método para resolver una ecuación de la forma sen $\theta = k$ como se estudia en el capítulo 5. Vemos que la tecla de la calculadora SEN^{-1} empleada para obtener $\theta = \operatorname{sen}^{-1} k$ nos da el valor de la función seno inversa.

La relación 7 para las gráficas de f y f^{-1} indica que se puede trazar la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si se refleja la parte gris de la curva de la figura 1 a través de la recta $y = x$. También podemos usar la ecuación $x = \operatorname{sen} y$ con la restricción $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ para encontrar puntos en la gráfica. Esto nos da la figura 2.

La relación 4, $f(f^{-1}(x)) = x$, y la relación 5, $f^{-1}(f(y)) = y$, que se cumple para cualquier función inversa f^{-1}, dan las siguientes propiedades.

Propiedades de sen^{-1}

1) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

2) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} y) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 1 **Uso de las propiedades de sen^{-1}**

Encuentre el valor exacto:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

SOLUCIÓN

a) La forma *difícil* de encontrar el valor de esta expresión es primero determinar el ángulo $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, es decir, $\pi/6$, y luego evaluar sen $(\pi/6)$ para obtener $\frac{1}{2}$. La forma *fácil* es usar la propiedad 1 de sen^{-1}:

$$\text{como} \qquad -1 \le \tfrac{1}{2} \le 1,\ \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

b) Dado que $-\pi/2 \le \pi/4 \le \pi/2$, podemos usar la propiedad 2 de sen^{-1} para obtener

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

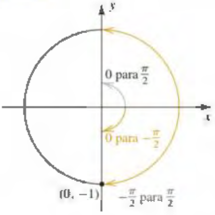
c) ¡Tenga cuidado! Como $2\pi/3$ no está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no podemos usar la propiedad 2 de sen^{-1}. En cambio, primero se evalúa la expresión interior, sen $(2\pi/3)$, y luego se usa la definición de sen^{-1}, como sigue:

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$ ■

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar un valor de sen^{-1}**

Encuentre el valor exacto de y si $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

FIGURA 3



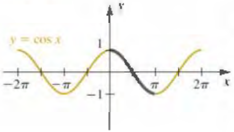
SOLUCIÓN Primero evaluamos la expresión interior, $\tan(3\pi/4)$, y luego obtenemos el seno inverso de ese número:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$$

En otras palabras, tenemos "y es el ángulo cuyo seno es -1". Puede ser útil recordar los valores de arcseno al asociarlos con los ángulos correspondientes a la parte color naranja del círculo unitario que se ve en la figura 3. En la figura observamos que $-\pi/2$ es el ángulo cuyo seno es -1. Se deduce que $y = -\pi/2$ y, por lo tanto,

$$y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$ ■

FIGURA 4



Las otras funciones trigonométricas también se pueden usar para introducir funciones trigonométricas inversas. El procedimiento consiste primero en determinar un subconjunto conveniente del dominio para obtener una función biunívoca. Si el dominio de la función coseno está restringido al intervalo $[0, \pi]$, como se ilustra en la parte gris de la gráfica de $y = \cos x$ en la figura 4, obtenemos una función biunívoca (decreciente) que toma todo valor de la función coseno una vez y sólo una vez. Entonces, usamos esta *nueva* función con dominio $[0, \pi]$ y rango $[-1, 1]$ para definir la *función coseno inversa*.

Definición de la función coseno inversa

La **función coseno inversa**, que se denota con $\cos^{-1}$, está definida por

$$y = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

El dominio de la función coseno inversa es $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$. Note que el rango de $\cos^{-1}$ *no* es el mismo que el rango de sen^{-1} pero sus dominios son iguales.

La notación $y = \cos^{-1} x$ se puede leer "y es el coseno inverso de x" o "y es el ángulo cuyo coseno es x" (con $0 \leq y \leq \pi$).

La función coseno inversa también se llama **función arccoseno** y la notación arccos x se usa indistintamente con $\cos^{-1} x$.

Diversos valores de la función coseno inversa aparecen en la siguiente tabla.

¡Atención

Es *esencial* seleccionar el valor y en el rango $[0, \pi]$ de $\cos^{-1}$.

Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = \frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}(1)$	$\cos y = 1$ y $0 \le y \le \pi$	$y = 0$
$y = \arccos(0)$	$\cos y = 0$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

Podemos trazar la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ al reflejar la parte gris de la curva de la figura 4 a través de la recta $y = x$, lo cual da el trazo de la figura 5. También podríamos usar la ecuación $x = \cos y$, con $0 \le y \le \pi$, para encontrar puntos en la gráfica. Como lo indica la gráfica, *los valores de la función coseno inverso nunca son negativos*.

Al igual que en el ejemplo 2 y la figura 3 para arcseno, puede ser útil asociar los valores arccoseno con los ángulos correspondientes al arco color naranja de la figura 6.

FIGURA 5

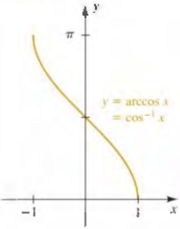
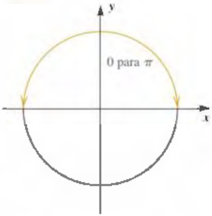


FIGURA 6



Usando las relaciones 4 y 5 para las funciones inversas generales f y f^{-1}, podemos obtener las siguientes propiedades.

Propiedades de $\cos^{-1}$

1) $\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

2) $\cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y$ si $0 \le y \le \pi$

EJEMPLO 3 **Uso de las propiedades de $\cos^{-1}$**

Encuentre el valor exacto:

a) $\cos[\cos^{-1}(-0.5)]$ **b)** $\cos^{-1}(\cos 3.14)$ **c)** $\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

SOLUCIÓN Para los incisos a) y b) se pueden usar las propiedades 1 y 2 de $\cos^{-1}$, respectivamente.

a) Dado que $-1 \le -0.5 \le 1$, $\cos[\cos^{-1}(-0.5)] = -0.5$.

b) Dado que $0 \le 3.14 \le \pi$, $\cos^{-1}(\cos 3.14) = 3.14$.

c) Primero obtenemos $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ y luego utilizamos la definición de $\cos^{-1}$, como sigue:

$$\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

EJEMPLO 4 **Determinación del valor de una función trigonométrica**

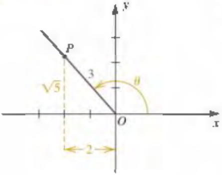
Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}[\arccos(-\frac{2}{3})]$.

SOLUCIÓN Sea $\theta = \arccos(-\frac{2}{3})$; entonces, usando la definición de la función coseno inversa, tenemos

$$\cos\theta = -\tfrac{2}{3} \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \pi$$

En consecuencia, θ está en el segundo cuadrante, como se ilustra en la figura 7. Si seleccionamos el punto P en el lado terminal con coordenada x de -2, la hipotenusa del triángulo de la figura debe tener longitud 3, porque $\cos\theta = -\frac{2}{3}$. Por consiguiente, por el teorema de Pitágoras, la coordenada y de P es

FIGURA 7



$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Si restringimos el dominio de la función tangente de la rama definida en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, obtenemos una función biunívoca (creciente) (vea la figura 3 en la sección 6.2). Se usa esta nueva función para definir la *función tangente inversa.*

Definición de la función tangente inversa

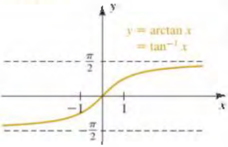
La **función tangente inversa**, o **función arctangente**, denotada por $\tan^{-1}$ o arctan, se define por

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \text{ si y sólo si } x = \tan y$$

para cualquier número real x y para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

El dominio de la función arctan es $\mathbb{R}$, y el rango es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

FIGURA 8



Podemos obtener la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ en la figura 8 trazando la gráfica de $x = \tan y$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$. Observe que las dos asíntotas *verticales*, $x = \pm\pi/2$, de la función tangente corresponden a las dos asíntotas *horizontales*, $y = \pm\pi/2$, de la función arctangente.

Al igual que con sen^{-1} y $\cos^{-1}$, tenemos las siguientes propiedades para $\tan^{-1}$.

Propiedades de $\tan^{-1}$

1) $\tan(\tan^{-1} x) = \tan(\arctan x) = x$ para toda x

2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 5 **Uso de las propiedades de $\tan^{-1}$**

Encuentre el valor exacto:

a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ **b)** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\arctan(\tan \pi)$

SOLUCIÓN

a) Por la propiedad 1 de $\tan^{-1}$,

$$\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000$$

b) Dado que $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$, tenemos, por la propiedad 2 de $\tan^{-1}$,

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

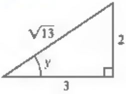
c) Dado que $\pi > \pi/2$, no podemos usar la segunda propiedad de $\tan^{-1}$. Entonces, primero obtenemos $\tan \pi$ y luego evaluamos, como sigue:

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$$ ■

EJEMPLO 6 **Obtención del valor de una función trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de $\sec\left(\arctan\frac{2}{3}\right)$.

FIGURA 9



SOLUCIÓN Si $y = \arctan\frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. Deseamos encontrar $\sec y$. Como $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ para toda x y $\tan y > 0$, deducimos que $0 < y < \pi/2$. Así, podemos considerar que y es la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\tan y = \frac{2}{3}$, como se ilustra en la figura 9. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Con respecto al triángulo, obtenemos

$$\sec\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}$$ ■

EJEMPLO 7 **Cómo encontrar el valor de una función trigonométrica**

Encuentre el valor exacto de sen $(\arctan \frac{1}{2} - \arccos \frac{4}{5})$

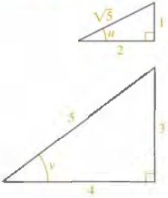
SOLUCIÓN Si

$$u = \arctan \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \arccos \frac{4}{5}$$

entonces $\qquad \tan u = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos v = \frac{4}{5}$

Deseamos encontrar sen $(u - v)$. Como u y v están en el intervalo $(0, \pi/2)$, podemos considerar que son medidas en radianes de ángulos agudos positivos y podemos remitirnos a los triángulos rectángulos de la figura 10. Esto da

FIGURA 10



$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} v = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos v = \frac{4}{5}$$

Por la fórmula de resta para el seno,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u - v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{3}{5} \\ &= \frac{-2}{5\sqrt{5}}, \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8 **Cambio de una expresión que contenga $\operatorname{sen}^{-1} x$ por una expresión algebraica**

Si $-1 \le x \le 1$, reescriba $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x.

SOLUCIÓN Sea

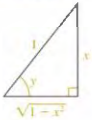
$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{o, lo que es equivalente,} \qquad \operatorname{sen} y = x$$

Deseamos expresar $\cos y$ en términos de x. Como $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, deducimos que $\cos y \ge 0$ y, por lo tanto (de $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$)

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

En consecuencia, $\qquad \cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

FIGURA 11



Observe que $\operatorname{sen} y = \frac{x}{1} = x$.

La última identidad también es geométricamente evidente si $0 < x < 1$. En este caso, $0 < y < \pi/2$ y podemos considerar a y como la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que sen $y = x$, como se ilustra en la figura 11. (El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se encuentra por el teorema de Pitágoras.) Al consultar el triángulo, tenemos

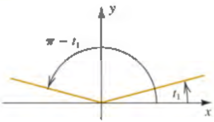
$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$$

■

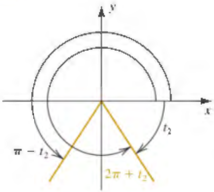
La mayoría de las ecuaciones trigonométricas consideradas en la sección 6.2 tenían soluciones que eran múltiplos racionales de π, por ejemplo, $\pi/3$, $3\pi/4$, π, y así sucesivamente. Si las soluciones de las ecuaciones trigonométricas no son de ese tipo, a veces se pueden usar funciones inversas para expresarlas en forma exacta, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

FIGURA 12

a)



b)



EJEMPLO 9 **Uso de funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación**

Encuentre las soluciones de $5\ \mathrm{sen}^2\ t + 3\ \mathrm{sen}\ t - 1 = 0$ en $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación puede considerarse como cuadrática con sen t. Si aplicamos la fórmula cuadrática, obtenemos

$$\mathrm{sen}\, t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

Si utilizamos la definición de la función seno inverso, obtenemos las siguientes soluciones:

$$t_1 = \mathrm{sen}^{-1}\, \tfrac{1}{10}\left(-3 + \sqrt{29}\right) \approx 0.2408$$
$$t_2 = \mathrm{sen}^{-1}\, \tfrac{1}{10}\left(-3 - \sqrt{29}\right) \approx -0.9946$$

Como el rango de arcsen es $[-\pi/2, \pi/2]$, sabemos que t_1 está en $[0, \pi/2]$ y t_2 está en $[-\pi/2, 0]$. Usando t_1 como ángulo de referencia, también tenemos $\pi - t_1$ como solución en el segundo cuadrante, como se muestra en la figura 12a). Podemos sumar 2π a t_2 para obtener una solución en el cuarto cuadrante, como se ve en la figura 12b). La solución en el tercer cuadrante es $\pi - t_2$, no $\pi + t_2$, porque t_2 es negativa.

Por lo tanto, con t_1 y t_2 como se definieron previamente, las cuatro soluciones exactas son

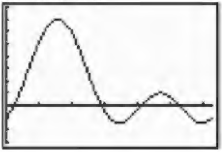
$$t_1, \quad \pi - t_1, \quad \pi - t_2, \quad \text{y} \quad 2\pi + t_2,$$

y las cuatro soluciones aproximadas son

$$0.2408, \quad 2.9008, \quad 4.1361 \quad \text{y} \quad 5.2886.$$

FIGURA 13

$[0, 2\pi]$ por $[-3, 8]$



Si sólo se piden soluciones aproximadas, podemos usar una calculadora graficadora para encontrar los puntos de intersección con el eje x de $Y_1 = 5\ \mathrm{sen}^2\, x + 3\ \mathrm{sen}\, x - 1$. Si graficamos Y_1 como se ve en la figura 13 y usamos una función de raíz, obtenemos las mismas cuatro soluciones aproximadas que se presentaron antes. ■

El siguiente ejemplo ilustra una de muchas identidades que son verdaderas para funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 10 **Verificación de una identidad que contenga funciones trigonométricas inversas**

Verifique la identidad $\mathrm{sen}^{-1}\, x + \cos^{-1}\, x = \pi/2$ para $-1 \le x \le 1$.

SOLUCIÓN Sean

$$\alpha = \mathrm{sen}^{-1}\, x \text{ y } \beta = \cos^{-1}\, x$$

Deseamos demostrar que $\alpha + \beta = \pi/2$. De las definiciones de sen^{-1} y $\cos^{-1}$,

$$\mathrm{sen}\ \alpha = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

y

$$\cos \beta = x \text{ para } 0 \le \beta \le \pi$$

Si sumamos las dos desigualdades de la derecha, vemos que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}$$

Note también que

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

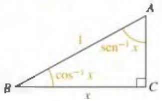
y

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - x^2}$$

Si usamos la fórmula de suma para seno, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2}\\ &= x^2 + (1 - x^2) = 1\end{aligned}$$

FIGURA 14



Como $\alpha + \beta$ está en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la ecuación $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1$ tiene sólo una solución, $\alpha + \beta = \pi/2$, que es lo que se deseaba demostrar.

Podemos interpretar geométricamente la identidad si $0 < x < 1$. Si creamos un triángulo rectángulo con un lado de longitud x e hipotenusa de longitud 1, como se ilustra en la figura 14, entonces el ángulo β en B es un ángulo cuyo coseno es x; esto es, $\beta = \cos^{-1} x$. Del mismo modo, el ángulo α en A es un ángulo cuyo sen es x; esto es, $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$. Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, $\alpha + \beta = \pi/2$, o bien, lo que es equivalente,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

■

Cada una de las restantes funciones trigonométricas inversas se define de la misma forma que las tres primeras, es decir, se selecciona un dominio D en el que la función trigonométrica correspondiente sea biunívoca y luego se usa la técnica habitual (donde y está en D):

$$y = \cot^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cot y$$

$$y = \sec^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \sec y$$

$$y = \csc^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \csc y$$

La función $\sec^{-1}$ se usa en cálculo, pero $\cot^{-1}$ y $\csc^{-1}$ raras veces se usan. Debido a su limitado uso en aplicaciones, no consideramos ejemplos o ejercicios relativos a estas funciones, y sólo resumiremos los dominios, rangos y gráficas comunes en la tabla de la página 470. Un resumen similar de las seis funciones trigonométricas y sus inversos aparece en el Apéndice III.

Con frecuencia es difícil verificar una identidad que contiene funciones trigonométricas inversas, como se vio en el ejemplo 10. Una calculadora graficadora puede ser muy útil para determinar si una ecuación que contiene funciones trigonométricas inversas es una identidad y, si no lo es, para encontrar las soluciones de la ecuación. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

EJEMPLO 11 **Investigación de una ecuación**

Sabemos que $\tan x = (\operatorname{sen} x)/\cos x$ es una identidad. Determine si la ecuación

$$\arctan x = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$$

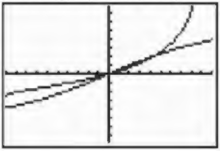
es una identidad; si no lo es, aproxime los valores de x para los cuales la ecuación es verdadera, es decir, resuelva la ecuación.

SOLUCIÓN Para comenzar, hacemos las asignaciones

$$Y_1 = \tan^{-1} x \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \operatorname{sen}^{-1} x/\cos^{-1} x$$

Como el dominio de sen^{-1} y $\cos^{-1}$ es $[-1, 1]$ y el rango de $\tan^{-1}$ es $(-\pi/2, \pi/2)$, seleccionamos el visor rectangular que se muestra en la figura 15.

FIGURA 15
$[-1, 1, 0.1]$ por $[-\pi/2, \pi/2, 0.2]$

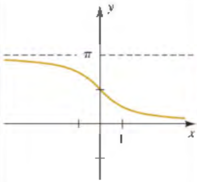
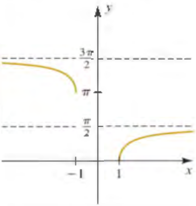
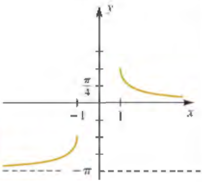


Como las gráficas que representan a Y_1 y Y_2 no son iguales, sabemos que *la ecuación dada no es una identidad*, pero debido a que las gráficas se intersecan dos veces, sabemos que la ecuación tiene dos soluciones. Parece que $x = 0$ es una solución, y una rápida verificación de la ecuación dada comprueba que esto es cierto. Para calcular el punto de intersección en el primer cuadrante, usamos una función de intersección para determinar que el punto tiene las coordenadas aproximadas (0.450, 0.423). Por lo tanto,

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad x \approx 0.450$$

son los valores de x para los cuales la ecuación dada es verdadera. ■

Resumen de funciones de $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ y $\csc^{-1}$

Función	$y = \cot^{-1} x$	$y = \sec^{-1} x$	$y = \csc^{-1} x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$\lvert x \rvert \geq 1$
Rango	$(0, \pi)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
Gráfica			

6.6 Ejercicios

Ejer. 1 – 22: Encuentre el valor exacto de la expresión siempre que esté definido.

1 a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

2 a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\tan^{-1}(-1)$

3 a) $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 a) $\operatorname{arcsen} 0$ b) $\arccos(-1)$ c) $\arctan 0$

5 a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\pi}{3}$ b) $\cos^{-1}\frac{\pi}{2}$ c) $\tan^{-1} 1$

6 a) $\operatorname{arcsen}\frac{\pi}{2}$ b) $\arccos\frac{\pi}{3}$

c) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7 a) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{10}\right)\right]$ b) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

c) $\tan(\arctan 14)$

8 a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ b) $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$

c) $\tan\left[\tan^{-1}(-9)\right]$

9 a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

c) $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

10 a) $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ b) $\arccos(\cos 0)$

c) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

11 a) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ b) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

c) $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{4}\right)$

12 a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

c) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

13 a) $\operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ b) $\cos\left(\tan^{-1} 1\right)$

c) $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}(-1)\right]$

14 a) $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$ b) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} 1\right)$

c) $\tan\left(\cos^{-1} 0\right)$

15 a) $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ b) $\sec\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

c) $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

16 a) $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)\right]$ b) $\sec\left(\tan^{-1}\frac{7}{4}\right)$

c) $\csc\left(\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$

17 a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \arccos 0\right)$

b) $\cos\left[\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\right]$

c) $\tan\left(\arctan\frac{4}{3} + \arccos\frac{8}{17}\right)$

18 a) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{5}{13} - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

b) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5} + \tan^{-1} \frac{3}{4}\right)$

c) $\tan\left(\cos^{-1} \frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}\right)$

19 a) $\operatorname{sen}\left[2 \arccos\left(-\frac{24}{25}\right)\right]$ b) $\cos\left(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{15}{17}\right)$

c) $\tan\left(2 \tan^{-1} \frac{3}{4}\right)$

20 a) $\operatorname{sen}\left(2 \tan^{-1} \frac{5}{12}\right)$ b) $\cos\left(2 \arccos \frac{9}{41}\right)$

c) $\tan\left[2 \operatorname{arcsen}\left(-\frac{15}{17}\right)\right]$

21 a) $\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)\right]$ b) $\cos\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{8}{15}\right)$

c) $\tan\left(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

22 a) $\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ b) $\cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13}\right)$

c) $\tan\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{40}{9}\right)$

Ejer. 23-34: Escriba la expresión como una expresión algebraica con x para $x > 0$.

23 $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$ **24** $\tan(\arccos x)$

25 $\sec\left(\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{3}\right)$ **26** $\csc\left(\tan^{-1} \dfrac{x}{2}\right)$

27 $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$ **28** $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\right)$

29 $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$ **30** $\cos(2 \tan^{-1} x)$

31 $\tan\left(2 \cos^{-1} \dfrac{1}{x}\right)$ **32** $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$

33 $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$ **34** $\tan\left(\dfrac{1}{2} \cos^{-1} \dfrac{1}{x}\right)$

Ejer. 35-36: Complete los enunciados.

35 a) Cuando $x \to -1^+$, $\operatorname{sen}^{-1} x \to$ ___

b) Cuando $x \to 1^-$, $\cos^{-1} x \to$ ___

c) Cuando $x \to \infty$, $\tan^{-1} x \to$ ___

36 a) Cuando $x \to 1^-$, $\operatorname{sen}^{-1} x \to$ ___

b) Cuando $x \to -1^+$, $\cos^{-1} x \to$ ___

c) Cuando $x \to -\infty$, $\tan^{-1} x \to$ ___

Ejer. 37-50: Trace la gráfica de la ecuación.

37 $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$ **38** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} x$

39 $y = \operatorname{sen}^{-1}(x + 1)$ **40** $y = \operatorname{sen}^{-1}(x - 2) + \dfrac{\pi}{2}$

41 $y = \cos^{-1} \frac{1}{2}x$ **42** $y = 2 \cos^{-1} x$

43 $y = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$ **44** $y = \cos^{-1}(x + 1)$

45 $y = 2 + \tan^{-1} x$ **46** $y = \tan^{-1} 2x$

47 $y = \dfrac{6}{\pi} \tan^{-1} x$ **48** $y = \tan^{-1}(x - \pi)$

49 $y = \operatorname{sen}(\arccos x)$ **50** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

Ejer. 51-54: La ecuación dada tiene la forma $y = f(x)$. a) Encuentre el dominio de f. b) Encuentre el rango de f. c) Despeje x en términos de y.

51 $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1}(x - 3)$ **52** $y = 3 \tan^{-1}(2x + 1)$

53 $y = 4 \cos^{-1} \frac{2}{3}x$ **54** $y = 2 \operatorname{sen}^{-1}(3x - 4)$

Ejer. 55-58: Resuelva la ecuación despejando x en términos de y si x está restringida al intervalo dado.

55 $y = -3 - \operatorname{sen} x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

56 $y = 2 + 3 \operatorname{sen} x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

57 $y = 15 - 2 \cos x$; $[0, \pi]$

58 $y = 6 - 3 \cos x$; $[0, \pi]$

Ejer. 59-60: Resuelva la ecuación despejando x en términos de y si $0 < x < \pi$ y $0 < y < \pi$.

59 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{3} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{4}$

60 $\dfrac{4}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} y}$

Ejer. 61-72: Use funciones trigonométricas inversas para encontrar las soluciones de la ecuación que están en el intervalo dado y aproxime las soluciones a cuatro posiciones decimales.

61 $\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$; $[0, 2\pi)$

62 $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$; $[0, 2\pi)$

63 $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0$; $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

64 $3\operatorname{sen}^2 t + 7\operatorname{sen} t + 3 = 0$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

65 $15\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0$; $[0, \pi]$

66 $3\tan^4\theta - 19\tan^2\theta + 2 = 0$; $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

67 $6\operatorname{sen}^3\theta + 18\operatorname{sen}^2\theta - 5\operatorname{sen}\theta - 15 = 0$; $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

68 $6\operatorname{sen} 2x - 8\cos x + 9\operatorname{sen} x - 6 = 0$; $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

69 $(\cos x)(15\cos x + 4) = 3$; $[0, 2\pi)$

70 $6\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x + 2$; $[0, 2\pi)$

71 $3\cos 2x - 7\cos x + 5 = 0$; $[0, 2\pi)$

72 $\operatorname{sen} 2x = -1.5\cos x$; $[0, 2\pi)$

Ejer. 73-74: Si un terremoto tiene un desplazamiento horizontal total de S metros a lo largo de su línea de falla, el movimiento horizontal M de un punto en la superficie de la Tierra a d kilómetros de la línea de falla se puede calcular usando la fórmula

$$M = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{d}{D}\right)$$

donde D es la profundidad (en kilómetros) bajo la superficie del punto focal del terremoto.

73 **Movimiento de un terremoto** Para el terremoto de San Francisco en 1906, S fue de 4 metros y D de 3.5 kilómetros. Aproxime M para los valores expresados de D.

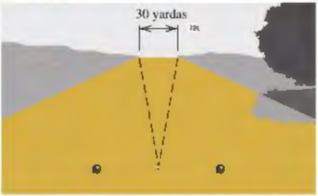
a) 1 kilómetro **b)** 4 kilómetros

c) 10 kilómetros

74 **Movimiento de un terremoto** Calcule la profundidad D del punto focal de un terremoto con $S = 3$ m si un punto en la superficie de la Tierra, a 5 kilómetros de la línea de falla, se movió horizontalmente 0.6 metros.

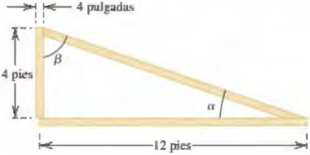
75 **Tiro de un golfista** Un golfista, centrado en un *fairway* recto de 30 yardas de ancho, golpea una bola lanzándola a 280 yardas. Aproxime el ángulo más grande que el tiro puede tener desde el centro del *fairway* si la pelota debe permanecer en el *fairway* (vea la figura).

EJERCICIO 75



76 **Colocación de un puntal de madera** Una pieza de madera de 14 pies se colocará como puntal, como se muestra en la figura. Suponiendo que toda la pieza es de 2 por 4 pulgadas, encuentre α y β.

EJERCICIO 76

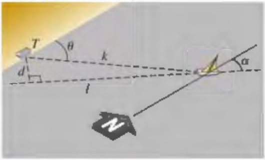


77 **Seguimiento de un velero** Como se observa en la figura, un velero está siguiendo un rumbo l en línea recta. (Suponga que la orilla es paralela a la línea norte-sur.) La distancia más corta desde una estación de seguimiento T al rumbo es de d millas. A medida que el velero navega, la estación de seguimiento registra su distancia k desde T y su dirección θ con respecto a T. El ángulo α especifica la dirección del velero.

a) Exprese α en términos de d, k y θ.

b) Estime α al grado más cercano si $d = 50$ millas, $k = 210$ millas y $\theta = 53.4°$.

EJERCICIO 77



78 **Cálculo de ángulos de visibilidad** Una crítica de arte cuyo nivel visual es de 6 pies sobre el piso ve una pintura de 10 pies de alto que está montada a 4 pies sobre el piso, como se muestra en la figura.

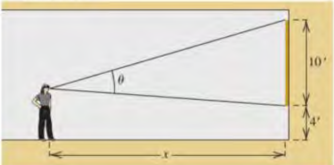
a) Si la crítica de arte está de pie a x pies de la pared, exprese el ángulo de visibilidad θ en términos de x.

b) Use la fórmula de suma para tangente para demostrar que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10x}{x^2 - 16}\right).$$

c) ¿Para qué valor de x es $\theta = 45°$?

EJERCICIO 78



Ejer. 79–84: Verifique la identidad.

79 $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

80 $\arccos x + \arccos \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\pi}{2}, 0 \le x \le 1$

81 $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$

82 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

83 $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}, x > 0$

84 $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1), 0 \le x \le 1$

Ejer. 85–86: Grafique f y determine su dominio y rango.

85 $f(x) = 2\operatorname{sen}^{-1}(x - 1) + \cos^{-1}\frac{1}{2}x$

86 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(1 - 2x) + 3\tan^{-1}\sqrt{x + 2}$

Ejer. 87–88: Use una gráfica para estimar las soluciones de la ecuación.

87 $\operatorname{sen}^{-1} 2x = \tan^{-1}(1 - x)$

88 $\cos^{-1}\left(x - \frac{1}{5}\right) = 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2} - x\right)$

89 **Diseño de un colector solar** Al diseñar un colector para energía solar, una consideración importante es la cantidad de luz solar que se transmite a través del vidrio al agua que habrá de calentarse. Si el ángulo de incidencia θ de los rayos solares se mide desde una línea perpendicular a la superficie del vidrio, entonces la fracción $f(\theta)$ de luz solar que refleja el vidrio se puede calcular con

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta}\right)$$

donde

$$\alpha = \theta - \gamma, \quad \beta = \theta + \gamma \quad \text{y} \quad \gamma = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1.52}\right)$$

Grafique f para $0 < \theta < \pi/2$, y calcule θ cuando $f(\theta) = 0.2$.

90 **Diseño de un colector solar** La altura del sol es el ángulo ϕ que los rayos solares forman con el horizonte en un tiempo y lugar dados. Es importante determinar φ para inclinar un colector solar y obtener la máxima eficiencia. El 21 de junio a una latitud de 51.7°N, la altura del Sol se puede aproximar con la fórmula

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} 23.5° \operatorname{sen} 51.7° + \cos 23.5° \cos 51.7° \cos H,$$

donde H es el ángulo horario, con $H = -\pi/2$ a las 6:00 A.M., $H = 0$ al mediodía y $H = \pi/2$ a las 6:00 P.M.

a) De la fórmula despeje ϕ y grafique la ecuación resultante para $-\pi/2 \le H \le \pi/2$.

b) Calcule las horas en que $\phi = 45°$.

Ejer. 91–94: Muchas calculadoras tienen pantallas que son más anchas que altas. La razón aproximada entre la altura y el ancho es comúnmente de 2:3. Sea la altura real de la pantalla de una calculadora a lo largo del eje y de 2 unidades, el ancho real de la pantalla a lo largo del eje x es de 3 unidades y Xscl = Yscl = 1. Como la recta $y = x$ debe pasar por el punto (1, 1), la pendiente real m_A de esta recta en la pantalla de la calculadora está dada por

$$m_A = \frac{\textbf{distancia real entre las marcas de división en el eje } y}{\textbf{distancia real entre las marcas de división en el eje } x}$$

Usando esta información, grafique $y = x$ en el visor rectangular dado y prediga el ángulo real θ que la gráfica forma con el eje x en la pantalla.

91 [0, 3] por [0, 2]

92 [0, 6] por [0, 2]

93 [0, 3] por [0, 4]

94 [0,2] por [0, 2]

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1-22: Verifique la identidad.

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\tan\theta = \sec\theta$

3 $\dfrac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \operatorname{sen}\theta$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x\csc^2 x$

5 $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} t} = (\sec t - \tan t)\sec t$

6 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$

8 $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1 + \sec v}{2\sec v}$

9 $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi} = \tan\phi - \cot\phi$

10 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}{-1 + \csc u\csc v}$

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3\left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = 1$

12 $\dfrac{\cos\gamma}{1 - \tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1 - \cot\gamma} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = 1 + \operatorname{sen} t$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{1}{1 - \cos t}$

15 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \dfrac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$

16 $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{|\cos\theta|}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

18 $\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\beta = \operatorname{sen}\beta\cos^3\beta - \cos\beta\operatorname{sen}^3\beta$

20 $\tan\frac{1}{2}\theta = \csc\theta - \cot\theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$

22 $\arctan x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1 - x^2},\ -1 < x < 1$

Ejer. 23-40: Encuentre las soluciones de la ecuación que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

23 $2\cos^3\theta - \cos\theta = 0$

24 $2\cos\alpha + \tan\alpha = \sec\alpha$

25 $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$

26 $\csc^5\theta - 4\csc\theta = 0$

27 $2\cos^3 t + \cos^2 t - 2\cos t - 1 = 0$

28 $\cos x\cot^2 x = \cos x$

29 $\operatorname{sen}\beta + 2\cos^2\beta = 1$

30 $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

31 $2\sec u\operatorname{sen} u + 2 = 4\operatorname{sen} u + \sec u$

32 $\tan 2x\cos 2x = \operatorname{sen} 2x$

33 $2\cos 3x\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x$

34 $\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = 0$

35 $\cos \pi x + \operatorname{sen} \pi x = 0$ **36** $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u$

37 $2\cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3\cos\theta = 0$ **38** $\sec 2x \csc 2x = 2 \csc 2x$

39 $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$ **40** $\cos 3x = -\cos 2x$

Ejer. 41-44. Encuentre el valor exacto

41 $\cos 75°$ **42** $\tan 285°$

43 $\operatorname{sen} 195°$ **44** $\csc \dfrac{\pi}{8}$

Ejer. 45-58: Si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc\theta = 5/3$ y $\cos\phi = 8/17$, encuentre el valor exacto.

45 $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$ **46** $\cos(\theta + \phi)$

47 $\tan(\phi + \theta)$ **48** $\tan(\theta - \phi)$

49 $\operatorname{sen}(\phi - \theta)$ **50** $\operatorname{sen}(\theta - \phi)$

51 $\cos(\phi - \theta)$ **52** $\cos(\theta - \phi)$

53 $\operatorname{sen} 2\phi$ **54** $\cos 2\phi$

55 $\tan 2\theta$ **56** $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$

57 $\tan \frac{1}{2}\theta$ **58** $\cos \frac{1}{2}\phi$

59 Exprese como una suma o diferencia:

a) $\operatorname{sen} 7t \operatorname{sen} 4t$ **b)** $\cos \frac{1}{4}u \cos\left(-\frac{1}{6}u\right)$

c) $6 \cos 5x \operatorname{sen} 3x$ **d)** $4 \operatorname{sen} 3\theta \cos 7\theta$

60 Exprese como un producto:

a) $\operatorname{sen} 8u + \operatorname{sen} 2u$ **b)** $\cos 3\theta - \cos 8\theta$

c) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}t - \operatorname{sen}\frac{1}{5}t$ **d)** $3\cos 2x + 3\cos 6x$

Ejer. 61-76: Encuentre el valor exacto de la expresión siempre que esté definido.

61 $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **62** $\arcsen\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

63 $\arctan \sqrt{3}$ **64** $\arccos\left(\tan \dfrac{3\pi}{4}\right)$

65 $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$ **66** $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}\right)$

67 $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **68** $\tan(\tan^{-1} 2)$

69 $\cos^{-1}\left(\tan\dfrac{\pi}{3}\right)$ **70** $\sec(2\tan^{-1} 1)$

71 $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2}\right)$ **72** $\cos^{-1}(\operatorname{sen} 0)$

73 $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{15}{17} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{8}{17}\right)$ **74** $\cos\left(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

75 $\operatorname{sen}(2\tan^{-1} 7)$ **76** $\tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5}\right)$

Ejer. 77-80: Trace la gráfica de la ecuación.

77 $y = \cos^{-1} 3x$ **78** $y = 4\operatorname{sen}^{-1} x$

79 $y = 1 - \operatorname{sen}^{-1} x$ **80** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\cos^{-1} x\right)$

81 Exprese $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de las funciones trigonométricas de α, β y γ.

82 **Fuerza de un pie** Cuando una persona camina, la magnitud F de la fuerza vertical de un pie sobre el suelo (vea la figura) puede describirse con

$$F = A(\cos bt - a\cos 3bt),$$

donde t es el tiempo en segundos, $A > 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$.

EJERCICIO 82

a) Demuestre que $F = 0$ cuando $t = -\pi/(2b)$ y $t = \pi/(2b)$. (El tiempo $t = -\pi/(2b)$ corresponde al momento cuando el pie toca el suelo y el otro pie soporta el peso del cuerpo.)

b) La fuerza máxima ocurre cuando

$$3a \operatorname{sen} 3bt = \operatorname{sen} bt.$$

Si $a = \frac{1}{3}$, encuentre las soluciones de esta ecuación para el intervalo $-\pi/2b) < t < \pi/(2b)$.

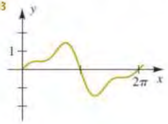
c) Si $a = \frac{1}{3}$, exprese la máxima fuerza en términos de A.

83 En la figura se muestra una gráfica de la ecuación

$$y = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x.$$

Las coordenadas x de los puntos críticos son soluciones de la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para encontrar estas coordenadas x.

EJERCICIO 83

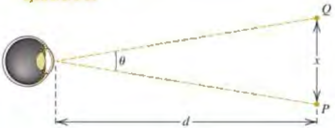


84 **Diferenciación visual** El ojo humano puede distinguir entre dos puntos distantes P y Q siempre que el ángulo de resolución θ no sea demasiado pequeño. Suponga que P y Q están a x unidades de distancia entre sí y a d unidades del ojo, como se ilustra en la figura.

a) Exprese x en términos de d y θ.

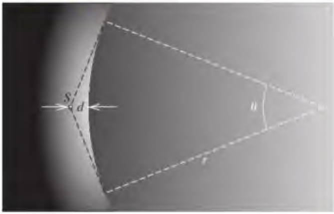
b) Para una persona con visión normal, el ángulo mínimo de resolución distinguible es de unos 0.0005 radianes. Si un bolígrafo de 6 pulgadas de largo es visto por dicha persona a una distancia de d pies, ¿para qué valores de d serán distinguibles los puntos extremos del bolígrafo?

EJERCICIO 84



85 **Satélites** Un satélite S gira alrededor de un planeta a una distancia de d millas de su superficie. La parte de la superficie del planeta que es visible desde el satélite es determinada por el ángulo θ que se indica en la figura.

EJERCICIO 85



a) Suponiendo que el planeta es de forma esférica, exprese d en términos de θ y el radio r del planeta.

b) Calcule θ para un satélite a 300 millas de la superficie de la Tierra, usando $r = 4000$ millas.

86 **Cañones urbanos** Debido a los edificios altos y a calles relativamente angostas de las zonas céntricas de algunas ciudades, la cantidad de luz solar que ilumina estos "cañones" se reduce en gran medida. Si h es la altura promedio de los edificios y w es el ancho de la calle, la estrechez N de la calle está definida por $N = h/w$. El ángulo θ del horizonte es definido por $\tan \theta = N$. (El valor $\theta = 63°$ puede provocar una pérdida de iluminación de 85%.) Aproxime el ángulo del horizonte para los siguientes valores de h y w.

a) $h = 400$ pies, $w = 80$ pies

b) $h = 55$ m, $w = 30$ m

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 Verifique la siguiente identidad:

$$\frac{\tan x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$$

(*Sugerencia*: en algún punto, considere una factorización especial.)

2 Consulte el ejemplo 6 de la sección 6.1. Suponga que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y reescriba la conclusión usando una función definida por tramos.

3 ¿Cuántas soluciones tiene la siguiente ecuación en $[0, 2\pi)$? Encuentre la mayor.

$$3 \cos 45x + 4 \operatorname{sen} 45x = 5$$

4 Grafique el cociente de diferencias para $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $h = 0.5, 0.1$ y 0.001 en la pantalla $[0, 2\pi, \pi/2]$ por $[-1, 1]$. ¿Qué generalización se puede hacer a partir de estas gráficas? Demuestre que este cociente se puede escribir como

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

5 Hay varias relaciones exactas interesantes entre π y las funciones trigonométricas inversas, como

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

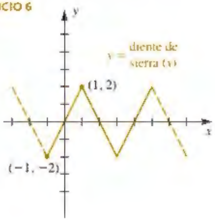
Use identidades trigonométricas para demostrar que esta relación es verdadera. Las otras dos relaciones son

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

y $$\pi = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3.$$

6 En la figura se muestra una función llamada *función diente de sierra*.

EJERCICIO 6



a) Defina una función diente de sierra inversa (**arcsierra**), e incluya su dominio y rango.

b) Encuentre arcsierra (1.7) y arcsierra (−0.8).

c) Formule dos propiedades de arcsierra (semejantes a la propiedad sen (sen^{-1})).

d) Grafique la función arcsierra.

7 Verifique la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}^4(x/2) - \cos^4(x/2)}{\operatorname{sen}^4(x/2)\cos^4(x/2)} = \frac{-16\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$$

CAPÍTULO 6 EXAMEN

1 Verifique la identidad: $\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)^{-1} = \csc x + \cot x$

2 Verifique la identidad: $\dfrac{\tan x}{1 + \sec x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2 \csc x$

3 Demuestre que $x = \sqrt{\sec^2 x - 1}$ *no* es una identidad.

4 Realice la sustitución trigonométrica en $x = a \operatorname{sen} \theta$ $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x^2}$, donde $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $a > 0$, y use identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

5 Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\sec \dfrac{\pi}{4} x = -\sqrt{2}$.

6 Encuentre una expresión para las coordenadas en x de los puntos más altos de la gráfica $y = \cos(4x + 3)$.

7 Determine todas las intersecciones de $f(x) = \sec\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 2$ con el eje x.

8 Encuentre todas las soluciones de la ecuación $-\cos x + 1 = 2 \operatorname{sen}^2 x$.

9 Utilice el hecho de que $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ para encontrar un valor exacto para $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

10 Si $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{12}{13}$ y $\tan \alpha < 0$, encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

11 Si α y β son ángulos que están en el segundo cuadrante tales que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $\cos \beta = -\dfrac{8}{17}$, encuentre $\tan(\alpha + \beta)$.

12 Verifique la fórmula de reducción: $\cos\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$.

13 Use una fórmula de suma o resta para encontrar las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} \pi x \cos \dfrac{\pi}{2} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} x \cos \pi x + 1$ que están en el intervalo $[0, 10)$.

14 Dado que sen $\theta = -\frac{5}{13}$ y cos $\theta = \frac{12}{13}$, encuentre los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ.

15 Dado que sec $\theta = \frac{5}{3}$ y $-90° < \theta < 0°$, encuentre los valores exactos de sen $(\theta/2)$, cos $(\theta/2)$ y tan $(\theta/2)$.

16 Verifique la identidad: sen $3x$ = sen x $(4\cos^2 x - 1)$.

17 Encuentre las soluciones de la ecuación $\cos 2x + 3\cos x = -2$ que están en el intervalo $[0, 2\pi)$.

18 Exprese $4\cos x\cos 7x$ como una suma o resta simplificada.

19 Exprese $\cos x - \cos 7x$ como un producto simplificado.

20 Verifique la identidad: $\dfrac{\cos 8x + \cos 4x}{\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 4x} = \cot 2x$.

21 Encuentre las soluciones de la ecuación sen $7x$ + sen $x = 0$.

22 Encuentre el valor exacto de $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

23 Encuentre los valores de θ para los que $\arctan(\tan\theta) = \theta$.

24 Encuentre el valor exacto de $\cos\left(2\arccos\dfrac{7}{25}\right)$.

25 Escriba $\cos\left(2\arccos\dfrac{a}{c}\right)$ como una expresión algebraica con a y c para a y c positivas.

26 Complete el enunciado: cuando $x \to 2$, $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x^3 - 7}{2}\right) \to$ ____.

27 Despejamos x en $y = 3\cos^{-1}\dfrac{2}{5}$ en términos de y.

28 Encuentre las soluciones exactas con aproximaciones a dos posiciones decimales para las soluciones de la ecuación $\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

7

Aplicaciones de trigonometría

7.1 Ley de los senos

7.2 Ley de los cosenos

7.3 Vectores

7.4 Producto punto

7.5 Forma trigonométrica para números complejos

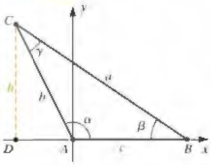
7.6 Teorema de De Moivre y las raíces n-ésimas de los números complejos

En las primeras dos secciones de este capítulo consideramos los métodos para resolver triángulos oblicuángulos usando la ley de los senos y de los cosenos. Las siguientes dos secciones contienen una introducción a vectores, tema que tiene numerosas aplicaciones en ingeniería, ciencias naturales y matemáticas avanzadas. A continuación introducimos la forma trigonométrica para números complejos; úsela para encontrar todas las n soluciones de ecuaciones de la forma $w^n = z$, donde n es cualquier entero positivo y w y z son números complejos.

7.1 Ley de los senos

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no contiene un ángulo recto. Usaremos las letras $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta$ y γ para partes de los triángulos, como se hace en el capítulo 5. Dado el triángulo ABC, coloquemos el ángulo α en posición estándar para que B quede en el eje x positivo. El caso para α obtuso se ilustra en la figura 1, pero la siguiente exposición también es válida si α es agudo.

FIGURA 1



Considere la recta que pasa por C paralela al eje y y que cruza el eje x en el punto D. Si $d(C, D) = h$, entonces la coordenada y de C es h. De la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b}, \quad \text{así que} \quad h = b\,\text{sen}\,\alpha$$

Remitiéndonos al triángulo rectángulo BDC, vemos que

$$\text{sen}\,\beta\ \frac{h}{a}, \text{ así que } h = a\,\text{sen}\,\beta$$

Igualando las dos expresiones para h, nos dará

$$b\,\text{sen}\,\alpha = a\,\text{sen}\,\beta$$

que se puede escribir como $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{b}$

Si ponemos α en posición estándar con C en el eje x positivo entonces, por el mismo razonamiento,

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

Las últimas dos igualdades nos dan el siguiente resultado.

Ley de los senos

Si ABC es un triángulo oblicuángulo marcado en la forma habitual (como en la figura 1), entonces

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

Note que la ley de los senos está formada por las siguientes tres fórmulas:

$$1)\ \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \qquad 2)\ \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c} \qquad 3)\ \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de estas fórmulas a un triángulo específico, debemos conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si sustituimos estos tres valores en la fórmula adecuada, podemos entonces encontrar el valor de la cuarta variable. Se deduce que la ley de los senos se puede usar para encontrar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que se conozca cualquiera de lo siguiente (las tres letras entre paréntesis se usan para denotar las partes conocidas, donde L representa un lado y A un ángulo):

1) dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos (LLA)

2) dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)

En la siguiente sección estudiamos la ley de los cosenos y demostramos cómo se puede usar para encontrar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo cuando se da lo siguiente:

1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

2) tres lados (LLL)

La ley de los senos no se puede aplicar directamente a los últimos dos casos.

La ley de los senos también se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

En lugar de memorizar las tres fórmulas asociadas con la ley de los senos, puede ser mejor recordar el siguiente enunciado que las toma en cuenta a todas.

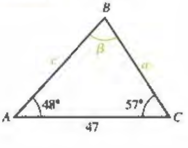
Ley de los senos (forma general) En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.

En ejemplos y ejercicios relacionados con triángulos, supondremos que las longitudes conocidas de los lados, así como los ángulos, se han obtenido por mediciones y, por lo tanto, son aproximaciones a valores exactos. A menos que se indique de otro modo, cuando encontremos partes de triángulos redondearemos las respuestas con base en la regla siguiente: *si los ángulos o lados conocidos se expresan con cierta precisión, entonces los ángulos o lados desconocidos deben calcularse con la misma precisión.* Para ilustrar, si los lados conocidos se expresan al 0.1 más cercano, entonces los lados desconocidos deben calcularse al 0.1 más cercano. Si los ángulos conocidos se expresan a los 10′ más cercanos, entonces los ángulos desconocidos deben calcularse a los 10′ más cercanos. Observaciones similares se cumplen también respecto a la precisión al más cercano 0.01, 0.1°, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 **Aplicación de la ley de los senos (ALA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $\alpha = 48°$, $\gamma = 57°$ y $b = 47$

FIGURA 2



SOLUCIÓN El triángulo está trazado en la figura 2. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°,

$$\beta = 180° - 57° - 48° = 75°$$

Como el lado b y los tres ángulos se conocen, podemos determinar a usando una forma de la ley de los senos que contenga a, α, b y β:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} && \text{ley de los senos} \\ a &= \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} && \text{despejamos } a \\ &= \frac{47 \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 75°} && \text{sustituimos } b,\ \alpha \text{ y } \beta \\ &\approx 36 && \text{aproximamos al entero más cercano} \end{aligned}$$

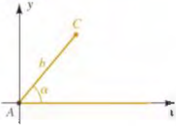
(*continúa*)

Para encontrar c, simplemente sustituimos $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ con $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ en la solución precedente para a, para obtener

$$c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{47 \operatorname{sen} 57^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} \approx 41$$

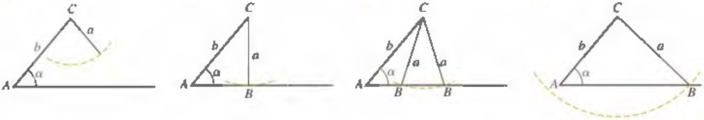
■

FIGURA 3



Datos como los del ejemplo 1 dan por resultado exactamente un triángulo ABC, pero si se dan dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos, no siempre se determina un triángulo único. Para ilustrar, suponga que a y b son las longitudes de lados del triángulo ABC y que un ángulo α es opuesto al lado de longitud a. Examinemos el caso de α agudo. Ponga α en posición estándar y considere el segmento de recta AC de longitud b en el lado terminal de α, como se aprecia en la figura 3. El tercer vértice, B, debe estar en algún punto en el eje x. Como la longitud a del lado opuesto a α está dada, para obtener B se traza un arco circular de longitud a con centro en C. Los cuatro posibles resultados se ilustran en la figura 4 (sin los ejes de coordenadas).

FIGURA 4



Las cuatro posibilidades en la figura se pueden describir como sigue:

a) El arco no interseca al eje x y no se forma triángulo.

b) El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.

c) El arco interseca el eje x positivo en dos puntos distintos y se forman dos triángulos.

d) El arco interseca las partes positivas y no positivas del eje x y se forman dos triángulos.

El caso particular que ocurre en un problema dado se hará evidente cuando se intente encontrar la solución. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

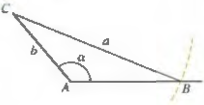
y obtenemos $\operatorname{sen}\beta > 1$, entonces no existe triángulo y tenemos el caso a). Si obtenemos $\operatorname{sen}\beta = 1$, entonces $\beta = 90^\circ$ y, por lo tanto, ocurrirá b). Si $\operatorname{sen}\beta < 1$, entonces hay dos posibles opciones para el ángulo β. Al comprobar ambas posibilidades, podemos determinar si ocurre c) o d).

Si la medida de α es mayor que 90°, entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$ (vea la figura 5). Como podemos tener más de una posibilidad cuando se dan dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, esta situación a veces recibe el nombre de **caso ambiguo**.

FIGURA 5

a) $a < b$

b) $a > b$



EJEMPLO 2 **Aplicación de la ley de los senos (LLA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $\alpha = 67°$, $a = 100$ y $c = 125$.

SOLUCIÓN En vista de que conocemos α, a y c, podemos determinar γ si empleamos una forma de la ley de los senos que contenga a, α, c y γ.

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{despejamos sen } \gamma$$

$$= \frac{125 \operatorname{sen} 67°}{100} \qquad \text{sustituimos } c,\ \alpha \text{ y } a$$

$$\approx 1.1506 \qquad \text{aproximamos}$$

Como sen γ *no* puede ser mayor que 1, no se puede construir un triángulo con las partes dadas. ■

EJEMPLO 3 **Aplicación de la ley de los senos (LLA)**

Resuelva $\triangle ABC$, dados $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36.7°$.

SOLUCIÓN Para determinar α, procedemos como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{despejamos sen } \alpha$$

$$= \frac{12.4 \operatorname{sen} 36.7°}{8.7} \qquad \text{sustituimos } a,\ \beta \text{ y } b$$

$$\approx 0.8518 \qquad \text{aproximamos}$$

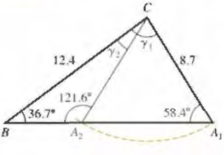
Hay dos posibles ángulos α entre 0° y 180° tales que sen α es aproximadamente 0.8518. El ángulo de referencia α_R es

$$\alpha_R \approx \operatorname{sen}^{-1}(0.8518) \approx 58.4°$$

En consecuencia, las dos posibilidades para α son

$$\alpha_1 \approx 58.4° \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 \approx 180° - \alpha_1 \approx 121.6°$$

FIGURA 6



El ángulo $\alpha_1 \approx 58.4°$ nos da un triángulo A_1BC en la figura 6, y $\alpha_2 \approx 121.6°$ el triángulo A_2BC.

Si γ_1 y γ_2 denotan los terceros ángulos de los triángulos A_1BC y A_2BC correspondientes a los ángulos α_1 y α_2, respectivamente, entonces

$$\gamma_1 = 180° - \alpha_1 - \beta \approx 180° - 58.4° - 36.7° \approx 84.9°$$

$$\gamma_2 = 180° - \alpha_2 - \beta \approx 180° - 121.6° - 36.7° \approx 21.7°$$

Si $c_1 = \overline{BA_1}$ es el lado opuesto a γ_1 en el triángulo A_1BC, entonces

$$\frac{c_1}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$c_1 = \frac{a\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{despejamos } c_1$$

$$\approx \frac{12.4 \operatorname{sen} 84.9°}{\operatorname{sen} 58.4°} \approx 14.5. \qquad \text{sustituimos y aproximamos}$$

(*continúa*)

Entonces, las partes restantes del triángulo A_1BC son

$$\alpha_1 \approx 58.4°, \quad \gamma_1 = 84.9° \quad \text{y} \quad c_1 \approx 14.5$$

Del mismo modo, si $c_2 = \overline{BA_2}$ es el lado opuesto a γ_2 en ΔA_2BC, entonces

$$c_2 = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} \approx \frac{12.4 \operatorname{sen} 21.7°}{\operatorname{sen} 121.6°} \approx 5.4$$

y las partes restantes del triángulo A_2BC son

$$\alpha_2 \approx 121.6°, \quad \gamma_2 = 21.7° \quad \text{y} \quad c_2 \approx 5.4$$

FIGURA 7

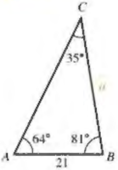
EJEMPLO 4 Uso de un ángulo de elevación

Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64°, un poste de teléfono que está inclinado en un ángulo de 9° en dirección contraria al Sol proyecta una sombra de 21 pies de largo en un terreno nivelado. Calcule la longitud del poste.

SOLUCIÓN El problema se ilustra en la figura 7. El triángulo ABC de la figura 8 también muestra los datos dados. Observe que en la figura 8 hemos calculado los siguientes ángulos:

$$\beta = 90° - 9° = 81°$$
$$\gamma = 180° - 64° - 81° = 35°$$

FIGURA 8



Para determinar la longitud del poste, es decir, el lado a del triángulo ABC, procedemos como sigue:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 64°} = \frac{21}{\operatorname{sen} 35°} \qquad \text{ley de los senos}$$

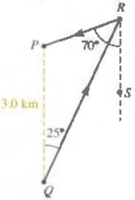
$$a = \frac{21 \operatorname{sen} 64°}{\operatorname{sen} 35°} \approx 33 \qquad \text{despejamos } a \text{ y aproximamos}$$

Así, el poste de teléfono mide aproximadamente 33 pies de largo.

EJEMPLO 5 Uso de rumbos

Un punto P a nivel del suelo está a 3.0 kilómetros al norte de un punto Q. Un corredor avanza en la dirección N25°E de Q al punto R, y luego de R a P en la dirección S70°O. Calcule la distancia recorrida.

FIGURA 9



SOLUCIÓN La notación empleada para especificar rumbos se introdujo en la sección 5.7. Las flechas de la figura 9 muestran la trayectoria del corredor, junto con una recta (discontinua) de norte a sur de R a otro punto S.

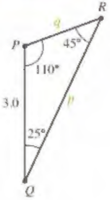
Como las rectas que pasan por PQ y RS son paralelas, deducimos de la geometría que los ángulos alternos internos PQR y QRS miden 25° cada uno. Por lo tanto,

$$\angle PRQ = \angle PRS - \angle QRS = 70° - 25° = 45°$$

Estas observaciones nos dan el triángulo PQR de la figura 10 con

$$\angle QPR = 180° - 25° - 45° = 110°$$

FIGURA 10



Aplicamos la ley de los senos para encontrar q y p:

$$\frac{q}{\text{sen } 25°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°} \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{\text{sen } 110°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°}$$

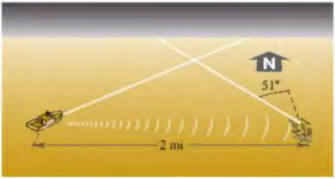
$$q = \frac{3.0 \text{ sen } 25°}{\text{sen } 45°} \approx 1.8 \qquad \text{y} \qquad p = \frac{3.0 \text{ sen } 110°}{\text{sen } 45°} \approx 4.0$$

La distancia recorrida, $p + q$, es aproximadamente $4.0 + 1.8 = 5.8$ km. ■

EJEMPLO 6 **Localización de un banco o cardumen de peces**

Un barco pesquero mercante utiliza un equipo de sonar para detectar un banco de peces a 2 millas al este del bote y que se desplaza en la dirección N51°O a razón de 8 mi/h (vea la figura 11).

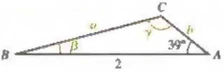
FIGURA 11



a) Si el barco navega a 20 mi/h, calcule, al 0.1° más cercano, la dirección a la que debe dirigirse para interceptar el banco de peces.

b) Encuentre, al minuto más cercano, el tiempo que tardará el barco en llegar a los peces.

FIGURA 12



SOLUCIÓN

a) El problema se ilustra con el triángulo de la figura 12, con el banco de peces en A, el barco en B y el punto de intercepción en C. Note que el ángulo $\alpha = 90° - 51° = 39°$. Para obtener β, comenzamos como sigue:

$$\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } 39°}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a} \text{ sen } 39° \qquad \text{despejamos sen } \beta \qquad (*)$$

A continuación, encontramos b/a, con t denotando el tiempo necesario para que el barco y los peces se encuentren en C:

$$a = 20t, \qquad b = 8t \qquad \text{(distancia)} = \text{(velocidad)(tiempo)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8t}{20t} = \frac{2}{5} \qquad \text{dividimos } b \text{ entre } a$$

$$\text{sen } \beta = \tfrac{2}{5} \text{ sen } 39° \qquad \text{sustituimos } b/a \text{ en } (*)$$

$$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\tfrac{2}{5} \text{ sen } 39°\right) \approx 14.6° \qquad \text{aproximamos}$$

Como $90° - 14.6° = 75.4°$, el barco debe avanzar en la dirección (aproximada) de N75.4°E.

(continúa)

b) Podemos determinar t usando la relación $a = 20t$. Primero calculamos la distancia a de B a C. Como el único lado conocido es 2, necesitamos encontrar el ángulo γ opuesto al lado de longitud 2 para usar la ley de los senos. Comenzamos por observar que

$$\gamma = 180° - 39° - 14.6° = 126-4°$$

Para determinar el lado a, tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{despejamos } a$$

$$\approx \frac{2 \operatorname{sen} 39°}{\operatorname{sen} 126.4°} \approx 1.56 \text{ mi.} \qquad \text{sustituimos y aproximamos}$$

Usando $a = 20t$, encontramos el tiempo t para que el barco llegue a C:

$$t = \frac{a}{20} \approx \frac{1.56}{20} \approx 0.08 \text{ hr} \approx 5 \text{ min}$$ ■

7.1 Ejercicios

Ejer. 1-16: Resuelva el ΔABC.

1 $\alpha = 52°$, $\gamma = 65°$, $a = 23.7$

2 $\beta = 25°$, $\gamma = 41°$, $b = 170$

3 $\alpha = 27°40'$, $\beta = 52°10'$, $a = 32.4$

4 $\beta = 50°50'$, $\gamma = 70°30'$, $c = 537$

5 $\alpha = 42°10'$, $\gamma = 61°20'$, $b = 19.7$

6 $\alpha = 103.45°$, $\gamma = 27.19°$, $b = 38.84$

7 $\gamma = 81°$, $c = 11$, $b = 12$

8 $\alpha = 27°$, $c = 75$, $a = 34$

9 $\gamma = 53°20'$, $a = 140$, $c = 115$

10 $\alpha = 27°30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$

11 $\gamma = 47.74°$, $a = 131.08$, $c = 97.84$

12 $\alpha = 42.17°$, $a = 5.01$, $b = 6.12$

13 $\alpha = 47°20'$, $a = 86.3$, $b = 77.7$

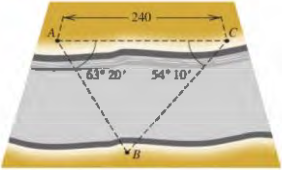
14 $\beta = 113°10'$, $b = 248$, $c = 195$

15 $\beta = 121.624°$, $b = 0.283$, $c = 0.178$

16 $\gamma = 73.01°$, $a = 17.31$, $c = 20.24$

17 **Topografía** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en márgenes opuestas de un río, un topógrafo traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud a lo largo de una de las márgenes y determina que las medidas de $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son 63°20′ y 54°10′, respectivamente (vea la figura). Calcule la distancia entre A y B.

EJERCICIO 17



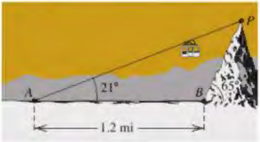
18 **Topografía** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B, un topógrafo selecciona un punto C que está a 375 yardas de A y 530 yardas de B. Si $\angle BAC$ mide 49°30′, aproxime la distancia entre A y B.

19 **Ruta de un funicular** Como se ilustra en la figura de la página siguiente, un funicular lleva pasajeros de un punto A, que está a 1.2 millas de un punto B en la base de una montaña, a un punto P en la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son de 21° y 65°, respectivamente.

a) Calcule la distancia entre A y P.

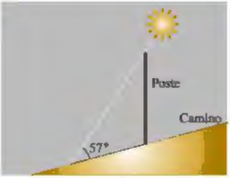
b) Calcule la altura de la montaña.

EJERCICIO 19



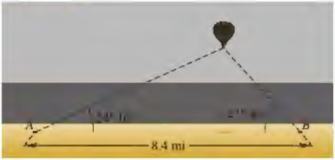
20 **Longitud de una sombra** Un camino recto forma un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57°, un poste vertical al lado del camino proyecta una sombra de 75 pies de largo directamente sobre el camino, como se muestra en la figura. Calcule la longitud del poste.

EJERCICIO 20



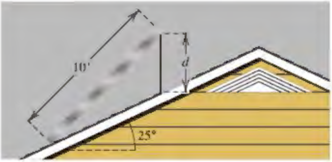
21 **Altura de un globo aerostático** Los ángulos de elevación de un globo desde dos puntos A y B en terreno nivelado son de 24°10′ y 47°40′, respectivamente. Como se muestra en la figura, los puntos A y B están a 8.4 millas de distancia y el globo está entre los puntos, en el mismo plano vertical. Calcule la altura del globo sobre el suelo.

EJERCICIO 21



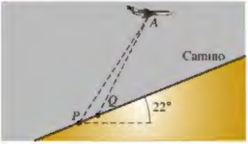
22 **Instalación de un panel solar** En la figura se muestra un panel solar de 10 pies de ancho que se unirá a un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Aproxime la longitud d del puntal que se necesita para que el panel forme un ángulo de 45° con la horizontal.

EJERCICIO 22



23 **Distancia a un avión** Un camino recto forma un ángulo de 22° con la horizontal. Desde un cierto punto P en el camino, el ángulo de elevación de un avión en el punto A es de 57°. En el mismo instante, desde otro punto Q, a 100 metros más adelante en el camino, el ángulo de elevación es de 63°. Como se indica en la figura, los puntos P, Q y A se encuentran en el mismo plano vertical. Calcule la distancia de P al avión.

EJERCICIO 23



24 **Topografía** Un topógrafo observa que la dirección del punto A al B es S63°O y la dirección de A a C es S38°O. La distancia de A a B es de 239 yardas y la de B a C es de 374 yardas. Aproxime la distancia de A a C.

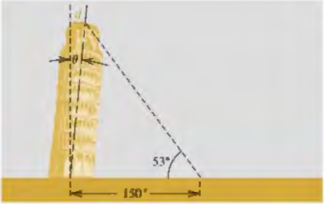
25 **Avistamiento de un incendio forestal** Un guardabosques que se encuentra en un punto de observación A avista un incendio en la dirección N27°10′E. Otro guardabosques, que está en un punto de observación B, a 6.0 millas al este de A, avista el mismo incendio en N52°40′O. Calcule la distancia desde cada uno de los puntos de observación al incendio.

26 **Torre de Pisa** La torre de Pisa estaba originalmente perpendicular al suelo y tenía 179 pies de altura. Debido al hundimiento de la tierra, ahora está inclinada a un cierto ángulo θ respecto a la perpendicular, como se aprecia en la figura de la página siguiente. Cuando la cima de la torre se ve desde un punto a 150 pies del centro de su base, el ángulo de elevación es de 53°.

a) Aproxime el ángulo θ.

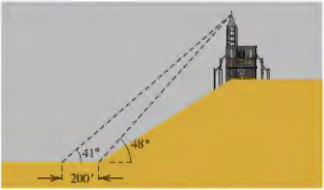
b) Aproxime la distancia d que el centro de la cima de la torre se ha movido de la perpendicular.

EJERCICIO 26



27 **Altura de una catedral** Una catedral está situada en una colina, como se aprecia en la figura. Cuando la cima de la torre se ve desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de 48°; cuando se ve a una distancia de 200 pies de la base de la colina, dicho ángulo es de 41°. La colina sube a un ángulo de 32°. Calcule la altura de la catedral.

EJERCICIO 27

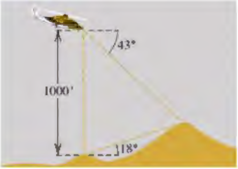


28 **Avistamiento desde un helicóptero** Un helicóptero permanece en posición fija a una altitud de 1,000 pies sobre el pico de una montaña de 5,210 pies, como se aprecia en la figura; un segundo pico más alto se ve desde la cima de la montaña y el helicóptero. Desde este último, el ángulo de depresión es de 43° y desde la cima de la montaña el ángulo de elevación es de 18°.

a) Calcule la distancia de pico a pico.

b) Calcule la altitud del pico más alto.

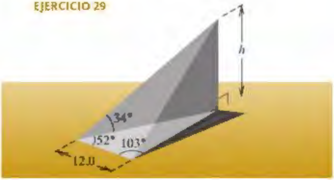
EJERCICIO 28



29 El volumen V del prisma triangular recto que se muestra en la figura es $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura del prisma.

a) Calcule h. **b)** Calcule V.

EJERCICIO 29



30 **Diseño de un avión caza a reacción** En la figura se muestra un plano de la parte superior del ala de un avión caza a reacción.

a) Calcule el ángulo ϕ.

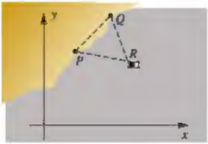
b) Si el fuselaje mide 4.80 pies de ancho, calcule la envergadura del ala CC'.

c) Calcule el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 30

31 **Software para topógrafos** El software para topógrafos hace uso de sistemas de coordenadas para localizar posiciones geográficas. Un pozo petrolífero situado frente a la costa en el punto R en la figura se ve desde los puntos P y Q, y se determina que $\angle QPR$ y $\angle RQP$ miden 55°50′ y 65°22′, respectivamente. Si los puntos P y Q tienen coordenadas (1487.7, 3452.8) y (3145.8, 5127.5), respectivamente, calcule las coordenadas de R.

EJERCICIO 31



7.2 Ley de los cosenos

En la sección precedente expresamos que la ley de los senos no se puede aplicar directamente para encontrar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo cuando se da cualquiera de lo siguiente:

1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)

2) tres lados (LLL)

Para estos casos podemos aplicar la *ley de los cosenos* que sigue.

Ley de los cosenos

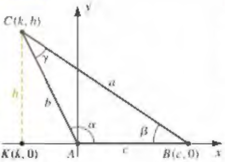
Si ABC es un triángulo marcado de la forma acostumbrada (como en la figura 1), entonces

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

FIGURA 1



DEMOSTRACIÓN Probemos la primera fórmula. Dado el triángulo ABC, coloque α en posición estándar, como se ilustra en la figura 1. Hemos dibujado α como obtuso, pero nuestra exposición también es válida si α es agudo. Considere la línea discontinua que pasa por C, paralela al eje y y que cruza el eje x en el punto $K(k, 0)$. Si $d(C, K) = h$, entonces C tiene coordenadas (k, h). Por la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}$$

Despejando k y h, obtenemos

$$k = b \cos \alpha \text{ y } h = b \operatorname{sen} \alpha$$

Como el segmento AB tiene longitud c, las coordenadas de B son $(c, 0)$ y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a^2 &= [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{fórmula de la distancia}\\
&= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \operatorname{sen} \alpha)^2 && \text{sustituimos } k \text{ y } h\\
&= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha && \text{elevamos al cuadrado}\\
&= b^2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{factorizamos los términos primero y último}\\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{identidad de Pitágoras}
\end{aligned}$$

Nuestro resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener colocando β y γ, respectivamente, en posición estándar en un sistema de coordenadas. ■

Note que si $\alpha = 90°$ en la figura 1, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En lugar de memorizar cada una de las tres fórmulas de la ley de los cosenos, es más cómodo recordar el siguiente enunciado, que toma en cuenta todas ellas.

Ley de los cosenos (forma general)

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los otros dos lados y el coseno del ángulo entre ellos

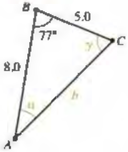
Dados dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para encontrar el tercer lado. Entonces podemos aplicar la ley de los senos para encontrar otro ángulo del triángulo. Siempre que se siga este procedimiento, es mejor determinar el ángulo opuesto al lado más corto, puesto que ese ángulo es siempre agudo. Así evitamos la posibilidad de obtener dos soluciones al resolver una ecuación trigonométrica que contenga ese ángulo, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Aplicación de la ley de los cosenos (LAL)**

Resuelva el ΔABC, dados $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77°$.

SOLUCIÓN El triángulo se ilustra en la figura 2. Como β es el ángulo *entre* los lados a y c, comenzamos por aproximar b (el lado opuesto a β) como sigue:

FIGURA 2



$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta && \text{ley de los cosenos} \\ &= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0)\cos 77° && \text{sustituimos } a, c \text{ y } \beta \\ &= 89 - 80\cos 77° \approx 71.0 && \text{simplificamos y aproximamos} \\ b &\approx \sqrt{71.0} \approx 8.4 && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Encontremos primero otro ángulo del triángulo usando la ley de los senos. Con base en las observaciones que preceden a este ejemplo, aplicaremos la ley de los senos y encontraremos α porque es el ángulo opuesto al lado más corto a.

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen}\alpha &= \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} && \text{despejamos sen } \alpha \\ &\approx \frac{5.0\operatorname{sen} 77°}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 && \text{sustituimos y aproximamos} \end{aligned}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3 \approx 35°$$

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, tenemos

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 35° - 77° = 68°$$ ■

Dados los tres lados de un triángulo, podemos usar la ley de los cosenos para hallar cualquiera de los tres ángulos. Siempre encontraremos primero el ángulo más grande, es decir, *el ángulo opuesto al lado más largo* porque esta práctica garantiza que los ángulos restantes sean agudos. A continuación podemos encontrar otro ángulo del triángulo al usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos. Tenga en cuenta que cuando un ángulo se encuentra por medio de la ley de los cosenos, no hay caso ambiguo, porque siempre obtenemos un ángulo único entre 0° y 180°.

EJEMPLO 2 **Aplicación de la ley de los cosenos (LLL)**

Si el triángulo ABC tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcule los ángulos α, β y γ al grado más cercano.

SOLUCIÓN Con base en las observaciones que preceden a este ejemplo, primero encontramos al ángulo opuesto al lado más largo a. Así, escogemos la forma de la ley de los cosenos que contiene a α y procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha && \text{ley de los cosenos} \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} && \text{despejamos } \cos\alpha \\ &= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} && \text{sustituimos y simplificamos} \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(-\tfrac{2}{7}\right) \approx 106.6^\circ \approx 107^\circ && \text{aproximamos } \alpha \end{aligned}$$

Ahora podemos usar ya sea la ley de los senos o la ley de los cosenos para determinar β. Apliquemos en este caso la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta && \text{ley de los cosenos} \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} && \text{despejamos } \cos\beta \\ &= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} && \text{sustituimos y simplificamos} \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 48.2^\circ \approx 48^\circ && \text{aproximamos } \beta \end{aligned}$$

En este punto en la solución, podríamos determinar γ si usamos la relación $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Pero si α o β se calcularon de manera incorrecta, entonces γ sería incorrecta. Por otro lado, podemos calcular γ y luego comprobar que la suma de los tres ángulos sea 180°. Así,

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \text{entonces} \quad \gamma = \cos^{-1}\frac{90^2 + 70^2 - 40^2}{2(90)(70)} \approx 25^\circ$$

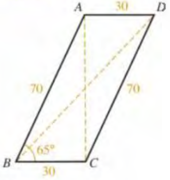
Note que $\alpha + \beta + \gamma = 107^\circ + 48^\circ + 25^\circ = 180^\circ$ ■

EJEMPLO 3 **Cálculo de las diagonales de un paralelogramo**

Un paralelogramo tiene lados de longitudes de 30 y 70 centímetros y un ángulo de 65°. Calcule la longitud de cada diagonal al centímetro más cercano.

SOLUCIÓN El paralelogramo $ABCD$ y sus diagonales AC y BD se muestran en la figura 3. Usando el triángulo ABC con $\angle ABC = 65^\circ$, podemos calcular AC como sigue:

FIGURA 3

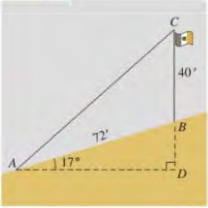


$$\begin{aligned} (AC)^2 &= 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 65^\circ && \text{ley de los cosenos} \\ &\approx 900 + 4900 - 1775 = 4025 && \text{aproximamos} \\ AC &\approx \sqrt{4025} \approx 63 \text{ cm} && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Del mismo modo, usando el triángulo BAD y $\angle BAD = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, podemos aproximar BD como sigue:

$$\begin{aligned} (BD)^2 &= 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 115^\circ \approx 7575 && \text{ley de los cosenos} \\ BD &\approx \sqrt{7575} \approx 87 \text{ cm} && \text{obtenemos la raíz cuadrada} \end{aligned}$$ ■

FIGURA 4



EJEMPLO 4 **Cálculo de la longitud de un cable**

Un poste vertical de 40 pies de alto se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado colina abajo a 72 pies de la base del poste.

SOLUCIÓN El dibujo de la figura 4 describe la información dada. Deseamos determinar AC. Al observar la figura, vemos que

$$\angle ABD = 90° - 17° = 73° \qquad \text{y} \qquad \angle ABC = 180° - 73° = 107°$$

Usando el triángulo ABC, podemos calcular AC como sigue:

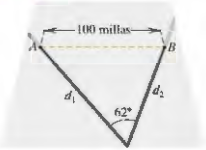
$$(AC)^2 = 72^2 + 40^2 - 2(72)(40)\cos 107° \approx 8468 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ ft} \qquad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$ ■

EJEMPLO 5 **Cálculo de la distancia entre objetos en movimiento**

Dos camiones salen al mismo tiempo de una ciudad y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 62°. Si su velocidad es de 50 y 40 mi/h, respectivamente, ¿cuánto tiempo tardarán aproximadamente los camiones en separarse 100 millas?

FIGURA 5



SOLUCIÓN Sea t el tiempo en horas después de que los camiones salen de la ciudad. Las distancias recorridas por éstos se ilustran en la figura 5. Podemos encontrar una expresión para AB de la siguiente manera:

$$(AB)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos 62° \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$(AB)^2 = (50t)^2 + (40t)^2 - 2(50t)(40t)\cos 62° \qquad \text{usamos } d = rt$$

$$(AB)^2 = 2500t^2 + 1600t^2 - 4000t^2\cos 62° \qquad \text{multiplicamos}$$

$$(AB)^2 = (4100 - 4000\cos 62°)t^2 \qquad \text{factorizamos } t^2$$

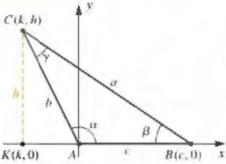
Deseamos conocer el valor de t para el cual los camiones están a 100 millas de distancia, así que utilizamos la última ecuación para evaluar t^2, sustituimos AB por 100 y despejamos t:

$$t^2 = \frac{(AB)^2}{4100 - 4000\cos 62°} = \frac{100^2}{4100 - 4000\cos 62°}$$

entonces, $$t = \frac{100}{\sqrt{4100 - 4000\cos 62°}} \approx 2.12 \text{ hr}$$

Por lo tanto, los camiones estarán separados por 100 millas de distancia en aproximadamente 2 horas y 7 minutos. ■

FIGURA 6



La ley de los cosenos se puede usar para deducir una fórmula para el área de un triángulo. Primero demostraremos un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC, coloque el ángulo α en posición estándar (vea la figura 6). Como podemos ver en la demostración de la ley de los cosenos, la altura h del vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. Como el área $\mathcal{A}$ del triángulo está dada por $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ch$, vemos que

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$$

Nuestro argumento es independiente del ángulo específico que está en posición estándar. Al tomar β y γ en posición estándar, obtenemos las fórmulas

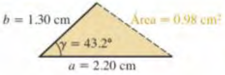
$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma$$

Las tres fórmulas están incluidas en el siguiente enunciado.

Área de un triángulo	El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera y el seno del ángulo entre ellos.

Los dos ejemplos siguientes ilustran usos de este resultado.

FIGURA 7



EJEMPLO 6 **Aproximación del área de un triángulo**

Aproxime el área del triángulo ABC si $a = 2.20$ cm, $b = 1.30$ cm y $\gamma = 43.2°$.

SOLUCIÓN Como γ es el ángulo entre los lados a y b como se muestra en la figura 7, podemos usar directamente el resultado precedente, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &= \tfrac{1}{2}(2.20)(1.30) \operatorname{sen} 43.2° \approx 0.98 \text{ cm}^2 && \text{sustituimos y aproximamos} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 **Aproximación del área de un triángulo**

Aproxime el área del triángulo ABC si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37°$.

SOLUCIÓN Para aplicar la fórmula del área de un triángulo, debemos encontrar el ángulo γ entre lados conocidos a y b. Como nos dan a, b y α, primero determinamos β, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} && \text{despejamos sen } \beta \\ &= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0} && \text{sustituimos } b, \alpha \text{ y } a \\ \beta_R &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37°}{5.0}\right) \approx 21° && \text{ángulo de referencia para } \beta \\ \beta &\approx 21° \quad \text{o} \quad \beta \approx 159° && \beta_R \text{ o } 180° - \beta_R \end{aligned}$$

Rechazamos $\beta \approx 159°$, porque entonces $\alpha + \beta = 196° \geq 180°$. En consecuencia, $\beta \approx 21°$ y

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 37° - 21° = 122°.$$

Por último, calculamos el área del triángulo como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma && \text{fórmula del área de un triángulo} \\ &\approx \tfrac{1}{2}(5.0)(3.0) \operatorname{sen} 122° \approx 6.4 \text{ cm}^2 && \text{sustituimos y aproximamos} \end{aligned}$$

Usaremos el resultado precedente del área de un triángulo para deducir la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Herón

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados a, b y c está dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es la mitad del perímetro, es decir, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

DEMOSTRACIÓN Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha)} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha)\cdot\tfrac{1}{2}bc(1-\cos\alpha)}
\end{aligned}$$

Obtendremos la fórmula de Herón sustituyendo las expresiones bajo el último signo de radical por expresiones que contengan sólo a, b y c. De la fórmula 1 de la ley de los cosenos, despejamos $\cos\alpha$ y luego sustituimos, como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}bc(1+\cos\alpha) &= \frac{1}{2}bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{1}{2}bc\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{4} \\
&= \frac{(b+c)+a}{2}\cdot\frac{(b+c)-a}{2}
\end{aligned}$$

Usamos el mismo tipo de manipulaciones en la segunda expresión bajo el signo de radical:

$$\frac{1}{2}bc(1-\cos\alpha) = \frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}$$

Si ahora sustituimos las expresiones bajo el signo de radical, obtenemos

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

Si $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, vemos que

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}, \quad s-b = \frac{a-b+c}{2}, \quad s-c = \frac{a+b-c}{2}$$

La sustitución en la fórmula anterior de $\mathcal{A}$ nos da la fórmula de Herón. ■

EJEMPLO 8 **Uso de la fórmula de Herón**

Un campo triangular tiene lados de longitudes de 125, 160 y 225 yardas. Aproxime el número de acres en el campo. (Un acre equivale a 4,840 yardas cuadradas.)

SOLUCIÓN Primero determinamos la mitad del perímetro del campo con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$, así como los valores de $s - a$, $s - b$ y $s - c$:

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}(125 + 160 + 225) = \tfrac{1}{2}(510) = 255 \\ s - a &= 255 - 125 = 130 \\ s - b &= 255 - 160 = 95 \\ s - c &= 255 - 225 = 30 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón obtenemos

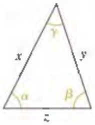
$$\mathcal{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2$$

Como hay 4,840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es $\frac{9720}{4840}$, o aproximadamente 2. ■

7.2 Ejercicios

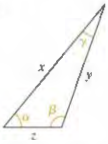
Ejer. 1–2: Use el sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos están trazados a escala y los ángulos se miden en radianes.)

1



a) α	A) 12.60
b) β	B) 1.10
c) γ	C) 10
d) x	D) 0.79
e) y	E) 13.45
f) z	F) 1.26

2

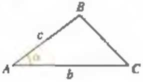


a) α	A) 3
b) β	B) 0.87
c) γ	C) 8.24
d) x	D) 1.92
e) y	E) 6.72
f) z	F) 0.35

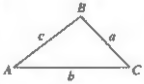
Ejer. 3–4: Dadas las partes indicadas del $\triangle ABC$, ¿qué ángulo (α, β o γ) o lado (a, b o c) encontraría usted a continuación y qué usaría para determinarlo?

3 a)

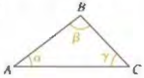
b)



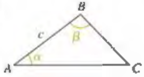
c)



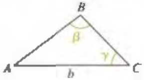
d)



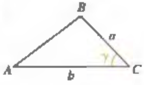
e)



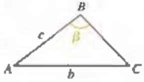
f)



4 a)

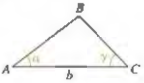


b)

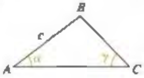


(continúa)

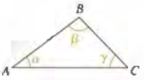
c)



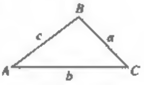
d)



e)



f)



Ejer. 5–18: Resuelva $\triangle ABC$.

5	$\alpha = 60°$,	$b = 20$,	$c = 30$
6	$\gamma = 45°$,	$b = 10.0$,	$a = 15.0$
7	$\beta = 150°$,	$a = 150$,	$c = 30$
8	$\beta = 73°50'$,	$c = 14.0$,	$a = 87.0$
9	$\gamma = 115°10'$,	$a = 1.10$,	$b = 2.10$
10	$\alpha = 23°40'$,	$c = 4.30$,	$b = 70.0$
11	$a = 10$,	$b = 11$,	$c = 22$
12	$a = 3.7$,	$b = 5.6$,	$c = 9.8$
13	$a = 2.0$,	$b = 3.0$,	$c = 4.0$
14	$a = 10$,	$b = 15$,	$c = 12$
15	$a = 25.0$,	$b = 80.0$,	$c = 60.0$
16	$a = 8.5$,	$b = 11.7$,	$c = 13.1$
17	$a = 286.5$,	$b = 286.5$,	$c = 10.0$
18	$a = 20.0$,	$b = 20.0$,	$c = 10.0$

19 **Dimensiones de un terreno triangular** El ángulo en una esquina de un terreno triangular es de 73°40′ y los lados que coinciden en esta esquina miden 175 y 150 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

20 **Topografía** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B, un topógrafo selecciona un punto C que está a 420 yardas de A y a 540 yardas de B. Si el ángulo ACB mide 63°10′, calcule la distancia entre A y B.

21 **Distancia entre automóviles** Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 84°. Si sus velocidades son de 60 mi/h y 45 mi/h, respectivamente, ¿aproximadamente a qué distancia están uno de otro al término de 20 minutos?

22 **Ángulos de un terreno triangular** Un terreno triangular tiene lados de longitudes de 420, 350 y 180 pies. Calcule el ángulo menor entre los lados.

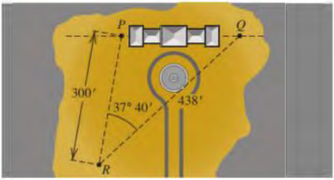
23 **Distancia entre barcos** Un barco zarpa del puerto a la 1:00 P.M. y navega al S35°E a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale del mismo puerto a la 1:30 P.M. y navega al S20°O a 18 mi/h. ¿Aproximadamente a qué distancia están uno del otro a las 3:00 P.M.?

24 **Distancia de vuelo** Un avión vuela 165 millas desde el punto A en la dirección 130° y luego en la dirección 245° otras 80 millas. ¿Aproximadamente a qué distancia de A está el avión?

25 **Ruta de un corredor** Un deportista corre con velocidad constante de una milla cada 8 minutos en dirección S40°E durante 20 minutos y luego en dirección N20°E los siguientes 16 minutos. Aproxime, al décimo de milla más cercano, la distancia en línea recta de la meta al punto de partida de la ruta del corredor.

26 **Topografía** Dos puntos P y Q en suelo nivelado están en lados opuestos de un edificio. Para hallar la distancia entre los puntos, un topógrafo selecciona un punto R que está a 300 pies de P y a 438 pies de Q, y luego determina que el ángulo PRQ mide 37°40′ (vea la figura). Calcule la distancia entre P y Q.

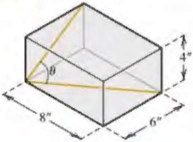
EJERCICIO 26



27 **Trayectoria de un bote de motor** Un bote de motor se desplaza a lo largo de una trayectoria triangular que tiene lados de longitudes de 2, 4 y 3 kilómetros, respectivamente. El primer lado fue atravesado en la dirección N20°O y el segundo en dirección Sθ°O, donde θ° es la medida en grados de un ángulo agudo. Calcule, al minuto más cercano, la dirección en la que se recorrió el tercer lado.

28 **Ángulo de una caja** La caja rectangular que se ilustra en la figura tiene dimensiones de 8" × 6" × 4". Calcule el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de 6" × 4".

EJERCICIO 28

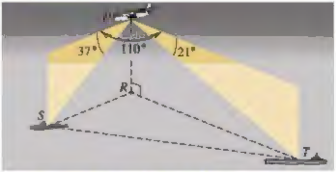


29 **Distancias en un diamante de béisbol** Un diamante de béisbol tiene cuatro bases (que forman un cuadro) que están a 90 pies de distancia unas de otras; el montículo del lanzador está a 60.5 pies del plato de home. Calcule la distancia del montículo del lanzador a cada una de las otras tres bases.

30 Un rombo tiene lados de 100 centímetros de longitud y el ángulo en uno de los vértices es de 70°. Aproxime las longitudes de las diagonales a la décima de centímetro más cercano.

31 **Reconocimiento** Un avión de reconocimiento P, que vuela a 10,000 pies sobre un punto R en la superficie del agua, localiza un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y a un buque tanque T a un ángulo de depresión de 21°, como se muestra en la figura. Además, se encuentra que $\angle SPT$ mide 110°. Calcule la distancia entre el submarino y el buque tanque.

EJERCICIO 31

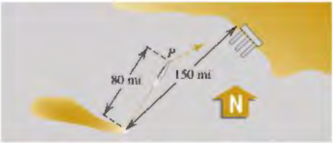


32 **Corrección del rumbo de un barco** Un crucero fija un rumbo N47°E desde una isla a un puerto en tierra firme, que está a 150 millas de distancia. Después de avanzar en fuertes corrientes, el barco está fuera de rumbo en una posición P que está a N33°E y a 80 millas de la isla, como se ilustra en la figura.

a) ¿Aproximadamente a qué distancia está el barco del puerto?

b) ¿Qué dirección debe tomar el barco para corregir su rumbo?

EJERCICIO 32

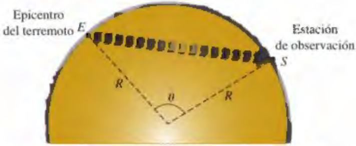


33 **Sismología** Unos sismólogos investigan la estructura del interior de la Tierra mediante el análisis de ondas sísmicas provocadas por terremotos. Si se supone que el interior de nuestro planeta es homogéneo, entonces estas ondas se desplazarán en líneas rectas a una velocidad v constante. La figura muestra una vista en sección transversal de la Tierra, con el epicentro en E y una estación de observación en S. Use la ley de los cosenos para demostrar que el tiempo t para que una onda se desplace por el interior de la Tierra de E a S está dado por

$$t = \frac{2R}{v} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

donde R es el radio de la Tierra y θ es el ángulo indicado con vértice en el centro de la misma.

EJERCICIO 33

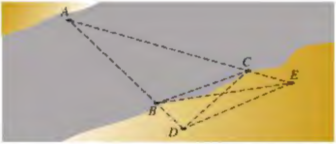


34 **Cálculo de distancias** La distancia entre las márgenes del río que se ve en la figura de la siguiente página se puede obtener sin medir ángulos. Se seleccionan dos puntos, B y C, en la orilla opuesta, y los segmentos de recta AB y AC se prolongan como se muestra. Los puntos D y E se seleccionan como se indica y se miden las distancias BC, BD, BE, CD y CE. Suponga que BC = 184 ft, BD = 102 ft, BE = 218 ft, CD = 236 ft y CE = 80 ft.

a) Calcule las distancias AB y AC.

b) Calcule la distancia más corta que hay del punto A al otro lado del río.

EJERCICIO 34



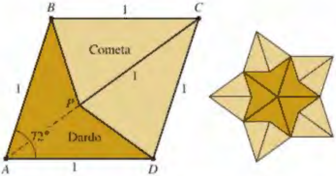
35 Tejas de Penrose Estas tejas de cerámica se forman de un rombo $ABCD$ con lados de longitud 1 y un ángulo interior de 72°. Primero se localiza un punto P que se encuentra en la diagonal AC y está a una distancia 1 del vértice C, y luego se trazan los segmentos PB y PD a los otros vértices de la diagonal, como se ve en la figura. Las dos tejas formadas se llaman dardo y cometa. Las contrapartes tridimensionales de estas tejas se han aplicado en química molecular.

a) Encuentre las medidas en grados de $\angle BPC$, $\angle APB$ y $\angle ABP$.

b) Calcule, al 0.01 más cercano, la longitud del segmento BP.

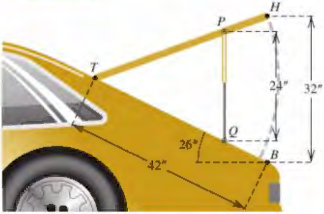
c) Calcule, al 0.01 más cercano, el área de una cometa y el área de un dardo.

EJERCICIO 35



36 Diseño automotor La puerta del maletero de un automóvil mide 42 pulgadas de largo. Un soporte de 24 pulgadas de largo se ha de conectar a la puerta y carrocería del vehículo de modo que, cuando la puerta se abra por completo, el soporte sea vertical y el espacio libre trasero sea de 32 pulgadas, como se aprecia en la figura. Calcule las longitudes de los segmentos TQ y TP.

EJERCICIO 36



Ejer. 37–44: Calcule el área del triángulo ABC.

37	$\alpha = 60°$,	$b = 20$,	$c = 30$
38	$\gamma = 45°$,	$b = 10.0$,	$a = 15.0$
39	$\alpha = 40.3°$,	$\beta = 62.9°$,	$b = 5.63$
40	$\alpha = 35.7°$,	$\gamma = 105.2°$,	$b = 17.2$
41	$\alpha = 80.1°$,	$a = 8.0$,	$b = 3.4$
42	$\gamma = 32.1°$,	$a = 14.6$,	$c = 15.8$
43	$a = 25.0$,	$b = 80.0$,	$c = 60.0$
44	$a = 50.0$,	$b = 50.0$,	$c = 25.0$

Ejer. 45–46: Un campo triangular tiene lados de longitudes a, b y c (en yardas). Calcule el número de acres del campo (1 acre = 4840 yd²).

45	$a = 600$,	$b = 700$,	$c = 724$
46	$a = 320$,	$b = 350$,	$c = 500$

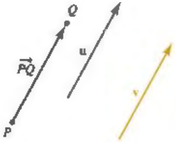
Ejer. 47–48: Calcule el área de un paralelogramo que tiene lados de longitudes a y b (en pies) si un ángulo en un vértice tiene la medida de θ.

47	$a = 12.0$,	$b = 16.0$,	$\theta = 40°$
48	$a = 40.3$,	$b = 52.6$,	$\theta = 100°$

7.3 Vectores

Las cantidades, como área, volumen, longitud, temperatura y tiempo, tienen sólo magnitudes y pueden caracterizarse por completo con un solo número real (con una unidad de medida apropiada, como por ejemplo in², ft³, cm, grado o segundo). Una cantidad de este tipo es una **cantidad escalar** y el número real correspondiente es un **escalar**. Un concepto como el de velocidad o fuerza tiene magnitud y dirección, y con frecuencia se representan con un **segmento de recta dirigido**, es decir, un segmento de recta al que se le asigna una dirección. Otro nombre de un segmento de recta dirigido es **vector**.

FIGURA 1
Vectores iguales



Como se aprecia en la figura 1, usamos $\overrightarrow{PQ}$ para denotar el vector con **punto inicial** P y **punto terminal** Q, e indicamos la dirección del vector colocando la punta de la flecha en Q. La **magnitud** de $\overrightarrow{PQ}$ es la longitud del segmento PQ y se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Al igual que en la figura, usamos letras en bold o negritas como **u** y **v** para denotar vectores cuyos puntos finales no están especificados. En trabajos manuscritos, con frecuencia se usa notación como $\vec{u}$ o $\vec{v}$.

Se dice que los vectores que tienen la misma magnitud y dirección son **equivalentes**. En matemáticas, un vector es determinado sólo por su magnitud y dirección, no por su ubicación. Así, consideramos que vectores equivalentes, semejantes a los de la figura 1, son **iguales** y escribimos

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Por consiguiente, *un vector puede trasladarse de un lugar a otro siempre que no se cambie su magnitud ni su dirección*.

Podemos representar muchos conceptos físicos por medio de vectores. Para ilustrar, suponga que un avión desciende a una velocidad constante 100 mi/h y la línea de vuelo forma un ángulo de 20° con la horizontal. Estos dos hechos están representados por el vector **v** de magnitud 100 en la figura 2. El vector **v** es un **vector velocidad**.

FIGURA 2 Vector velocidad

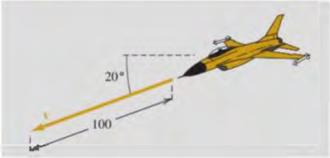
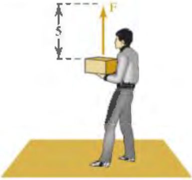


FIGURA 3
Vector fuerza



Un vector que representa un empuje o tracción de algún tipo es un **vector fuerza**. La fuerza ejercida cuando una persona sostiene un peso de 5 libras es ilustrada por el vector **F** de magnitud 5 en la figura 3. Esta fuerza tiene la misma magnitud que la ejercida sobre el peso por la gravedad, pero actúa en dirección opuesta. En consecuencia, no hay movimiento hacia arriba o hacia abajo.

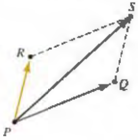
A veces usamos $\overrightarrow{AB}$ para representar la trayectoria de un punto (o partícula) cuando se mueve a lo largo del segmento de recta de A a B. En esos casos decimos que $\overrightarrow{AB}$ es un **desplazamiento** del punto (o partícula). Al igual que en la figura 4, un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ seguido por un desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ lleva al mismo punto que el desplazamiento individual $\overrightarrow{AC}$. Por definición, el vector AC es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y escribimos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

FIGURA 4
Suma de vectores

Debido a que los vectores se pueden trasladar de un lugar a otro, dos vectores *cualesquiera* se pueden sumar si se coloca el punto inicial del segundo vector en el punto terminal del primero y luego se dibuja un segmento de recta del punto inicial del primero al punto terminal del segundo, como en la figura 4. A este método de suma vectorial se le conoce como la **ley del triángulo**.

FIGURA 5
Fuerza resultante



Otra forma para obtener la suma es escoger el vector PQ y el vector PR que son iguales a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, y tienen el mismo punto inicial P, como se aprecia en la figura 5. Si construimos el paralelogramo $RPQS$, entonces, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, deducimos que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P, entonces $\overrightarrow{PS}$ es la **fuerza resultante**, es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas combinadas. A este método de suma vectorial se le conoce como **ley del paralelogramo**.

Si m es un escalar y **v** es un vector, entonces $m\mathbf{v}$ se define como un vector cuya magnitud es $|m|$ veces $\|\mathbf{v}\|$ (la magnitud de **v**) y cuya dirección puede ser la misma de **v** (si $m > 0$) u opuesta a la de **v** (si $m < 0$). Las ilustraciones se dan en la figura 6. A $m\mathbf{v}$ se le conoce como **múltiplo escalar** de **v**.

FIGURA 6 Múltiplos escalares

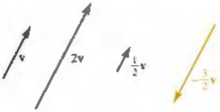


FIGURA 7

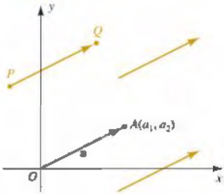
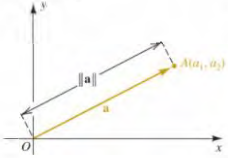


FIGURA 8
Magnitud $\|\mathbf{a}\|$



En el resto de esta sección restringiremos nuestro estudio a los vectores que se encuentran en un plano xy. Si $\overrightarrow{PQ}$ es uno de estos vectores, entonces, como se indica en la figura 7, existen muchos otros vectores equivalentes a $\overrightarrow{PQ}$; sin embargo, hay exactamente *un* vector equivalente $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ con punto inicial en el origen. En este sentido, *cada vector determina un par ordenado único de números reales*, que son las coordenadas (a_1, a_2) del punto terminal A. Recíprocamente, todo par ordenado (a_1, a_2) determina al vector OA, donde A tiene coordenadas (a_1, a_2). En consecuencia, *hay una correspondencia biunívoca entre vectores en un plano xy y pares ordenados de números reales*. Esta correspondencia nos permite interpretar un vector como un segmento de recta dirigido y, además, como un par ordenado de números reales. Para evitar confusiones con la notación de intervalos abiertos o puntos, se usa el símbolo $\langle a_1, a_2\rangle$ (conocido como *notación de cuña*) para un par ordenado que representa un vector, que se denota con una letra en bold (negrita), por ejemplo, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$. Los números a_1 y a_2 son los **componentes** del vector $\langle a_1, a_2\rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2), como en la figura 7, a $\overrightarrow{OA}$ se le llama **vector de posición** para $\langle a_1, a_2\rangle$ o para el *punto* A.

La explicación anterior evidencia que los vectores tienen dos naturalezas: una geométrica y otra algebraica. Muchas veces no distinguimos entre ellas, pero con base en lo que hemos estudiado, debe quedar claro cuándo se hace referencia a pares ordenados o a segmentos de recta dirigidos.

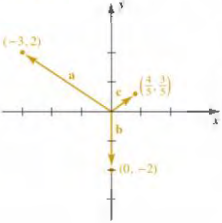
La *magnitud* del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ es, por definición, la longitud de su vector de posición OA, como se ilustra en la figura 8.

Definición de la magnitud de un vector

La **magnitud** del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, que se denota por $\|\mathbf{a}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle a_1, a_2\rangle\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

FIGURA 9



EJEMPLO 1 **Obtención de la magnitud de un vector**

Trace los vectores

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, -2 \rangle, \quad \mathbf{c} = \left\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5} \right\rangle$$

en un plano de coordenadas y determine la magnitud de cada vector.

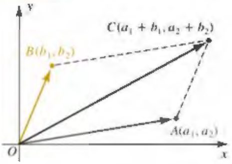
SOLUCIÓN Los vectores están trazados en la figura 9. Por la definición de la magnitud de un vector,

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle -3, 2 \rangle\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\|\mathbf{b}\| = \|\langle 0, -2 \rangle\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\|\mathbf{c}\| = \left\|\left\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5} \right\rangle\right\| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1$$ ■

Considere el vector OA y el vector OB correspondientes a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, respectivamente, como se ilustra en la figura 10. Si $\overrightarrow{OC}$ corresponde a $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, podemos demostrar, usando pendientes, que los puntos O, A, C y B son vértices de un paralelogramo; esto es,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

FIGURA 10



La expresión de esta ecuación en términos de pares ordenados lleva a lo siguiente.

Definición de suma de vectores	$\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

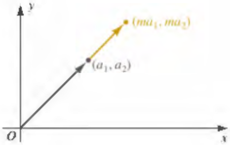
Note que, para sumar dos vectores, sumamos los componentes correspondientes.

EJEMPLOS **Suma de vectores**

- $\langle 3, -4 \rangle + \langle 2, 7 \rangle = \langle 3 + 2, -4 + 7 \rangle = \langle 5, 3 \rangle$
- $\langle 5, 1 \rangle + \langle -5, 1 \rangle = \langle 5 + (-5), 1 + 1 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$

También podemos demostrar que si m es un escalar y $\overrightarrow{OA}$ corresponde a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces el par ordenado determinado por $m\overrightarrow{OA}$ es $\langle ma_1, ma_2 \rangle$, como se ilustra en la figura 11 de la página siguiente para $m > 1$. Esto lleva a la siguiente definición.

FIGURA 11



Definición de un múltiplo escalar de un vector

$$m\langle a_1, a_2\rangle = \langle ma_1, ma_2\rangle$$

Por lo tanto, para obtener un múltiplo escalar de un vector, multiplicamos cada componente por el escalar.

EJEMPLOS **Múltiplo escalar de un vector**

- $2\langle -3, 4\rangle = \langle 2(-3), 2(4)\rangle = \langle -6, 8\rangle$
- $-2\langle -3, 4\rangle = \langle (-2)(-3), (-2)(4)\rangle = \langle 6, -8\rangle$
- $1\langle 5, 2\rangle = \langle 1 \cdot 5, 1 \cdot 2\rangle = \langle 5, 2\rangle$

EJEMPLO 2 **Obtención de un múltiplo escalar de un vector**

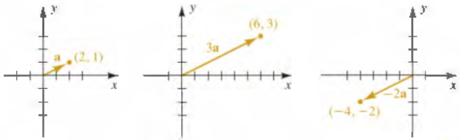
Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1\rangle$, encuentre $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$ y trace cada vector en un plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Con la definición de múltiplos escalares de vectores, encontramos

$$3\mathbf{a} = 3\langle 2, 1\rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot 1\rangle = \langle 6, 3\rangle$$
$$-2\mathbf{a} = -2\langle 2, 1\rangle = \langle (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 1\rangle = \langle -4, -2\rangle$$

Los vectores están trazados en la figura 12.

FIGURA 12



■

El **vector cero** y el **negativo** $-\mathbf{a}$ de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ se definen como sigue.

Definición de 0 y −a	$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle \quad \text{y} \quad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2\rangle = \langle -a_1, -a_2\rangle$

EJEMPLOS El vector cero y el negativo de un vector

- $\langle 3, 5\rangle + \mathbf{0} = \langle 3, 5\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle 3 + 0, 5 + 0\rangle = \langle 3, 5\rangle$
- $-\langle 3, -5\rangle = \langle -3, -(-5)\rangle = \langle -3, 5\rangle$
- $\langle 3, -5\rangle + \langle -3, 5\rangle = \langle 3 + (-3), -5 + 5\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$
- $0\langle 2, 3\rangle = \langle 0 \cdot 2, 0 \cdot 3\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$
- $5 \cdot \mathbf{0} = 5\langle 0, 0\rangle = \langle 5 \cdot 0, 5 \cdot 0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$

A continuación planteamos las propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores para cualesquiera vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y escalares m y n. Usted tendrá poca dificultad para recordar estas propiedades, ya que son semejantes a las propiedades conocidas de los números reales.

Propiedades de suma y múltiplos escalares de vectores	1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	5) $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$
	2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$	6) $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$
	3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	7) $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$
	4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
		$0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

DEMOSTRACIONES Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$. Para probar la propiedad 1, observamos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2\rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

La demostración de la propiedad 5 es como sigue:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= m\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle && \text{definición de suma} \\ &= \langle m(a_1 + b_1), m(a_2 + b_2)\rangle && \text{definición de múltiplo escalar} \\ &= \langle ma_1 + mb_1, ma_2 + mb_2\rangle && \text{propiedad distributiva} \\ &= \langle ma_1, ma_2\rangle + \langle mb_1, mb_2\rangle && \text{definición de suma} \\ &= m\mathbf{a} + m\mathbf{b} && \text{definición de múltiplo escalar} \end{aligned}$$

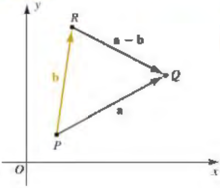
Las demostraciones de las propiedades restantes son similares y se dejan como ejercicios. ■

La **resta de vectores** (que se denota por $-$) es definida por $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si usamos la notación de par ordenado para $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2\rangle$, y obtenemos lo siguiente.

Definición de resta de vectores	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2\rangle - \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

Entonces, para obtener **a** − **b**, simplemente restamos los componentes de **b** de los componentes correspondientes de **a**.

FIGURA 13



EJEMPLOS Resta de vectores si **a** = ⟨5, −4⟩ y **b** = ⟨−3, 2⟩

■ $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 5, -4\rangle - \langle -3, 2\rangle$
$= \langle 5 - (-3), -4 - 2\rangle = \langle 8, -6\rangle$

■ $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 5, -4\rangle - 3\langle -3, 2\rangle$
$= \langle 10, -8\rangle - \langle -9, 6\rangle = \langle 10 - (-9), -8 - 6\rangle = \langle 19, -14\rangle$

Si **a** y **b** son vectores arbitrarios, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}$$

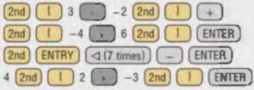
esto es, **a** − **b** *es el vector que, cuando se suma a* **b**, *dará* **a**. Si representamos **a** y **b** por el vector *PQ* y el vector *PR con el mismo punto inicial*, como en la figura 13, entonces $\overrightarrow{RQ}$ representa a **a** − **b**.

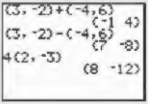
Veamos algunas de las operaciones con vectores en una calculadora graficadora. La TI−83/4 Plus no tiene un modo específico de vectores, pero unas *listas* nos servirán bien. Visualmente, basta sustituir con llaves la notación de cuñas que se emplea en el texto.

Suma de vectores

Resta de vectores

Múltiplo escalar de un vector



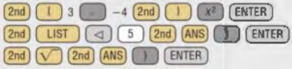


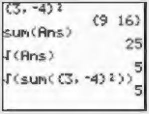
Magnitud de un vector

El "cuadrado de una lista" devuelve una lista formada por los cuadrados de los elementos en la lista original. Como la magnitud de un vector es

"la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados",

podemos calcular la magnitud de un vector como se aprecia en la pantalla siguiente. La última entrada es sólo una combinación de las primeras tres entradas.





Los vectores especiales **i** y **j** se definen como sigue.

Definición de i y j $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$

Un **vector unitario** es un vector de magnitud 1. Los vectores **i** y **j** son vectores unitarios, como lo es el vector $\mathbf{c} = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$ en el ejemplo 1.

Los vectores **i** y **j** pueden usarse para obtener una forma alterna de representar vectores. Específicamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle$$

Este resultado nos da lo siguiente.

Forma i, j para vectores	$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$

EJEMPLOS **Forma i, j**

- $\langle 5, 2 \rangle = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
- $\langle -3, 4 \rangle = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- $\langle 0, -6 \rangle = 0\mathbf{i} + (-6)\mathbf{j} = -6\mathbf{j}$

Los vectores correspondientes a **i**, **j** y un vector arbitrario **a** se ilustran en la figura 14. Como **i** y **j** son vectores unitarios, $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ pueden representarse por vectores horizontales y verticales de magnitudes $|a_1|$ y $|a_2|$, respectivamente, como se ilustra en la figura 15. Por esta razón, a_1 recibe el nombre de **componente horizontal** y a_2 el de **componente vertical** del vector **a**.

FIGURA 14 $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

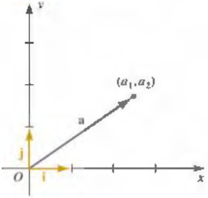
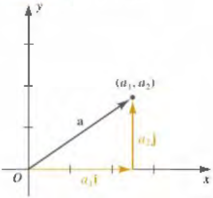


FIGURA 15 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



La suma vectorial $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de **i** y **j**. Las reglas para suma, resta y multiplicación por un escalar m se pueden escribir como sigue, con $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$
$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$
$$m(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ma_1)\mathbf{i} + (ma_2)\mathbf{j}$$

Estas fórmulas demuestran que las combinaciones lineales de **i** y **j** se pueden considerar como sumas algebraicas.

EJEMPLO 3 **Expresión de un vector como una combinación lineal de i y j**

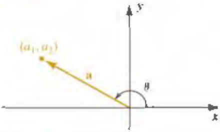
Si $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, exprese $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como una combinación lineal de **i** y **j**.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

■

FIGURA 16



Sea θ un ángulo en posición estándar, medido desde el eje x positivo al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, como se aprecia en la figura 16. Como

$$\cos\theta = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}$$

obtenemos las siguientes fórmulas.

Fórmulas para componentes horizontales de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

Si el vector **a** y el ángulo θ se definen como se mencionó antes, entonces

$$a_1 = \|\mathbf{a}\|\cos\theta \qquad \text{y} \qquad a_2 = \|\mathbf{a}\|\operatorname{sen}\theta$$

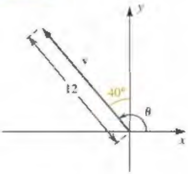
Usando estas fórmulas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \|\mathbf{a}\|\cos\theta, \|\mathbf{a}\|\operatorname{sen}\theta \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\|\cos\theta\,\mathbf{i} + \|\mathbf{a}\|\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \\ &= \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 **Expresión de la velocidad del viento como vector**

Si el viento sopla a 12 mi/h en la dirección N40°O, exprese su velocidad como un vector **v**.

FIGURA 17



SOLUCIÓN El vector **v** y el ángulo $\theta = 90° + 40° = 130°$ se ilustran en la figura 17. Usando las fórmulas de los componentes horizontales y verticales con $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ tendremos

$$v_1 = \|\mathbf{v}\|\cos\theta = 12\cos 130°, \qquad v_2 = \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta = 12\operatorname{sen} 130°$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \\ &= (12\cos 130°)\mathbf{i} + (12\operatorname{sen} 130°)\mathbf{j} \\ &\approx (-7.7)\mathbf{i} + (9.2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

■

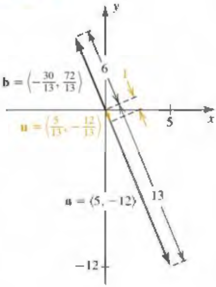
EJEMPLO 5 **Cómo determinar un vector de dirección y magnitud específicas**

Encuentre un vector **b** en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 5, -12 \rangle$ que tiene magnitud 6.

SOLUCIÓN La magnitud de **a** está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

FIGURA 18



Un vector unitario **u** en la dirección de **a** se puede hallar multiplicando **a** por $1/\|\mathbf{a}\|$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{13}\langle 5, -12\rangle = \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle$$

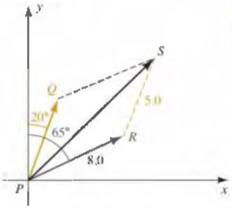
La multiplicación de **u** por 6 nos da un vector de magnitud 6 en la dirección de **a**, de modo que multiplicaremos **u** por -6 para obtener el vector deseado **b**, como se ilustra en la figura 18:

$$\mathbf{b} = -6\mathbf{u} = -6\left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle = \left\langle -\frac{30}{13}, \frac{72}{13} \right\rangle$$ ■

EJEMPLO 6 **Obtención de un vector resultante**

Dos fuerzas $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de magnitudes 5.0 y 8.0 kilogramos, respectivamente, actúan en un punto P. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es N20°E y la dirección de $\overrightarrow{PR}$ es N65°E. Aproxime la magnitud y dirección de $\overrightarrow{PS}$ resultante.

FIGURA 19



SOLUCIÓN Las fuerzas están representadas geométricamente en la figura 19. Note que los ángulos desde el eje x positivo hasta $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen medidas de 70° y 25°, respectivamente. Usando las fórmulas para componentes horizontales y verticales, obtenemos lo siguiente:

$$\overrightarrow{PQ} = (5\cos 70°)\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,70°)\mathbf{j}$$
$$\overrightarrow{PR} = (8\cos 25°)\mathbf{i} + (8\,\text{sen}\,25°)\mathbf{j}$$

Como $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= (5\cos 70° + 8\cos 25°)\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,70° + 8\,\text{sen}\,25°)\mathbf{j}\\ &\approx 8.9606\mathbf{i} + 8.0794\mathbf{j} \approx (9.0)\mathbf{i} + (8.1)\mathbf{j}\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1$$

También podemos obtener $\|\overrightarrow{PS}\|$ usando la ley de los cosenos (vea el ejemplo 3 de la sección 7.2). Como $\angle QPR = 45°$, deducimos que $\angle PRS = 135°$ y, por lo tanto,

$$\|\overrightarrow{PS}\|^2 = (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0)\cos 135° \approx 145.6$$

y $$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1$$

Si θ es el ángulo desde el eje x positivo a la resultante PS, entonces usando las coordenadas (aproximadas) (8.9606, 8.0794) de S, obtenemos lo siguiente:

$$\tan\theta \approx \frac{8.0794}{8.9606} \approx 0.9017$$
$$\theta \approx \tan^{-1}(0.9017) \approx 42°$$

Por lo tanto, la dirección de $\overrightarrow{PS}$ es aproximadamente N(90° − 42°)E = N48°E. ■

7.3 Ejercicios

Ejer. 1–6: Encuentre a + b, a − b, 4a + 5b, 4a − 5b y ‖a‖.

1 $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -1\rangle$

2 $\mathbf{a} = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$

3 $\mathbf{a} = -\langle 7, -2\rangle$, $\mathbf{b} = 3\langle 0, -2\rangle$

4 $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4\rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0\rangle$

5 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

6 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejer. 7–10: Trace los vectores correspondientes a a, b, a + b, 2a y −3b.

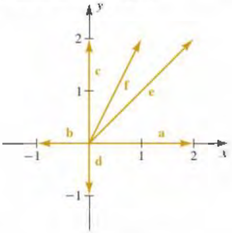
7 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

8 $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

9 $\mathbf{a} = \langle -4, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3\rangle$

10 $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0\rangle$

Ejer. 11–16: Use componentes para expresar la suma o diferencia como un múltiplo escalar de uno de los vectores a, b, c, d, e, o f que se muestran en la figura.



11 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

12 $\mathbf{c} - \mathbf{d}$

13 $\mathbf{b} + \mathbf{e}$

14 $\mathbf{f} - \mathbf{b}$

15 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$

16 $\mathbf{e} + \mathbf{c}$

Ejer. 17–26: Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2\rangle$, y m y n son números reales, demuestre la propiedad planteada.

17 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

18 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

19 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

20 $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$

21 $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$

22 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

23 $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

24 $(-m)\mathbf{a} = -m\mathbf{a}$

25 $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$

26 $m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m\mathbf{a} - m\mathbf{b}$

27 Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, demuestre que la magnitud de $2\mathbf{v}$ es el doble de la magnitud de $\mathbf{v}$.

28 Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y k es cualquier número real, demuestre que la magnitud de $k\mathbf{v}$ es $|k|$ veces la magnitud de $\mathbf{v}$.

Ejer. 29–36: Obtenga la magnitud del vector a y el ángulo positivo más pequeño θ del eje x positivo al vector OP que corresponde a a.

29 $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$

30 $\mathbf{a} = \langle 0, 10\rangle$

31 $\mathbf{a} = \langle 3, -3\rangle$

32 $\mathbf{a} = \langle -2, -2\sqrt{3}\rangle$

33 $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

34 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

35 $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

36 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Ejer. 37–40: Los vectores a y b representan dos fuerzas que actúan en el mismo punto, y θ es el ángulo positivo más pequeño entre a y b. Aproxime la magnitud de la fuerza resultante.

37 $\|\mathbf{a}\| = 40$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 70$ lb, $\theta = 45°$

38 $\|\mathbf{a}\| = 5.5$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 6.2$ lb, $\theta = 60°$

39 $\|\mathbf{a}\| = 2.0$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 8.0$ lb, $\theta = 120°$

40 $\|\mathbf{a}\| = 30$ lb, $\|\mathbf{b}\| = 50$ lb, $\theta = 150°$

Ejer. 41–44: Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que actúan en un punto P están dadas en a) y b). Aproxime la magnitud y la dirección del vector resultante.

41 a) 90 lb, N75°O b) 60 lb, S5°E

42 a) 20 lb, S17°O b) 50 lb, N82°O

43 a) 6.0 lb, 110° b) 2.0 lb, 215°

44 a) 30 lb, 280° b) 80 lb, 10°

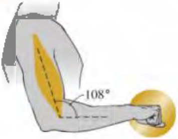
Ejer. 45–48: Aproxime los componentes horizontal y vertical del vector que se describe.

45 **Lanzamiento de un balón de futbol americano** Un quarterback lanza un balón de futbol a una velocidad de 50 pies/s en un ángulo de 35° con la horizontal.

46 **Tirar de un trineo** Un niño tira de un trineo en un campo nevado y ejerce una fuerza de 20 libras en un ángulo de 40° con la horizontal.

47 **Músculo bíceps** El músculo bíceps, al soportar el antebrazo y un peso sostenido en la mano, ejerce una fuerza de 20 libras. Como se aprecia en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.

EJERCICIO 47



48 **Aproximación de un jet** Un jet se aproxima a una pista a un ángulo de 7.5° con la horizontal, volando a una velocidad de 160 mi/h.

Ejer. 49–52: Encuentre un vector unitario que tenga a) la misma dirección que el vector a y b) dirección opuesta al vector a.

49 $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ **50** $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

51 $\mathbf{a} = \langle 2, -5\rangle$ **52** $\mathbf{a} = \langle -12, 5\rangle$

53 Encuentre un vector que tenga la misma dirección que $\langle -8, 2\rangle$ y

a) el doble de magnitud

b) la mitad de la magnitud

54 Encuentre un vector que tenga la dirección opuesta de $8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y

a) tres veces la magnitud

b) un tercio de la magnitud

55 Encuentre un vector de magnitud 6 que tenga la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

56 Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle -3, -1\rangle$.

Ejer. 57–60: Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ actúan en un punto P, la fuerza neta (o resultante) $\mathbf{F}$ es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$. Si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se dice que las fuerzas están en equilibrio. Las fuerzas dadas actúan en el origen O de un plano xy.

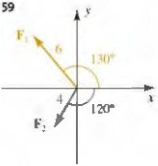
a) Encuentre la fuerza neta $\mathbf{F}$

b) Encuentre una fuerza adicional $\mathbf{G}$ tal que ocurra equilibrio.

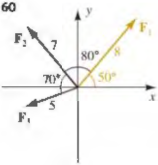
57 $\mathbf{F}_1 = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 5, 2\rangle$

58 $\mathbf{F}_1 = \langle -3, -1\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 0, -3\rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 3, 4\rangle$

59

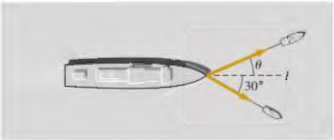


60



61 **Fuerza de un remolque** Dos remolques están tirando de un barco grande hacia puerto, como se muestra en la figura. El mayor de ellos ejerce una fuerza de 4,000 libras en su cable y el remolque más pequeño ejerce una fuerza de 3,200 libras en su cable. Si el barco ha de moverse en la línea recta l, calcule el ángulo θ que el remolque más grande debe formar con l.

EJERCICIO 61

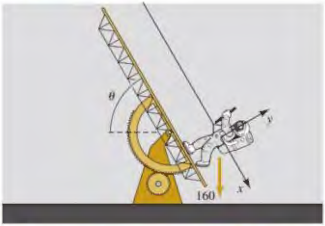


62 **Simulación de la atracción gravitacional** En la figura de la página siguiente se muestra un sencillo aparato que se puede usar para simular condiciones de atracción gravitacional en otros planetas. Una cuerda está atada a un astronauta que maniobra en un plano inclinado que forma un ángulo de θ grados con la horizontal.

a) Si el astronauta pesa 160 libras, encuentre los componentes x y y de la fuerza hacia abajo (vea los ejes en la figura).

b) El componente y en el inciso a) es el peso del astronauta respecto al plano inclinado. El astronauta pesaría 27 libras en la Luna y 60 libras en Marte. Calcule los ángulos θ (al 0.01° más cercano) para que el aparato de plano inclinado simule caminar en estas superficies.

EJERCICIO 62



63 **Trayectoria de un avión y velocidad en tierra** Un avión con velocidad en el aire de 200 mi/h vuela en la dirección 50°, y un viento de 40 mi/h sopla directamente desde el oeste. Como se ve en la figura, estos datos pueden representarse con los vectores **p** y **w** de magnitudes 200 y 40, respectivamente. La dirección de la resultante **p** + **w** da el curso verdadero del avión respecto al suelo, y la magnitud $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\|$ es la velocidad del avión en tierra. Calcule el curso verdadero y la velocidad en tierra.

EJERCICIO 63

64 **Trayectoria de un avión y velocidad en tierra** Consulte el ejercicio 63. Un avión vuela en la dirección 140° con una velocidad en el aire de 500 mi/h, y un viento de 30 mi/h sopla en la dirección 65°. Calcule el curso verdadero y la velocidad del avión en tierra.

65 **Trayectoria de un avión y velocidad en tierra** El piloto de un avión desea mantener un curso verdadero en la dirección 250° con una velocidad en tierra de 400 mi/h, cuando el viento sopla directamente al norte a 50 mi/h. Calcule la velocidad en el aire necesaria y el rumbo de la brújula.

66 **Dirección y velocidad del viento** Un avión vuela en la dirección 20° con una velocidad en el aire de 300 mi/h. Su velocidad en tierra y curso verdadero son 350 mi/h y 30°, respectivamente. Calcule la dirección y la velocidad del viento.

67 **Navegación en un bote de remos** La corriente en un río se mueve directamente desde el oeste a razón de 1.5 pies/s. Una persona que rema en un bote a razón de 4 pies/s en aguas en calma desea remar directamente para cruzar el río. Calcule, al grado más cercano, la dirección en la que la persona debe remar.

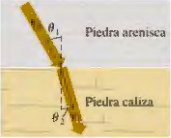
68 **Navegación en bote de motor** Para que un bote de motor en movimiento a una velocidad de 30 mi/h navegue directamente al norte para cruzar un río, debe dirigirse a un punto que tiene el rumbo N15°E. Si la corriente se mueve directamente al oeste, calcule la velocidad a la que se mueve.

69 **Flujo de aguas subterráneas** Los contaminantes de aguas subterráneas pueden entrar en el agua potable de una comunidad cuando se mueven a través de piedra porosa y entran en el acuífero. Si las aguas subterráneas se mueven con velocidad $\mathbf{v}_1$ por una interfase entre un tipo y un segundo tipo de roca, su velocidad cambia a $\mathbf{v}_2$, y tanto la dirección como la velocidad de flujo se pueden obtener con la fórmula

$$\frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\tan\,\theta_1}{\tan\,\theta_2}$$

donde los ángulos θ_1 y θ_2 son como se muestra en la figura. Para piedra arenisca, $\|\mathbf{v}_1\| = 8.2$ cm al día; para piedra caliza, $\|\mathbf{v}_2\| = 3.8$ cm al día. Si $\theta_1 = 30$ cm, calcule los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en la forma **i**, **j**.

EJERCICIO 69



70 **Flujo de aguas subterráneas** Consulte el ejercicio 69. Las aguas subterráneas contaminadas se mueven por arena fangosa con una dirección de flujo θ_1 y velocidad (en cm/día) dada por el vector $\mathbf{v}_1 = 20\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$. Cuando el flujo entra a una región de arena limpia, su velocidad aumenta a 725 cm/día. Calcule θ_2 para obtener la nueva dirección del flujo.

71 **Movimiento robótico** Los vectores son útiles para describir el movimiento de robots.

a) El brazo de robot que se ilustra en la primera figura puede girar en las conexiones articuladas P y Q. El brazo superior, representado por **a**, mide 15 pulgadas de largo y el antebrazo (incluyendo la mano), representado por **b**, mide 17 pulgadas de largo. Calcule las coordenadas del punto R en la mano usando **a** + **b**.

EJERCICIO 71a)

b) Si la parte superior del brazo gira 85° y el antebrazo gira otros 35°, como se ilustra en la segunda figura, calcule las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{c} + \mathbf{d}$.

EJERCICIO 71b)

72 **Movimiento robótico** Refiérase al ejercicio 71.

a) Suponga que la articulación de la muñeca del brazo del robot puede girar en la conexión S y el brazo se coloca como se muestra en la primera figura. La parte superior del brazo tiene una longitud de 15 pulgadas; el antebrazo, sin la mano, tiene una longitud de 10 pulgadas; y la mano tiene una longitud de 7 pulgadas. Calcule las coordenadas de R usando $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

EJERCICIO 72a)

b) Suponga que la parte superior del brazo del robot gira 75° y luego el antebrazo gira −80°, y finalmente la mano gira otros 40°, como se aprecia en la segunda figura. Calcule las nuevas coordenadas de R usando $\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}$.

EJERCICIO 72b)

73 **Fuerzas en Stonehenge** Refiérase al ejercicio 25 de la sección 5.2. En la construcción de Stonehenge se emplearon grupos de 550 hombres para subir bloques de piedra de 99,000 libras por rampas inclinadas a 9°. Haciendo caso omiso de la fricción, determine la fuerza con la que cada persona tuvo que contribuir para subir la piedra por la rampa.

EJERCICIO 73

7.4 El producto punto

El *producto punto* de dos vectores tiene numerosas aplicaciones. Comencemos con una definición algebraica.

Definición del producto punto

Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El **producto punto de a y b**, que se denota con **a** · **b**, es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \langle a_1, a_2\rangle\cdot\langle b_1, b_2\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

El símbolo **a** · **b** se lee "**a** punto **b**". El producto punto también se conoce como **producto escalar** o **producto interno**. Tenga en cuenta que **a** · **b** *es un número real y no un vector*, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Obtención del producto punto de dos vectores

Encuentre **a** · **b**.

a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3\rangle,\quad \mathbf{b} = \langle 2, 6\rangle$ **b)** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j},\quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

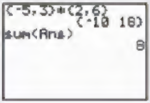
SOLUCIÓN

a) $\langle -5, 3\rangle\cdot\langle 2, 6\rangle = (-5)(2) + (3)(6) = -10 + 18 = 8$

b) $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = (4)(3) + (6)(-7) = 12 - 42 = -30$ ■

Obtención de un producto punto

Determinemos el producto punto del ejemplo 1a) con ayuda de una calculadora graficadora. El producto de las listas $\{a_1, a_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ es la lista $\{a_1b_1, a_2b_2\}$. Si sumamos estos elementos, obtenemos el producto punto.



Propiedades del producto punto

Si **a**, **b** y **c** son vectores y m es un número real, entonces

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$
2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
3) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
4) $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})$
5) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a} = 0$

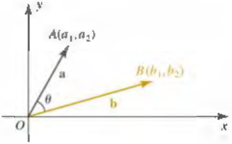
DEMOSTRACIÓN La prueba de cada propiedad se basa en la definición del producto punto y las propiedades de los números reales. Por lo tanto, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2\rangle && \text{definición de suma}\\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) && \text{definición del producto punto}\\
&= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) && \text{propiedades de los números reales}\\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} && \text{definición de producto punto}
\end{aligned}$$

que demuestra la propiedad 3. Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicios. ■

Dos vectores diferentes de cero cualesquiera $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ pueden representarse en un plano de coordenadas por segmentos de recta que van del origen O a los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente. El **ángulo θ entre a y b** es, por definición, $\angle AOB$ (vea la figura 1). Observe que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que $\theta = 0$ si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen la misma dirección o $\theta = \pi$ si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen direcciones opuestas.

FIGURA 1



Definición de vectores paralelos y ortogonales

Sea θ el ángulo entre los dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero.

1) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$

2) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **ortogonales** si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en la figura 1 son paralelos si y sólo si se encuentran en la misma recta que pasa por el origen. En este caso, $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m. Los vectores son ortogonales si y sólo si se encuentran en líneas mutuamente perpendiculares que pasan por el origen. Suponemos que el vector cero $\mathbf{0}$ es paralelo y ortogonal a *todo* vector $\mathbf{a}$.

El siguiente teorema muestra la estrecha relación entre el ángulo entre dos vectores y su producto punto.

Teorema sobre el producto punto

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

DEMOSTRACIÓN Si **a** y **b** no son paralelos, tenemos una situación semejante a la que se ilustra en la figura 1. Entonces podemos aplicar la ley de los cosenos al triángulo AOB. Como las longitudes de los tres lados del triángulo son $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, y $d(A, B)$,

$$[d(A, B)]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Usando la fórmula de la distancia y la definición de la magnitud de un vector, obtenemos

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

que se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

Dividiendo entre -2 ambos lados de la última ecuación, tendremos

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

que es equivalente a lo que deseábamos probar, porque el lado izquierdo es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Si **a** y **b** son paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ y, por lo tanto, $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ para algún número real m, siendo $m > 0$ si $\theta = 0$ y $m < 0$ si $\theta = \pi$. Podemos demostrar, usando las propiedades del producto punto, que $\mathbf{a} \cdot (m\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|\,\|m\mathbf{a}\| \cos\theta$ y, en consecuencia, el teorema es verdadero para todos los vectores **a** y **b** diferentes de cero.

Teorema del coseno del ángulo entre vectores

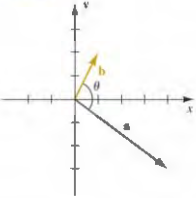
Si θ es el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$$

EJEMPLO 2 Cómo determinar el ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{a} = \langle 4, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$.

FIGURA 2



SOLUCIÓN Los vectores están trazados en la figura 2. Aplicamos el teorema anterior:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(1) + (-3)(2)}{\sqrt{16 + 9}\sqrt{1 + 4}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}}, \quad \text{o} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{25}$$

En consecuencia,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 100.3^\circ$$

■

EJEMPLO 3 Demostración de que dos vectores son paralelos

Sea $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

a) Demuestre que a y b son paralelos.

b) Encuentre el escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$.

SOLUCIÓN

a) Por definición, los vectores **a** y **b** son paralelos si y sólo si el ángulo θ entre ellos es 0 o π. Como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(-2) + (-3)(12)}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}\sqrt{4+144}} = \frac{-37}{37} = -1$$

concluimos que

$$\theta = \arccos(-1) = \pi$$

b) Como **a** y **b** son paralelos, *hay* un escalar m tal que $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$; esto es,

$$-2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} = m\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\right) = \tfrac{1}{2}m\mathbf{i} - 3m\mathbf{j}$$

Si igualamos los coeficientes de **i** y de **j**, tendremos

$$-2 = \tfrac{1}{2}m \qquad \text{y} \qquad 12 = -3m$$

Por lo tanto, $m = -4$; es decir, $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}$. Tenga en cuenta que **a** y **b** tienen direcciones opuestas, porque $m < 0$. ■

Usando la fórmula $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta$, junto con el hecho de que dos vectores son ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$ (o uno de los dos vectores es **0**), nos da el siguiente resultado.

Teorema sobre vectores ortogonales

Dos vectores **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 **Demostración de que dos vectores son ortogonales**

Demuestre que el par de vectores es ortogonal:

a) **i**, **j** **b)** $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

SOLUCIÓN Podemos usar el teorema sobre vectores ortogonales para probar la ortogonalidad, demostrando que el producto punto de cada par es cero:

a) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \langle 1, 0\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0 + 0 = 0$

b) $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot(6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2)(6) + (3)(-4) = 12 - 12 = 0$ ■

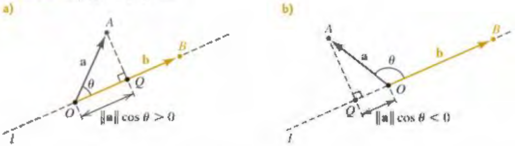
Definición de $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$

Sea θ el ángulo entre dos vectores **a** y **b** diferentes de cero. El **componente de a a lo largo de b**, que se denota con $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, está dado por

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\cos\theta$$

La importancia geométrica de la definición precedente con θ agudo u obtuso se ilustra en la figura 3, donde no se muestran los ejes x y y.

FIGURA 3 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos\theta$



Si el ángulo θ es agudo, entonces, como en la figura 3a), podemos formar un triángulo rectángulo trazando un segmento de recta AQ perpendicular a la recta l que pase por O y B. Observe que $\overrightarrow{OQ}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{OB}$. Al observar la parte a) de la figura, se aprecia que

$$\cos\theta = \frac{d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \text{ o, lo que es equivalente, } \|\mathbf{a}\| \cos\theta = d(O, Q)$$

Si θ es obtuso, entonces, como en la figura 3b), de nuevo trazamos AQ perpendicular a l. En este caso, la dirección de $\overrightarrow{OQ}$ es opuesta a la de $\overrightarrow{OB}$, y como $\cos\theta$ es negativo,

$$\cos\theta = \frac{d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \text{ o, lo que es equivalente, } \|\mathbf{a}\| \cos\theta = d(O, Q)$$

casos especiales para el componente de **a** a lo largo de **b**

$$\begin{cases} \textbf{1) } \text{Si } \theta = \pi/2\text{, entonces } \mathbf{a} \text{ es ortogonal a } \mathbf{b} \text{ y } \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = 0 \\ \textbf{2) } \text{Si } \theta = 0\text{, entonces } \mathbf{a} \text{ tiene la misma dirección que } \mathbf{b} \text{ y } \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \\ \textbf{3) } \text{Si } \theta = \pi\text{, entonces } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ tienen direcciones opuestas y } \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\| \end{cases}$$

La exposición precedente demuestra que el componente de **a** a lo largo de **b** puede hallarse al *proyectar* el punto extremo de **a** sobre la recta l que contiene a **b**. Por esta razón, $\|\mathbf{a}\| \cos\theta$ a veces se conoce como **proyección de a sobre b** y se denota con $\text{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$. La siguiente fórmula muestra cómo calcular esta proyección *sin* conocer el ángulo θ.

Fórmula para $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$

Si **a** y **b** son vectores diferentes de cero, entonces

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$$

DEMOSTRACIÓN Si θ es el ángulo entre a y b, entonces, del teorema sobre el producto punto,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

Dividiendo ambos lados de esta ecuación entre $\|\mathbf{b}\|$ tendremos

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 **Determinación de los componentes de un vector a lo largo de otro**

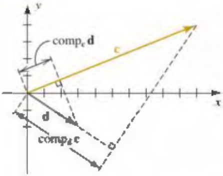
Si $\mathbf{c} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, encuentre $\text{comp}_\mathbf{d}\, \mathbf{c}$ y $\text{comp}_\mathbf{c}\, \mathbf{d}$, e ilustre gráficamente estos números.

SOLUCIÓN Los vectores c y d y los componentes deseados se ilustran en la figura 4. Usamos la fórmula para $\text{comp}_\mathbf{b}\, \mathbf{a}$, como sigue:

$$\text{comp}_\mathbf{d}\, \mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = \frac{(10)(3) + (4)(-2)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{22}{\sqrt{13}} \approx 6.10$$

$$\text{comp}_\mathbf{c}\, \mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{(3)(10) + (-2)(4)}{\sqrt{10^2 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{116}} \approx 2.04$$

FIGURA 4



Concluiremos esta sección con una aplicación física del producto punto. Pero antes examinaremos brevemente el concepto científico de *trabajo*.

Una **fuerza** puede considerarse la entidad física que se usa para describir un empuje o tracción sobre un objeto. Por ejemplo, se requiere una fuerza para empujar o tirar de un objeto a lo largo de un plano horizontal, para levantar un objeto del suelo o para mover una partícula cargada en un campo electromagnético. Con frecuencia, las fuerzas se miden en libras. Si un objeto pesa 10 libras, entonces, por definición, la fuerza necesaria para levantarlo (o sostenerlo levantado) es de 10 libras. Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante**, porque su magnitud no cambia mientras está aplicada al objeto dado.

Si una fuerza constante F se aplica a un objeto, moviéndolo una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces, por definición, el **trabajo** W es

$$W = Fd$$

Si F se mide en libras y d en pies, entonces las unidades de W son pies-libras (ft-lb). En el sistema cgs (centímetro-gramo-segundo) se emplea la **dina** como unidad de fuerza. Si F se expresa en dinas y d en centímetros, entonces la unidad de W es la dina-centímetro o **erg**. En el sistema mks (metro-kilogramo-segundo) se emplea el **newton** como unidad de fuerza. Si F está en newtons y d en metros, entonces la unidad de W es el newton-metro o **joule**.

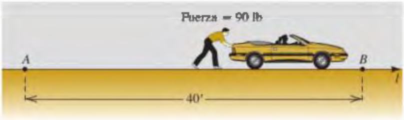
EJEMPLO 6 **Cálculo del trabajo realizado por una fuerza constante**

Encuentre el trabajo realizado al empujar un automóvil por un camino a nivel desde un punto A a otro punto B, a 40 pies de A, cuando se ejerce una fuerza constante de 90 libras.

SOLUCIÓN El problema se ilustra en la figura 5, donde hemos dibujado el camino como parte de una recta l. Como la fuerza constante es $F = 90$ libras y la distancia que se mueve el automóvil es $d = 40$ pies, el trabajo realizado es

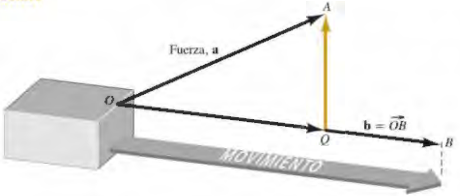
$$W = (90)(40) = 3600 \text{ ft-lb}$$

FIGURA 5



La fórmula $W = Fd$ es muy restrictiva, porque se puede usar sólo si la fuerza se aplica a lo largo de la línea de movimiento. En forma más general, suponga que un vector **a** representa una fuerza y que su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector **b**. Esto se ilustra en la figura 6, donde la fuerza **a** se emplea para tirar de un objeto a lo largo de una trayectoria a nivel de O a B, y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

FIGURA 6



El vector **a** es la suma de los vectores OQ y QA, donde $\overrightarrow{QA}$ es ortogonal a **b**. Como $\overrightarrow{QA}$ no contribuye al movimiento horizontal, podemos suponer que el movimiento de O a B es provocado sólo por $\overrightarrow{OQ}$. Aplicando $W = Fd$, sabemos que el trabajo es el producto de $\|\overrightarrow{OQ}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$. Como la magnitud $\|\overrightarrow{OQ}\|$, obtenemos

$$W = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a})\|\mathbf{b}\| = (\|\mathbf{a}\| \cos \theta)\|\mathbf{b}\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

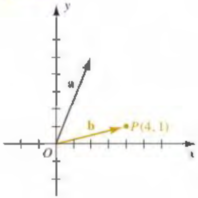
donde θ representa $\angle AOQ$. Esto lleva a la siguiente definición.

Definición de trabajo	El **trabajo** W realizado por una fuerza constante **a** cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector **b** es $W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

EJEMPLO 7 **Cómo determinar el trabajo realizado por una fuerza constante**

La magnitud y dirección de una fuerza constante están dadas por $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado si el punto de aplicación de la fuerza se mueve del origen al punto $P(4, 1)$.

FIGURA 7



SOLUCIÓN La fuerza **a** y el vector $\mathbf{b} = \overrightarrow{OP}$ están trazados en la figura 7. Como $\mathbf{b} = \langle 4, 1\rangle = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos, por la definición precedente,

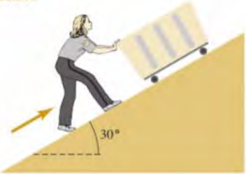
$$\begin{aligned} W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &= (2)(4) + (5)(1) = 13 \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, la unidad de longitud es pies y la magnitud de la fuerza se mide en libras, entonces el trabajo realizado es 13 ft-lb. ■

EJEMPLO 8 **Cómo determinar el trabajo realizado contra la atracción gravitacional**

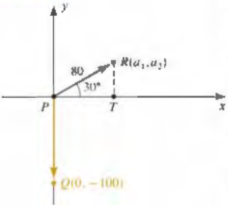
Un pequeño carro que pesa 100 libras es empujado hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se aprecia en la figura 8. Calcule el trabajo realizado contra la atracción gravitacional al empujar el carro una distancia de 80 pies.

FIGURA 8



SOLUCIÓN Introduzcamos un sistema de coordenadas xy, como el que se muestra en la figura 9. El vector PQ representa la fuerza de la gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 libras. El vector **F** correspondiente es $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. El punto de aplicación de esta fuerza se mueve a lo largo del vector PR de magnitud 80. Si $\overrightarrow{PR}$ corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, al observar el triángulo PTR, vemos que

FIGURA 9



$$a_1 = 80 \cos 30° = 40\sqrt{3}$$
$$a_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40,$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$$

Aplicando la definición, encontramos que el trabajo realizado *por* la gravedad es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot \left(40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}\right) = 0 - 4000 = -4000 \text{ ft-lb}$$

El trabajo realizado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ ft-lb}$$

7.4 Ejercicios

Ejer. 1–8: Encuentre a) el producto punto de los dos vectores y b) el ángulo entre los dos vectores.

1 $\langle -2, 5 \rangle$, $\langle 3, 6 \rangle$

2 $\langle 4, -7 \rangle$, $\langle -6, 1$

3 $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

4 $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} - 7$

5 $9\mathbf{i}$, $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

6 $6\mathbf{j}$, $-4\mathbf{i}$

7 $\langle -9, -3 \rangle$ $\langle 3, 1 \rangle$

8 $\langle -3, 6 \rangle$, $\langle -1, 2$

Ejer. 9–12: Demuestre que los vectores son ortogonales.

9 $\langle 4, -1 \rangle$, $\langle 2, 8 \rangle$

10 $\langle -2, 5 \rangle$, $\langle 10, 4 \rangle$

11 $-4\mathbf{j}$, $-7\mathbf{i}$

12 $7\mathbf{i} - 14\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejer. 13–16: Demuestre que los vectores son paralelos y determine si tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

13 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\frac{12}{7}\mathbf{i} + \frac{20}{7}\mathbf{j}$

14 $\mathbf{a} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$

15 $\mathbf{a} = \langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \rangle$, $\quad \mathbf{b} = \langle 8, 9 \rangle$

16 $\mathbf{a} = \langle 6, 18 \rangle$, $\quad \mathbf{b} = \langle -4, -12 \rangle$

Ejer. 17–20: Determine m tal que los dos vectores sean ortogonales.

17 $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\quad 4\mathbf{i} + 5m\mathbf{j}$ **18** $4m\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\quad 9m\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$

19 $9\mathbf{i} - 16m\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{i} + 4m\mathbf{j}$ **20** $5m\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\quad 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Ejer. 21–28: Dado que $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -1, 5 \rangle$, encuentre el número.

21 a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ **b)** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

22 a) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ **b)** $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

23 $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ **24** $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

25 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b}$ **26** $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{c}$

27 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ **28** $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{c}$

Ejer. 29–32: Si $\mathbf{c}$ representa una fuerza constante, encuentre el trabajo realizado si el punto de aplicación de $\mathbf{c}$ se mueve a lo largo del segmento de recta de P a Q.

29 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\quad P(0, 0)$, $\quad Q(5, -2)$

30 $\mathbf{c} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\quad P(0, 0)$, $\quad Q(3, 9)$

31 $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\quad P(2, -1)$, $\quad Q(4, 3)$
(*Sugerencia:* encuentre un vector $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ tal que $\mathbf{b} = \overrightarrow{PQ}$.)

32 $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $\quad P(-2, 5)$, $\quad Q(6, 1)$

33 Una fuerza constante de magnitud 4 tiene la misma dirección que $\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 0)$ a $Q(8, 3)$.

34 Una fuerza constante de magnitud 10 tiene la misma dirección que $-\mathbf{i}$. Encuentre el trabajo realizado si el punto de aplicación se mueve de $P(0, 1)$ a $Q(1, 0)$.

Ejer. 35–40: Demuestre la propiedad si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores y m es un número real.

35 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ **36** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

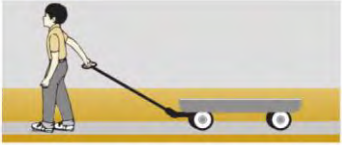
37 $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ **38** $m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b})$

39 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

40 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

41 **Tirar de una carretilla** Un niño tira de una carretilla por un terreno a nivel ejerciendo una fuerza de 20 libras sobre una manija que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se muestra en la figura. Calcule el trabajo realizado al tirar de la carretilla 100 pies.

EJERCICIO 41



42 **Tirar de una carretilla** Refiérase el ejercicio 41. Encuentre el trabajo realizado si se tira de la carretilla, con la misma fuerza, 100 pies por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se aprecia en la figura.

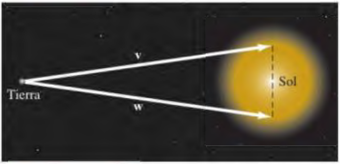
EJERCICIO 42

43 **Los rayos del Sol** El Sol tiene un radio de 432,000 millas y su centro está a 93,000,000 de millas del centro de la Tierra. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ los vectores que se ilustran en la figura.

a) Exprese $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en la forma $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

b) Calcule el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

EJERCICIO 43



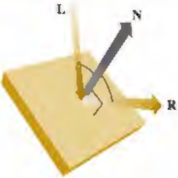
44 **Luz diurna en julio** La intensidad I de la luz diurna (en watts/m^2) se puede calcular usando la fórmula $I = ke^{-c\csc\phi}$, donde k y c son constantes positivas y ϕ es el ángulo entre los rayos del Sol y el horizonte. La cantidad de luz diurna que incide en una pared vertical que da al Sol es igual al componente de los rayos del Sol a lo largo de la horizontal. Si, durante el mes de julio, $\phi = 30°$, $k = 978$ y $c = 0.136$, calcule la cantidad total de luz diurna que incide en una pared vertical que tiene un área de 160 m^2.

Ejer. 45–46: Los vectores se usan extensamente en gráficas de computadora para hacer sombreado. Cuando incide luz en una superficie plana, se refleja y el área no debe estar sombreada. Suponga que un rayo entrante de luz está representado por un vector L y que N es un vector ortogonal a la superficie plana, como se ve en la figura. El rayo de luz reflejado puede representarse con el vector R y se calcula usando la fórmula R = 2(N · L)N − L. Calcule R para los vectores L y N.

45 Luz reflejada $\mathbf{L} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$, $\mathbf{N} = \langle 0, 1 \rangle$

46 Luz reflejada $\mathbf{L} = \langle \frac{12}{13}, -\frac{5}{13} \rangle$, $\mathbf{N} = \langle \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \rangle$

EJERCICIOS 45–46

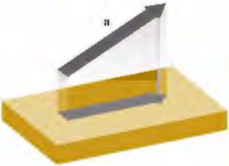


Ejer. 47–48: Los vectores se usan en gráficas computarizadas para calcular las longitudes de sombras sobre superficies planas. La longitud de un objeto puede representarse a veces con un vector a. Si una fuente de luz única brilla sobre un objeto, entonces la longitud de su sombra en el suelo será igual al valor absoluto del componente del vector a lo largo de la dirección del suelo, como se ve en la figura. Calcule la longitud de la sombra para el vector especificado a si el suelo está nivelado.

47 Sombra al nivel del suelo $\mathbf{a} = \langle 2.6, 4.5 \rangle$

48 Sombra al nivel del suelo $\mathbf{a} = \langle -3.1, 7.9 \rangle$

EJERCICIOS 47–48

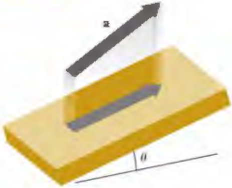


Ejer. 49–50: Refiérase los ejercicios 47 y 48. Un objeto representado por un vector a se sostiene sobre una superficie plana inclinada en un ángulo θ, como se muestra en la figura. Si una luz brilla directamente hacia abajo, calcule la longitud de la sombra a dos posiciones decimales para los valores especificados del vector a y θ.

49 Sombra en un plano inclinado $\mathbf{a} = \langle 25.7, -3.9 \rangle$, $\theta = 12°$

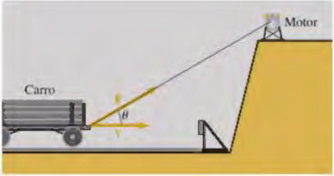
50 Sombra en un plano inclinado $\mathbf{a} = \langle -13.8, 19.4 \rangle$, $\theta = -17°$

EJERCICIOS 49–50



51 Determinación del caballo de fuerza La cantidad de caballos de fuerza P producidos por un motor puede determinarse con la fórmula $P = \frac{1}{550}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza (en libras) ejercida por el motor y $\mathbf{v}$ es la velocidad (en ft/s) de un objeto movido por el motor. Un motor tira con una fuerza de 2,200 libras de un cable que forma un ángulo θ con la horizontal, moviendo horizontalmente un carro, como se aprecia en la figura. Calcule los caballos de fuerza del motor si la velocidad del carro es de 8 ft/s cuando $\theta = 30°$.

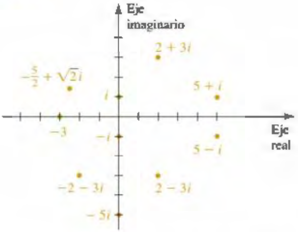
EJERCICIO 51



7.5 Forma trigonométrica de números complejos

En la sección 1.1 representamos geométricamente números reales mediante puntos en una recta de coordenadas. Podemos obtener representaciones geométricas de números complejos usando puntos en un plano de coordenadas. Específicamente, cada número complejo $a + bi$ determina un par ordenado único (a, b). El punto correspondiente $P(a, b)$ en un plano de coordenadas es la **representación geométrica** de $a + bi$. Para destacar que estamos asignando números complejos a puntos en un plano, podemos marcar el punto $P(a, b)$ como $a + bi$. Un plano de coordenadas con un número complejo asignado a cada punto se conoce como **plano complejo** (o Argand) en lugar de un plano xy. El eje x es el **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. En la figura 1 hemos representado geométricamente varios números complejos. Tenga en cuenta que para obtener el punto correspondiente al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$, simplemente lo reflejamos a través del eje real.

FIGURA 1



El valor absoluto de un número real a (que se denota $|a|$) es la distancia entre el origen y el punto sobre el eje x que corresponde a a. Así, es natural interpretar el valor absoluto de un número complejo, como la distancia entre el origen de un plano complejo y el punto (a, b) que corresponde a $a + bi$.

Definición del valor absoluto de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **valor absoluto**, que se denota con $|a + bi|$, es

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 1 Cálculo del valor absoluto de un número complejo

Encuentre

a) $|2 - 6i|$ **b)** $|3i|$

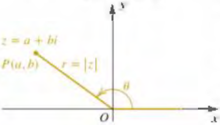
SOLUCIÓN Utilizamos la definición previa:

a) $|2 - 6i| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.3$

b) $|3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$ ■

FIGURA 2

$z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$



Los puntos correspondientes a todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo k están en un círculo de radio k con centro en el origen del plano complejo. Por ejemplo, los puntos correspondientes a los números complejos z con $|z| = 1$ están sobre un círculo unitario.

Consideremos un número complejo $z = a + bi$ diferente de cero y su representación geométrica $P(a, b)$, como se ilustra en la figura 2. Sea θ un ángulo cualquiera en posición estándar, cuyo lado terminal se encuentra sobre el segmento OP y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $\cos\theta = a/r$ y $\operatorname{sen}\theta = b/r$, vemos que $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$. Sustituyendo a y b en $z = a + bi$, obtenemos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Esta expresión se denomina **forma trigonométrica** (o **polar**) **para el número complejo $a + bi$**. Una abreviatura común es

$$r(\underline{c}\text{os}\,\theta + \underline{i}\,\underline{s}\text{en}\,\theta) = r\,\underline{\text{cis}}\,\theta$$

La forma trigonométrica para $z = a + bi$ no es única, porque hay un número ilimitado de opciones diferentes para el ángulo θ. Cuando usamos la forma trigonométrica, el valor absoluto r de z se conoce en ocasiones como el **módulo** de z y un ángulo θ asociado con z como un **argumento** (o **amplitud**) de z.

Podemos resumir nuestra exposición como sigue.

Forma trigonométrica (o polar) para un número complejo	Sea $z = a + bi$. Si $r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ y si θ es un argumento de z, entonces $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta$

La fórmula de Euler,

$$\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$$

nos da otra forma para el número complejo $z = a + bi$, comúnmente llamada **forma exponencial**; esto es,

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$$

Vea algunos problemas relacionados en el ejercicio 6 de los ejercicios de análisis al final del capítulo.

EJEMPLO 2 **Expresión de un número complejo en forma trigonométrica**

Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

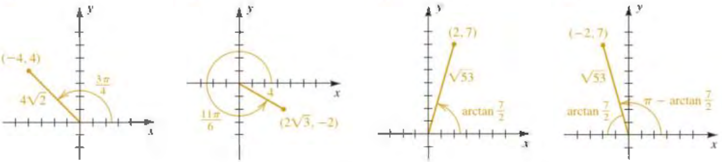
a) $-4 + 4i$ **b)** $2\sqrt{3} - 2i$ **c)** $2 + 7i$ **d)** $-2 + 7i$

SOLUCIÓN Comenzamos por representar geométricamente cada número complejo y marcar su módulo r y argumento θ, como en la figura 3.

(continúa)

FIGURA 3

a) b) c) d)



A continuación sustituimos r y θ en la forma trigonométrica:

a) $-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$

b) $2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right) = 4\operatorname{cis}\dfrac{11\pi}{6}$

c) $2 + 7i = \sqrt{53}\left[\cos\left(\arctan\frac{7}{2}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{7}{2}\right)\right] = \sqrt{53}\operatorname{cis}\left(\arctan\frac{7}{2}\right)$

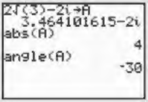
d) $-2 + 7i = \sqrt{53}\left[\cos\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right)\right]$
$= \sqrt{53}\operatorname{cis}\left(\pi - \arctan\frac{7}{2}\right)$ ■

Operaciones con números complejos

Veamos cómo determinar con ayuda de una calculadora graficadora el valor absoluto y el argumento del número complejo del ejemplo 2b).

Asigne $2\sqrt{3} - 2i$ a A.

2 [2nd] [√] 3 [)] [−] 2 [2nd] [i]
[STO▷] [ALPHA] [A] [ENTER]



Encuentre el valor absoluto de r.

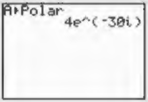
[MATH] [▷] [▷] [5]
[ALPHA] [A] [)] [ENTER]

Encuentre el argumento θ (en modo de grados).

[MATH] [▷] [▷] [4]
[ALPHA] [A] [)] [ENTER]

Ahora cambiaremos la forma de $2\sqrt{3} - 2i$ usando la función polar. La calculadora TI−83/4 Plus nos da la forma exponencial $re^{i\theta}$. Observe que $-30°$ es equivalente a $11\pi/6$ (el ángulo del ejemplo 2b) para $0 \le \theta < 2\pi$).

[ALPHA] [A] [MATH] [▷] [▷] [7] [ENTER]



Si permitimos valores arbitrarios para θ, hay muchas otras formas trigonométricas para los números complejos del ejemplo 2. Así, para $-4 + 4i$ en el inciso a) podríamos usar

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{para cualquier entero } n.$$

Si, por ejemplo, $n = 1$ y $n = -1$, obtenemos

$$4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad 4\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

respectivamente. En general, los argumentos para el mismo número complejo siempre difieren por un múltiplo de 2π.

Si los números complejos se expresan en forma trigonométrica, entonces la multiplicación y división se pueden efectuar como se indica en el siguiente teorema.

Teorema sobre productos y cocientes de números complejos

Si las formas trigonométricas para dos números complejos z_1 y z_2 son

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2),$$

entonces

1) $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)],\ z_2 \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Podemos probar 1) como sigue:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ &\qquad + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \end{aligned}$$

La aplicación de las fórmulas de suma para $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ obtenemos 1). Dejamos como ejercicio la demostración de 2). ■

La parte 1) del teorema precedente plantea que *el módulo de un producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y un argumento es la suma de sus argumentos*. Un enunciado análogo se puede hacer para 2).

EJEMPLO 3 **Uso de formas trigonométricas para obtener productos y cocientes**

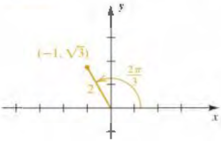
Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, use formas trigonométricas para encontrar **a)** z_1z_2 y **b)** z_1/z_2. Compruebe usando métodos algebraicos.

SOLUCIÓN El número complejo $2\sqrt{3} - 2i$ está representado geométricamente en la figura 3b). Si usamos $\theta = -\pi/6$ en la forma trigonométrica, entonces

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

(continúa)

FIGURA 4



El número complejo $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ está representado geométricamente en la figura 4. Una forma trigonométrica es

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

a) Aplicamos la parte 1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 4\cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 8(0 + i) = 8i \end{aligned}$$

FIGURA 5

La figura 5 da una interpretación geométrica del producto z_1z_2.

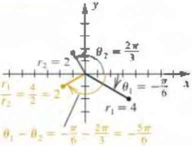
Usando métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, tenemos

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= \left(2\sqrt{3} - 2i\right)\left(-1 + \sqrt{3}i\right) \\ &= \left(-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) + (2 + 6)i = 0 + 8i = 8i \end{aligned}$$

b) Aplicamos la parte 2) del teorema:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

FIGURA 6



La figura 6 da una interpretación geométrica del cociente z_1/z_2.

Usando métodos algebraicos para comprobar nuestro resultado, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para obtener

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}i}\cdot\frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{\left(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) + (2 - 6)i}{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{4} = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

■

7.5 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el valor absoluto.

1 $|3 - 4i|$

2 $|5 + 8i|$

3 $|-6 - 7i|$

4 $|1 - i|$

5 $|0|$

6 $|-8|$

7 $|8i|$

8 $|-8i|$

9 $|i^{500}|$

10 $|i^{11}|$

Ejer. 11–20: Represente geométricamente el número complejo.

11 $4 + 2i$

12 $-5 + 3i$

13 $3 - 5i$

14 $-2 - 6i$

15 $-(3 - 6i)$

16 $(1 + 2i)^2$

17 $-2i(3 - 2i)$

18 $(-3i)(2 - i)$

19 $(1 + i)^2$

20 $4(-1 + 2i)$

Ejer. 21–46: Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

21 $1 - i$

22 $\sqrt{3} + i$

23 $-4\sqrt{3} + 4i$

24 $-2 - 2i$

25 $2\sqrt{3} + 2i$

26 $3 - 3\sqrt{3}i$

27 $-4 - 4i$

28 $-8 + 8i$

29 $-20i$

30 $-6i$

31 12

32 15

33 -7

34 -5

35 $6i$

36 $4i$

37 $-5 - 5\sqrt{3}i$

38 $\sqrt{3} - i$

39 $5 + 2i$

40 $3 + 2i$

41 $-3 + i$

42 $-4 + 2i$

43 $-5 - 3i$

44 $-2 - 7i$

45 $4 - 3i$

46 $12 - 5i$

Ejer. 47–60: Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

47 $4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

48 $8\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

49 $6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$

50 $12\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

51 $5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

52 $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

53 $\sqrt{34} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{3}{5}\right)$

54 $\sqrt{53} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{2}{7}\right)\right]$

55 $\sqrt{5} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

56 $\sqrt{10} \operatorname{cis} (\tan^{-1} 3)$

57 $\sqrt{65} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{7}{4}\right) + \pi\right]$

58 $\sqrt{61} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1} \left(-\frac{6}{5}\right) + \pi\right]$

59 $\sqrt{58} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{3}{7} + \pi\right)$

60 $\sqrt{85} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \frac{9}{2} + \pi\right)$

Ejer. 61–70: Use las formas trigonométricas para obtener z_1z_2 y z_1/z_2.

61 $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + i$

62 $z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$

63 $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = 5i$

64 $z_1 = -5 + 5i, \quad z_2 = -3i$

65 $z_1 = -10, \quad z_2 = -4$

66 $z_1 = 2i, \quad z_2 = -3i$

67 $z_1 = 4, \quad z_2 = 2 - i$

68 $z_1 = 7, \quad z_2 = 3 + 5i$

69 $z_1 = -5, \quad z_2 = 3 - 2i$

70 $z_1 = -3, \quad z_2 = 5 + 2i$

71 Demuestre 2) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos.

72 **a)** Extienda 1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos a tres números complejos.

b) Generalice 1) del teorema a n números complejos.

Ejer. 73–76: La forma trigonométrica de números complejos se utiliza con frecuencia por ingenieros electricistas para describir la corriente I, el voltaje V y la impedancia Z en circuitos eléctricos con corriente alterna. La impedancia es la oposición al flujo de corriente en un circuito. Los aparatos eléctricos más comunes funcionan con 115 volts de corriente alterna. La relación entre estas tres cantidades es $I = V/Z$. Calcule la cantidad desconocida y exprese la respuesta en forma rectangular a dos posiciones decimales.

73 **Determinación del voltaje** $I = 10 \operatorname{cis} 35°, \quad Z = 3 \operatorname{cis} 20°$

74 **Determinación del voltaje** $I = 12 \operatorname{cis} 5°, \quad Z = 100 \operatorname{cis} 90°$

75 **Determinación de impedancia** $I = 8 \operatorname{cis} 5°, \quad V = 115 \operatorname{cis} 45°$

76 **Determinación del voltaje** $Z = 78 \operatorname{cis} 61°, \quad V = 163 \operatorname{cis} 17°$

77 **Módulo de impedancia** El módulo de la impedancia Z representa la oposición total al flujo de corriente eléctrica en un circuito y se mide en ohms. Si $Z = 14 - 13i$, calcule $|Z|$.

78 **Resistencia y reactancia** El valor absoluto de la parte real de Z representa la resistencia en un circuito eléctrico; el valor absoluto de la parte compleja representa la reactancia. Ambas cantidades se miden en ohms. Si $V = 220 \text{ cis } 34°$ e $I = 5 \text{ cis } 90°$, calcule la resistencia y la reactancia.

79 **Voltaje real** La parte real de V representa el voltaje real entregado a un aparato eléctrico en volts. Calcule este voltaje cuando $I = 4 \text{ cis } 90°$ y $Z = 18 \text{ cis } (-78°)$.

80 **Corriente real** La parte real de I representa la corriente real entregada a un aparato eléctrico en amps. Calcule esta corriente cuando $V = 163 \text{ cis } 43°$ y $Z = 100 \text{ cis } 17°$.

7.6 Teorema de De Moivre y las raíces *n*-ésimas de números complejos

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, entonces un número complejo w es la **raíz *n*-ésima** de z si $w^n = z$. Demostraremos que todo número complejo diferente de cero tiene n raíces n-ésimas diferentes. Como $\mathbb{R}$ está contenido en $\mathbb{C}$, también se deduce que todo número real diferente de cero tiene n diferentes raíces n-ésimas (complejas). Si a es un número real positivo y $n = 2$, entonces ya sabemos que las raíces son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Si, en el teorema sobre productos y cocientes de números complejos, suponemos que z_1 y z_2 son iguales al número complejo $z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^2 &= r \cdot r[\cos(\theta + \theta) + i \text{ sen}(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \text{ sen } 2\theta) \end{aligned}$$

Aplicando el mismo teorema a z^2 y z tendremos

$$z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i \text{ sen}(2\theta + \theta)]$$

o

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta)$$

Aplicando el teorema a z^3 y z, obtenemos

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \text{ sen } 4\theta)$$

En general, tenemos el siguiente resultado, llamado así en honor del matemático francés Abraham De Moivre (1667–1754).

Teorema de De Moivre Para todo entero n,

$$[r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta).$$

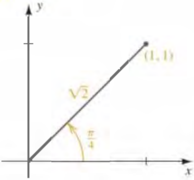
Usaremos sólo enteros positivos para n en ejemplos y ejercicios que comprendan el teorema de De Moivre. No obstante, para redondear, el teorema se cumple para $n = 0$ y n negativo si usamos las respectivas definiciones de exponentes de números reales, es decir, $z^0 = 1$ y $z^{-n} = 1/z^n$, donde z es un número complejo diferente de cero y n es un entero positivo.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema de De Moivre**

Use el teorema de De Moivre para cambiar $(1 + i)^{20}$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

SOLUCIÓN Sería tedioso cambiar $(1 + i)^{20}$ usando métodos algebraicos. Por lo tanto, introduzcamos una forma trigonométrica para $1 + i$. Remitiéndonos a la figura 1, vemos que

FIGURA 1



$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora aplicamos el teorema de De Moivre:

$$\begin{aligned}(1 + i)^{20} &= (2^{1/2})^{20}\left[\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(20\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= 2^{10}(\cos 5\pi + i\,\mathrm{sen}\,5\pi) = 2^{10}(-1 + 0i) = -1024\end{aligned}$$

El número -1024 es de la forma $a + bi$ con $a = -1024$ y $b = 0$. ■

Si un número complejo z diferente de cero tiene una raíz n-ésima w, entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas para w y z son

$$w = s(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \text{ y } z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad (*)$$

entonces, aplicando el teorema de De Moivre a $w^n = z$ tendremos

$$s^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Si dos números complejos son iguales, entonces también son iguales sus valores absolutos. En consecuencia, $s^n = r$, y como s y r son no negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Sustituyendo r por s^n en la última ecuación mostrada, y dividiendo ambos lados entre s^n, obtenemos

$$\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Como los argumentos de números complejos iguales difieren por un múltiplo de 2π, hay un entero k tal que $n\alpha = \theta + 2\pi k$. Dividiendo ambos lados de la última ecuación entre n, vemos que

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{para algún entero } k$$

Sustituyendo en la forma trigonométrica por w (vea (*)) obtenemos la fórmula

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

Si sustituimos $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ sucesivamente, obtenemos n diferentes raíces n-ésimas de z. Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz n-ésima. Por ejemplo, si $k = n$, obtenemos el ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$ o $(\theta/n) + 2\pi$, que nos da la misma raíz n-ésima que $k = 0$. Del mismo modo, $k = n + 1$ da la misma raíz n-ésima que $k = 1$, y así sucesivamente. Lo mismo aplica para valores negativos de k. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema sobre raíces *n*-ésimas

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es cualquier número complejo diferente de cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas diferentes $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Estas raíces, para θ en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

o bien, lo que es equivalente, para θ en grados,

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

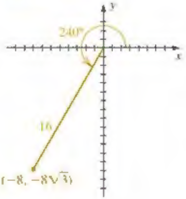
Las raíces n-ésimas de z en este teorema tienen todas ellas valor absoluto $\sqrt[n]{r}$ y, por lo tanto, sus representaciones geométricas se encuentran en un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en O. Además, están igualmente espaciadas en este círculo, dado que la diferencia en los argumentos de sucesivas raíces n-ésimas es $2\pi/n$ (o $360°/n$).

EJEMPLO 2 **Obtención de las raíces cuartas de un número complejo**

a) Encuentre las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.

b) Represente geométricamente las raíces.

FIGURA 2



SOLUCIÓN

a) La representación geométrica de $-8 - 8\sqrt{3}i$ se muestra en la figura 2. Introduciendo la forma trigonométrica, tenemos

$$-8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$

Usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 4$ y observando que $\sqrt[4]{16} = 2$, encontramos que las raíces cuartas son

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right)\right]$$

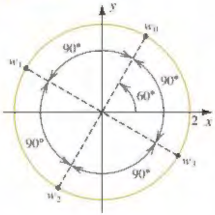
para $k = 0, 1, 2, 3$. Esta fórmula se puede escribir como

$$w_k = 2[\cos(60° + 90°k) + i \operatorname{sen}(60° + 90°k)]$$

Sustituyendo k por 0, 1, 2 y 3 en $(60° + 90°k)$ nos da las cuatro raíces cuartas:

$$w_0 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$w_1 = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\sqrt{3} + i$$
$$w_2 = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -1 - \sqrt{3}i$$
$$w_3 = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \sqrt{3} - i$$

FIGURA 3

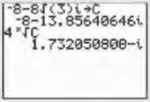


b) Por los comentarios que preceden a este ejemplo, todas las raíces se encuentran en un círculo de radio con centro en O. La primera raíz, w_0, tiene un argumento de 60° y las raíces sucesivas están separadas por $360°/4 = 90°$, como se aprecia en la figura 3. ■

La calculadora TI−83/4 Plus tiene la capacidad de calcular la raíz de un número complejo. A continuación obtenemos una raíz cuarta de $-8-8\sqrt{3}i$, como en el ejemplo 2a).

Obtención de una raíz de un número complejo

−8 [–] 8 [2nd] [√] 3 [)] [2nd] [i]
[STO▷] [ALPHA] [C] [ENTER]
4 [MATH] [5] [ALPHA] [C] [ENTER]



El caso especial en el que $z = 1$ es de particular interés. Las n raíces n-ésimas distintas de 1 se llaman **raíces n-ésimas de la unidad**. En particular, si $n = 3$, llamamos a estas raíces las **raíces cúbicas de la unidad**.

EJEMPLO 3 **Obtención de las raíces cúbicas de la unidad**

Encuentre las tres raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN Escribiendo $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 3$, obtenemos

$$w_k = 1\left[\cos\frac{2\pi k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{3}\right]$$

para $k = 0, 1, 2$. Sustituyendo k tendremos las tres raíces:

$$w_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

■

EJEMPLO 4 **Obtención de las raíces sextas de un número real**

a) Encuentre las seis raíces sextas de −1.

b) Represente geométricamente las raíces.

SOLUCIÓN

a) Escribiendo $-1 = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 6$, encontramos que las raíces sextas de −1 están dadas por

$$w_k = 1\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Sustituyendo k por 0, 1, 2, 3, 4, 5, obtenemos las seis raíces sextas de -1:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

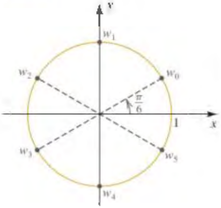
$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

FIGURA 4



b) Dado que $\sqrt[6]{1} = 1$, los puntos que representan las raíces de -1 están todos en el círculo unitario que se muestra en la figura 4. Además, están igualmente espaciados entre sí en este círculo por $\pi/3$ radianes, es decir, 60°. ■

Tome en cuenta que determinar las raíces n-ésimas de un número complejo c, como se hizo en los ejemplos 2–4, es equivalente a encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$x^n = c, \qquad \text{o} \qquad x^n - c = 0$$

Usaremos este concepto en el siguiente ejemplo, así como en los ejercicios 23–30.

EJEMPLO 5 **Solución de una ecuación polinómica sencilla**

Resuelva la ecuación $x^6 = 32\sqrt{3} + 32i$.

SOLUCIÓN

Si $c = 32\sqrt{3} + 32i$, entonces resolver esta ecuación es equivalente a encontrar las seis raíces sextas de c. Escribiendo c como $64(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$ y usando el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 6$, nos encontramos con que las seis raíces sextas de c están dadas por

$$w_k = \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{30° + 360°k}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{30° + 360°k}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Simplificando tenemos

$$w_k = 2[\cos(5° + 60°k) + i\,\text{sen}(5° + 60°k)]$$

Si sustituimos k y usamos la notación cis, esto nos permite escribir la solución como

$$2\,\text{cis}\,\theta \text{ con } \theta = 5°, 65°, 125°, 185°, 245°, 305°$$

FIGURA 5

Como se muestra en la figura 5, podemos comprobar cualquier valor de c, elevando a la sexta potencia. Tenga en cuenta que $c = 32\sqrt{3} + 32i \approx 55.43 + 32i$. ■

7.6 Ejercicios

Ejer. 1–12: Use el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(3 + 3i)^5$

2 $(1 + i)^{11}$

3 $(1 - i)^{10}$

4 $(-1 + i)^8$

5 $(1 - \sqrt{3}i)^3$

6 $(1 - \sqrt{3}i)^5$

7 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$

8 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$

9 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

10 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{50}$

11 $(\sqrt{3} + i)^7$

12 $(-2 - 2i)^{10}$

13 Obtenga las dos raíces cuadradas de $1 + \sqrt{3}i$.

14 Obtenga las dos raíces cuadradas de $-9i$.

15 Obtenga las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

16 Obtenga las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$.

17 Obtenga las tres raíces cúbicas de $-27i$.

18 Obtenga las tres raíces cúbicas de $64i$.

Ejer. 19–22: Encuentre las raíces indicadas y represéntelas geométricamente.

19 Las seis raíces sextas de la unidad.

20 Las ocho raíces octavas de la unidad.

21 Las cinco raíces quintas de $1 + i$.

22 Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$.

Ejer. 23–32: Encuentre las soluciones de la ecuación.

23 $x^4 - 16 = 0$

24 $x^6 - 64 = 0$

25 $x^6 + 64 = 0$

26 $x^5 + 1 = 0$

27 $x^3 + 8i = 0$

28 $x^3 - 216i = 0$

29 $x^5 - 243 = 0$

30 $x^4 + 81 = 0$

31 $x^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$

32 $x^6 = -1 + \sqrt{3}i$

33 Use la fórmula de Euler para demostrar el teorema de De Moivre.

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–4: Determine los valores exactos de las partes restantes del triángulo ABC.

1 $\alpha = 60°$, $b = 6$, $c = 7$

2 $\gamma = 30°$, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

3 $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $b = 100$

4 $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Ejer. 5–8: Aproxime las partes restantes del triángulo ABC.

5 $\beta = 67°$, $\gamma = 75°$, $b = 12$

6 $\alpha = 23°30'$, $c = 125$, $a = 152$

7 $\beta = 115°$, $a = 4.6$, $c = 7.3$

8 $a = 37$, $b = 55$, $c = 43$

Ejer. 9–10: Calcule el área del triángulo ABC a la 0.1 de unidad cuadrada más cercana.

9 $\alpha = 75°,\quad b = 20,\quad c = 30$

10 $a = 5,\quad b = 8,\quad c = 12$

11 Si $\mathbf{a} = \langle -4, 5\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8\rangle$, trace los vectores correspondientes a

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ c) $2\mathbf{a}$ d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

12 Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, encuentre el vector o número correspondiente a

a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

c) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ d) $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$

13 **Trayectoria de un barco** Un barco navega a la velocidad de 14 mi/h en dirección S50°E. Exprese su velocidad $\mathbf{v}$ como un vector.

14 Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas son 72 lb, S60°E y 46 lb, N74°E, respectivamente. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

15 Encuentre un vector que tenga dirección contraria a $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y dos veces su magnitud.

16 Encuentre un vector de magnitud 4 que tenga la misma dirección que $\mathbf{a} = \langle -3, 7\rangle$.

17 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ y $c > 0$, describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| = c$.

18 Si a y b son vectores con el mismo punto inicial y ángulo θ entre ellos, demuestre que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

19 **Velocidad y dirección del viento** Un avión vuela en dirección 80° con una velocidad en el aire de 400 mi/h. Su velocidad en tierra y rumbo verdadero son 390 mi/h y 90°, respectivamente. Calcule la dirección y la velocidad del viento.

20 Si $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -4\rangle$, encuentre cada uno de los siguientes:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ b) el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$

21 Si $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, encuentre cada uno de los siguientes:

a) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$

b) el ángulo entre a y a + b

c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

22 Una fuerza constante tiene la magnitud y dirección del vector $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de a se mueve a lo largo del eje x de $P(-5, 0)$ a $Q(3, 0)$.

Ejer. 23–30: Exprese en forma trigonométrica el número complejo con $0 \leq \theta < 2\pi$.

23 $-10 + 10i$ 24 $2 - 2\sqrt{3}\,i$

25 -17 26 $-12i$

27 $-5\sqrt{3} - 5i$ 28 $4 + 5i$

29 $-2 + 5i$ 30 $8 - 15i$

Ejer. 31–32: Exprese en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

31 $20\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$ 32 $13\ \text{cis}\left(\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$

Ejer. 33–34: Use formas trigonométricas para determinar z_1z_2 y z_1/z_2.

33 $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i,\quad z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

34 $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i,\quad z_2 = -1 - i$

Ejer. 35–38: Use el teorema de De Moivre para cambiar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

35 $(-\sqrt{3} + i)^9$ 36 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{30}$

37 $(3 - 3i)^5$ 38 $(2 + 2\sqrt{3}\,i)^{10}$

39 Encuentre las tres raíces cúbicas de -27.

40 Sea $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

a) Encuentre z^{24}. b) Obtenga las tres raíces cúbicas de z.

41 Encuentre las soluciones de la ecuación $x^5 + 32i = 0$

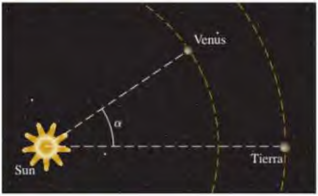
42 **Pista para patinetas** Una pista para carreras de patinetas consta de un tramo de 200 metros cuesta abajo y 150 metros de una parte a nivel. El ángulo de elevación del punto de partida de la carrera desde la línea de meta es de 27.4°. ¿Qué ángulo forma la colina con la horizontal?

43 **Topografía** Un topógrafo observa una torre en la dirección N40°E, camina hacia el norte 100 yardas y observa la misma torre en N59°E. Calcule la distancia desde el segundo avistamiento a la torre.

44 **Distancia de vuelo** Un avión vuela 120 millas desde el punto A en la dirección 330° y luego recorre 140 millas en la dirección 280°. Aproximadamente, ¿a qué distancia se encuentra el avión del punto A?

45 **Distancias a planetas** Las distancias entre la Tierra y los planetas cercanos se pueden calcular usando el ángulo de fase α, como se ve en la figura. Suponga que la distancia entre la Tierra y el Sol es de 93,000,000 de millas y la distancia entre Venus y el Sol es de 67,000,000 de millas. Calcule la distancia entre la Tierra y Venus al millón de millas más cercano cuando $\alpha = 34°$.

EJERCICIO 45

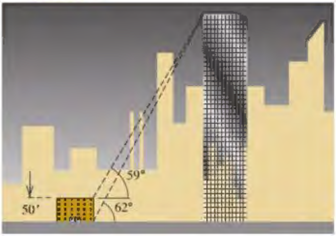


46 **Altura de un rascacielos** Si un rascacielos se ve desde lo alto de un edificio de 50 pies, el ángulo de elevación es de 59°. Si se ve desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación es de 62° (vea la figura).

a) Use la ley de los senos para aproximar la distancia más corta entre las cimas de los dos edificios.

b) Calcule la altura del rascacielos.

EJERCICIO 46

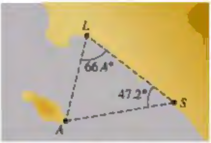


47 **Distancias entre ciudades** Las comunidades de playa de San Clemente y Long Beach están a 41 millas entre sí, a lo largo de un tramo relativamente recto de costa. En la figura se muestra el triángulo formado por las dos ciudades y la población de Avalon en la esquina sudeste de la isla de Santa Catalina. Se determina que los ángulos ALS y ASL miden 66.4° y 47.2°, respectivamente.

a) Calcule la distancia de Avalon a cada una de las dos ciudades.

b) Calcule la distancia más corta de Avalon a la costa.

EJERCICIO 47

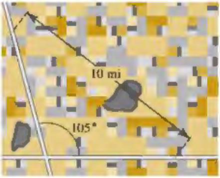


48 **Topografía** Un topógrafo desea obtener la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B. Como se muestra en la figura, se seleccionan dos puntos C y D desde los cuales es posible ver A y B. La distancia CD y los ángulos ACD, ACB, BDC y BDA se miden a continuación. Si $CD = 120$ ft, y $\angle ACD = 115°$, $\angle ACB = 92°$, $\angle BCD = 125°$ y $\angle BDA = 100°$, calcule la distancia AB.

EJERCICIO 48

49 **Contacto por radio** Dos mujeres con radios receptores y transmisores están en el cruce de dos caminos que se encuentran a un ángulo de 105° (vea la figura). Una de ellas comienza a caminar en dirección norte por un camino a una velocidad de 5 millas/h; al mismo tiempo, la otra camina al este al mismo paso por el otro camino. Si cada radio tiene un alcance de 10 millas, ¿cuánto tiempo mantendrán comunicación las mujeres?

EJERCICIO 49



50 **Diseño robótico** En la figura se muestra un diseño para un brazo robótico con dos piezas movibles. Las dimensiones se seleccionan para emular un brazo humano. La parte superior del brazo AC y la parte inferior CP giran del ángulo θ_1 al θ_2, respectivamente, para sujetar un objeto en el punto $P(x, y)$.

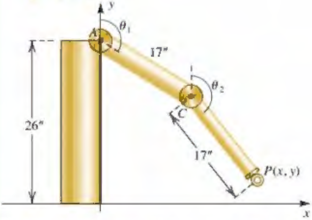
a) Demuestre que $\angle ACP = 180° - (\theta_2 - \theta_1)$.

b) Encuentre $d(A, P)$, y luego use el inciso a) y la ley de los cosenos para demostrar que

$$1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x^2 + (y - 26)^2}{578}.$$

c) Si $x = 25$, $y = 4$ y $\theta_1 = 135°$, aproxime θ_2.

EJERCICIO 50

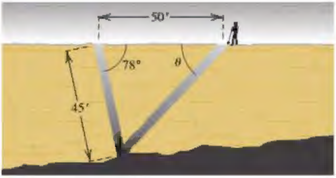


51 **Esfuerzos de rescate** Un niño está atrapado 45 pies bajo la superficie en el tiro de una mina abandonada que se inclina en un ángulo de 78° respecto a la horizontal. Un túnel de rescate se ha de cavar a 50 pies desde la abertura del tiro (vea la figura).

a) ¿A qué ángulo θ debe cavarse el túnel?

b) Si el túnel se puede cavar a razón de 3 pies/h, ¿cuántas horas tardarán en llegar al niño?

EJERCICIO 51



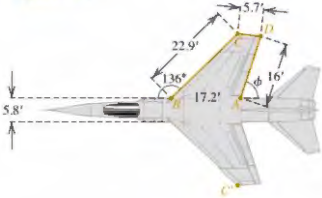
52 **Diseño de un avión caza a reacción** En la figura se muestra el plano de la parte superior del ala de un avión caza.

a) Calcule el ángulo ϕ.

b) Calcule el área del cuadrilátero $ABCD$.

c) Si el fuselaje mide 5.8 pies de ancho, calcule la envergadura de CC'.

EJERCICIO 52



CAPÍTULO 7 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 **Fórmula de Mollweide** La siguiente ecuación, llamada *fórmula de Mollweide*, se usa en ocasiones para comprobar soluciones de triángulos, porque contiene todos los ángulos y lados:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma}$$

a) Use la ley de los senos para demostrar que

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}$$

b) Use una fórmula de suma a producto y una fórmula de ángulo doble para verificar la fórmula de Mollweide.

2 Aplique la forma trigonométrica de un número complejo para demostrar que $z^{-n} = 1/z^n$, donde n es un entero positivo.

3 Explique las semejanzas algebraicas y geométricas de las raíces cúbicas de cualquier número real positivo a.

4 Suponga que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen el mismo punto inicial, que el ángulo entre ellos es θ y que $\mathbf{v} \neq m\mathbf{w}$ (m es un número real).

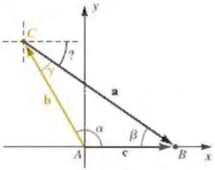
a) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\mathbf{v} - \mathbf{w}$?

b) ¿Cómo se puede determinar $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$?

5 Una aproximación vectorial a las leyes de los senos y los cosenos

a) En la figura vemos que $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Use componentes horizontales y verticales para escribir $\mathbf{c}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

EJERCICIO 5



b) Ahora encuentre la magnitud de $\mathbf{c}$ usando la respuesta al inciso a), y simplifique al punto donde haya demostrado la ley de los cosenos.

c) Si $\mathbf{c}$ se encuentra sobre el eje x, entonces su componente $\mathbf{j}$ es cero. Use este dato para demostrar la ley de los senos.

6 Fórmula de Euler y otros resultados Los siguientes son algunos resultados interesantes e inesperados que contienen números complejos y temas que ya hemos estudiado.

a) Leonhard Euler (1707−1783) nos dio la siguiente fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Si $\theta = \pi$, obtenemos $e^{i\pi} = -1$, o bien, lo que es equivalente,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

una ecuación que relaciona cinco de los números más importantes en matemáticas. Encuentre $e^{2\pi i}$.

b) El logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ se define como sigue:

$$\text{LN}\, z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$$

donde ln es la función de logaritmo natural, θ es un argumento de z y n es un entero. El **valor principal** de LN z es el valor que corresponde a $n = 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Encuentre los valores principales de LN (-1) y LN i.

c) Definimos la potencia compleja w de un número complejo $z \neq 0$ como sigue:

$$z^w = e^{w\,\text{LN}\, z}$$

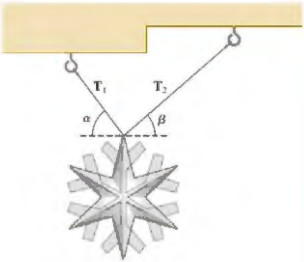
Usamos los valores principales de LN z para determinar los valores principales de z^w. Encuentre los valores principales de $\sqrt{i}$ e i^i.

7 ¿Una identidad interesante? Suponga que α, β y γ son ángulos de un triángulo oblicuángulo. Demuestre o refute el siguiente enunciado: la suma de las tangentes de α, β y γ es igual al producto de las tangentes de α, β y γ.

8 Fuerzas de alambres colgantes Un adorno de 5 lb cuelga de dos alambres como se muestra en la figura. Demuestre que las magnitudes de las tensiones (fuerzas) de los alambres están dadas por

$$\|\mathbf{T}_1\| = \frac{5\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{T}_2\| = \frac{5\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

EJERCICIO 8



CAPÍTULO 7 EXAMEN

1 En $\triangle ABC$, $a = 5$ y $c = 3$. ¿Cuántos posibles triángulos hay si

a) $\gamma = 35°$? **b)** $\gamma = 39°$? **c)** $\gamma = 158°$?

2 Los ángulos de elevación de un objeto desde dos puntos A y B a nivel del suelo son de 25° y 57°, respectivamente. Los puntos A y B están separados por 6 millas y el objeto se encuentra entre ellos, en el mismo plano vertical. Calcule, a dos cifras decimales, la altura del objeto sobre el suelo.

3 Un guardabosque en un punto de observación A divisa un incendio en un punto F en la dirección N15°50'E. Otro guardabosque en un punto de observación B, a 7.3 millas al este de A, observa el mismo incendio en dirección N48°20'O. Calcule a dos cifras decimales, la distancia de A a F.

4 Dados los tres lados de un triángulo, ¿qué ángulo encontraría en seguida y qué utilizaría para encontrarlo?

5 El ángulo en una esquina de un lote de terreno triangular es de 75° y los lados que coinciden en esta esquina tienen una longitud de 300 y 250 pies, respectivamente. Aproxime la longitud del tercer lado.

6 Un lote de terreno de forma triangular tiene lados de 80, 70 y 60 pies de longitud. Calcule, a la décima de grado más cercana, el ángulo más grande entre los lados.

7 Utilice la fórmula de Herón para calcular el área de $\triangle ABC$ dados $a = 26.0$ pies, $b = 30.0$ pies y $c = 40.0$ pies.

8 Si $\mathbf{a} = \langle 3, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 1\rangle$, encuentre el valor exacto de $\|2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}\|$.

9 Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ representan dos fuerzas que actúan sobre el mismo punto, con $\|\mathbf{a}\| = 10.2$ lb y $\|\mathbf{b}\| = 15.7$ lb, y $\theta = 33°$ es el ángulo positivo más pequeño entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Calcule la magnitud de la fuerza resultante.

10 Encuentre un vector de magnitud 7 que tenga dirección opuesta a $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.

11 El piloto de un avión desea mantener un rumbo verdadero en la dirección 245° con una velocidad en tierra de 450 mi/h cuando el viento sopla directamente al norte a 30 mi/h. Calcule la velocidad requerida en el aire y el rumbo de la brújula.

12 Calcule, a dos cifras decimales, el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

13 Determine todos los valores de m tales que $\mathbf{a} = 4m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9m\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$ sean ortogonales.

14 Dado que $\mathbf{a} = \langle 6, -5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 7, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -2, 4\rangle$, encuentre $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{c})$.

15 Dado que $\mathbf{a} = \langle -8, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -4, 5\rangle$, encuentre $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

16 Un niño tira de una carretilla hacia arriba sobre una rampa que forma un ángulo de 25° con la horizontal, ejerciendo una fuerza de 20 lb sobre una manija que forma un ángulo de 27° con la rampa. Calcule el trabajo realizado al tirar de la carretilla 200 pies.

17 Encuentre $|(2 - 3i)^3|$.

18 Exprese el número complejo $-3 + 2i$ en forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$.

19 Exprese $\sqrt{106}$ cis $\left(\tan^{-1} \frac{5}{9}\right)$ en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

20 Use formas trigonométricas para hallar z_1z_2 y z_1/z_2 si $z_1 = -4 - 4\sqrt{3}i$ y $z_2 = 7i$.

21 Utilice el teorema de De Moivre para cambiar $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

22 Encuentre las tres raíces cúbicas de $-64i$.

23 Encuentre las soluciones de la ecuación $x^5 - 7i = 0$.

8

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

8.1 Sistemas de ecuaciones

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

8.3 Sistemas de desigualdades

8.4 Programación lineal

8.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables

8.6 Álgebra de matrices

8.7 La inversa de una matriz

8.8 Determinantes

8.9 Propiedades de los determinantes

8.10 Fracciones parciales

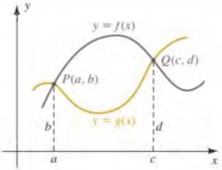
Las aplicaciones matemáticas a veces requieren trabajar de forma simultánea con más de una ecuación con varias variables, es decir, con un sistema de ecuaciones. En este capítulo desarrollamos métodos para encontrar soluciones que son comunes a todas las ecuaciones de un sistema. De particular importancia son las técnicas que incluyen matrices, porque son ideales para programas de cómputo y se pueden aplicar con facilidad a sistemas que contienen cualquier número de ecuaciones lineales con cualquier número de variables. También consideraremos sistemas de desigualdades y programación lineal, temas que son de la mayor importancia en aplicaciones financieras y estadísticas. La última parte del capítulo presenta una introducción al álgebra de matrices y determinantes.

8.1 Sistemas de ecuaciones

Considere las gráficas de las dos funciones f y g que se ilustran en la figura 1. En aplicaciones, con frecuencia es necesario encontrar puntos como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ en los que se intersecan las gráficas. Como $P(a, b)$ está en cada gráfica, el par (a, b) es una **solución** de *ambas* ecuaciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, es decir,

$$b = f(a) \qquad \text{y} \qquad b = g(a)$$

FIGURA 1



Se dice que (a, b) es una solución del **sistema de ecuaciones** (o simplemente **sistema**)

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

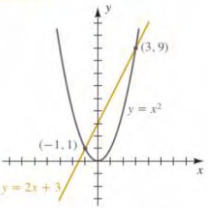
donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse de forma simultánea. Del mismo modo, el par (c, d) es una solución del sistema. **Resolver** un sistema de ecuaciones significa encontrar todas las soluciones.

Como ejemplo, considere el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

En capítulos anteriores ***estimamos*** *soluciones de sistemas y usamos la función intersect de una calculadora graficadora. Ahora nos concentraremos en encontrar soluciones* ***exactas****.*

FIGURA 2



Las gráficas de las ecuaciones son la parábola y la recta trazadas en la figura 2. La siguiente tabla muestra que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ están en ambas gráficas.

(x, y)	$y = x^2$	$y = 2x + 3$
$(-1, 1)$	$1 = (-1)^2$, o $1 = 1$	$1 = 2(-1) + 3$, o $1 = 1$
$(3, 9)$	$9 = 3^2$, o $9 = 9$	$9 = 2(3) + 3$, o $9 = 9$

En consecuencia, $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son las soluciones del sistema.

La exposición precedente no nos da una estrategia para encontrar en realidad las soluciones. Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo encontrar las soluciones del sistema usando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema de dos ecuaciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si (x, y) es una solución del sistema, entonces la variable y de la ecuación $y = 2x + 3$ debe satisfacer la condición $y = x^2$. Por lo tanto, *sustituimos* y por x^2 en $y = 2x + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + 3 && \text{sustituimos } y = x^2 \text{ en } y = 2x + 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{restamos } 2x + 3 \\ (x + 1)(x - 3) &= 0 && \text{factorizamos} \\ x + 1 = 0, \quad x - 3 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ x = -1, \qquad x &= 3 && \text{despejamos } x \end{aligned}$$

Esto nos da los valores x para las soluciones (x, y) del sistema. Para encontrar los valores correspondientes de y, podemos usar ya sea $y = x^2$ o $y = 2x + 3$. Usando $y = x^2$, encontramos que

$$\text{si } x = -1, \text{ entonces } y = (-1)^2 = 1$$

y $$\text{si } x = 3, \text{ entonces } y = 3^2 = 9$$

En consecuencia, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

También podríamos haber encontrado las soluciones al sustituir $y = 2x + 3$ en la primera ecuación, $y = x^2$, obteniendo

$$2x + 3 = x^2$$

El resto de la solución es igual. ■

Dado el sistema del ejemplo 1, *podríamos* haber despejado x en una de las ecuaciones en términos de y y luego sustituirla en la otra ecuación para obtener una ecuación sólo con y. Al resolver la última ecuación nos daría los valores de y para las soluciones del sistema. Los valores de x podrían encontrarse entonces usando una de las ecuaciones dadas. En general, podemos usar los siguientes pasos, donde u y v denotan dos variables cualesquiera (*posiblemente* x y y). Esta técnica se conoce como **método de sustitución**.

Pasos para el método de sustitución para dos ecuaciones con dos variables

1. En una de las ecuaciones despeje la variable u en términos de la otra variable v.
2. Sustituya la expresión para u encontrada en el paso 1 en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con v únicamente.
3. Encuentre las soluciones de la ecuación con v obtenida en el paso 2.
4. Sustituya los valores v encontrados en el paso 3 en la ecuación del paso 1 y encuentre los correspondientes valores de u.
5. Compruebe cada par (u, v) encontrado en el paso 4 en el sistema dado.

EJEMPLO 2 **Uso del método de sustitución**

Resuelva el siguiente sistema y luego trace la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Primero debemos decidir cuál ecuación resolver y cuál variable despejar. Examinemos las posibilidades.

En la primera ecuación, despejar y:	$y = \pm\sqrt{6 - x}$
En la primera ecuación, despejar x:	$x = 6 - y^2$
En la segunda ecuación, despejar y:	$y = (3 - x)/2$
En la segunda ecuación, despejar x:	$x = 3 - 2y$

Paso 1 Si nos anticipamos a lo que indica el paso 2, observamos que despejar x en cualquiera de las ecuaciones producirá una sustitución sencilla. Así, usaremos $x = 3 - 2y$ y seguiremos los pasos con $u = x$ y $v = y$.

(*continúa*)

Paso 2 Sustituya la expresión por x que se encuentra en el paso 1 en la primera ecuación del sistema:

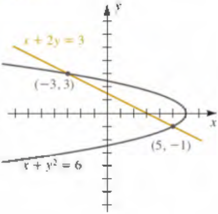
$$\begin{aligned} (3 - 2y) + y^2 &= 6 && \text{sustituimos } x = 3 - 2y \text{ en } x + y^2 = 6 \\ y^2 - 2y - 3 &= 0 && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

Paso 3 Despeje y en la ecuación del paso 2:

$$\begin{aligned} (y - 3)(y + 1) &= 0 && \text{factorizamos } y^2 - 2y - \\ y - 3 = 0, \quad y + 1 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ y = 3, \quad y &= -1 && \text{despejamos } y \end{aligned}$$

Estos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema.

FIGURA 3



Paso 4 Use la ecuación $x = 3 - 2y$ del paso 1 para encontrar los correspondientes valores de x:

$$\text{si } y = 3, \text{ entonces } x = 3 - 2(3) = 3 - 6 = -3$$

$$\text{si } y = -1, \text{ entonces } x = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$$

Por consiguiente, las posibles soluciones son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Paso 5 Sustituyendo $x = -3$ y $y = 3$ en $x + y^2 = 6$, la primera ecuación del sistema, tendremos $-3 + 9 = 6$, un enunciado verdadero. Sustituyendo $x = -3$ y $y = 3$ en $x + 2y = 3$, la segunda ecuación del sistema, da $-3 + 6 = 3$, también un enunciado verdadero. Por lo tanto, $(-3, 3)$ es una solución del sistema. De modo semejante, podemos comprobar que $(5, -1)$ es también una solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones (una parábola y una recta, respectivamente) están trazadas en la figura 3, mostrando los dos puntos de intersección. ■

En ejemplos futuros no haremos una lista de los pasos específicos que se usan para encontrar las soluciones de sistemas.

Al resolver ciertos sistemas usando el método de sustitución, conviene que u o v de los pasos denoten una *expresión* que contiene otra variable. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo con $u = x^2$.

EJEMPLO 3 **Uso del método de sustitución**

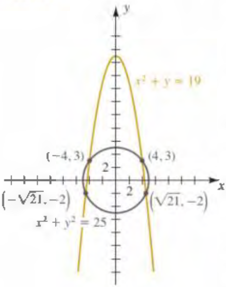
Resuelva el siguiente sistema y luego trace la gráfica de cada ecuación, mostrando los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 &= 19 - y && \text{despejamos } x^2 + y = 19 \text{ en } x^2 \\ (19 - y) + y^2 &= 25 && \text{sustituimos } x^2 = 19 - y \text{ en } x^2 + y^2 = 25 \\ y^2 - y - 6 &= 0 && \text{simplificamos} \\ (y - 3)(y + 2) &= 0 && \text{factorizamos} \\ y - 3 = 0, \quad y + 2 &= 0 && \text{teorema del factor cero} \\ y = 3, \quad y &= -2 && \text{despejamos } y \end{aligned}$$

FIGURA 4



Estos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema. Para encontrar los valores correspondientes de x, usamos $x^2 = 19 - y$:

$$\text{Si} \quad y = 3, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - 3 = 16 \quad \text{y} \quad x = \pm 4$$
$$\text{Si} \quad y = -2, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - (-2) = 21 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{21}$$

Por lo tanto, las únicas soluciones posibles del sistema son

$$(4, 3), \quad (-4, 3), \quad \left(\sqrt{21}, -2\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{21}, -2\right)$$

Podemos comprobar, por sustitución en las ecuaciones dadas, que los cuatro pares son soluciones.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo de radio 5 con centro en el origen, y la gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con un eje vertical. Las gráficas están trazadas en la figura 4. Los puntos de intersección corresponden a las soluciones del sistema.

Por supuesto, hay otras formas de encontrar soluciones. Podríamos despejar x^2 en la primera ecuación, $x^2 = 25 - y^2$, y luego sustituir en la segunda, obteniendo $25 - y^2 + y = 19$. Otro método consiste en despejar y en la segunda ecuación, $y = 19 - x^2$, y sustituir en la primera. ■

También consideramos ecuaciones con tres variables x, y y z, por ejemplo,

$$x^2y + xz + 3y = 4z^3.$$

Esta ecuación tiene una **solución** (a, b, c) si la sustitución de a, b y c por x, y y z, respectivamente, da un enunciado verdadero. Nos referimos a (a, b, c) como una **terna ordenada** de números reales. Los sistemas de ecuaciones son **sistemas equivalentes** siempre que tienen las mismas soluciones. Un sistema de ecuaciones con tres variables y las soluciones del sistema se definen como en el caso de dos variables. Del mismo modo, podemos considerar sistemas de *cualquier* número de ecuaciones con *cualquier* número de variables.

El método de sustitución se puede ampliar a estos sistemas más complejos. Por ejemplo, dadas tres ecuaciones con tres variables, suponga que es posible despejar una de las variables de las ecuaciones en términos de las dos variables restantes. Al sustituir esa expresión en cada una de las otras ecuaciones, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Las soluciones del sistema de dos variables se pueden usar entonces para encontrar las soluciones del sistema original.

EJEMPLO 4 **Cómo resolver un sistema de tres ecuaciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Procedemos como sigue:

$$z = 1 - 2y \qquad \text{despejamos } 2y + z = 1 \text{ en } z$$

$$\begin{cases} x - y + (1 - 2y) = 2 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{sustituimos } z = 1 - 2y \text{ en las primeras dos ecuaciones}$$

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{sistema equivalente}$$

(*continúa*)

Ahora obtenemos las soluciones del último sistema:

$$x = 3y + 1 \quad \text{despejamos } x - 3y - 1 = 0 \text{ en } x$$

$$(3y + 1)y(1 - 2y) = 0 \quad \text{sustituimos } x = 3y + 1 \text{ en } xy(1 - 2y) = 0$$

$$3y + 1 = 0 \quad y = 0, \quad 1 - 2y = 0 \quad \text{teorema del factor cero}$$

$$y = -\tfrac{1}{3}, \quad y = 0, \quad y = \tfrac{1}{2} \quad \text{despejamos } y$$

Estos son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema.

Para obtener los valores correspondientes de x, sustituimos y en la ecuación $x = 3y + 1$ y obtenemos

$$x = 0, \qquad x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = \tfrac{5}{2}$$

Usamos $z = 1 - 2y$ para obtener los valores correspondientes de z:

$$z = \tfrac{5}{3}, \qquad z = 1 \qquad \text{y} \qquad z = 0$$

Por lo tanto, las soluciones (x, y, z) del sistema original deben estar entre las ternas ordenadas

$$\left(0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}\right), \qquad (1, 0, 1) \qquad \text{y} \qquad \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

La comprobación de cada una demuestra que las tres ternas ordenadas son soluciones del sistema. ■

EJEMPLO 5 **Una aplicación de un sistema de ecuaciones**

¿Es posible construir un acuario con tapa de vidrio y dos extremos cuadrados que contengan 16 ft^3 de agua y requiera 40 ft^2 de vidrio? (No tome en cuenta el grosor del vidrio.)

SOLUCIÓN Para empezar, dibujamos un acuario típico y lo marcamos como en la figura 5, con x y y en pies. Consultando la figura y aplicando las fórmulas de volumen y área, vemos que

$$\text{volumen del acuario } = x^2y \qquad \text{longitud} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$\text{pies cuadrados de vidrio necesarios } = 2x^2 + 4xy. \qquad \text{2 extremos, 2 lados, tapa y fondo}$$

FIGURA 5

Como el volumen debe ser 16 ft^3 y el área del vidrio necesario es 40 ft^2, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2y = 16 \\ 2x^2 + 4xy = 40 \end{cases}$$

Encontramos las soluciones como sigue:

$$y = \frac{16}{x^2} \quad \text{despejamos } x^2y = 16 \text{ en } y$$

$$2x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) = 40 \quad \text{sustituimos } y = \frac{16}{x^2} \text{ en } 2x^2 + 4xy = 40$$

$$x^2 + \frac{32}{x} = 20 \quad \text{cancelamos } x, \text{ y dividimos entre } 2$$

$$x^3 + 32 = 20x \quad \text{multiplicamos por } x \ (x \neq 0)$$

$$x^3 - 20x + 32 = 0 \quad \text{restamos } 20x$$

La gráfica de $y = x^3 - 20x + 32$ muestra dos ceros positivos. Uno parece ser 2 y el otro ligeramente mayor que 3.

A continuación, buscamos soluciones racionales de la última ecuación. Dividimos el polinomio $x^3 - 20x + 32$ sintéticamente entre $x - 2$, lo cual nos da

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -20 & 32 \\ & & 2 & 4 & -32 \\ \hline & 1 & 2 & -16 & 0 \end{array}$$

Por consiguiente, una solución de $x^3 - 20x + 32 = 0$ es 2, y las dos soluciones restantes son los ceros del cociente $x^2 + 2x - 16$, es decir, las raíces de la ecuación obtenida

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Como x es positiva, podemos descartar $x = -1 - \sqrt{17}$. En consecuencia, los únicos valores posibles de x son

$$x = 2 \qquad \text{y} \qquad x = -1 + \sqrt{17} \approx 3.12.$$

Los valores correspondientes de y se pueden encontrar al sustituir x en la ecuación $y = 16/x^2$. Si $x = 2$, obtenemos $y = \frac{16}{4} = 4$. Usando estos valores, obtenemos las dimensiones de 2 por 2 por 4 pies para el acuario.

Si $x = -1 + \sqrt{17}$, obtenemos $y = 16/(-1 + \sqrt{17})^2$, que se simplifica a $y = \frac{1}{8}(9 + \sqrt{17}) \approx 1.64$. Entonces, las dimensiones aproximadas de otro acuario son 3.12 por 3.12 por 1.64 pies. ■

8.1 Ejercicios

Ejer. 1–36: Use el método de sustitución para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = 4x^3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x + y = 9 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

23 $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x + 2} \\ y = x + 5 \end{cases}$

24 $\begin{cases} y = \dfrac{10}{x + 3} \\ y = -x + 8 \end{cases}$

25 $\begin{cases} y = 20/x^2 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

26 $\begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

27 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ 9y^2 + 16x^2 = 140 \end{cases}$

28 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 6x^2 + 7y^2 = 28 \end{cases}$

29 $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 8x^2 + 16y^2 = 128 \end{cases}$

30 $\begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$

31 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 6x^3 - y^3 = 1 \\ 3x^3 + 4y^3 = 5 \end{cases}$

33 $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$

34 $\begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$

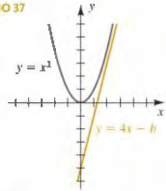
35 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

36 $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$

37 Encuentre los valores de b tales que el sistema representado en la gráfica de la siguiente página tenga

a) una solución **b)** dos soluciones **c)** ninguna solución

EJERCICIO 37



Interprete gráficamente a) - c).

38 Encuentre los valores de b tales que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$$

tenga

a) una solución **b)** dos soluciones

c) ninguna solución

Interprete gráficamente a)-c).

39 ¿Hay un número real x tal que $x = 2^{-x}$? Para decidir, represente gráficamente el sistema

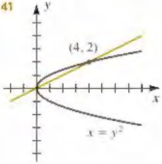
$$\begin{cases} y = x \\ y = 2^{-x} \end{cases}$$

40 ¿Hay un número real x tal que $x = \log x$? Para decidir, represente gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = \log x \end{cases}$$

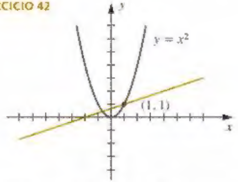
41 En la figura se muestra la gráfica de $x = y^2$ y una recta con pendiente m que pasa por el punto (4, 2). Encuentre el valor de m tal que la recta interseque la gráfica sólo en (4, 2) e interprete gráficamente.

EJERCICIO 41



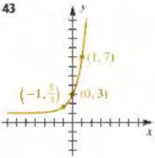
42 En la figura se muestra la gráfica de $y = x^2$ y una recta con pendiente m que pasa por el punto (1, 1). Encuentre el valor de m tal que la recta interseque la gráfica sólo en (1, 1) e interprete gráficamente.

EJERCICIO 42

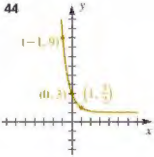


Ejer. 43–44: Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x + c$ para la gráfica.

43



44



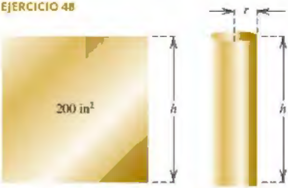
45 Encuentre dos números que tengan una diferencia de 8 y un cociente de 3.

46 Encuentre dos números que tengan una suma de 10 y un producto de 22.

47 El perímetro de un rectángulo es 40 pulgadas y su área es 96 in². Encuentre su longitud y ancho.

48 **Construcción de tuberías** Se construirán secciones de tubería cilíndrica a partir de láminas delgadas rectangulares que tienen un área de 200 in² (vea la figura). ¿Es posible construir un tubo que tenga un volumen de 200 in³? Si es así, encuentre r y h.

EJERCICIO 48



49 **Población de peces** En ciencias que estudian los peces se usan funciones de restablecimiento de productores de huevo para predecir el número de peces adultos R, en la población de reproductores del siguiente año: a partir de una estimación S del número de peces que actualmente son productores de huevos.

a) Para ciertas especies de peces, $R = aS/(S + b)$. Calcule a y b con los datos de la tabla siguiente.

Año	2009	2010	2011
Número de ponedoras	40,000	60,000	72,000

b) Pronostique la población de reproductores para el año 2012.

50 **Población de peces** Remítase al ejercicio 49. La función de restablecimiento de productores de huevos de Ricker está dada por

$$R = aSe^{-bS}$$

para constantes positivas a y b. Esta relación predice bajo restablecimiento para existencias muy altas y se ha descubierto que es muy apropiada para numerosas especies, por ejemplo, el bacalao del ártico. Vuelva a trabajar el ejercicio 49 usando la función de Ricker de restablecimiento de ponedoras.

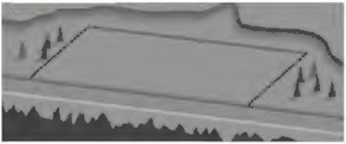
51 **Competencia por alimentos** Un *modelo de competencia* es un conjunto de ecuaciones que especifica la manera en que dos o más especies interaccionan en competencia por los recursos alimenticios de un ecosistema. Si x y y denotan los números (en cientos) de dos especies competidoras, suponga que los porcentajes respectivos de crecimiento R_1 y R_2 están dados por

$$R_1 = 0.01x(50 - x - y),$$
$$R_2 = 0.02y(100 - y - 0.5x).$$

Determine los niveles de población (x, y) en los que ambas tasas de crecimiento son cero. (Estos niveles de población se conocen como *puntos estacionarios*.)

52 **Instalar una cerca en un terreno** Un agricultor tiene 2,420 pies de cerca para encerrar un terreno rectangular que se encuentra a lo largo de un río recto. Si no se usa cerca a lo largo del río (vea la figura), ¿es posible cercar 10 acres de terreno? Recuerde que 1 acre = 43,560 ft^2.

EJERCICIO 52



53 **Construcción de un acuario** Consulte el ejemplo 5. ¿Es posible construir un pequeño acuario *abierto* en la parte superior, con dos extremos cuadrados, que contenga 2 ft^3 de agua y requiera de 8 ft^2 de vidrio? Si es así, calcule las dimensiones. (No tome en consideración el grosor del vidrio.)

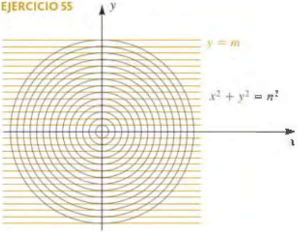
54 **Problema isoperimétrico** El problema isoperimétrico consiste en demostrar que de todas las figuras geométricas planas con el mismo perímetro (figuras isoperimétricas), el círculo tiene la mayor área. Demuestre que ningún rectángulo tiene la misma área ni el mismo perímetro que cualquier círculo.

55 **Patrón de moiré** Un patrón de moiré se forma cuando se superponen dos figuras geométricas regulares. En el diagrama se muestra una figura obtenida de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = n^2$ y la familia de rectas horizontales $y = m$ para enteros m y n.

a) Demuestre que los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = n^2$ y la recta $y = n - 1$ se encuentran en una parábola.

b) Trabaje el inciso a) usando la recta $y = n - 2$.

EJERCICIO 55



56 **Dimensiones de una píldora** Una píldora esférica tiene diámetro de 1 centímetro. Una segunda píldora, en forma de cilindro circular recto, se elaborará con el mismo volumen y el doble del área superficial que la píldora esférica.

a) Si r es el radio y h la altura de la píldora cilíndrica, demuestre que $6r^2h = 1$ y $r^2 + rh = 1$. Concluya que $6r^3 - 6r + 1 = 0$.

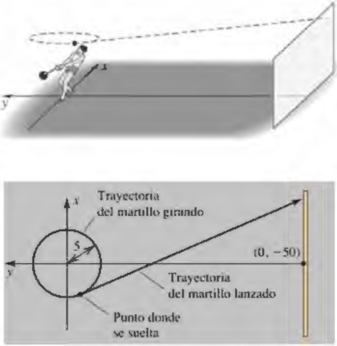
b) Las soluciones positivas de $6r^3 - 6r + 1 = 0$ son aproximadamente 0.172 y 0.903. Encuentre las alturas correspondientes e interprete estos resultados.

57 **Lanzamiento de martillo** Un lanzador de martillo está trabajando en su entrenamiento en una pequeña superficie de prácticas. El martillo gira, generando un círculo con radio de 5 pies, y cuando se lanza, golpea una pantalla alta que está a 50 pies del centro del lugar del lanzamiento. Introduzca ejes de coordenadas como se muestra en la figura (no a escala).

a) Si el martillo se suelta en $(-4, -3)$ y se desplaza en la dirección tangente, ¿dónde golpeará a la pantalla?

b) Si el martillo debe golpear en $(0, -50)$, ¿dónde debe soltarse en el círculo?

EJERCICIO 57



58 **Trayectoria de un balón lanzado** Una persona lanza un balón desde el borde de una colina, a un ángulo de 45° con la horizontal, como se ilustra en la figura. El balón cae al suelo a 50 pies cuesta abajo, que tiene una pendiente de $-\frac{3}{4}$. Por medio de cálculo se puede demostrar que la trayectoria del balón está dada por $y = ax^2 + x + c$ para algunas constantes a y c.

a) Sin considerar la estatura de la persona, encuentre una ecuación para la trayectoria.

b) ¿Cuál es la máxima altura del balón *en el aire*?

EJERCICIO 58

Ejer. 59–60: Resuelva gráfica y algebraicamente el sistema de ecuaciones. Compare sus respuestas.

59 $x^2 + y^2 = 4;\quad x + y = 1$

60 $x^2y^2 = 9;\quad 2x + y = 0$

Ejer. 61–64: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y estime las coordenadas de los puntos de intersección.

61 $y = 5x^3 - 5x;\quad x^2 + y^2 = 4$

62 $9x^2 + y^2 = 9;\quad y = e^x$

63 $|x + \ln|x|| - y^2 = 0;\quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2.25} = 1$

64 $y^3 - e^{x/2} = x;\quad y + 0.85x^2 = 2.1$

Ejer. 65–68: Los datos de la tabla son generados por la función *f*. Calcule gráficamente las constantes desconocidas *a* y *b* a cuatro posiciones decimales.

65 $f(x) = ae^{-bx}$

x	$f(x)$
1	0.80487
2	0.53930
3	0.36136
4	0.24213

66 $f(x) = a \ln bx$

x	$f(x)$
1	−8.2080
2	−11.7400
3	−13.8061
4	−15.2720

67 $f(x) = ax^2 + e^{bx}$

x	$f(x)$
2	17.2597
3	40.1058
4	81.4579

68 $f(x) = \sqrt{ax + b}$

x	$f(x)$
2	3.8859
4	5.1284
6	6.1238

8.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Una ecuación $ax + by = c$ (o, bien, lo que es equivalente, $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal con dos variables x y y. Del mismo modo, la ecuación $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables x, y y z. También podemos considerar ecuaciones lineales con cuatro, cinco o *cualquier* número de variables. Los sistemas de ecuaciones más comunes son aquellos en los que todas las ecuaciones son lineales. En esta sección consideraremos sólo sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Los sistemas que contienen más de dos variables se estudian en una sección posterior.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Para encontrar las soluciones de un sistema, podemos manipular las ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente de ecuaciones sencillas para el cual puedan encontrarse fácilmente las soluciones. Algunas manipulaciones (o *transformaciones*) que producen sistemas equivalentes se expresan en el siguiente teorema.

Teorema sobre sistemas equivalentes

Dado un sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente si

1) se intercambian dos ecuaciones.

2) una ecuación se multiplica o divide entre una constante diferente de cero.

3) un múltiplo constante de una ecuación se suma a otra ecuación.

Un *múltiplo constante* de una ecuación se obtiene si se multiplica *cada* uno de los términos de la ecuación por la misma constante k diferente de cero. Cuando se aplica la parte 3) del teorema, a menudo se usa la frase *sumar a una ecuación k veces cualquier otra ecuación*. *Sumar* dos ecuaciones significa sumar los lados correspondientes de las ecuaciones.

El siguiente ejemplo ilustra cómo puede usarse el teorema sobre sistemas equivalentes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1 **Uso del teorema sobre sistemas equivalentes**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Con frecuencia multiplicamos una de las ecuaciones por una constante que nos dará el inverso aditivo del coeficiente de una de las variables de la otra ecuación. Hacer esto nos permite sumar las dos ecuaciones y obtener una ecuación con sólo una variable, como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases} \quad \text{multiplicamos por 3 la segunda ecuación}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x \qquad = 14 \end{cases} \quad \text{sumamos la primera ecuación a la segunda}$$

En el último sistema vemos que $7x = 14$ y que, por lo tanto, $x = \frac{14}{7} = 2$. Para encontrar el valor correspondiente de y, sustituimos x por 2 en $x + 3y = -1$, obteniendo $y = -1$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la única solución del sistema.

Hay muchas otras formas de usar el teorema sobre sistemas equivalentes para encontrar la solución. Otro método consiste en proceder como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{dado}$$

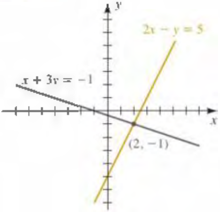
$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \text{multiplicamos por } -2 \text{ la primera ecuación}$$

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ \qquad - 7y = 7 \end{cases} \quad \text{sumamos la primera ecuación a la segunda}$$

En el último sistema vemos que $-7y = 7$, o $y = -1$. Para encontrar el valor correspondiente de x, podríamos sustituir y por -1 en $x + 3y = -1$, para obtener $x = 2$. Por lo tanto, $(2, -1)$ es la solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones son rectas que se intersecan en el punto $(2, -1)$, como se ve en la figura 1. ■

FIGURA 1



La técnica empleada en el ejemplo 1 se denomina **método de eliminación**, porque comprende la eliminación de una variable de una de las ecuaciones. El método de eliminación por lo general produce soluciones en menos pasos que el método de sustitución que se explica en la sección precedente.

EJEMPLO 2 **Un sistema de ecuaciones lineales con un número infinito de soluciones**

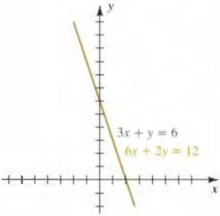
Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ para obtener

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

FIGURA 2



Así, (a, b) es una solución si y sólo si $3a + b = 6$, es decir, $b = 6 - 3a$. Deducimos que las soluciones están formadas por pares ordenados de la forma $(a, 6 - 3a)$, donde a es cualquier número real. Si deseamos encontrar soluciones particulares, podemos sustituir a por varios valores. Algunas soluciones son $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-2, 12)$ y $(\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2})$.

Es incorrecto decir que la solución son "todos los números reales". Es correcto decir que la solución es el conjunto de todos los pares ordenados tales que $3x + y = 6$, que se puede escribir

$$\{(x, y) \mid 3x + y = 6\}$$

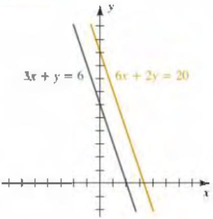
La gráfica de cada ecuación es la misma recta, como se ve en la figura 2. ■

EJEMPLO 3 **Un sistema de ecuaciones lineales sin soluciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

FIGURA 3



SOLUCIÓN Si sumamos a la segunda ecuación -2 multiplicado por la primera ecuación, $-6x - 2y = -12$, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

$$0x + 0y = 8$$

La última ecuación se puede escribir $0x + 0y = 8$, que es falso para todo par ordenado (x, y). Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones del sistema dado son rectas que tienen la misma pendiente y, por consiguiente, son paralelas (vea la figura 3). La conclusión que el sistema no tiene soluciones corresponde al hecho de que estas rectas no se intersecan. ■

Los tres ejemplos anteriores ilustran resultados comunes de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables: o hay exactamente una solución, hay un número infinito de soluciones, o no hay solución. Un sistema es **consistente** si tiene por lo menos una solución. Un sistema con un número infinito de soluciones es **dependiente** y **consistente**. Un sistema es **inconsistente** si no tiene solución.

Como la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, *exactamente uno* de los tres casos mencionados en la siguiente tabla se cumple para cualquier sistema de dos ecuaciones.

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Gráficas	Número de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Número infinito de soluciones	Sistema dependiente y consistente
Rectas paralelas	Sin solución	Sistema inconsistente

En la práctica, debe haber poca dificultad para determinar cuál de estos casos ocurre. El caso de la solución única se hará evidente cuando se apliquen al sistema las transformaciones apropiadas, como se ilustra en el ejemplo 1. El caso de un número infinito de soluciones es semejante al del ejemplo 2, donde una de las ecuaciones se puede transformar en la otra. El caso donde no hay solución está indicado por una contradicción, tal como el enunciado de $0 = 8$, que apareció en el ejemplo 3.

En el proceso de resolver un sistema, suponga que obtenemos para x un número racional tal como $-\frac{41}{29}$. Sustituir x por $-\frac{41}{29}$ para encontrar el valor de y es engorroso. Es más fácil seleccionar un multiplicador diferente para cada una de las ecuaciones originales, lo que nos permitirá eliminar x y despejar y. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Cómo resolver un sistema**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Seleccionamos multiplicadores para eliminar y. (El mínimo común múltiplo de 7 y 2 es 14.)

$$\begin{cases} 8x + 14y = 22 & \text{multiplicamos por 2 la primera ecuación} \\ 21x - 14y = -63 & \text{multiplicamos por 7 la segunda ecuación} \end{cases}$$

La suma de la primera y la segunda ecuaciones nos da

$$29x = -41, \quad \text{es decir,} \quad x = -\tfrac{41}{29}$$

A continuación volvemos al sistema original y seleccionamos multiplicadores para eliminar x. (El mínimo común múltiplo de 4 y 3 es 12.)

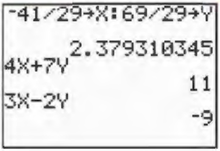
$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases} \quad \text{sistema original}$$

$$\begin{cases} 12x + 21y = 33 & \text{multiplicamos por 3 la primera ecuación} \\ -12x + 8y = 36 & \text{multiplicamos por } -4 \text{ la segunda ecuación} \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones tendremos

$$29y = 69, \quad \text{es decir,} \quad y = \tfrac{69}{29}$$

FIGURA 4



✓ **Comprobación** $(x, y) = \left(-\frac{41}{29}, \frac{69}{29}\right)$

Sustituimos los valores de x y y en las ecuaciones originales.

$$4x + 7y = 4\left(-\tfrac{41}{29}\right) + 7\left(\tfrac{69}{29}\right) = -\tfrac{164}{29} + \tfrac{483}{29} = \tfrac{319}{29} = 11 \quad \text{la primera ecuación cuadra}$$

$$3x - 2y = 3\left(-\tfrac{41}{29}\right) - 2\left(\tfrac{69}{29}\right) = -\tfrac{123}{29} - \tfrac{138}{29} = -\tfrac{261}{29} = -9 \quad \text{también la segunda}$$

La figura 4 muestra la comprobación de la solución $\left(-\frac{41}{29}, \frac{69}{29}\right)$ en calculadora. ■

En ocasiones podemos sustituir expresiones para cambiar un sistema dado en uno de ecuaciones lineales. Por ejemplo, un sistema como

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 8 \\ u^2 - v^2 = 5 \end{cases} \quad \text{puede cambiarse a} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

con las sustituciones $x = u^2$ y $y = v^2$. Haremos uso de este concepto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Cambiar un sistema usando sustitución**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{u+4} + \dfrac{7}{v-3} = 11 \\[2mm] \dfrac{3}{u+4} - \dfrac{2}{v-3} = -9 \end{cases}$$

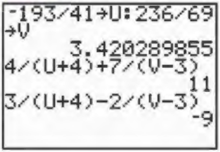
SOLUCIÓN Podemos sustituir $\dfrac{1}{u+4}$ por x y $\dfrac{1}{v-3}$ por y para obtener el sistema

$$\begin{cases} 4x + 7y = 11 \\ 3x - 2y = -9 \end{cases}$$

Este es el mismo sistema que se resolvió en el ejemplo 4, por lo cual, sabemos que la solución es $x = -\frac{41}{29}$ y $y = \frac{69}{29}$. Así, para resolver el sistema dado, volvemos a sustituir y resolvemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{u+4} &= -\frac{41}{29} & \text{y} \qquad \frac{1}{v-3} &= \frac{69}{29} \\ 29 &= -41(u+4) & 29 &= 69(v-3) \\ 29 &= -41u - 164 & 29 &= 69v - 207 \\ 193 &= -41u & 236 &= 69v \\ -\frac{193}{41} &= u & \text{y} \qquad \frac{236}{69} &= v \end{aligned}$$

FIGURA 5



La figura 5 muestra la comprobación con calculadora de la solución $(u, v) = \left(-\frac{193}{41}, \frac{236}{69}\right)$ ■

Ciertos problemas de aplicación pueden resolverse incorporando sistemas de dos ecuaciones lineales, como se ilustra en los dos siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6 **Una aplicación de un sistema de ecuaciones lineales**

Una empresa de frutas y verduras tiene una finca de 100 acres en la cual se cultivan lechuga y col. Cada acre de col requiere 600 horas de mano de obra, y cada acre de lechuga necesita de 400 horas de mano de obra. Si se dispone de 45,000 horas y si han de usarse todos los recursos de tierra y mano de obra, encuentre el número de acres de cada cultivo que debe sembrarse.

SOLUCIÓN Introduzcamos variables para denotar las cantidades desconocidas como sigue:

$$x = \text{número de acres de col}$$

$$y = \text{número de acres de lechuga}$$

Entonces, el número de horas de mano de obra necesario para cada cosecha se puede expresar como sigue:

$$600x = \text{número de horas necesarias para col}$$

$$400y = \text{número de horas necesarias para lechuga}$$

Usando los datos que el número total de acres es 100 y el número total de horas disponibles es 45,000 nos lleva al sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45{,}000 \end{cases}$$

A continuación, usamos el método de eliminación:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \qquad \text{dividimos la segunda ecuación entre 100}$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases} \qquad \text{multiplicamos por } -6 \text{ la primera ecuación}$$

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ -2y = -150 \end{cases} \qquad \text{sumamos la primera ecuación a la segunda}$$

Vemos en la última ecuación que $-2y = -150$, o $y = 75$. Sustituyendo y por 75 en $x + y = 100$ nos da $x = 25$. Por lo tanto, la empresa debe sembrar 25 acres de col y 75 acres de lechuga.

✓ **Comprobación** Plantar 25 acres de col y 75 acres de lechuga requiere $(25)(600) + (75)(400) = 45{,}000$ horas de mano de obra. Así, se usan los 100 acres de tierra y las 45,000 horas de mano de obra. ■

EJEMPLO 7 **Determinar la velocidad de la corriente de un río**

Un bote de motor, operando a toda velocidad, hizo un viaje de 4 millas corriente arriba (contra una corriente constante) en 15 minutos. El viaje de regreso (con la misma corriente y también a toda velocidad) duró 12 minutos. Calcule la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente del bote en aguas en calma.

SOLUCIÓN Para comenzar, introduciremos variables para denotar las cantidades desconocidas. Así, sea

$$x = \text{velocidad del bote (en mi/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (en mi/h)}$$

Planeamos usar la fórmula $d = rt$, donde d denota la distancia recorrida, r la velocidad y t el tiempo. Como la corriente reduce la velocidad del bote cuando este navega contra la corriente, pero aumenta la velocidad cuando navega con la corriente a su favor, obtenemos

$$\text{velocidad contra la corriente} = x - y \text{ (en mi/h)}$$
$$\text{velocidad a favor de la corriente} = x + y \text{ (en mi/h)}$$

El tiempo (en horas) recorrido en cada dirección es

$$\text{tiempo contra la corriente} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}\text{ h}$$
$$\text{tiempo a favor de la corriente} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}\text{ h}$$

La distancia es 4 millas para cada viaje. Sustituyendo en $d = rt$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4 = (x - y)\left(\frac{1}{4}\right) \\ 4 = (x + y)\left(\frac{1}{5}\right) \end{cases}$$

Si aplicamos el teorema sobre sistemas equivalentes, obtenemos

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20 \end{cases} \qquad \text{multiplique la primera ecuación por 4 y la segunda por 5}$$

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ 2x = 36 \end{cases} \qquad \text{sume la primera ecuación a la segunda}$$

En la última ecuación observamos que $2x = 36$, o $x = 18$. Sustituyendo x por 18 en $x + y = 20$ nos da $y = 2$. Por lo tanto, la velocidad del bote en aguas en calma es de 18 mi/h, y la velocidad de la corriente es de 2 mi/h.

✓ **Comprobación** La velocidad contra la corriente es de $18 - 2 = 16$ mi/h; con la corriente a favor es de $18 + 2 = 20$ mi/h. Un viaje de 4 millas contra la corriente dura $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ h = 15 min, y el viaje de 4 millas con la corriente a favor dura $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ h = 12 min. ■

8.2 Ejercicios

Ejer. 1-26: Resuelva el sistema.

1 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x + 2y = -45 \\ -4x - 3y = 30 \end{cases}$

4 $\begin{cases} -2x + y = -28 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$

11 $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

12 $\begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = 14\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - 2\sqrt{5}y = -2\sqrt{5} \end{cases}$

13 $\begin{cases} -0.03x + 0.07y = 0.23 \\ 0.04x - 0.05y = 0.15 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 0.11x - 0.03y = 0.25 \\ 0.12x + 0.05y = 0.70 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 3m - 4n = 2 \\ -6m + 8n = -4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 3y + 4x = 0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = -2 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{10}{y} = -1 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = -3 \end{cases}$

23 $\begin{cases} \dfrac{8}{x+2} - \dfrac{6}{y-5} = 3 \\ \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{12}{y-5} = -1 \end{cases}$

24 $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{y+2} = 2 \\ \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y} = 11 \\ 2^{x} - 3^{y+1} = -26 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 4 \cdot 2^{x} + 3^{y-1} = 5 \\ 8 \cdot 2^{x-2} - 3^{y} = -8 \end{cases}$

27 **Venta de boletos** El precio de admisión a un juego entre equipos de bachillerato fue de \$3.00 para estudiantes y \$4.50 para no estudiantes. Si se vendieron 450 boletos para un total de \$1,555.50, ¿cuántos de cada clase se compraron?

28 **Viaje en avión** Una línea aérea que hace vuelos de Los Ángeles a Albuquerque, con una escala en Phoenix, cobra una tarifa de \$90 a Phoenix y de \$120 de Los Ángeles a Albuquerque. Un total de 185 pasajeros abordaron el avión en Los Ángeles y los pasajes totalizaron \$21,000. ¿Cuántos pasajeros bajaron del avión en Phoenix?

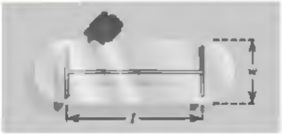
29 **Dimensiones de un crayón** Un crayón de 8 centímetros de largo y 1 centímetro de diámetro se fabricará de 5 cm³ de cera en color. El crayón tendrá la forma de un cilindro rematado por una pequeña punta cónica (vea la figura). Encuentre la longitud x del cilindro y la altura y del cono.

EJERCICIO 29

30 **Remar en bote** Un hombre rema en un bote 500 pies corriente arriba contra una corriente constante en 10 minutos, a continuación de lo cual rema 300 pies corriente abajo (con la misma corriente) en 5 minutos. Encuentre la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que él puede remar en aguas en calma.

31 **Dimensiones de la cubierta de una mesa** Una mesa grande para un salón de conferencias se construirá en forma de rectángulo con dos semicírculos en los extremos (vea la figura). La mesa debe tener un perímetro de 40 pies, y el área de la parte rectangular será el doble de la suma de las áreas de los dos extremos. Encuentre la longitud l y el ancho w de la parte rectangular.

EJERCICIO 31



32 **Ingreso por inversiones** Una mujer tiene \$19,000 para invertir en dos fondos que pagan interés simple a tasas de 4 y 6% anual. El interés en el fondo que paga 4% está exento de impuesto, pero es necesario pagar el impuesto sobre la renta por el ingreso recibido del fondo que paga 6%. Dado que se encuentra en una banda tributaria alta, la mujer no desea invertir toda la suma en la cuenta que paga 6%. ¿Hay alguna forma de invertir el dinero de modo que ella reciba \$1,000 en intereses al término de un año?

33 **Población de linces** Una población de linces se clasifica por edades en cachorros (menos de 1 año de edad) y adultos (por lo menos 1 año de edad). Todas las hembras adultas, incluidas las nacidas el año anterior, tienen una camada cada mes de junio, con un tamaño promedio de camada de 3 cachorros. La población de linces en primavera en cierta región se estima en 6,000, y la razón entre machos y hembras es uno. Calcule el número de adultos y cachorros en la población.

34 **Caudales** Un tubo de entrada se usa para llenar un tanque de almacenamiento 300 galones de agua, y se pueden usar dos tubos idénticos de salida para suministrar agua a los campos circundantes (vea la figura). Se necesitan 5 horas para llenar un tanque vacío cuando ambos tubos de salida están abiertos. Cuando se cierra una salida, se necesitan 3 horas para llenar el tanque. Encuentre los caudales (en galones por hora) que entran y salen de los tubos.

EJERCICIO 34

35 **Mezcla de una aleación de plata** Un orfebre tiene dos aleaciones, una que contiene 35% de plata y otra que contiene 60%. ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100 gramos de una aleación que contenga 50% de plata?

36 **Mezcla de nueces** Un comerciante desea mezclar cacahuates que cuestan \$3 por libra con nueces de la India que cuestan \$8 por libra, a fin de obtener 60 libras de una mezcla que cuesta \$5 por libra. ¿Cuántas libras de cada variedad deben mezclarse?

37 **Viaje en avión** Un avión, que vuela con viento de cola, recorre 1,200 millas en dos horas. El viaje de regreso, contra el viento, toma $2\frac{1}{2}$ horas. Calcule la velocidad de crucero del avión y la velocidad del viento (suponga que ambas son constantes).

38 **Embarque de pedidos** Una papelería vende dos tipos de blocs de notas a librerías universitarias, el primero de los cuales tiene un precio de mayoreo de 50¢ y el segundo de 70¢. La empresa recibe un pedido de 500 blocs de notas, junto con un cheque por \$286. Si el pedido no especifica el número de cada tipo de bloc, ¿cómo debe embarcar el pedido?

39 **Aceleración** Cuando una pelota rueda hacia abajo por un plano inclinado, su velocidad $v(t)$ (en cm/s) en el tiempo t (en segundos) está dada por $v(t) = v_0 + at$ para una velocidad inicial v_0 y aceleración a (en cm/s^2). Si $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$, encuentre v_0 y a.

40 **Lanzamiento vertical** Si un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de s_0 pies con una velocidad inicial de v_0 ft/s, entonces su distancia $s(t)$ sobre el suelo después de t segundos es

$$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0$$

Si $s(1) = 84$ y $s(2) = 116$, ¿qué valores tienen v_0 y s_0?

41 **Planeación de la producción** Una pequeña empresa de muebles fabrica sofás y divanes. Cada sofá requiere 8 horas de mano de obra y \$180 en materiales, mientras que un diván se puede fabricar por \$105 en 6 horas. La empresa tiene 340 horas de mano de obra disponibles por semana y puede permitirse comprar \$6,750 de materiales. ¿Cuántos divanes y sofás se pueden producir si todas las horas de mano de obra y todos los materiales deben emplearse?

42 **Dieta de ganado** Un ganadero está preparando una mezcla de avena y harina de maíz para ganado. Cada onza de avena proporciona 4 gramos de proteína y 18 gramos de carbohidratos, y una onza de harina de maíz proporciona 3 gramos de proteína y 24 gramos de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada uno se pueden usar para satisfacer las metas nutricionales de 200 gramos de proteína y 1,320 gramos de carbohidratos por ración?

43 **Intercambio de servicios** Un plomero y un electricista, cada uno por su parte, hacen reparaciones en sus oficinas y acuerdan intercambiar servicios. El número de horas empleadas en cada uno de los proyectos se muestra en la siguiente tabla.

	Oficina del plomero	Oficina del electricista
Horas del plomero	6	4
Horas del electricista	5	6

Preferirían decir que están a mano, pero debido a las leyes fiscales, deben cobrar por todo trabajo que realizan. Acuerdan seleccionar tarifas de salario por hora que permitan que la cuenta en cada proyecto sea igual al ingreso que cada uno recibiría normalmente por un trabajo comparable.

a) Si x y y denotan los salarios por hora del plomero y el electricista, respectivamente, demuestre que

$$6x + 5y = 10x \text{ y } 4x + 6y = 11y$$

Describa las soluciones de este sistema.

b) Si el plomero normalmente gana \$35 por hora, ¿cuánto debe cobrar el electricista?

44 Encuentre ecuaciones para las alturas de los triángulos con vértices $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$, y encuentre el punto en el que las alturas se intersecan.

45 **Tendencia al calentamiento en París** Como resultado de la urbanización, las temperaturas en París han aumentado. En 1891 el promedio de temperaturas mínimas y máximas diarias era de 5.8 °C y 15.1 °C, respectivamente. Entre 1891 y 1968, estas temperaturas se elevaron 0.019 °C/año y 0.011 °C/año, respectivamente. Suponiendo que los aumentos fueron lineales, encuentre el año en el que la diferencia entre la temperatura mínima y la máxima fue de 9 °C, y determine la correspondiente temperatura máxima en promedio.

46 **Tarifas telefónicas de larga distancia** Una empresa telefónica cobra a sus clientes una cierta cantidad por el primer minuto de una llamada de larga distancia y otra cantidad por cada minuto adicional. Un abonado hace dos llamadas a la misma ciudad: una llamada de 36 minutos por \$2.93 y una llamada de 13 minutos por \$1.09.

a) Determine el costo por el primer minuto y el costo por cada minuto adicional.

b) Si hay una tasa de impuesto federal de 3.2% y una tasa de impuesto estatal de 7.2% en todas las llamadas de larga distancia, encuentre, al minuto más cercano, la llamada más larga a la misma ciudad cuyo costo no exceda \$5.00.

47 **Grabación en videocasete** Una ávida aficionada al tenis desea grabar en una sola cinta 6 horas de un importante torneo. Su cinta puede contener 5 horas y 20 minutos a una velocidad de larga duración LP y 8 horas a la velocidad SLP, que es más lenta. La velocidad LP produce una mejor calidad de imagen, de modo que ella desea maximizar el tiempo grabado a la velocidad LP. Encuentre el tiempo que se grabará a cada velocidad.

48 **Precio y demanda** Suponga que los consumidores comprarán 1,000,000 de camisetas de manga corta si el precio de venta es de \$15, pero por cada \$1 de incremento del precio comprarán 100,000 camisetas menos. Además, suponga que los vendedores pedirán 2,000,000 de camisetas si el precio de venta es de \$20, y que por cada \$1 de aumento del precio, solicitarán otras 150,000.

a) Exprese el número Q de camisetas que los consumidores comprarán si el precio de venta es de p dólares.

b) Exprese el número K de camisetas que los vendedores solicitarán si el precio de venta es de p dólares.

c) Determine el precio de mercado, es decir, el precio al que $Q = K$.

Ejer. 49–52: Despeje *a* y *b* en el sistema. (Sugerencia: trate los términos como e^{kx}, cos *x* y sen *x* como "coeficientes constantes".

49 $\begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} = 0 \\ a(3e^{3x}) + b(-3e^{-3x}) = e^{3x} \end{cases}$

50 $\begin{cases} ae^{-x} + be^{4x} = 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{4x}) = 2 \end{cases}$

51 $\begin{cases} a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x = 0 \\ -a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x = \tan x \end{cases}$

52 $\begin{cases} a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x = 0 \\ -a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x = \mathrm{sen}\,x \end{cases}$

8.3 Sistemas de desigualdades

En el capítulo 2 restringimos nuestra exposición acerca de desigualdades a aquellas con una variable. Ahora consideramos desigualdades con dos variables x y y, como las que se muestran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLOS **Desigualdades en x y y**

- $y^2 < x + 4$ ■ $3x - 4y > 12$ ■ $x^2 + y^2 \leq 16$

Una **solución** de una desigualdad en x y y es un par ordenado (a, b) que produce un enunciado verdadero si a y b se sustituyen por x y y, respectivamente. **Resolver** una desigualdad en x y y significa encontrar todas las soluciones. La **gráfica** de tal desigualdad es el conjunto de todos los puntos (a, b) de un plano xy que corresponda a las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Dada una desigualdad en x y y, si cambiamos el símbolo de desigualdad por un signo de igual, obtenemos una ecuación cuya gráfica separa por lo general el plano xy en dos regiones. Consideraremos sólo ecuaciones que tienen la propiedad que si R es una de esas regiones y si un **punto de prueba** (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces *cada* punto en R da una solución. Los siguientes pasos se pueden usar entonces para trazar la gráfica de la desigualdad.

Pasos para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y

1. Cambiar el símbolo de desigualdad por un signo de igual y graficar la ecuación resultante. Use líneas discontinuas si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$ para indicar que ningún punto de la gráfica da una solución. Use una línea o curva continua para $\leq$ o $\geq$ para indicar que las soluciones de la ecuación también son soluciones de la desigualdad.
2. Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica del paso 1 y si un punto de prueba (p, q) en R da una solución de la desigualdad, entonces todo punto en R da una solución. Sombree R para indicar este hecho. Si (p, q) no es una solución, entonces *ningún* punto en R da una solución y R se deja sin sombrear.

El uso de estos pasos se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una desigualdad**

Encuentre las soluciones y trace la gráfica de la desigualdad $y^2 < x + 4$.

FIGURA 1

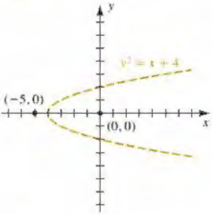


FIGURA 2

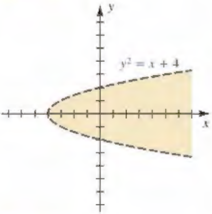
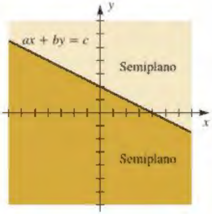


FIGURA 3



SOLUCIÓN

Paso 1 Cambiamos $<$ por $=$, y obtenemos $y^2 = x + 4$. La gráfica de esta ecuación es una parábola, simétrica respecto al eje x y que tiene punto de intersección -4 con el eje x y puntos de intersección ± 2 con el eje y. Como el símbolo de desigualdad es $<$, trazamos la parábola usando línea discontinua, como en la figura 1.

Paso 2 La gráfica del paso 1 separa el plano xy en dos regiones, una a la *izquierda* y la otra a la *derecha* de la parábola. Escogemos puntos de prueba $(-5, 0)$ y $(0, 0)$ en las regiones (vea la figura 1) y sustituimos por x y y en $y^2 < x + 4$ como sigue:

Punto de prueba $(-5, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $-5 + 4 = -1$

Como $0 < -1$ es un enunciado *falso*, $(-5, 0)$ *no* es una solución de la desigualdad. Por lo tanto, *ningún* punto a la izquierda de la parábola es solución y dejamos sin sombrear la región.

Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $0^2 = 0$
LD: $0 + 4 = 4$

Como $0 < 4$ es un enunciado *verdadero*, $(0, 0)$ *es* una solución de la desigualdad. Por consiguiente, todos los puntos a la derecha de la parábola son soluciones, de modo que sombreamos esta región, como se ve en la figura 2. ■

Una **desigualdad lineal** es aquella que se puede escribir en una de las formas siguientes, donde a, b y c son números reales:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c$$

La recta $ax + by < c$ separa el plano xy en dos **semiplanos**, como se ilustra en la figura 3. Las soluciones de la desigualdad están formadas por todos los puntos en *uno* de estos semiplanos, donde la recta está incluida para $\leq$ o $\geq$ y no está incluida para $<$ o $>$. *Para una desigualdad lineal, sólo se requiere un punto de prueba* (p, q), porque si (p, q) es una solución, entonces el semiplano con (p, q) en él contiene todas las soluciones, mientras que si (p, q) *no* es una solución, entonces el *otro* semiplano contiene las soluciones.

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de una desigualdad lineal**

Trace la gráfica de la desigualdad $3x - 4y > 12$.

SOLUCIÓN El cambio de $>$ por $=$ nos da la recta $3x - 4y = 12$, trazada con una recta discontinua en la figura 4 de la siguiente página. Esta recta separa el plano xy en dos semiplanos, uno *encima* y otro *debajo* de la recta. Es conveniente escoger el punto de prueba $(0, 0)$ arriba de la recta y sustituir en $3x - 4y > 12$, como sigue:

Punto de prueba $(0, 0)$ LI: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$
LD: 12

Como $0 > 12$ es un enunciado falso, $(0, 0)$ no es una solución. Entonces, ningún punto encima de la recta es solución, y las soluciones de $3x - 4y > 12$ están dadas por los puntos en el semiplano *debajo* de la recta. La gráfica está trazada en la figura 5 de la siguiente página.

FIGURA 4

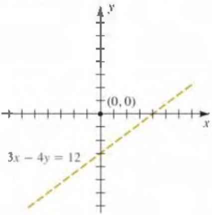
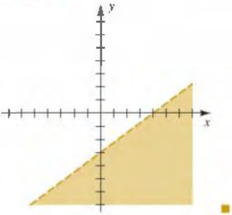
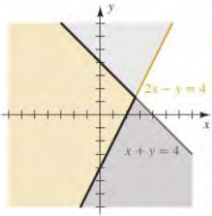


FIGURA 5



Como lo hicimos con ecuaciones, en ocasiones trabajamos de forma simultánea con varias desigualdades con dos variables, es decir, con un **sistema de desigualdades**. Las **soluciones** de un sistema de desigualdades son las soluciones comunes a todas las desigualdades del sistema. La **gráfica** de un sistema de desigualdades está formada por los puntos correspondientes a las soluciones. Los siguientes ejemplos ilustran un método para resolver sistemas de desigualdades.

FIGURA 6



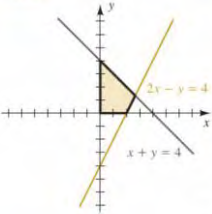
EJEMPLO 3 **Cómo resolver un sistema de desigualdades lineales**

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x - y \le 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Cambiamos cada $\le$ por $=$ y luego trazamos las rectas resultantes, como vemos en la figura 6. Usando el punto de prueba $(0, 0)$, vemos que las soluciones del sistema corresponden a los puntos *debajo* (y sobre) la recta $x + y = 4$ y *arriba* (y sobre) la recta $2x - y = 4$. Si sombreamos estos semiplanos con colores diferentes, como en la figura 6, tenemos como gráfica del sistema los puntos que están en *ambas* regiones, indicadas por la parte color arena de la figura. ■

FIGURA 7



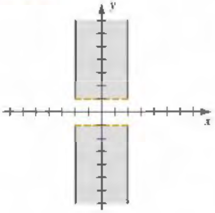
EJEMPLO 4 **Cómo resolver un sistema de desigualdades lineales**

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x - y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las primeras dos desigualdades son las mismas que consideramos en el ejemplo 3 y, por lo tanto, los puntos en la gráfica del sistema deben estar dentro de la región color arena que se muestra en la figura 6. Además, la tercera y cuarta desigualdades del sistema indican que los puntos deben estar en el primer cuadrante o sobre sus límites. Esto nos da la región que se ve en la figura 7. ■

FIGURA 8



EJEMPLO 5 Cómo resolver un sistema de desigualdades que contiene valores absolutos

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

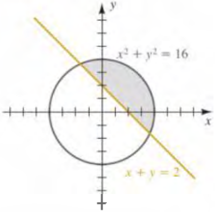
SOLUCIÓN Usando las propiedades de los valores absolutos (que se presentan en la página 68), vemos que (x, y) es una solución del sistema si y sólo si *las dos* condiciones siguientes son verdaderas:

$$\textbf{1)}\ -2 \leq 2$$

$$\textbf{2)}\ y < -1 \quad \text{o} \quad y > 1$$

Así, un punto (x, y) sobre la gráfica del sistema debe estar entre (o sobre) las rectas verticales $x = \pm 2$ y también ya sea debajo de la recta horizontal $y = -1$ o encima de la recta $y = 1$. La gráfica está trazada en la figura 8. ■

FIGURA 9



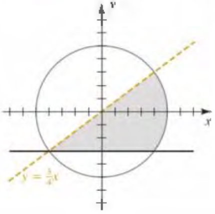
EJEMPLO 6 Cómo resolver un sistema de desigualdades

Trace la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$ y $x + y = 2$ son el círculo y la recta, respectivamente, que se muestran en la figura 9. Usando el punto de prueba $(0, 0)$, vemos que los puntos que dan soluciones del sistema deben estar dentro (o sobre) del círculo y también encima (o sobre) la recta. Esto nos da la región trazada en la figura 9. ■

FIGURA 10



EJEMPLO 7 Encontrar un sistema de desigualdades a partir de una gráfica

Encuentre un sistema de desigualdades para la región sombreada que vemos en la figura 10.

SOLUCIÓN Una ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 5^2$. Como el *interior* del círculo está sombreado, la región sombreada (incluido el círculo) puede describirse con $x^2 + y^2 \leq 25$. El *exterior* del círculo puede describirse con $x^2 + y^2 > 25$.

Como la región sombreada está *debajo* de la recta discontinua con ecuación $y = \frac{3}{4}x$, está descrita por la desigualdad $y < \frac{3}{4}x$. Por último, como la región sombreada está *arriba* de la recta horizontal continua $y = -3$, usamos $y \geq -3$. Por lo tanto, un sistema es

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y < \frac{3}{4}x \\ y \geq -3 \end{cases}$$

■

EJEMPLO 8 Una aplicación de un sistema de desigualdades

El gerente de un equipo de béisbol desea comprar bates y pelotas que cuestan \$20 y \$5 cada una, respectivamente. Se necesitan por lo menos cinco bates y diez pelotas, y el costo total no debe exceder \$300. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Comenzamos por denotar con x el número de bates y con y el número de pelotas. Como el costo de un bate es de \$20 y el costo de una pelota es de \$5, vemos que

$$20x = \text{costo de } x \text{ bates}$$
$$5y = \text{costo de } y \text{ pelotas.}$$

Como el costo total no debe exceder \$300, debemos tener

$$20x + 5y \le 300$$

o bien, lo que es equivalente,

$$y \le -4x + 60$$

Como se necesitan por lo menos cinco bates y diez pelotas, también tenemos que

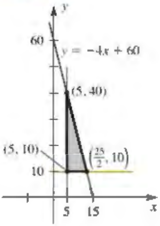
$$x \ge 5 \text{ y } y \ge 10.$$

La gráfica de $y \le -4x + 60$ es el semiplano que se encuentra *debajo de* (o sobre) la recta $y = -4x + 60$ que se muestra en la figura 11.

La gráfica de $x \ge 5$ es la región a la derecha de (o sobre) la recta vertical $x = 5$, y la gráfica de $y \ge 10$ es la región encima de (o sobre) la recta horizontal $y = 10$.

La gráfica del sistema, es decir, los puntos comunes a los tres semiplanos, es la región triangular trazada en la figura 11. ■

FIGURA 11



EJEMPLO 9 **Gráfica de una desigualdad**

Grafique la desigualdad $27y^3 \le 8 + x^3$.

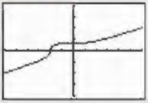
SOLUCIÓN Primero debemos despejar y en la *igualdad* asociada:

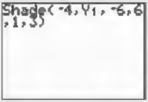
$27y^3 = 8 + x^3$	igualdad
$y^3 = \frac{1}{27}(8 + x^3)$	dividimos entre 27
$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3}$	obtenemos la raíz cúbica de ambos lados

Asignamos $\frac{1}{3}\sqrt[3]{8 + x^3}$ a Y_1 y graficamos Y_1 en el visor rectangular $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se muestra en la figura 12. El punto de prueba $(0, 0)$ es la región de solución (porque $0 \le 8$ es verdadero), por lo que debemos sombrear la región debajo de la gráfica de Y_1. Se muestran los comandos de la calculadora TI-83/4 Plus.

2nd DRAW 7 −4 , VARS
▷ 1 1 , −6 , 6 ,
1 , 3)

FIGURA 12



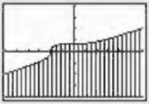


(*continúa*)

Los parámetros para el comando Shade (sombrear) son como sigue:

-4 es la función inferior para la región sombreada; en este caso, simplemente usamos el valor de Ymín. Y_1 es la función superior para la región sombreada.
-6 y 6 son Xmín y Xmáx.
1 es el patrón de sombra; hay cuatro de ellos.
3 sombrea cada tercer (o cuarto) pixel; se puede especificar un entero de 1 a 8.

Presione ENTER para obtener la gráfica siguiente.



Método alterno: hay otro método para sombrear. Se puede ejecutar al seleccionar un estilo de gráfica en la pantalla Y=.

Usando las teclas del cursor, mueva el cursor a la izquierda de "Y_1". Sucesivamente presione ENTER para pasar por los siete estilos de gráficas. Seleccione el estilo "sombrear abajo" como se ve en la figura. Presionar GRAPH produce una figura sombreada como antes.

■

8.3 Ejercicios

Ejer. 1–10: Trace la gráfica de la desigualdad.

1 $3x - 2y < 6$

2 $4x + 3y < 12$

3 $2x + 3y \geq 2y + 1$

4 $2x + 2y > 3y + 3$

5 $y + 2 < x^2$

6 $y^2 - x \leq 0$

7 $x^2 + 1 \leq y$

8 $y - x^3 < 1$

9 $yx^2 \geq 1$

10 $x^2 + 4 \geq y$

Ejer. 11-26: Dibuje la gráfica del sistema de desigualdades.

11 $\begin{cases} x - y > -2 \\ x + y > -2 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x - y > -1 \\ x + y < 3 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x - y \geq -19 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ y - 2x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ y \geq x \\ y \leq 6 \\ x \leq 4 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} |x| \geq 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} |x| \geq 4 \\ |y| \geq 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} |x + 1| < 3 \\ |y - 2| \leq 4 \end{cases}$

22 $\begin{cases} |x - 2| \leq 5 \\ |y - 4| > 2 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 45 \\ x + y \leq -3 \end{cases}$

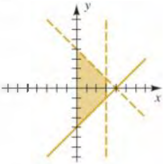
24 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x^2 \leq 1 - y \\ x \geq 1 + y \end{cases}$

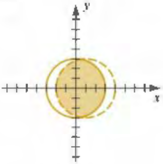
26 $\begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$

Ejer. 27–34: Encuentre el sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

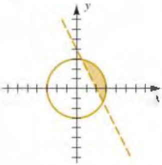
27



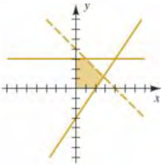
28



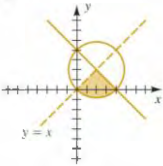
29



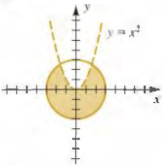
30



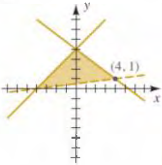
31



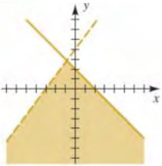
32



33



34



35 **Niveles de inventario** Una tienda vende dos marcas de televisores. La demanda de compradores indica que es necesario tener en existencia por lo menos el doble de aparatos de la marca A que de la marca B. También es necesario tener a la mano por lo menos 10 aparatos de la marca B. Hay espacio para no más de 100 televisores en la tienda. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades de abastecimiento de las dos marcas.

36 **Precios de boletos** Un auditorio tiene 600 asientos. Para el próximo espectáculo, los boletos tendrán un precio de \$8 para algunos asientos y \$5 para otros. Por lo menos 225 boletos tendrán el precio de \$5 y se desean ventas totales de \$3,000. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para fijar el precio de los dos tipos de boletos.

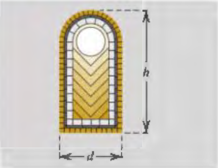
37 **Estrategia de inversión** Una mujer que tiene \$15,000 para invertir decide depositar por lo menos \$2,000 en una inversión de alto rendimiento, pero también de alto riesgo, y por lo menos el triple de esa cantidad en una inversión de bajo rendimiento, pero también de bajo riesgo. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para repartir el dinero entre las dos inversiones.

38 **Niveles de inventario** El gerente de una librería universitaria tiene en existencia dos tipos de cuadernos, el primero de los cuales se vende al mayoreo en 55¢ y el segundo en 85¢. La cantidad máxima por gastar es de \$600, y se desea un inventario de por lo menos 300 de la variedad de 85¢ y 400 de la variedad de 55¢. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades de aprovisionamiento de los dos tipos de cuadernos.

39 **Dimensiones de una lata** Una lata de aerosol se fabricará en forma de cilindro circular con un pequeño cono en la parte superior. La altura total de la lata, incluida la parte cónica, no debe ser de más de 9 pulgadas, y el cilindro debe contener por lo menos 75% del volumen total. Además, la altura de la parte cónica debe medir por lo menos 1 pulgada. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la relación entre la altura y del cilindro y la altura x del cono.

40 **Dimensiones de una ventana** Una ventana de vidrios emplomados se construirá en forma de rectángulo rematado por un semicírculo (vea la figura). La altura total h de

EJERCICIO 40

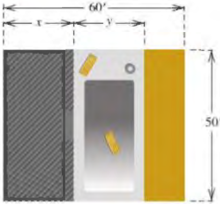


la ventana no puede ser de más de 6 pies y el área de la parte rectangular debe ser por lo menos el doble del área del semicírculo. Además, el diámetro d del semicírculo debe ser por lo menos de 2 pies. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para la base y la altura de la parte rectangular.

41 **Ubicación de una planta de energía eléctrica** Una planta de energía nuclear se construirá para satisfacer las necesidades de energía de las ciudades A y B. La ciudad B está a 100 millas al este de la A. El estado ha prometido que la planta estará por lo menos a 60 millas de cada una de las ciudades, pero debido al terreno áspero no es posible situar la planta al sur de cualquiera de esas ciudades, y la planta debe estar a no más de 100 millas de A y B. Suponiendo que A está en el origen, encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibles ubicaciones de la planta.

42 **Asignación de espacio** Un hombre tiene un patio trasero rectangular de 50 pies de ancho y 60 pies de profundidad. Planea construir una piscina y un patio, como se muestra en la figura, donde $y \ge 10$. Puede gastar a lo sumo \$67,500 en el proyecto. El área del patio debe ser por lo menos tan grande como la de la piscina. El área de la piscina costará \$50 por pie cuadrado, y el patio \$4 por pie cuadrado. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para el ancho de las áreas del patio y la piscina.

EJERCICIO 42



Ejer. 43–44: Grafique la desigualdad.

43 $64y^3 - x^3 \le e^{1-2x}$

44 $e^{3}y - e^{-x} \ge x^4$

Ejer. 45–48: Grafique el sistema de desigualdades.

45 $\begin{cases} 5^{1-x} \ge x^4 + x^2 + 1 \\ x + 3y \ge x^{4/3} \end{cases}$

46 $\begin{cases} x^4 + y^3 < 2^x \\ \ln(x^2 + 1) < y^3 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x^4 - 2x < 3y \\ x + 2y < x^3 - 5 \end{cases}$

48 $\begin{cases} e^x + x^2 \le 2^{x+2y} \\ 2^{x+2y} \le x^3 2^x \\ x > 0 \end{cases}$

49 **Crecimiento de bosques** La temperatura y las lluvias tienen un efecto importante en la vida de las plantas. Si el promedio anual de temperatura o la cantidad de precipitación es demasiado baja, no pueden crecer árboles ni bosques y, en cambio, habrá sólo praderas y desiertos. La relación entre el promedio anual de temperatura T (en °F) y el promedio anual de precipitación P (en pulgadas) es una desigualdad lineal. Para que en una región haya bosques, T y P deben satisfacer la desigualdad $29T - 39P < 450$, donde $33 \le T \le 80$ y $13 \le P \le 45$.

a) Determine si puede haber bosques en Winnipeg, donde $T = 37$ °F y $P = 21.2$ pulgadas.

b) Grafique la desigualdad, con T en el eje horizontal y P en el eje vertical, en un visor rectangular de [33, 80, 5] por [0, 50, 5].

c) Identifique la región en la gráfica que represente dónde pueden crecer bosques.

50 **Crecimiento de praderas** Consulte el ejercicio 49. Si el promedio anual de precipitación P (en pulgadas) es demasiado bajo o el promedio anual de temperatura T (en °F) es demasiado alto, bosques y praderas pueden convertirse en desiertos. Las condiciones necesarias para que crezcan praderas están dadas por una desigualdad lineal. T y P deben satisfacer $22P - 3T > 33$, donde $33 \le T \le 80$ y $13 \le P \le 45$.

a) Determine si es posible que haya praderas en Phoenix, donde $T = 70$ °F y $P = 7.8$ pulgadas.

b) Grafique la desigualdad para bosques y la desigualdad para praderas en los mismos ejes de coordenadas.

c) Determine la región en la gráfica que represente dónde pueden existir praderas, pero no bosques.

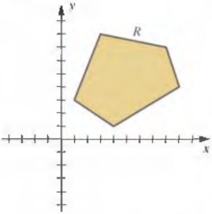
8.4 Programación lineal

Si un sistema de desigualdades contiene sólo desigualdades lineales de la forma

$$ax + by \le c \qquad \text{o} \qquad ax + by \ge c,$$

donde a, b y c son números reales, entonces la gráfica del sistema puede ser una región R en el plano xy delimitado por un polígono, posiblemente del tipo que se ilustra en la figura 1 de la página siguiente (para una ilustración específica, vea el ejemplo 4 y la figura 7 de la sección 8.3). Para problemas de **programación lineal**, consideramos tales sistemas junto con una expresión de la forma

FIGURA 1



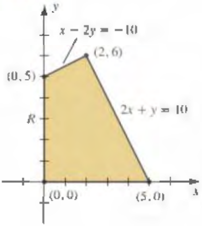
$$C = Ax + By + K$$

donde A, B y K son números reales y (x, y) es un punto en R (esto es, una solución del sistema). Como para cada (x, y) obtenemos un valor específico para C, se dice que C es una *función de dos variables x y y*. En programación lineal, C se llama **función objetivo**, y las desigualdades del sistema se conocen como **restricciones** de C. Las soluciones del sistema, es decir, los pares (x, y) correspondientes a los puntos en R, son las **soluciones factibles** del problema.

En aplicaciones financieras típicas, el valor de C puede representar costo, utilidad, pérdida o un recurso físico, y la meta es encontrar un punto específico (x, y) en R en el que C tome su valor máximo o mínimo. Los métodos de programación lineal simplifican en gran medida el trabajo de encontrar este punto. En específico, podemos demostrar que *los valores máximo y mínimo de C ocurren en un vértice de R*. Este hecho se usa en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Encontrar los valores máximo y mínimo de una función objetivo

FIGURA 2



Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada por $C = 7x + 3y$ sujetos a las siguientes restricciones:

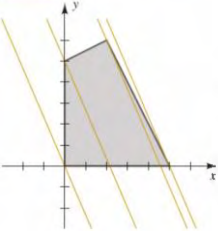
$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R limitada por el cuadrilátero trazado en la figura 2. Por lo expuesto anteriormente, los valores máximo y mínimo de C deben ocurrir en un vértice de R. Los valores de los vértices están dados en la siguiente tabla.

Vértice	Valor de $C = 7x + 3y$
$(0, 0)$	$7(0) + 3(0) = 0$
$(0, 5)$	$7(0) + 3(5) = 15$
$(5, 0)$	$7(5) + 3(0) = 35$
$(2, 6)$	$7(2) + 3(6) = 32$

Por lo tanto, el valor mínimo $C = 0$ ocurre si $x = 0$ y $y = 0$. El valor máximo $C = 35$ ocurre si $x = 5$ y $y = 0$. ■

FIGURA 3



En el ejemplo anterior, decimos que el valor máximo de C *en* R ocurre en el vértice $(5, 0)$. Para verificar este dato, despejamos y en $C = 7x + 3y$ para obtener

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{C}{3}$$

Para cada C, la gráfica de esta ecuación es una recta de pendiente $-7/3$ y punto de intersección $C/3$ con el eje y, como se ilustra en la figura 3. Para encontrar el valor máximo de C, simplemente determinamos cuál de estas rectas que intersecan la región tiene el máximo punto de intersección $C/3$ con el eje y. A partir de la figura 3, vemos que la recta requerida pasa por $(5, 0)$. Del mismo modo, para el valor mínimo de C, determinamos la recta que tiene la ecuación $y = (-7/3)x + (C/3)$

que cruza la región y tiene el punto *mínimo* de intersección con el eje y. Esta es la recta que pasa por (0, 0).

Un problema que podemos expresar en la forma del ejemplo 1 se conoce como **problema de programación lineal**. Para resolver estos problemas, podemos usar los siguientes pasos.

Pasos para resolver un problema de programación lineal

1. Trace la región R determinada por el sistema de restricciones.
2. Encuentre los vértices de R.
3. Calcule el valor de la función objetivo C en cada vértice de R.
4. Seleccione el (los) valor(es) máximo o mínimo de C del paso 3.

En el siguiente ejemplo encontramos un problema de programación lineal en el que el valor mínimo de la función objetivo se presenta en más de un punto.

EJEMPLO 2 **Solución de un problema de programación lineal**

Obtenga el valor mínimo de la función objetivo $C = 2x + 6y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

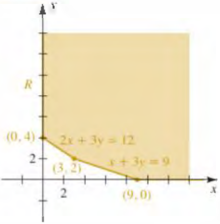
SOLUCIÓN Seguiremos los pasos.

Paso 1 La gráfica del sistema de desigualdades determinada por las restricciones es la región R no acotada que se traza en la figura 4.

Paso 2 Los vértices de R son (0, 4), (3, 2) y (9, 0), como se ve en la figura.

Paso 3 El valor de C en cada vértice de R está dado en la siguiente tabla.

FIGURA 4



Vértice	Valor de $C = 2x + 6y$
(0, 4)	$2(0) + 6(4) = 20$
(3, 2)	$2(3) + 6(2) = 18$
(9, 0)	$2(9) + 6(0) = 18$

Paso 4 La tabla del paso 3 muestra que el valor mínimo de C, 18, se presenta en *dos* vértices, (3, 2) y (9, 0). Además, si (x, y) es cualquier punto en el segmento de recta que une estos puntos, entonces (x, y) es una solución de la ecuación $x + 3y = 9$ y, por lo tanto,

$$C = 2x + 6y = 2(x + 3y) = 2(9) = 18$$

Así, el valor mínimo $C = 18$ ocurre en *todos* los puntos sobre este segmento de recta. ■

En los siguientes dos ejemplos consideramos aplicaciones de programación lineal. Para este tipo de problemas es necesario usar información y datos dados para formular el sistema de restricciones y la función objetivo. Una vez que se ha logrado esto, podemos aplicar los pasos como hicimos en la solución del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 **Maximización de utilidades**

Una empresa fabrica dos productos, X y Y. Para cada producto, es necesario usar tres máquinas diferentes, A, B y C. Para fabricar una unidad del producto X, la máquina A debe usarse durante 3 horas, la máquina B durante 1 hora y la máquina C durante 1 hora. Para fabricar una unidad del producto Y se requieren 2 horas en la máquina A, 2 horas en la B y 1 hora en la C. La utilidad del producto X es de \$500 por unidad, y la utilidad del producto Y es de \$350 por unidad. La máquina A está disponible durante un total de 24 horas por día, pero la B se puede usar sólo 16 horas y la C durante 9 horas. Suponiendo que las máquinas están disponibles cuando es necesario (sujetas a las restricciones de horas totales indicadas), determine el número de unidades de cada producto que debe fabricarse cada día para maximizar la utilidad.

SOLUCIÓN La siguiente tabla resume los datos dados en el enunciado del problema.

Máquina	Horas necesarias para una unidad de X	Horas necesarias para una unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

Introduzcamos las siguientes variables:

x = número de unidades de X fabricadas cada día

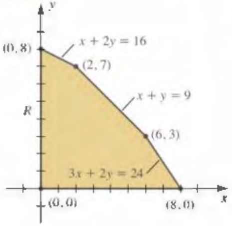
y = número de unidades de Y fabricadas cada día

Usando el primer renglón de la tabla, observamos que cada unidad de X requiere 3 horas en la máquina A, y por lo tanto x unidades requieren $3x$ horas. De forma análoga, como cada unidad de Y requiere 2 horas en A, y unidades requieren $2y$ horas. En consecuencia, el número total de horas por día que la máquina A debe usarse es $3x + 2y$. Esto, junto con el hecho de que A se puede usar durante 24 horas por día a lo sumo, nos da la primera restricción en el siguiente sistema de desigualdades, esto es, $3x + 2y \le 24$. La segunda y tercera restricciones se obtienen siguiendo el mismo tipo de razonamiento para los renglones 2 y 3 de la tabla. Las últimas dos restricciones, $x \ge 0$ y $y \ge 0$, son verdaderas porque x y y no pueden ser negativas.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\le 24 \\ x + 2y &\le 16 \\ x + y &\le 9 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

La gráfica de este sistema es la región R de la figura 5.

FIGURA 5



Como la producción de cada unidad del producto X da una utilidad de \$500 y cada unidad del producto Y da una utilidad de \$350, la utilidad P obtenida al producir x unidades de X junto con y unidades de Y es

$$P = 500x + 350y$$

Esta es la función objetivo del problema. El valor máximo de P debe ocurrir en uno de los vértices de R en la figura 5. Los valores de P en estos vértices se dan en la siguiente tabla.

Vértice	Valor de $P = 500x + 350y$
$(0, 0)$	$500(0) + 350(0) = 0$
$(0, 5)$	$500(0) + 350(8) = 2800$
$(5, 0)$	$500(8) + 350(8) = 4000$
$(2, 7)$	$500(2) + 350(7) = 3450$
$(2, 6)$	$500(6) + 350(3) = 4050$

Vemos en la tabla que una utilidad máxima de \$4,050 tiene lugar para una producción diaria de 6 unidades del producto X y 3 unidades del producto Y. ■

El ejemplo 3 ilustra la maximización de utilidades. El siguiente ejemplo demuestra la forma en que se puede usar programación lineal para minimizar el costo en cierta situación.

EJEMPLO 4 **Minimización del costo**

Un distribuidor de reproductores de discos compactos tiene dos almacenes, W_1 y W_2. Hay 80 unidades almacenadas en W_1 y 70 unidades en W_2. Dos clientes, A y B, solicitan 35 y 60 unidades, respectivamente. El costo del envío de cada almacén a A y B es determinado con base en la siguiente tabla. ¿Cómo debe embarcarse el pedido para minimizar el costo total de envío?

Almacén	Cliente	Costo de envío por unidad
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Comencemos por definir las siguientes variables:

$$x = \text{número de unidades enviadas a A desde } W_1$$

$$y = \text{número de unidades enviadas a B desde } W_1$$

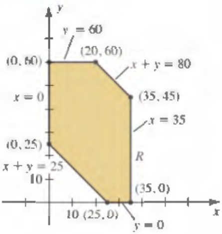
Como A solicitó 35 unidades y B solicitó 60, debemos tener

$$35 - x = \text{número de unidades enviadas a A desde } W_2$$

$$60 - y = \text{número de unidades enviadas a B desde } W_2.$$

Nuestra meta es determinar los valores de x y y que reduzcan al mínimo el costo total del envío.

FIGURA 6



El número de unidades enviadas desde W_1 no puede exceder de 80, y el número enviado desde W_2 no puede exceder de 70. La expresión de estos datos en términos de desigualdades nos da

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70 \end{cases}$$

Simplificando, obtenemos las primeras dos restricciones en el siguiente sistema. Las últimas dos restricciones son verdaderas porque los valores más grandes de x y y son 35 y 60, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25 \\ 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

La gráfica de este sistema es la región R que se muestra en la figura 6.

Sea C el costo total (en dólares) de envío de reproductores de discos a los clientes A y B. En la tabla de costos de envío vemos que lo siguiente es verdadero:

$$\text{costo de enviar 35 unidades a A} = 8x + 10(35 - x)$$

$$\text{costo de enviar 60 unidades a B} = 12y + 13(60 - y)$$

En consecuencia, el costo total es

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y)$$

Simplificando se obtiene la siguiente función objetivo:

$$C = 1130 - 2x - y$$

Para determinar el valor mínimo de C en R, necesitamos probar sólo los vértices que se ven en la figura 6 como en la siguiente tabla.

Vértice	Valor de $C = 1130 - 2x - y$
(0, 25)	$1130 - 2(0) - 25 = 1105$
(0, 60)	$1130 - 2(0) - 60 = 1070$
(20, 60)	$1130 - 2(20) - 60 = 1030$
(35, 45)	$1130 - 2(35) - 45 = 1015$
(35, 0)	$1130 - 2(35) - 0 = 1060$
(25, 0)	$1130 - 2(25) - 0 = 1080$

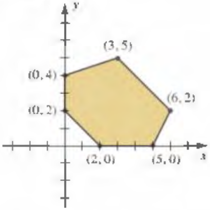
En la tabla vemos que el costo mínimo de envío, \$1,015, ocurre si $x = 35$ y $y = 45$. Esto significa que el distribuidor debe enviar todos los reproductores de discos a A desde W_1 y ninguno desde W_2. Además, el distribuidor debe enviar 45 unidades a B desde W_1 y 15 unidades de B a W_2. (Note que el costo *máximo* de envío ocurrirá si $x = 0$ y $y = 25$, esto es, si las 35 unidades son enviadas a A desde W_2 y si B recibe 25 unidades desde W_1 y 35 unidades desde W_2.) ■

Los ejemplos de esta sección son problemas elementales de programación lineal con dos variables, que se pueden resolver por métodos básicos. Los problemas mucho más complejos con numerosas variables que se presentan en la práctica pueden resolverse si se emplean técnicas de matrices (que veremos más adelante) que están adaptadas para solución por computadora.

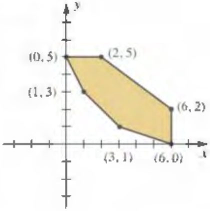
8.4 Ejercicios

Ejer. 1–2: Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo C en la región de la figura.

1 $C = 3x + 2y + 5$



2 $C = 2x + 7y + 3$



Ejer. 3–4: Trace la región R determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Encuentre el valor máximo de C en R.

3 $C = 3x + y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$3x - 4y \geq -12,$ $3x + 2y \leq 24,$ $3x - y \leq 15$

4 $C = 4x - 2y$;
$x - 2y \geq -8,$ $7x - 2y \leq 28,$ $x + y \geq 4$

Ejer. 5–6: Trace la región R determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Encuentre el valor mínimo de C en R.

5 $C = 3x + 6y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$2x + 3y \geq 12,$ $2x + 5y \geq 16$

6 $C = 2x + 6y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$x + y \geq 9,$ $5x + 8y \geq 60$

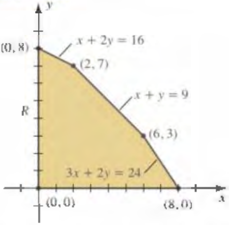
Ejer. 7–8: Trace la región R determinada por las restricciones dadas y marque sus vértices. Describa el conjunto de puntos para los que C es un máximo en R.

7 $C = 2x + 4y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$x - 2y \geq -8,$ $\frac{1}{2}x + y \leq 6,$ $3x + 2y \leq 24$

8 $C = 6x + 3y$; $x \geq 2, y \geq 1,$
$2x + 3y \leq 19,$ $x + 0.5y \leq 6.5$

Ejercicios 9–14: Consulte la figura 5 en el ejemplo 3 y el análisis que se siguió en el ejemplo 1.

FIGURA 5 (repetida)



Escribiendo la función objetivo en el ejemplo 3, $P = 500x + 350y$, en la forma de pendiente-punto de intersección tenemos $y = -\frac{10}{7}x + (P/350)$. Compare esta pendiente con las de los segmentos de recta en el perímetro de R antes de responder las siguientes preguntas.

Ejer. 9–10: ¿En qué vértice podría ocurrir la utilidad máxima si la función objetivo tiene una pendiente de

9 -2? **10** $-\frac{3}{4}$?

Ejer. 11–12: ¿Dónde podría ocurrir la utilidad máxima si la función objetivo tiene pendiente de

11 -1? **12** $-\frac{3}{2}$?

Ejer. 13–14: Encuentre una función de utilidad razonable de la forma $P = 500x + by$ tal que la utilidad máxima ocurra en el vértice dado.

13 $(2, 7)$ **14** $(8, 0)$

15 **Planificación de la producción** Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una utilidad de \$15 por cada raqueta de tamaño grande y \$8 por cada raqueta estándar. Para satisfacer la demanda de los distribuidores, la producción diaria de raquetas estándar debe ser de entre 30 y 80, y la producción de raquetas de tamaño grande debe ser de entre 10 y 30. Para mantener alta calidad, el número total de raquetas producidas no debe exceder de 80 al día. ¿Cuántas de cada tipo deben fabricarse diariamente para maximizar la utilidad?

16 **Planificación de la producción** Un fabricante de teléfonos celulares obtiene una utilidad de \$25 en un modelo de lujo y \$30 en un modelo estándar. La empresa desea producir por lo menos 80 modelos de lujo y 100 modelos estándar por día. Para mantener alta calidad, la producción diaria no debe exceder 200 teléfonos. ¿Cuántos de cada tipo debe producir diariamente para maximizar la utilidad?

17 **Minimización del costo** Dos sustancias, S y T, contienen cada una dos tipos de ingredientes, I y G. Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 onzas de G. Una libra de T contiene 2 onzas de I y 6 onzas de G. Un fabricante planea combinar cantidades de las dos sustancias para obtener una mezcla que contenga por lo menos 9 onzas de I y 20 onzas de G. Si el costo de S es de \$3 por libra y el de T de \$4 por libra, ¿cuánto de cada sustancia debe usarse para mantener al mínimo el costo?

18 **Maximización de la utilidad bruta** Una empresa papelera fabrica dos tipos de cuadernos: un cuaderno de lujo con separadores de temas, que se vende en \$4.00, y un cuaderno regular, que se vende en \$3.00. El costo de producción es de \$3.20 por cada cuaderno de lujo y de \$2.60 por cada cuaderno regular. La empresa tiene instalaciones para producir entre 2,000 y 3,000 de lujo y entre 3,000 y 6,000 cuadernos regulares, pero no más de 7,000 en total. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo deben producirse para maximizar la diferencia entre los precios de venta y costos de producción?

19 **Minimización de los costos de envío** Consulte el ejemplo 4 de esta sección. Si los costos de envío son de \$12 por unidad desde W_1 a A, \$10 por unidad desde W_2 a A, \$16 por unidad desde W_1 a B, y \$12 por unidad desde W_2 a B, determine cómo debe embarcarse el pedido para minimizar el costo de envío.

20 **Minimización del costo** Una empresa cafetalera compra lotes de granos de café mezclados y luego los clasifica en granos de alta calidad, regulares y no utilizables. La empresa necesita por lo menos 280 toneladas de granos de café de alta calidad y 200 toneladas de granos de café de calidad regular. La empresa puede comprar café sin clasificar a dos proveedores en cualquier cantidad deseada. Muestras de los dos proveedores contienen los siguientes porcentajes de granos de café de alta calidad, regular y no utilizable:

Proveedor	De lujo	Regular	No utilizable
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si el proveedor A cobra \$900 por tonelada y B cobra \$1,200 por tonelada, ¿cuánto debe comprar la empresa a cada proveedor para satisfacer sus necesidades al costo mínimo?

21 **Planificación de superficie de cultivo** Un agricultor, que se dedica a la producción de forraje para ganado, tiene 90 acres disponibles para plantar alfalfa y maíz. El costo de semilla por acre es de \$32 para alfalfa y de \$48 para maíz. El costo total de mano de obra ascenderá a \$60 por acre para alfalfa y \$30 por acre para maíz. El ingreso esperado (antes de deducir costos) es de \$500 por acre de alfalfa y \$700 por acre de maíz. Si el agricultor no desea gastar más de \$3,840 en semillas y \$4,200 en mano de obra, ¿cuántos acres de cada cultivo debe plantar para obtener la utilidad máxima?

22 **Planificación de maquinaria** Una pequeña empresa fabrica estantes de libros y escritorios para microcomputadoras. Para cada producto es necesario usar una sierra de mesa y una sierra eléctrica de contornos. Para fabricar cada estante de libros, la sierra debe usarse $\frac{1}{2}$ hora y la sierra de contornos debe usarse 1 hora. Un escritorio requiere el uso de cada máquina por 2 horas. Las utilidades son de \$20 por estante de libros y \$50 por escritorio. Si la sierra se puede usar 8 horas al día y la sierra de contornos 12 horas al día, ¿cuántos estantes de libros y escritorios deben fabricarse al día para maximizar la utilidad?

23 **Minimización del costo de una mezcla** Tres sustancias, X, Y y Z, contienen cuatro ingredientes cada una de ellas, A, B, C y D. El porcentaje de cada ingrediente y el costo en centavos por onza de cada sustancia están dados en la siguiente tabla.

	Ingredientes				
Sustancia	A	B	C	D	Costo por onza
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

Si el costo debe ser mínimo, ¿cuántas onzas de cada sustancia deben combinarse para obtener una mezcla de 20 onzas que contenga por lo menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Qué combinación proporcionaría el costo máximo?

24 **Maximización de las utilidades** Un hombre planea operar un puesto en una feria que dura un día, en el que venderá bolsas de cacahuates y de dulces. Tiene \$2,000 disponibles para comprar su mercancía, que costará \$2.00 por bolsa de cacahuates y \$4.00 por bolsa de dulces. Trata de vender los cacahuates en \$3.00 y los dulces en \$5.50 por bolsa. Su puesto tiene espacio hasta para 500 bolsas de cacahuates y 400 de dulces. Por experiencia, él sabe que no venderá más de un total de 700 bolsas. Encuentre el número de bolsas de cada una que debe tener en existencia para maximizar su utilidad. ¿Cuál es la utilidad máxima?

25 **Maximización de la capacidad de pasajeros** Una pequeña comunidad desea comprar camionetas y autobuses pequeños usados para su sistema de transporte público. La comunidad no puede gastar más de \$100,000 en los vehículos y no más de \$500 al mes en mantenimiento. Las camionetas se venden en \$10,000 cada una y su mantenimiento tiene un costo promedio de \$100 al mes. Los cálculos de costo correspondientes a cada autobús son de \$20,000 y \$75 por mes. Si cada camioneta puede llevar 15 pasajeros y cada autobús tiene capacidad para 25 pasajeros, determine el número de camionetas y autobuses que deben comprarse para maximizar la capacidad de pasajeros del sistema.

26 **Minimización del costo de combustible** Consulte el ejercicio 25. El costo mensual de combustible (basado en 5,000 millas de servicio) es de \$550 por cada camioneta y \$850 por cada autobús. Encuentre el número de camionetas y autobuses que deben comprarse para minimizar los costos mensuales de combustible si la capacidad en pasajeros del sistema debe ser de por lo menos 75.

27 **Abastecimiento de una granja piscícola** Un criador de peces comprará no más de 5,000 truchas y lobinas jóvenes de un criadero y las alimentará con una dieta especial durante el año próximo. El costo del alimento por pez será de \$0.50 por trucha y \$0.75 por lobina, y el costo total no debe exceder de \$3,000. Al final del año, una trucha típica pesará 3 libras, y una lobina pesará 4. ¿Cuántos peces de cada tipo debe haber en el estanque para maximizar el número total de libras de peces al final del año?

28 **Planificación de dietas** Un dietista de un hospital desea preparar un plato de verduras con maíz y calabazas que proporciona por lo menos 3 gramos de proteína y cuesta no más de 36¢ la porción. Una onza de crema de maíz proporciona $\frac{1}{2}$ gramo de proteína y cuesta 4¢. Una onza de calabaza proporciona $\frac{1}{4}$ de gramo de proteína y cuesta 3¢. Para que el plato tenga buen sabor, debe tener por lo menos 2 onzas de maíz e igual cantidad de calabaza que de maíz. Es importante mantener tan bajo como sea posible el número total de onzas en una porción. Encuentre la combinación de maíz y calabaza que minimizará la cantidad de ingredientes empleados por porción.

29 **Planeación de unidades de almacenamiento** Una contratista tiene un edificio grande que desea convertir en una serie de espacios de almacenamiento que desea alquilar. Construirá unidades básicas de 8 ft × 10 ft y unidades de lujo de 12 ft × 10 ft que contienen estantes adicionales y clóset para ropa. Las consideraciones del mercado dictan que debe haber por lo menos el doble de unidades básicas que las de lujo y que las unidades básicas se alquilan en \$75 al mes y las de lujo en \$120 al mes. Dispone de 7,200 ft^2 a lo sumo para espacios de almacenamiento y hasta de \$80,000 para la construcción. Si la construcción de cada unidad básica costará \$800 y cada una de lujo costará \$1,600, ¿cuántas unidades de cada tipo debe construir para maximizar el ingreso mensual?

30 **Dieta de un alce** Un alce que se alimenta principalmente de hojas de árboles y plantas acuáticas puede digerir no más de 33 kilogramos de estos alimentos por día. Aun cuando las plantas acuáticas tienen menor contenido de energía, el animal debe comer por lo menos 17 kilogramos de éstas para satisfacer sus necesidades de sodio. Un kilogramo de hojas proporciona cuatro veces más energía que un kilogramo de plantas acuáticas. Encuentre la combinación de alimentos que maximiza la ingesta diaria de energía.

8.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables

Para sistemas de ecuaciones lineales que contienen más de dos variables, podemos usar ya sea el método de sustitución explicado en la sección 8.1 o el método de eliminación desarrollado en la sección 8.2. El método de eliminación es la técnica más corta y sencilla para encontrar soluciones. Además, lleva a la técnica de matrices que estudiaremos en esta sección.

EJEMPLO 1 **Uso del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases} \quad \text{a la segunda ecuación sumamos la primera multiplicada por } -2$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases} \quad \text{a la tercera ecuación sumamos la primera multiplicada por 3}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ y - 4z = -5 \end{cases} \quad \text{multiplicamos la segunda ecuación por } \tfrac{1}{5} \text{ y la tercera por } -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2z = -4 \end{cases} \quad \text{a la tercera ecuación sumamos la segunda multiplicada por } -1$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{multiplicamos la tercera ecuación por } -\tfrac{1}{2}$$

Las soluciones del último sistema son fáciles de encontrar por **sustitución hacia atrás**. En la tercera ecuación vemos que $z = 2$. Sustituyendo 2 por z en la segunda ecuación, $y - 2z = -1$, obtenemos $y = 3$. Por último, hallamos el valor de x mediante la sustitución de $y = 3$ y $z = 2$ en la primera ecuación, $x - 2y + 3z = 4$, para obtener $x = 4$. Por lo tanto, hay una solución $(4, 3, 2)$. ■

Cualquier sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene ya sea una *solución única*, un *número infinito de soluciones*, o *no tiene solución*. En cuanto a dos ecuaciones con dos variables, la terminología empleada para describir estos sistemas es *consistente*, *dependiente y consistente*, o *inconsistente*, respectivamente.

Si analizamos el método de solución del ejemplo 1, vemos que los símbolos empleados para las variables no tienen importancia. Los *coeficientes* de las variables son lo que debemos considerar. Entonces, si se usan diferentes símbolos, como r, s y t para las variables, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t = 4 \\ 2r + s - 4t = 3 \\ -3r + 4s - t = -2 \end{cases}$$

El método de eliminación puede continuar exactamente como en el ejemplo. Como esto es verdadero, es posible simplificar el proceso. Específicamente, introducimos un esquema para hacer seguimiento de los coeficientes en forma tal que no tenemos que escribir las variables. Si consultamos el sistema precedente, primero comprobamos que las variables aparezcan en el mismo orden en cada ecuación y que los términos que no contienen variables estén a la derecha de los signos igual. A continuación elaboramos una lista de los números que aparecen en las ecuaciones, como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un arreglo de números de este tipo se denomina **matriz**. Los **renglones** de la matriz son los números que aparecen *horizontalmente*:

1	−2	3	4	primer renglón, R_1
2	1	−4	3	segundo renglón, R_2
−3	4	−1	−2	tercer renglón, R_3

Las **columnas** de la matriz son los números que aparecen *verticalmente*:

primera columna, C_1	segunda columna, C_2	tercera columna, C_3	cuarta columna, C_4
1	−2	3	4
2	1	−4	3
−3	4	−1	−2

La matriz obtenida de un sistema de ecuaciones lineales de la manera anterior es la **matriz del sistema**. Si eliminamos la última columna de esta matriz, el conjunto restante de números es la **matriz de coeficientes**. Como la matriz del sistema se puede obtener de la matriz de coeficientes al adjuntar una columna, la llamamos **matriz de coeficientes aumentada**, o simplemente **matriz aumentada**. Más adelante, cuando usemos matrices para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, introduciremos un segmento de recta vertical en la matriz aumentada para indicar dónde aparecerían los signos de igual en el sistema de ecuaciones correspondiente, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLOS **Matriz de coeficientes y matriz aumentada**

sistema	matriz de coeficientes	matriz de coeficientes aumentada
$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$

Antes de explicar un método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales, expresemos una definición general de una matriz. Usaremos una **notación de doble subíndice**, que denota el número que aparece en el renglón i y la columna j con a_{ij}. El **subíndice de renglón** de a_{ij} es i, y el **subíndice de columna** es j.

Definición de matriz

Sean m y n enteros positivos. Una **matriz $m \times n$** es un arreglo de la forma siguiente, donde cada uno de los términos a_{ij} es un número real:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La notación $m \times n$ de la definición se lee "m por n". Con frecuencia decimos que la matriz es de $m \times n$, donde $m \times n$ es el **tamaño** de la matriz. Es posible considerar matrices en las que los símbolos a_{ij} representan números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos. Los renglones y columnas de una matriz se definen como antes. Así, la matriz de la definición tiene m renglones y n columnas. Tenga en cuenta que a_{23} está en el renglón 2 y la columna 3 y a_{32} está en el renglón 3 y la columna 2. Cada a_{ij} es un **elemento de la matriz.** Si $m = n$, la matriz es una **matriz cuadrada de orden n** y los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ son los **elementos de la diagonal principal.**

EJEMPLOS **Matrices de $m \times n$**

■ 2×3: $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ■ 2×2: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ■ 1×3: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ■ 3×2: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ■ 3×1: $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, comenzamos con la matriz aumentada. Si una variable no aparece en una ecuación, suponemos que el coeficiente es cero. Enseguida trabajamos con los renglones de la matriz *igual que si fueran ecuaciones*. Los únicos elementos faltantes son los símbolos para las variables, los signos de suma o resta usados entre términos, y los signos igual. Simplemente recordemos que los números en la primera columna son los coeficientes de la primera variable, los números de la segunda columna son los coeficientes de la segunda variable, y así sucesivamente. Las reglas para transformar una matriz están formuladas de modo que siempre producen una matriz de un sistema de ecuaciones equivalente.

El siguiente teorema es un replanteamiento, en términos de matrices, del teorema sobre sistemas equivalentes de la sección 8.2. En la parte 2) del teorema, la terminología *un renglón se multiplica por una constante distinta de cero* significa que cada elemento del renglón se multiplica por la constante. Para *sumar* dos renglones de una matriz, como en la parte 3), sumamos los elementos correspondientes en cada renglón.

Teorema sobre transformaciones de renglón de matriz

Dada una matriz de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene la matriz de un sistema equivalente si:

1) se intercambian dos renglones.

2) se multiplica o divide un renglón por una constante diferente de cero.

3) un múltiplo constante de un renglón se suma a otro renglón.

Nos referimos a 1-3 como las **transformaciones elementales de renglón** de una matriz. Si una matriz se obtiene de otra por una o más transformaciones elementales de renglón, se dice que las dos matrices son **equivalentes** o, más precisamente, **renglón equivalentes**. Usaremos los símbolos de la siguiente tabla para denotar transformaciones elementales de renglón de una matriz, donde la flecha $\rightarrow$ se puede leer "sustituye a". Entonces, para la transformación $kR_i \rightarrow R_i$, el múltiplo constante kR_i sustituye a R_i. Del mismo modo, para $kR_i \rightarrow R_j$, la suma $kR_i + R_j \rightarrow R_j$ *sustituye* a R_j. Por comodidad, escribiremos $(-1)R_i$ como $-R_i$.

Transformaciones elementales de renglón de una matriz

Símbolo	Significado
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambia renglones i y j
$kR_i \rightarrow R_i$	Multiplica renglón i por k
$kR_i + R_j \rightarrow R_j$	Suma k veces el renglón i al renglón j

A continuación, volveremos a trabajar el ejemplo 1 usando matrices. Usted debe comparar las dos soluciones en vista de que en cada caso se usan pasos análogos.

EJEMPLO 2 **Uso de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz del sistema, es decir, con la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

A continuación aplicamos transformaciones elementales de renglón para obtener otra matriz (más sencilla) de un sistema de ecuaciones equivalente. Estas transformaciones corresponden a las manipulaciones empleadas para ecuaciones en el ejemplo 1. Colocaremos símbolos apropiados entre matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ \mathbf{-2R_1 + R_2 \to R_2} \\ \mathbf{3R_1 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \text{sumamos } -2R_1 \text{ a } R_2 \\ \text{sumamos } 3R_1 \text{ a } R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{\tfrac{1}{5}R_2 \to R_2} \\ \mathbf{-\tfrac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \text{multiplicamos } R_2 \text{ por } \tfrac{1}{5} \\ \text{multiplicamos } R_3 \text{ por } -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{-R_2 + R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{sumamos } -R_2 \text{ a } R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{-\tfrac{1}{2}R_3 \to R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{multiplicamos } R_3 \text{ por } -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Usamos la última matriz para regresar al sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ \quad\;\; y - 2z = -1 \\ \qquad\quad\;\; z = 2 \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original. La solución $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ se puede obtener ahora por sustitución hacia atrás, como en el ejemplo 1. ■

La matriz final de la solución del ejemplo 2 está en **forma escalonada**. En general, una matriz está en forma escalonada si satisface las siguientes condiciones.

Forma escalonada de una matriz

1) El primer número diferente de cero en cada renglón, leyendo de izquierda a derecha, es 1.
2) La columna que contiene el primer número diferente de cero en cualquier renglón está a la izquierda de la columna que contiene el primer número diferente de cero del renglón siguiente.
3) Los renglones formados enteramente por ceros pueden aparecer en la parte inferior de la matriz.

Los siguientes son ejemplos de matrices de forma escalonada. Los símbolos a_{ij} representan números reales.

EJEMPLOS **Forma escalonada**

■ $\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Los siguientes pasos pueden usarse para obtener formas escalonadas.

Pasos para obtener la forma escalonada de una matriz

1 Localice la *primera* columna que contenga elementos diferentes de cero y aplique transformaciones elementales de renglón para colocar el número 1 en el primer renglón de esa columna.

2 Aplique transformaciones elementales de renglón del tipo $kR_1 + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 1$ para colocar 0 debajo del número 1 obtenido en el paso 1 en cada uno de los renglones restantes.

3 *No considere la primera columna.* Localice la siguiente columna que contenga elementos diferentes de cero y aplique transformaciones elementales de renglón para colocar el número 1 en el segundo renglón de esa columna.

4 Aplique transformaciones elementales de renglón del tipo $kR_2 + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 2$ para colocar 0 debajo del número 1 obtenido en el paso 3 en cada uno de los renglones restantes.

5 *No considere el primero y el segundo renglones.* Localice la siguiente columna que contenga elementos diferentes de cero y repita el procedimiento.

6 Continúe el proceso hasta llegar a la forma escalonada.

No todas las formas escalonadas contienen renglones formados sólo de ceros (vea el ejemplo 2).

Podemos usar operaciones elementales de renglón para transformar la matriz de cualquier sistema de ecuaciones lineales a forma escalonada, la cual se puede usar entonces para producir un sistema de ecuaciones equivalente al sistema original. Las soluciones del sistema dado se pueden encontrar por sustitución hacia atrás. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica para un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3 **Uso de una forma escalonada para resolver un sistema de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z = -1 \\ x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Hemos dispuesto las ecuaciones de modo que las mismas variables aparecen en columnas verticales. Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, como se describe en los pasos.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 \\ \\ -3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{R}_2 \leftrightarrow \mathbf{R}_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -3\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 \\ -\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{3}\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz final está en forma escalonada y corresponde al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3} \\ w = 1 \end{cases}$$

(*continúa*)

Ahora usamos sustitución hacia atrás para encontrar la solución. En la última ecuación vemos que $w = 1$. Sustituyendo en la tercera ecuación, $z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3}$, obtenemos

$$z - \tfrac{7}{3}(1) = -\tfrac{1}{3} \qquad \text{o} \qquad z = \tfrac{6}{3} = 2$$

Sustituyendo $w = 1$ y $z = 2$ en la segunda ecuación, $y + z - w = 0$, obtenemos

$$y + 2 - 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad y = -1$$

Por último, de la primera ecuación, $x - 2z + 2w = 1$, tenemos

$$x - 2(2) + 2(1) = 1 \qquad \text{o} \qquad x = 3$$

En consecuencia, el sistema tiene una solución, $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ y $w = 1$. ■

Después de obtener una forma escalonada, con frecuencia es conveniente aplicar operaciones elementales de renglón adicionales del tipo $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, para que 0 también aparezca *arriba* del primer 1 de cada renglón. Decimos que la matriz resultante está en **forma escalonada reducida**. El siguiente es un ejemplo de matrices en forma escalonada reducida. (Compárelas con las formas escalonadas de la página 582.)

EJEMPLOS **Forma escalonada reducida**

■ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 4 Uso de una forma escalonada reducida para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelva el sistema del ejemplo 3 usando forma escalonada reducida.

SOLUCIÓN Comenzamos con la forma escalonada obtenida en el ejemplo 3 y aplicamos operaciones adicionales de renglón como sigue:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} \mathbf{-2R_4 + R_1 \rightarrow R_1} \\ \mathbf{R_4 + R_2 \rightarrow R_2} \\ \mathbf{\frac{7}{3}R_4 + R_3 \rightarrow R_3} \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{2R_3 + R_1 \rightarrow R_1} \\ \mathbf{-R_3 + R_2 \rightarrow R_2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida nos da la solución *sin* usar sustitución hacia atrás:

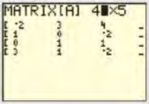
$$x = 3, y = -1, z = 2, w = 1$$ ■

Casi todas las calculadoras graficadoras tienen una función que ejecuta la forma escalonada reducida de una matriz. Introduzcamos la matriz aumentada del sistema del ejemplo 3:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

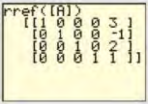
Introduzca el tamaño y los elementos en la matriz A.

2nd MATRX ▷ ▷ ENTER
4 ENTER 5 ENTER
−2 ENTER 3 ENTER ···3 ENTER



Encuentre la forma escalonada reducida de renglón.

2nd QUIT 2nd MATRX ▷ ALPHA
B 2nd MATRX 1) ENTER



Note que los resultados en la pantalla concuerdan con la matriz final del ejemplo 4.

A veces es necesario considerar sistemas en los que el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Son aplicables las mismas técnicas de matriz, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzaremos con la matriz aumentada y luego encontraremos una forma escalonada reducida. Hay numerosas formas diferentes de colocar el número 1 en la primera posición del primer renglón. Por ejemplo, la transformación elemental de renglón $\frac{1}{2}R_1 \to R_1$ o $-\frac{1}{3}R_2 + R_1 \to R_1$ lograría esto en un paso. Otra forma, que no contiene fracciones, se demuestra en los siguientes pasos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{R_1 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-R_2 + R_1 \to R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-2R_1 + R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-R_2 + R_1 \to R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

(continúa)

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x = z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{cases}$$

Hay un número infinito de soluciones de este sistema; se pueden encontrar asignando a z cualquier valor c y luego usando las últimas dos ecuaciones para expresar x y y en términos de c. Esto nos da

$$x = c + 5, \qquad y = -2c - 3, \qquad z = c$$

Entonces, las soluciones del sistema están formadas por todas las ternas ordenadas de la forma

$$(c + 5, -2c - 3, c)$$

para cualquier número real c. Para comprobar las soluciones, en las dos ecuaciones originales sustituimos $c + 5$ por x, $-2c - 3$ por y, y c por z.

Para obtener cualquier número de soluciones del sistema, sustituimos números reales específicos por c. Por ejemplo, si $c = 0$, obtenemos $(5, -3, 0)$; si $c = 2$, tenemos $(7, -7, 2)$; y así sucesivamente.

Hay otras formas de especificar la solución general. Por ejemplo, comenzando con $x = z + 5$ y $y = -2z - 3$, podría ser que $z = d - 5$ para cualquier número real d. En este caso,

$$\begin{aligned} x &= z + 5 = (d - 5) + 5 = d \\ y &= -2z - 3 = -2(d - 5) - 3 = -2d + 7, \end{aligned}$$

y las soluciones del sistema tienen la forma

$$(d, -2d + 7, d - 5)$$

Estas ternas producen las mismas soluciones que $(c + 5, -2c - 3, c)$. Por ejemplo, si $d = 5$, obtenemos $(5, -3, 0)$; si $d = 7$, obtenemos $(7, -7, 2)$; y así sucesivamente. ■

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos que no contienen variables, es decir, los *términos constantes*, son cero. Un sistema de ecuaciones homogéneas siempre tiene la **solución trivial** obtenida al sustituir cero por cada variable. A veces existen soluciones que no son triviales. El procedimiento para encontrar soluciones es el mismo que el empleado para sistemas no homogéneos.

EJEMPLO 6 **Solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales**

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz aumentada y obtenemos una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{3}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ -\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La forma escalonada reducida corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad + \ z = 0 \\ \qquad y - 3z = 0 \end{cases}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x = -z \\ y = \ \ 3z \end{cases}$$

Si asignamos cualquier valor c a z, obtenemos $x = -c$ y $y = 3c$. Las soluciones están formadas por todas las ternas de la forma $(-c, 3c, c)$ para cualquier número real c. ■

EJEMPLO 7 **Un sistema homogéneo con sólo la solución trivial**

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz aumentada y obtenemos una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ -\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(*continúa*)

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Por consiguiente, la única solución para el sistema dado es la trivial, (0, 0, 0). ■

Los siguientes dos ejemplos ilustran problemas de aplicación.

EJEMPLO 8 Uso de un sistema de ecuaciones para determinar utilidad máxima

Un fabricante de equipo eléctrico tiene la siguiente información acerca de la utilidad semanal por la producción y venta de un motor eléctrico.

Nivel de producción x	25	50	100
Utilidad $P(x)$ (dólares)	5250	7500	4500

a) Determine a, b y c, de modo que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ se ajuste a esta información.

b) Con base en la función cuadrática P del inciso a), ¿cuántos motores deben producirse cada semana para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima semanal?

SOLUCIÓN

a) En la tabla vemos que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ contiene los puntos (25, 5250), (50, 7500) y (100, 4500). Esto nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5250 = 625a + 25b + c \\ 7500 = 2500a + 50b + c \\ 4500 = 10{,}000a + 100b + c \end{cases}$$

Es fácil despejar c en cualquiera de las ecuaciones, de modo que comenzaremos por resolver el sistema despejando c en la primera ecuación,

$$c = 5250 - 625a - 25b,$$

y luego sustituimos esa expresión por c en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7500 = 2500a + 50b + (5250 - 625a - 25b) \\ 4500 = 10{,}000a + 100b + (5250 - 625a - 25b) \end{cases}$$

Observe que hemos reducido el sistema de tres ecuaciones con tres variables a dos ecuaciones y dos variables. Simplificando el sistema tendremos

$$\begin{cases} 1875a + 25b = 2250 \\ 9375a + 75b = -750 \end{cases}$$

En este punto podríamos dividir las ecuaciones entre 25, pero vemos que 75 es 3 por 25, de modo que usaremos el método de eliminación para eliminar b:

*Observe que hemos empleado **tanto** el método de sustitución **como** el de eliminación para resolver este sistema de ecuaciones.*

$$\begin{cases} -5625a - 75b = -6750 \\ 9375a + 75b = -750 \end{cases} \quad \text{multiplicamos la primera ecuación por } -3$$

Sumamos las ecuaciones y obtenemos $3750a = -7500$, de modo que $a = -2$. Podemos verificar que la solución es $a = -2$, $b = 240$, $c = 500$.

b) Del inciso a),

$$P(x) = -2x^2 + 240x + 500$$

Como $a = -2 < 0$, la gráfica de la función cuadrática P es una parábola que se abre hacia abajo. Por la fórmula de la página 155, la coordenada x del vértice (el punto más alto de la parábola) es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-2)} = \frac{-240}{-4} = 60$$

En consecuencia, para obtener la utilidad máxima, el fabricante debe producir y vender 60 motores por semana. La utilidad máxima semanal es

$$P(60) = -2(60)^2 + 240(60) + 500 = \$7700$$

EJEMPLO 9 **Solución de un problema de mezclas**

Un comerciante desea mezclar dos clases de cacahuates que cuestan \$3 y \$4 por libra, respectivamente, con nueces de la India que cuestan \$8 por libra, para obtener 140 libras de una mezcla que cuesta \$6 por libra. Si el comerciante desea que la cantidad de clase más barata de cacahuates sea el doble de la de clase más cara, ¿cuántas libras de cada variedad debe mezclar?

SOLUCIÓN Introduzcamos las tres variables, como sigue:

x = número de libras de cacahuates a \$3 por libra

y = número de libras de cacahuates a \$4 por libra

z = número de libras de nueces de la India a \$8 por libra

Leemos el enunciado del problema y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 140 & \text{ecuación de peso} \\ 3x + 4y + 8z = 6(140) & \text{ecuación de valor} \\ x = 2y & \text{restricción} \end{cases}$$

Usted puede verificar que la solución de este sistema es $x = 40$, $y = 20$, $z = 80$. Entonces, el comerciante debe usar 40 libras de los cacahuates de \$3/libra, 20 libras de los cacahuates de \$4/libra, y 80 libras de nueces de la India.

A veces podemos combinar transformaciones de renglón para simplificar nuestro trabajo. Por ejemplo, considere la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 & 8 & 9 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{bmatrix}$$

Para obtener un 1 en la primera columna, parece que tenemos que multiplicar el renglón 1 por $\frac{1}{11}$ o el renglón 2 por $\frac{1}{7}$. No obstante, podemos multiplicar el renglón 1 por 2 y el renglón 2 por -3, y luego sumamos esos dos renglones para obtener

$$2(11) + (-3)(7) = 22 + (-21) = 1$$

en la columna uno, como se muestra en la siguiente matriz:

$$\mathbf{2R_1 - 3R_2 \to R_1}\begin{bmatrix} 1 & 12 & 10 & 15 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 87 & 80 & 94 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces continuar para encontrar la forma escalonada reducida sin el engorro de usar fracciones. Este proceso se denomina **combinación lineal de renglones**.

8.5 Ejercicios

Ejer. 1–22: Use matrices para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ -x - 3y + 2z = -6 \\ 2x + y - 4z = 2 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + 13y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

25 **Mezcla de soluciones ácidas** Tres soluciones contienen cierto ácido. La primera contiene 10% de ácido, la segunda 30% y la tercera 50%. Un químico desea usar las tres soluciones para obtener una mezcla de 50 litros que contenga 32% de ácido. Si el químico desea usar el doble de la solución al 50% que de solución al 30%, ¿cuántos litros de cada solución debe usar?

26 **Llenado de una piscina** Una piscina puede llenarse con tres tubos, A, B y C. El tubo A por sí solo puede llenar la piscina en 8 horas. Si los tubos A y C se usan juntos, la piscina se puede llenar en 6 horas; si el B y el C se usan juntos, tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse la piscina si se usan los tres tubos?

27 **Capacidad de producción** Una empresa tiene tres máquinas, A, B y C, que pueden producir cierto artículo cada una. Sin embargo, debido a la falta de operadores capacitados, sólo dos de las máquinas pueden usarse simultáneamente. La tabla siguiente indica la producción de un periodo de tres días, usando varias combinaciones de las máquinas. ¿Cuánto tardaría cada máquina, si se usara sola, para producir 1,000 unidades?

Máquinas usadas	Horas empleadas	Artículos producidos
A y B	6	4500
A y C	8	3600
B y C	7	4900

28 **Resistencia eléctrica** En circuitos eléctricos, la fórmula $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ se usa para encontrar la resistencia total R si dos resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo. Dados tres resistores, A, B y C, suponga que la resistencia total es de 48 ohms si A y B están conectados en paralelo, de 80 ohms si B y C están conectados en paralelo, y de 60 ohms si A y C están conectados en paralelo. Encuentre las resistencias de A, B y C.

29 **Mezcla de fertilizantes** Un proveedor de productos de jardinería tiene tres tipos de fertilizante para césped, G_1, G_2 y G_3, que tienen contenido de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. El proveedor piensa mezclarlos para obtener 600 libras de fertilizante con 25% de contenido de nitrógeno. La mezcla debe contener 100 libras más del tipo G_3 que del G_2. ¿Cuánto de cada tipo debe usar?

30 **Aceleración de partículas** Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de coordenadas con aceleración a constante (en cm/s²), entonces en el tiempo t (en segundos) su distancia $s(t)$ (en centímetros) desde el origen es

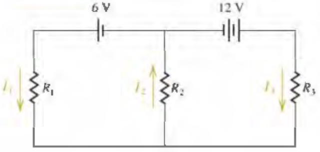
$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

para velocidad v_0 y distancia s_0 desde el origen en $t = 0$. Si las distancias de la partícula desde el origen en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$ son 7, 11 y 17, respectivamente, encuentre a, v_0 y s_0.

31 **Corrientes eléctricas** En la figura se muestra el diagrama de un circuito eléctrico que contiene tres resistencias, una batería de 6 volts y una de 12 volts. Se puede demostrar, usando las leyes de Kirchhoff, que las tres corrientes, I_1, I_2 e I_3, son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1I_1 + R_2I_2 = 6 \\ R_2I_2 + R_3I_3 = 12 \end{cases}$$

EJERCICIO 31



Encuentre las tres corrientes si

a) $R_1 = R_2 = R_3 = 3$ ohms

b) $R_1 = 4$ ohms, $R_2 = 1$ ohm, y $R_3 = 4$ ohms

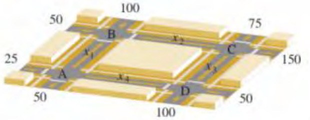
32 **Población de aves** Una población estable de 35,000 aves vive en tres islas. Cada año, 10% de la población de la isla A emigra a la isla B, 20% de la población de la isla B emigra a la isla C, y 5% de la población de la isla C emigra a la isla A. Encuentre el número de aves en cada isla si el total de la población de cada isla no varía de un año a otro.

33 **Mezcla de granos de café** Una tienda se especializa en preparar mezclas de café gourmet. De granos de café de Colombia, Costa Rica y Kenia, el propietario desea preparar bolsas de 1 libra que venderá en \$12.50. El costo por libra de estos cafés es de \$14, \$10 y \$12, respectivamente. La cantidad de café de Colombia debe ser el triple de la de Costa Rica. Encuentre la cantidad de cada tipo de café en la mezcla.

34 **Pesos de cadenas** Hay tres cadenas que pesan 450, 610 y 950 onzas, cada una de ellas formada por eslabones de tres tamaños diferentes. Cada cadena tiene 10 eslabones pequeños y también tienen 20, 30 y 40 eslabones de tamaño mediano, así como 30, 40 y 70 eslabones grandes, respectivamente. Encuentre los pesos de los eslabones pequeños, medianos y grandes.

35 **Flujo de tránsito** En la figura se muestra un sistema de cuatro calles con circulación en un solo sentido, que desembocan en el centro de una ciudad. Los números que se ven en la figura denotan el número promedio de vehículos por hora que se desplazan en las direcciones que se muestran. Un total de 300 vehículos entran en la zona y 300 salen de ella en una hora. Los semáforos en los cruceros A, B, C y D se han de sincronizar para evitar congestionamientos, y esta sincronización determinará las cantidades de flujo de tránsito x_1, x_2, x_3 y x_4.

EJERCICIO 35



a) Si el número de vehículos que entran en un crucero por hora debe ser igual al número de los que salen en el mismo tiempo, describa, con un sistema de ecuaciones, los flujos de tránsito en cada crucero.

b) Si el semáforo en el crucero C está sincronizado para que x_3 sea igual a 100, encuentre x_1, x_2 y x_4.

c) Utilice el sistema del inciso a) para explicar por qué $75 \le x_1 \le 150$.

36 Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine a, b y c tales que la gráfica de f pase por los puntos $P(-3, -12)$, $Q(-1, 22)$ y $R(2, 13)$.

37 **Contaminación del aire** Entre 1850 y 1985, aproximadamente 155,000 millones de toneladas métricas de carbón se descargaron en la atmósfera terrestre y el clima se hizo 0.5 °C más caliente, indicación esta del *efecto invernadero*. Se estima que duplicar la cantidad de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera produciría un aumento promedio de la temperatura mundial de 4 a 5 °C. La cantidad futura A de CO_2 en la atmósfera en partes por millón a veces se calcula usando la fórmula $A = a + ct + ke^{rt}$, donde a, c y k son constantes, r es el porcentaje de aumento de las emisiones de CO_2 y t el tiempo en años, con $t = 0$ correspondiente a 1990. Suponga que se calcula que, en el año 2070, A será 800 si $r = 2.5\%$ y A será 560 si $r = 1.5\%$. Si, en 1990, $A = 340$ y $r = 1\%$, encuentre el año en el que la cantidad de CO_2 en la atmósfera se habrá duplicado.

38 **Contaminación del aire** Consulte el ejercicio 37. Suponga que se calcula que en el año 2030 A será 455 si $r = 2.0\%$ y A será 430 si $r = 1.5\%$. Si, en 1990, $A = 340$ y $r = 2.5\%$, encuentre el año en el que la cantidad de CO_2 en la atmósfera se habrá duplicado.

Ejer. 39–40: Encuentre la ecuación de la parábola que tiene un eje vertical y pasa por los puntos dados.

39 $P(-1, 9)$, $Q(1, 7)$, $R(2, 15)$

40 $P(-1, -12)$, $Q(1, -6)$, $R(2, -9)$

Ejer. 41–42: Encuentre la ecuación del círculo de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que pasa por los puntos dados.

41 $P(2, 1)$, $Q(-1, -4)$, $R(3, 0)$

42 $P(-5, 5)$, $Q(-2, -4)$, $R(2, 4)$

Ejer. 43–44: Encuentre una ecuación del polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pasa por los puntos dados.

43 $P(0, -6)$, $Q(1, -11)$, $R(-1, -5)$ $S(2, -14)$

44 $P(0, 4)$, $Q(1, 2)$, $R(-1, 10)$ $S(2, -2)$

45 Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, encuentre a, b, c y d si la gráfica de f pasa por $(-1, 2)$, $(0.5, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 4.5)$.

46 Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, encuentre a, b, c, d y e, si la gráfica de f pasa por $(-2, 1.5)$, $(-1, -2)$, $(1, -3)$, $(2, -3.5)$ y $(3, -4.8)$.

8.6 Álgebra de matrices

Las matrices se introdujeron en la sección 8.5 como ayuda para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones. En esta sección explicamos algunas de las propiedades de las matrices, que son importantes en campos avanzados de matemáticas y en aplicaciones.

En la siguiente definición, el símbolo (a_{ij}) denota una matriz A de $m \times n$ del tipo que se muestra en la definición de la página 579. Utilizamos notaciones semejantes para las matrices B y C.

Definición de igualdad y suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ matrices de $m \times n$.

1) $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j.

2) $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j.

Tenga en cuenta que dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

EJEMPLOS **Igualdad de matrices**

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt{8} & 3^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Usando la notación de paréntesis para matrices, podemos escribir la definición de suma de dos matrices de $m \times n$ como

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Entonces, para sumar dos matrices, sumamos los elementos en posiciones correspondientes en cada matriz. *Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo tamaño.*

EJEMPLOS **Suma de matrices**

- $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -5+2 \\ 0+7 & 4+(-4) \\ -6+(-2) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

La **matriz cero de $m \times n$**, que se denota con O, es la matriz con m renglones y n columnas en la que todo elemento es 0.

EJEMPLOS **Matrices cero**

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

El **inverso aditivo** $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $(-a_{ij})$ obtenida al cambiar el signo de cada elemento de A diferente de cero.

EJEMPLOS **Inverso aditivo**

- $-\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

La demostración del siguiente teorema se desprende de la definición de la suma de matrices.

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A, B y C son matrices de $m \times n$ y si O es la matriz cero de $m \times n$, entonces

1) $A + B = B + A$

2) $A + B\,(B + C) = (A + B) + C$

3) $A + O = A$

4) $A + (-A) = O$

La **resta** de dos matrices de $m \times n$ está definida por

$$A - B = A + (-B)$$

Usando la notación de paréntesis, tenemos

$$\begin{aligned}(a_{ij}) - (b_{ij}) &= (a_{ij}) + (-b_{ij})\\ &= (a_{ij} - b_{ij})\end{aligned}$$

Por consiguiente, para restar dos matrices, restamos los elementos en posiciones correspondientes.

EJEMPLOS **Resta de matrices**

■ $$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -5-2 \\ 0-7 & 4-(-4) \\ -6-(-2) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición del producto de un número real por una matriz

El **producto** de un número real c por una matriz A de $m \times n = (a_{ij})$ es

$$cA = (ca_{ij})$$

Tenga en cuenta que para encontrar cA multiplicamos por c cada elemento de A.

EJEMPLOS **Producto de un número real por una matriz**

■ $$3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos demostrar lo siguiente.

Teorema sobre propiedades de matrices

Si A y B son matrices de $m \times n$ y si c y d son números reales, entonces

1) $c(A + B) = cA + cB$

2) $(c + d)A = cA + dA$

3) $(cd)A = c(dA)$

La siguiente definición, del producto AB de dos matrices, puede parecer insólita, pero tiene numerosos usos en matemáticas y otras aplicaciones. Para la multiplicación, a diferencia de la suma, A y B pueden tener tamaños diferentes, pero *el número de columnas de A debe ser igual que el número de renglones de B*. Entonces, si A es de $m \times n$, entonces B debe ser de $n \times p$ para algún número p. Como veremos, el tamaño de AB es entonces de $m \times p$. Si $C = AB$, entonces un método para encontrar el elemento c_{ij} en el renglón i y columna j de C está dado en los siguientes pasos.

Pasos para obtener c_{ij} en el producto $C = AB$ si A es de $m \times n$ y B es de $n \times p$

1. Resalte el i-ésimo renglón, R_i, de A y la j-ésima columna, C_j, de B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

2. *Simultáneamente* muévase a la derecha a lo largo de R_i y hacia abajo de C_j, multiplicando pares de elementos, para obtener

$$a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, a_{i3}b_{3j}, \ldots, a_{in}b_{nj}$$

3. Sume los productos de los pares del paso 2 para obtener c_{ij}:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Siguiendo los pasos, vemos que el elemento c_{11} del primer renglón y la primera columna de $C = AB$ es

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El elemento c_{mp} del último renglón y la última columna de $C = AB$ es

$$c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + a_{m3}b_{3p} + \cdots + a_{mn}b_{np}$$

La exposición precedente está resumida en la siguiente definición.

Definición del producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz de $n \times p$. El **producto** AB es la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times p$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, p$.

El siguiente diagrama puede ayudarle a recordar la relación entre tamaños de matrices al trabajar con un producto AB.

tamaño de A — tamaño de B

$m \times n$ — $n \times p$

igual

el tamaño de AB es $m \times p$

El siguiente ejemplo contiene algunos casos especiales.

EJEMPLOS **Tamaños del producto de matrices**

Tamaño de A	Tamaño de B	Tamaño de AB
■ 2×3	3×5	2×5
■ 4×2	2×3	4×3
■ 3×1	1×3	3×3
■ 1×3	3×1	1×1
■ 5×3	3×5	5×5
■ 5×3	5×3	AB no está definida

En el siguiente ejemplo encontramos el producto de dos matrices específicas.

EJEMPLO 1 Encontrar el producto de dos matrices

Encuentre el producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN La matriz A es de 2×3 y la B es de 3×4. Por lo tanto, el producto $C = AB$ está definido y es de 2×4. A continuación, seguimos los pasos para obtener los elementos $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{24}$ del producto. Por ejemplo, para encontrar el elemento c_{23} destacamos el segundo renglón, R_2, de A y la tercera columna, C_3, de B, como se ilustra a continuación, y luego usamos los pasos 2 y 3 para obtener

$$c_{23} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & -2 & \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, para encontrar el elemento c_{12} en el renglón 1 y la columna 2 del producto, procedemos como sigue:

$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 8 & & \\ & & -2 & \end{bmatrix}$$

Los elementos restantes del producto se calculan como sigue, donde hemos indicado el renglón de A y la columna de B que se usan cuando se aplica el paso 1.

Renglón de A	Columna de B	Elemento de C
R_1	C_1	$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 7 = -18$
R_1	C_3	$c_{13} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -7$
R_1	C_4	$c_{14} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 8 = -22$
R_2	C_1	$c_{21} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 = 6$
R_2	C_2	$c_{22} = 4 \cdot (-4) + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = -16$
R_2	C_4	$c_{24} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -16$

Por consiguiente,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{bmatrix}$$

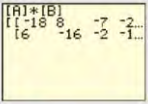
■

Es muy sencillo multiplicar matrices en una calculadora graficadora. Comprobemos los resultados del ejemplo 1. Introduzca las matrices A (2×3) y B (3×4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Ahora introduzca la operación en la pantalla inicial.

2nd MATRX 1 ×
2nd MATRX 2 ENTER



Para ver los elementos de la cuarta columna, presione la tecla ▷.

Una matriz es una **matriz renglón** si tiene sólo un renglón. Una **matriz columna** tiene sólo una columna. Los siguientes ejemplos contienen algunos productos que implican matrices renglón y columna. Usted debe comprobar cada entrada en los productos.

EJEMPLOS **Productos que contienen matrices renglón y columna**

■ $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 19 \end{bmatrix}$

■ $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$

La operación del producto de matrices no es conmutativa. Por ejemplo, si A es de 2×3 y B es de 3×4, entonces AB se puede encontrar porque el número de columnas de A es igual que el número de renglones de B. No obstante, BA no está definida porque el número de columnas de B es diferente del número de renglones de A. Incluso si AB y BA están definidas, es frecuente que estos productos sean diferentes. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, junto con el hecho de que el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz cero.

EJEMPLO 2 **La multiplicación de matrices no es conmutativa**

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, demuestre que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN Usando la definición del producto de dos matrices, obtenemos lo siguiente:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $AB \neq BA$. Observe que la última igualdad muestra que *el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz cero.* ■

Aun cuando la multiplicación de matrices no es conmutativa, sí es asociativa. Por lo tanto, si A es de $m \times n$, B es de $n \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C$$

Las propiedades distributivas también se cumplen si las matrices en cuestión tienen el número correcto de renglones y columnas. Si A_1 y A_2 son matrices de $m \times n$ y si B_1 y B_2 son matrices de $n \times p$, entonces

$$A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$$
$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n, entonces se cumplen las propiedades asociativa y distributiva.

Concluimos esta sección con una aplicación del producto de dos matrices.

EJEMPLO 3 **Una aplicación de un producto de matrices**

a) Tres inversionistas, I_1, I_2 e I_3, tienen, cada uno de ellos, cierto número de títulos de cuatro acciones, S_1, S_2, S_3 y S_4, con base en la matriz A. La matriz B contiene el valor presente V de cada acción. Encuentre AB e interprete el significado de sus elementos.

$$\text{inversionistas}\begin{cases} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{cases}\overbrace{\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array}}^{\text{número de títulos de cada acción}} \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} = A, \qquad \text{acciones}\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{cases}\overbrace{V}^{\text{valor de cada título}}\begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix} = B$$

b) La matriz C contiene el cambio en el valor de cada acción durante la última semana. Encuentre AC e interprete el significado de sus elementos.

$$\text{acciones}\begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{cases}\begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = C$$

SOLUCIÓN

a) Como A es una matriz de 3×4 y B es una matriz de 4×1, el producto AB es una matriz de 3×1:

$$AB = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.37 \\ 16.21 \\ 90.80 \\ 42.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6432.25 \\ 6659.00 \\ 10,754.50 \end{bmatrix}$$

El primer elemento del producto AB, 6432.25, se obtuvo del cálculo

$$50(20.37) + 100(16.21) + 30(90.80) + 25(42.75)$$

y representa el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones. Del mismo modo, los elementos segundo y tercero representan el valor total para los inversionistas I_2 e I_3, respectivamente.

b)

$$AC = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 30 & 25 \\ 100 & 150 & 10 & 30 \\ 100 & 50 & 40 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1.03 \\ -0.22 \\ -1.35 \\ +0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.25 \\ 61.00 \\ 53.00 \end{bmatrix}$$

El primer elemento del producto AC, -7.25, indica que el valor total que el inversionista I_1 tiene en las cuatro acciones bajó \$7.25 en la última semana. Los elementos segundo y tercero indican que el valor total que los inversionistas I_2 e I_3 tienen en las cuatro acciones subió \$61.00 y \$53.00, respectivamente. ■

8.6 Ejercicios

Ejer. 1-8: Encuentre, si es posible, $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5 $A = [4 \quad -3 \quad 2]$, $\quad B = [7 \quad 0 \quad -5]$

6 $A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

7 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

8 $A = [2 \quad 1]$, $\quad B = [3 \quad -1 \quad 5]$

Ejer. 9–12: Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

obtenga C para la ecuación matricial.

9 $2C = A$ **10** $-3C = B$

11 $A + C = B$ **12** $A - C = B$

Ejer. 13-14: Encuentre el elemento dado del producto matricial $C = AB$ en el ejercicio indicado.

13 c_{21}; ejercicio 19 　　14 c_{23}; ejercicio 22

Ejer. 15-28: Encuentre, si es posible, AB y BA.

15 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

16 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

17 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

18 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

19 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

20 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

21 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

23 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

25 $A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

26 $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

28 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejer. 29-32: Encuentre AB.

29 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

30 $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$

31 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

32 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Ejer. 33-36: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique el enunciado

33 $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$, donde $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$.

34 $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

35 $A(B + C) = AB + AC$

36 $A(BC) = (AB)C$

Ejer. 37-40: Verifique la identidad para

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix},$$

y los números reales m y n.

37 $m(A + B) = mA + mB$

38 $(m + n)A = mA + nA$

39 $A(B + C) = AB + AC$

40 $A(BC) = (AB)C$

Ejer. 41-44: Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -8 \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Evalúe la expresión matricial.

41 $A^2 + B^2$

42 $3A - BA$

43 $A^2 - 5B$

44 $A + A^2 + B + B^2$

45 **Valor de inventario** Una tienda vende tres tamaños de toallas, disponibles en cinco colores: pequeña, a un precio de $8.99 cada una; mediana, a un precio de $10.99 cada una; y grande, a un precio de $12.99 cada una. El inventario actual de la tienda es como sigue:

Tamaño de toalla	Colores				
	Blanco	Canela	Beige	Rosa	Amarillo
Pequeña	400	400	300	250	100
Mediana	550	450	500	200	100
Grande	500	500	600	300	200

a) Organice estos datos en una matriz de inventario A y una matriz de precios B para que el producto $C = AB$ quede definido.

b) Encuentre C.

c) Interprete el significado del elemento c_{31} en C.

46 **Costos de construcción** Un contratista de vivienda tiene pedidos para 4 unidades de 1 dormitorio, 10 unidades de dos dormitorios y 6 unidades de tres dormitorios. Los costos de mano de obra y materiales (en miles de dólares) están dados en la tabla siguiente.

	1 dormitorio	2 dormitorios	3 dormitorios
Mano de obra	70	95	117
Materiales	90	105	223

a) Organice estos datos en una matriz de pedidos A y una matriz de costos B para que el producto $C = AB$ quede definido.

b) Encuentre C.

c) Interprete el significado de cada elemento en C.

8.7 La inversa de una matriz

En toda esta sección y en las dos siguientes restringiremos nuestro estudio a las matrices *cuadradas*. El símbolo I_n denotará la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en cada posición de la diagonal principal y 0 en todo lo demás. I_n se conoce como **matriz identidad de orden n**.

EJEMPLOS **Matrices identidad**

■ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ■ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Podemos demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n, entonces

$$AI_n = A = I_nA.$$

EJEMPLOS $AI_2 = A = I_2A$

■ $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Recuerde que cuando estamos trabajando con un número real b diferente de cero, el número único b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) se puede multiplicar por b para obtener el idéntico multiplicativo (el número 1), es decir,

$$b \cdot b^{-1} = 1$$

Tenemos una situación semejante con las matrices.

Definición de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Si existe una matriz B tal que

$$AB = I_n = BA,$$

entonces B se denomina **inversa** de A y se denota A^{-1} (léase "A inversa").

Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, entonces decimos que A es **invertible**. Si una matriz no es cuadrada, entonces no puede tener una inversa. En matrices (a diferencia de los números reales), el símbolo $1/A$ no representa la inversa A^{-1}.

Si A es invertible, podemos calcular A^{-1} usando operaciones elementales de renglón. Si $A = (a_{ij})$ es de $n \times n$, comenzamos con la matriz de $n \times 2n$ formada *al unir* I_n a A:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

A continuación aplicamos una sucesión de transformaciones elementales de renglón, como hicimos en la sección 8.5 para encontrar formas escalonadas reducidas, hasta llegar a una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

donde la matriz identidad I_n aparece a la izquierda de la línea vertical. Podemos demostrar que la matriz $n \times n$ (b_{ij}) es el inverso de A, es decir, $B = A^{-1}$.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar la inversa de una matriz de 2 × 2**

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN Comenzamos con la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación realizamos transformaciones elementales de renglón hasta que la matriz identidad I_2 aparezca en el lado izquierdo de la línea vertical, como sigue.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{R_1 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-3R_1 + R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-\frac{1}{7}R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{-4R_2 + R_1 \to R_1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

Por la explicación anterior,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar la inversa de una matriz de 3 × 3**

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 3\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ -10\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & -10 & 11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{9}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -2\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ -\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

En consecuencia,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}.$$

Usted puede comprobar que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$. ■

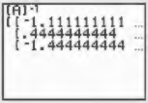
No todas las matrices cuadradas son invertibles. De hecho, si el procedimiento empleado en los ejemplos 1 y 2 no lleva a una matriz identidad a la izquierda de la línea vertical, entonces la matriz A no tiene inversa, es decir, A no es invertible.

Es relativamente fácil encontrar la inversa de una matriz cuadrada en una calculadora graficadora. Introduzca la matriz A del ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

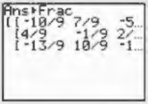
Ahora introduzca el inverso de A en la pantalla inicial.

2nd MATRX 1 x^{-1} ENTER CLEAR



Convierta las entradas en fracciones como sigue:

MATH 1 ENTER



Observe que debe usar x^{-1} y no la notación A ^(−1). Si la matriz no es invertible, la calculadora devuelve el mensaje de error SINGULAR MAT.

Podemos aplicar la inversa de una matriz a soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Considere el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

Este sistema se puede expresar en términos de matrices como

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

entonces una *forma matricial* del sistema es

$$AX = B$$

Si existe A^{-1}, entonces al multiplicar por A^{-1} ambos lados de la última ecuación obtenemos $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Como $A^{-1}A = I_2$ e $I_2X = x$, esto nos lleva a

$$X = A^{-1}B,$$

de la que se puede encontrar la solución (x, y). Esta técnica (que se conoce como *método de la inversa*) se puede ampliar a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

EJEMPLO 3 **Solución de un sistema de ecuaciones lineales usando el método de la inversa**

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

entonces $AX = B$. Esto implica que $X = A^{-1}B$. La matriz A^{-1} se encontró en el ejemplo 2. En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Como era de esperar, la solución de calculadora para el ejemplo 3 es muy sencilla; simplemente introduzca $A^{-1} \times B$ para obtener la solución.

Así, $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{13}{3}$, y la terna ordenada $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ es la solución del sistema dado. ■

Si estamos resolviendo un sistema de ecuaciones lineales sin ayuda de equipo de cómputo, entonces el método de la solución por la inversa del ejemplo 3 es bueno sólo si se conoce A^{-1} (o se puede calcular con facilidad) o si se considerarán muchos sistemas con la misma matriz de coeficientes.

Si estamos usando un equipo de cómputo, y si la matriz de coeficientes no es invertible, entonces el método de la inversa no se puede usar y el método preferido de solución es el método de matrices que se estudia en la sección 8.5. Hay otros usos importantes de la inversa de una matriz que aparecen en campos más avanzados de matemáticas y en aplicaciones de esos campos.

8.7 Ejercicios

Ejer. 1–2: Demuestre que B es la inversa de A.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Ejer. 3–16: Encuentre la inversa de la matriz si existe.

3 $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17 Exprese las condiciones en a y b que garanticen que la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ tiene una inversa, y encuentre una fórmula de la inversa si existe.

18 Si $abc \neq 0$, encuentre la inversa de $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

19 Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, demuestre que $AI_3 = A = I_3A$.

20 Demuestre que $AI_4 = A = I_4A$ para toda matriz cuadrada A de orden 4.

Ejer. 21–24: Resuelva el sistema usando el método de la inversa. Consulte los ejercicios 3–4 y 9–10.

21 $\begin{cases} 2x - 4y = c \\ x + 3y = d \end{cases}$

a) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

22 $\begin{cases} 3x + 2y = c \\ 4x + 5y = d \end{cases}$

a) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

23 $\begin{cases} -2x + 2y + 3z = c \\ x - y \qquad = d \\ y + 4z = e \end{cases}$

a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

24 $\begin{cases} x + 2y + 3z = c \\ -2x + y \qquad = d \\ 3x - y + z = e \end{cases}$

a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejer. 25–28: Para cada matriz A, calcule su inversa A^{-1} a tres posiciones decimales.

25 $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

26 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 & 4.1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5.9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 7 & 1.2 & -8 & 0 \\ 2.5 & 0 & 1.9 & 7.9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

28 $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 5.5 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -11 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Ejer. 29–32: a) Exprese el sistema en la forma matricial $AX = B$. b) Calcule A^{-1}, usando precisión a cuatro posiciones decimales para sus elementos. c) Use $X = A^{-1}B$ para calcular la solución del sistema con precisión a cuatro posiciones decimales.

29 $\begin{cases} 4.0x + 7.1y = 6.2 \\ 2.2x - 4.9y = 2.9 \end{cases}$

30 $\begin{cases} 1.9x - 3.2y = 5.7 \\ 2.6x + 0.4y = 3.8 \end{cases}$

31 $\begin{cases} 3.1x + 6.7y - 8.7z = 1.5 \\ 4.1x - 5.1y + 0.2z = 2.1 \\ 0.6x + 1.1y - 7.4z = 3.9 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 5.1x + 8.7y + 2.5z = 1.1 \\ 9.9x + 15y + 12z = 3.8 \\ -4.3x - 2.2y - z = -7.1 \end{cases}$

33 **Promedio de temperaturas bajas** Los promedios de temperaturas bajas mensuales en Detroit se presentan en la siguiente tabla.

Mes	Temperatura
Feb.	19 °F
Ago.	59 °F
Nov.	26 °F

a) Si $x = 1$ corresponde a enero, $x = 2$ a febrero, ..., y $x = 12$ a diciembre, determine una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que interpole los datos, es decir, determine las constantes a, b y c tales que $f(2) = 19$, $f(8) = 59$ y $f(11) = 26$.

b) Grafique f en el visor rectangular $[1, 12]$ por $[-15, 70, 5]$.

c) Use f para calcular el promedio mensual de temperaturas bajas en junio y octubre. Compare sus predicciones con las temperaturas reales de 58 °F y 41 °F, respectivamente.

34 **Promedio de temperaturas bajas** Trabaje el ejercicio 33 para Huron, South Dakota. El promedio de temperaturas reales para junio y octubre es de 58 °F y 38 °F, respectivamente.

Mes	Temperatura
Feb.	9 °F
Julio	60 °F
Nov.	21 °F

8.8 Determinantes

Asociado con cada matriz cuadrada A existe un número llamado **determinante de A**, que se denota con $|A|$. Esta notación no debe confundirse con el símbolo del valor absoluto de un número real. Para evitar cualquier malentendido, la expresión "det A" se usa a veces en lugar de $|A|$. Definiremos $|A|$ comenzando con el caso en el que A tiene orden 1 y luego aumentaremos el orden uno por uno. Como veremos en la sección 8.9, estas definiciones aparecen de forma natural cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales.

Si A es una matriz cuadrada de orden 1, entonces A tiene sólo un elemento. De este modo, $A = [a_{11}]$ y definimos $|A| = a_{11}$. Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y el determinante de A está definido por

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Otra notación de $|A|$ se obtiene sustituyendo los corchetes empleados para A con barras verticales, como sigue.

Definición del determinante de una matriz A de 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar el determinante de una matriz de 2×2**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN Por la definición,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (4)(-1) = -6 + 4 = -2.$$

Para ayudar a encontrar determinantes para matrices cuadradas de orden $n > 1$, introducimos la siguiente terminología.

Definición de menores y cofactores

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n > 1$.

1) El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ obtenida por la eliminación del renglón i y la columna j.

2) El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Para determinar el menor de un elemento, eliminamos el renglón y la columna en las que aparece el elemento y luego hallamos el determinante de la matriz cuadrada resultante. Este proceso se demuestra en la siguiente ilustración, donde la eliminación de renglones y columnas en una matriz de 3×3 es indicada con segmentos de recta horizontales y verticales, respectivamente.

Para obtener el cofactor de a_{ij} de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, encontramos el menor y lo multiplicamos por 1 o -1, dependiendo de si la suma de i y j es par o impar, respectivamente, como se demuestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS **Menores y cofactores**

Matriz	Menor	Cofactor
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$	$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$	$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$	$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23}$

Para la matriz de la ilustración precedente, hay otros seis menores: M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{31}, M_{32} y M_{33}, que se pueden obtener de un modo semejante.

Otra forma de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado con el cofactor A_{ij} es considerar el siguiente estilo de tablero de signos más y menos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar menores y cofactores**

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, encuentre $M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21}$ y A_{22}

SOLUCIÓN Eliminamos los renglones y columnas correspondientes de A para obtener

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-7)(0) = 10$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-7)(3) = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-2)(3) = 11$$

Para obtener los cofactores, colocamos un prefijo a los menores correspondientes con los signos apropiados. Así, usando la definición de cofactor, tenemos

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(10) = 10$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)(6) = -6$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (1)(11) = 11$$

También podemos usar el estilo de tablero de signos más y menos para determinar los signos que corresponden. ■

El determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3 está definido como sigue.

Definición del determinante de una matriz A de 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Como los cofactores $A_{11} = (-1)^{1+1} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$ y $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, la definición precedente también se puede escribir como

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

Si expresamos M_{11}, M_{12} y M_{13} usando elementos de A y reacomodamos términos, obtenemos la siguiente fórmula para $|A|$:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La definición de $|A|$ para una matriz cuadrada A de orden 3 muestra un patrón de multiplicar cada elemento del renglón 1 por su cofactor y luego sumar para obtener $|A|$. Este proceso se conoce como *expandir* $|A|$ *por el primer renglón*. Al ejecutar los cálculos, podemos demostrar que $|A|$ *se puede expandir de un modo semejante si se usa cualquier renglón o columna*. Como ilustración, la expansión por la segunda columna es

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \end{aligned}$$

Al aplicar la definición a los determinantes entre paréntesis, multiplicar como se indica y reacomodar los términos de la suma, podemos llegar a la fórmula de $|A|$ en términos de los elementos de A. Del mismo modo, la expansión por el tercer renglón es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Una vez más, podemos demostrar que este resultado concuerda con expansiones anteriores.

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar el determinante de una matriz de 3 × 3**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Como el segundo renglón contiene un cero, expandiremos $|A|$ por ese renglón, porque así sólo necesitamos evaluar dos cofactores. Por consiguiente,

$$|A| = (2)A_{21} + (5)A_{22} + (0)A_{23}.$$

Si usamos la definición de cofactores, tenemos

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[(3)(-2) - (1)(1)] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = [(-1)(-2) - (3)(1)] = -1$$

En consecuencia,

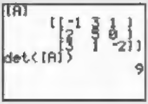
$$|A| = (2)(7) + (5)(-1) + (0)A_{23} = 14 - 5 + 0 = 9$$

Encontrar el determinante de una matriz cuadrada con entradas de números reales es un trabajo sencillo con calculadora graficadora. Primero introduzca la matriz A del ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora muestre A y encuentre el determinante de A.

2nd MATRX 1 ENTER
2nd MATRX ▷ 1
2nd MATRX 1) ENTER



La siguiente definición del determinante de una matriz de orden arbitrario n emula la que se empleó para el determinante de una matriz de orden 3.

Definición del determinante de una matriz A de $n \times n$

El **determinante $|A|$ de una matriz A de orden n** es la expansión del cofactor por el primer renglón:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

En términos de menores,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

El número $|A|$ se puede encontrar si se usa *cualquier* renglón o columna, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema de expansión de determinantes

Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces el determinante de $|A|$ se puede encontrar si se multiplican los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus respectivos cofactores y se suman los productos resultantes.

Este teorema es útil si aparecen muchos ceros en un renglón o columna, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 **Cómo encontrar el determinante de una matriz de 4×4**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Observe que, con excepción de uno, todos los elementos del tercer renglón son cero. En consecuencia, si expandimos $|A|$ por el tercer renglón, habrá a lo sumo un término diferente de cero. Específicamente,

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-3)A_{33} + (0)A_{34} = -3A_{33}$$

con $$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Expandimos M_{33} por la columna 1:

$$M_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (1)(3) - (-2)(5) + (0)(-5) = 3 + 10 + 0 = 13$$

Entonces, $$|A| = -3A_{33} = (-3)(13) = -39$$ ■

En general, si todos los elementos de algún renglón (o columna) de A son cero, con excepción de uno, y si el determinante de $|A|$ se expande por ese renglón (o columna), entonces todos los términos se omiten, excepto el producto de ese elemento con su cofactor. Si *todos* los elementos de un renglón (o columna) son cero, tenemos lo siguiente.

Teorema sobre un renglón de ceros

Si todos los elementos de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A son cero, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si todos los elementos de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A son cero, entonces la expansión por ese renglón (o columna) es una suma de términos que son cero (porque cada término es cero veces su respectivo cofactor). En consecuencia, esta suma es igual a cero y concluimos que $|A| = 0$. ■

En la sección anterior determinamos que si no es posible obtener la matriz identidad en el lado izquierdo de la matriz aumentada, entonces la matriz original no era invertible. Si obtenemos un renglón de ceros en este proceso, ciertamente no podemos obtener la matriz identidad. La combinación de este hecho con el teorema anterior lleva al siguiente teorema.

Teorema sobre invertibilidad de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

8.8 Ejercicios

Ejer. 1-4: Encuentre todos los menores y cofactores de los elementos de la matriz.

1 $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Ejer. 5-8: Encuentre el determinante de la matriz en el ejercicio indicado.

5 Ejercicio 1

6 Ejercicio 2

7 Ejercicio 3

8 Ejercicio 4

Ejer. 9-24: Encuentre el determinante de la matriz.

9 $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} a & u & v & w \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} \tan x & \sec x \\ \sec^2 x & \sec x \tan x \end{bmatrix}$

Ejer. 25–32: Verifique la identidad expandiendo cada determinante.

25 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

26 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

27 $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

28 $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

29 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix}$

30 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{vmatrix}$

31 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + e \\ c & d + f \end{vmatrix}$

32 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + e & d + f \end{vmatrix}$

33 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestre que $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

34 Si $A = (a_{ij})$ es cualquier matriz de 2×2 tal que $|A| \neq 0$, demuestre que A tiene un inverso y encuentre una fórmula general para A^{-1}.

Ejer. 35–38: Sea $I = I_2$ la matriz identidad de orden 2 y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentre a) el polinomio $f(x)$ y b) los ceros de $f(x)$. (En el estudio de matrices, $f(x)$ es el *polinomio característico de A*, y los ceros de $f(x)$ son los *valores característicos (eigenvalores) de A*.)

35 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

36 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

37 $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

38 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Ejer. 39–42: Sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. Encuentre a) el polinomio $f(x)$ y b) los ceros de $f(x)$.

39 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

40 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

41 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

42 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejer. 43–46: Exprese el determinante de la forma $ai + bj + ck$ para números reales a, b y c.

43 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

44 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

45 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

46 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Ejer. 47–50: Encuentre el determinante de la matriz.

47 $\begin{bmatrix} 1 & -2.1 & 5 \\ -4 & 3.2 & 2 \\ 8 & 5.9 & -7 \end{bmatrix}$

48 $\begin{bmatrix} -2 & 5.5 & 8 \\ -0.3 & 8.5 & 7 \\ 4.9 & 6.7 & 11 \end{bmatrix}$

49 $\begin{bmatrix} 29 & -17 & 90 \\ -34 & 91 & -34 \\ 48 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

50 $\begin{bmatrix} 15 & -21 & 32 \\ -40 & 17 & 9 \\ 30 & 25 & -11 \end{bmatrix}$

Ejer. 51–52: Sea $I = I_3$ y sea $f(x) = |A - xI|$. a) Encuentre el polinomio $f(x)$. b) Grafique f y calcule los valores característicos de A.

51 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

52 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

8.9 Propiedades de los determinantes

La evaluación de un determinante mediante el uso del teorema de expansión expresado en la sección 8.8 es ineficiente para matrices de orden superior. Por ejemplo, si un determinante de una matriz de orden 10 es expandido por cualquier renglón, se obtiene una suma de 10 términos y cada término contiene el determinante de una matriz de orden 9, que es un cofactor de la matriz original. Si cualquiera de los determinantes últimos es expandido por un renglón (o columna), se obtiene una suma de 9 términos, cada uno de los cuales contiene el determinante de una matriz de orden 8. En consecuencia, en esta etapa hay 90 determinantes de matrices de orden 8 para evaluar. El proceso podría continuar hasta que sólo quedaran determinantes de matrices de orden 2. Usted puede verificar que hay 1,814,400 de estas matrices de orden 2. A menos que muchos elementos de la matriz original sean cero, es un trabajo enorme realizar todos los cálculos.

En esta sección estudiamos reglas que simplifican el proceso de evaluar determinantes. El principal uso de estas reglas es introducir ceros en el determinante. También se pueden usar para cambiar el determinante a **forma escalonada**, es decir, a una forma en la que los elementos que estén debajo de los elementos de la diagonal principal sean cero todos ellos (vea la sección 8.5). Las transformaciones en los renglones expresadas en el siguiente teorema son iguales que las transformaciones elementales de renglón de una matriz que se explicaron en la sección 8.5, pero para determinantes podemos también usar transformaciones similares en columnas.

Teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1) Si una matriz B se obtiene de A al intercambiar dos renglones (o columnas), entonces $|B| = -|A|$.
2) Si B se obtiene de A al multiplicar cada elemento de un renglón (o columna) de A por un número real k, entonces $|B| = k|A|$.
3) Si B se obtiene de A al sumar k veces cualquier renglón (o columna) de A a otro renglón (o columna) para un número real k, entonces $|B| = |A|$, es decir, los determinantes de B y A son iguales.

Cuando usamos el teorema, nos referimos a los renglones (o columnas) del *determinante* en la forma obvia. Por ejemplo, la propiedad 3 se puede expresar como sigue: *la suma de k veces cualquier renglón (o columna) a cualquier renglón (o columna) de un determinante no afecta el valor del determinante.*

Las transformaciones de renglón de los determinantes se especificarán por medio de los símbolos $R_i \leftrightarrow R_j$, $kR_i \to R_i$ y $kR_i + R_j \to R_j$, que se introdujeron en la sección 8.5. Se usan símbolos análogos para transformaciones de columna. Por ejemplo, $kC_i + C_j \to C_j$ significa "sumar k veces la i-ésima columna a la j-ésima columna".

La propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna es útil para encontrar factores de los determinantes. Para ilustrar, para un determinante de una matriz de orden 3 tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fórmulas similares se cumplen si k es un factor común de los elementos de cualquier otro renglón o columna. Al referirnos a esta manipulación, a menudo usamos la frase "*k es un factor común del renglón (o columna)*".

Las siguientes son ilustraciones del teorema precedente, con la razón de cada igualdad expresada a la derecha.

EJEMPLOS **Transformación de determinantes**

■ $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$ $R_1 \leftrightarrow R_2$ (propiedad 1)

(continúa)

- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ — 2 es un factor común de la columna 1 (propiedad 2)

- $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ — $2C_2 + C_1 \rightarrow C_1$ (propiedad 3)

- $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 10 & -6 \end{vmatrix}$ — $-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$, $-3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ (propiedad 3 aplicada dos veces)

Teorema sobre renglones idénticos

Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si B es la matriz obtenida de A al intercambiar los dos renglones (o columnas) idénticos, entonces B y A son iguales y, en consecuencia, $|B| = |A|$. No obstante, por la propiedad 1 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante, $|B| = -|A|$ y, por lo tanto: $-|A| = |A|$. Así, $2|A| = 0$; y entonces $|A| = 0$. ■

EJEMPLO 1 **Uso de transformaciones de renglón y columna**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN Planeamos usar la propiedad 3 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante para introducir tres ceros en algún renglón o columna. Es conveniente trabajar con un elemento de la matriz que sea igual a 1, porque esto hace posible que evitemos el uso de fracciones. Si 1 no es un elemento de la matriz original, siempre es posible introducir el número 1 usando la propiedad 2 o 3 del teorema. En este ejemplo, 1 aparece en el renglón 3 y procedemos como sigue, con la razón de cada igualdad expresada a la derecha.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} -2R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \\ \\ \\ 3R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}$$

$$= (1) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{expandimos por la primera columna}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -6 & -32 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 5C_2 + C_1 \rightarrow C_1 \\ \\ 6C_2 + C_3 \rightarrow C_3 \end{matrix}$$

(*continúa*)

$$= (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 23 & 22 \\ -28 & -32 \end{vmatrix} \quad \text{expandimos por el segundo renglón}$$

$$= (-1)[(23)(-32) - (-28)(22)] \quad \text{definición de determinante}$$

$$= 120$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante.

EJEMPLO 2 **Eliminación de factores comunes de renglones**

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{2 es un factor común del renglón 1}$$

$$= (2)(-3)\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{-3 es un factor del renglón 3}$$

$$= 0 \quad \text{los dos renglones son idénticos}$$

EJEMPLO 3 **Eliminación de un factor común de una columna**

Sin expandir, demuestre que $a - b$ es un factor de $|A|$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad -C_2 + C_1 \to C_1$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{$a - b$ es un factor común de la columna 1}$$

Por lo tanto, $|A|$ es igual a $a - b$ multiplicado por el último determinante, y entonces $a - b$ es un factor de $|A|$.

Aparecen determinantes en el estudio de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Para ilustrar, consideremos dos ecuaciones lineales con dos variables x y y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

donde aparece por lo menos un coeficiente diferente de cero en cada ecuación. Podemos suponer que $a_{11} \neq 0$, porque de otro modo $a_{12} \neq 0$ y podríamos entonces considerar a y como la primera variable en lugar de x. Usaremos transformaciones elementales de renglón para obtener la matriz de un sistema equivalente con $a_{21} = 0$, como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{a_{21}}{a_{11}}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \left(\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) & k_2 - \left(\dfrac{a_{21}k_1}{a_{11}}\right) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{a_{11}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array}\right]$$

Así, el sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

que también se puede escribir

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, podemos despejar y en la segunda ecuación y obtener

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

El valor correspondiente de x se puede encontrar al sustituir por y en la primera ecuación, que lleva a

La demostración de este enunciado se deja como ejercicio de análisis 7 al final del capítulo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (\bullet)$$

Esto demuestra que *si el determinante de la matriz coeficiente de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no es cero, entonces el sistema tiene una solución única*. Las últimas dos fórmulas para x y y como cocientes de determinantes constituyen la **regla de Cramer** para dos variables.

Hay una forma sencilla de recordar la regla de Cramer. Sea

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz coeficiente del sistema, y denotemos con D_x la matriz obtenida de D al sustituir los coeficientes a_{11}, a_{21} de x por los números k_1, k_2, respectivamente. Del mismo modo, sea D_y la matriz obtenida de D al sustituir los coeficientes a_{12}, a_{22} de y por los números k_1, k_2, respectivamente. Entonces,

$$D_x = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix}$$

Si $|D| \neq 0$, la solución (x, y) está dada por las siguientes fórmulas.

Regla de Cramer para dos variables

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

EJEMPLO 4 **Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales**

Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz coeficiente es

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29$$

Usando la notación introducida antes, tenemos

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -25, \qquad |D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Por lo tanto, $$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-25}{29}, \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{22}{29}$$

De este modo, el sistema tiene la solución única $\left(-\frac{25}{29}, \frac{22}{29}\right)$ ■

La regla de Cramer se puede extender a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde la i-ésima ecuación tiene la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = k_i$$

Para resolver tal sistema, denotemos con D la matriz coeficiente y con D_{x_i} la matriz obtenida al cambiar los coeficientes de x_i en D por los números $k_1, \ldots, k_n$ que aparecen en la columna de la derecha de los signos igual del sistema. Si $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene la siguiente solución única.

Regla de Cramer (forma general)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

EJEMPLO 5 **Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales**

Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} x \phantom{{}-y} - 2z = 3 \\ - y + 3z = 1 \\ 2x \phantom{{}-y} + 5z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Nos limitaremos a presentar una lista de los diferentes determinantes. Usted debe comprobar los resultados.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -9, \quad |D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 27, \quad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por la regla de Cramer, la solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{27}{-9} = -3, \quad z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

La regla de Cramer es un método ineficiente para aplicarlo si el sistema tiene un número grande de ecuaciones, porque deben evaluarse muchos determinantes de matrices de orden superior. Tenga en cuenta también que la regla de Cramer no se puede usar en forma directa si $|D| = 0$ o si el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Para cálculos numéricos, el método de la inversa y el método de matriz son superiores a la regla de Cramer, pero la formulación de la regla de Cramer es teóricamente útil.

8.9 Ejercicios

Ejer. 1–16: Sin expandir, explique por qué el enunciado es verdadero.

1 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

8 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

9 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

10 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

11 $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

12 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

13 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

14 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

15 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

16 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

Ejer. 17-28: Encuentre el determinante de la matriz después de introducir ceros, como en el ejemplo 1.

17 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ \pi & a & 5 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ e & 7 & x \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

29 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(*Sugerencia*: vea el ejemplo 3.)

30 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

31 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

demuestre que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

32 Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix},$$

demuestre que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

33 Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas arbitrarias de orden 2, demuestre que $|AB| = |A||B|$.

34 Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n y k es cualquier número real, demuestre que $|kA| = k^n|A|$. (*Sugerencia*: use la propiedad 2 del teorema sobre transformaciones de renglón y columna de un determinante.)

35 Use propiedades de determinantes para demostrar que lo siguiente es una ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

36 Use propiedades de determinantes para demostrar que lo siguiente es una ecuación de un círculo que pasa por tres puntos no colineales (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejer. 37-46: Use la regla de Cramer, dondequiera que sea aplicable, para resolver el sistema.

37 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

38 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

39 $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$

41 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

43 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

44 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

45 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

46 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

47 Use la regla de Cramer para despejar x en el sistema.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fz = g \\ hx + iy = j \end{cases}$$

8.10 Fracciones parciales

En esta sección demostramos cómo se pueden usar sistemas de ecuaciones para descomponer expresiones racionales en sumas de expresiones más sencillas. Esta técnica es útil en cursos de matemáticas avanzadas.

Podemos verificar que

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1}$$

si sumamos las fracciones $1/(x - 1)$ y $-1/(x + 1)$ para obtener $2/(x^2 - 1)$. La expresión del lado derecho de esta ecuación se denomina *descomposición en fracciones parciales* de $2/(x^2 - 1)$.

Teóricamente, es posible escribir *cualquier* expresión racional como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores contienen potencias de polinomios de grado no mayor que dos. Específicamente, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios *y el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$*, se puede demostrar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

tal que F_k tiene una de las formas

$$\frac{A}{(px + q)^m} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

donde A y B son números reales, m y n son enteros no negativos y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreductible sobre $\mathbb{R}$ (esto es, no tiene cero real). La suma $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$ es la **descomposición en fracciones parciales** de $f(x)/g(x)$, y cada F_k es una **fracción parcial**.

Para encontrar la descomposición en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$, *es esencial que el grado de $f(x)$ sea menor que el de $g(x)$*. Si no es así, podemos usar la división larga para obtener tal expresión. Por ejemplo, dado

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1},$$

obtenemos

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}$$

Entonces obtenemos la descomposición en fracciones parciales de $(6x - 9)/(x^2 - 1)$.

Los siguientes pasos se pueden usar para obtener descomposiciones.

Pasos para obtener descomposiciones en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$

1. Si el grado del numerador $f(x)$ no es menor que el grado del denominador $g(x)$, use la división larga para obtener la forma apropiada.
2. Factorice el denominador $g(x)$ en un producto de factores lineales $px + q$ o factores cuadráticos irreductibles $ax^2 + bx + c$, y agrupe los factores repetidos para que $g(x)$ sea un producto de factores *diferentes* de la forma $(px + q)^m$ o $(ax^2 + bx + c)^n$ para un entero no negativo m o n.
3. Aplique las siguientes reglas a los factores obtenidos en el paso 2.

   Regla A: para cada factor de la forma $(px + q)^m$ con $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

   $$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m},$$

   donde cada numerador A_k es un número real.

   Regla B: para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ con $n \geq 1$ y $ax^2 + bx + c$ irreductible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

   $$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

   donde cada A_k y cada B_k es un número real.
4. Encuentre los números A_k y B_k en el paso 3.

En los siguientes ejemplos aplicaremos los pasos mencionados. Por conveniencia, usaremos las variables A, B, C, y así sucesivamente, en lugar de variables con subíndice A_k y B_k dadas en los pasos.

EJEMPLO 1 **Una descomposición en fracciones parciales en la que cada denominador es lineal**

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, de modo que no se requiere división larga.

Paso 2 Factorizamos el denominador:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$$

Paso 3 Cada factor del denominador tiene la forma expresada en la Regla A con $m = 1$. Así, para el factor x corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Del mismo modo, para los factores $x + 3$ y $x - 1$ corresponden fracciones parciales de la forma $B/(x + 3)$ y $C/x - 1$, respectivamente. La descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$$

Paso 4 Encontramos los valores de A, B y C en el paso 3. La multiplicación de ambos lados de la descomposición en fracciones parciales por el mínimo común denominador, $x(x - 3)(x - 1)$, nos da

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3) \\ &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x) \\ &= (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias semejantes de x en cada lado de la última ecuación, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2A - B + 3C = 13 \\ -3A = -9 \end{cases}$$

Usando los métodos de la sección 8.5 tendremos la solución $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}$$

Hay una forma alterna para encontrar A, B y C si todos los factores del denominador son lineales y no repetidos, como en este ejemplo. En lugar de igualar coeficientes y usar un sistema de ecuaciones, comenzamos con la ecuación

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3)$$

A continuación sustituimos valores por x que hagan que los factores x, $x - 1$ y $x + 3$ sean iguales a cero. Si $x = 0$ y simplificamos, obtenemos

$$-9 = -3A \qquad \text{o} \qquad A = 3$$

Si $x = 1$ en la ecuación, nos lleva a $8 = 4C$, o $C = 2$. Por último, si $x = -3$, entonces tenemos $-12 = 12B$, o sea $B = -1$. ■

EJEMPLO 2 **Una descomposición en fracciones parciales que contiene un factor lineal repetido**

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2}$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 2, es menor que el grado del denominador, 3, de modo que no se requiere división larga.

Paso 2 El denominador, $x(x - 3)^2$, ya está en forma factorizada.

Paso 3 Por la regla A con m = 1, hay una fracción parcial de la forma A/x correspondiente al factor x. A continuación, aplicando la regla A con $m = 2$, encontramos que el factor $(x - 3)^2$ determina una suma de dos fracciones parciales de la forma $B/(x - 3)$ y $C/(x - 3)^2$. Así, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

Paso 4 Para encontrar A, B y C, empezamos por multiplicar ambos lados de la descomposición en fracciones parciales del paso 3 por el mínimo común denominador, $x(x - 3)^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 36 &= A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx \\ &= A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + Cx \\ &= (A + B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A \end{aligned}$$

A continuación, igualamos los coeficientes de potencias semejantes de x, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -6A - 3B + C = 10 \\ 9A = -36 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la solución $A = -4$, $B = 5$ y $C = 1$. La descomposición en fracciones parciales es, por lo tanto,

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x - 3} + \frac{1}{(x - 3)^2}$$

Como en el ejemplo 1, también podríamos obtener A y C si comenzamos con la ecuación

$$x^2 + 10x - 36 = A(x - 3)^2 + Bx(x - 3) + Cx$$

y luego sustituimos valores por x que hagan que los factores $x - 3$ y x sean iguales a cero. Entonces, si $x = 3$, obtenemos $3 = 3C$, o sea $C = 1$. Si $x = 0$, tendremos $-36 = 9A$, o sea $A = -4$. El valor de B se puede encontrar entonces usando una de las ecuaciones del sistema. ■

EJEMPLO 3 **Una descomposición en fracciones parciales que contiene un factor cuadrático irreductible**

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 3, es igual al grado del denominador. Así, se requiere división larga y obtenemos

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Paso 2 El denominador puede factorizarse por agrupación, como sigue:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1)$$

Paso 3 Aplicando la regla B al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$ del paso 2, observamos que una fracción parcial tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. Por la regla A, también hay una fracción parcial $C/(2x - 1)$ correspondiente a $2x - 1$. En consecuencia,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

Paso 4 Al multiplicar ambos lados de la descomposición en fracciones parciales en el paso 3 por el mínimo común denominador, $(x^2 + 4)(2x - 1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\ &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \\ &= (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C \end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema

$$\begin{cases} 2A \qquad\quad + \; C = \;\;\, 1 \\ -A + 2B \qquad\;\; = -1 \\ \qquad\; - \; B + 4C = -21 \end{cases}$$

Este sistema tiene la solución $A = 3$, $B = 1$ y $C = -5$. Entonces, la descomposición en fracciones parciales del paso 3 es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1},$$

y, por lo tanto, la descomposición de la expresión dada (vea el paso 1) es

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}$$ ■

EJEMPLO 4 **Una descomposición en fracciones parciales que contiene un factor cuadrático repetido**

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 3, es menor que el grado del denominador, 4, de modo que no se requiere división larga.

Paso 2 El denominador, $(x^2 + 1)^2$, ya está en forma factorizada.

Paso 3 Aplicamos la regla B con $n = 2$ a $(x^2 + 1)^2$, para obtener la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Paso 4 Multiplicamos ambos lados de la descomposición del paso 3 por $(x^2 + 1)^2$ para obtener

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D) \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de x^3 y x^2, obtenemos $A = 5$ y $B = -3$. Por los coeficientes de x, observamos que $A + C = 7$. Por lo tanto, $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Por último, comparamos los términos constantes y obtenemos la ecuación $B + D = -3$, por lo que $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Por consiguiente, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

8.10 Ejercicios

Ejer. 1-30: Encuentre la descomposición en fracciones parciales.

1 $\dfrac{8x - 1}{(x - 2)(x + 3)}$

2 $\dfrac{x - 29}{(x - 4)(x + 1)}$

3 $\dfrac{x + 34}{x^2 - 4x - 12}$

4 $\dfrac{5x - 12}{x^2 - 4x}$

5 $\dfrac{4x^2 - 15x - 1}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$

6 $\dfrac{x^2 + 19x + 20}{x(x + 2)(x - 5)}$

7 $\dfrac{4x^2 - 5x - 15}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

8 $\dfrac{37 - 11x}{(x + 1)(x^2 - 5x + 6)}$

9 $\dfrac{2x + 3}{(x - 1)^2}$

10 $\dfrac{5x^2 - 4}{x^2(x + 2)}$

11 $\dfrac{19x^2 + 50x - 25}{3x^3 - 5x^2}$

12 $\dfrac{10 - x}{x^2 + 10x + 25}$

13 $\dfrac{x^2 - 6}{(x + 2)^2(2x - 1)}$

14 $\dfrac{2x^2 + x}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$

15 $\dfrac{3x^3 + 11x^2 + 16x + 5}{x(x + 1)^3}$

16 $\dfrac{4x^3 + 3x^2 + 5x - 2}{x^3(x + 2)}$

17 $\dfrac{x^2 + x - 6}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

18 $\dfrac{x^2 - x - 21}{(x^2 + 4)(2x - 1)}$

19 $\dfrac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 + 2x}$

20 $\dfrac{5x^2 - x + 12}{x^3 + 4x}$

21 $\dfrac{3x^3 - 4x^2 + 3x - 3}{x^4 + 3x^2}$

22 $\dfrac{2x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{x^4 + x^2}$

23 $\dfrac{4x^3 - x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 1)^2}$

24 $\dfrac{3x^3 + 13x - 1}{(x^2 + 4)^2}$

25 $\dfrac{2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

26 $\dfrac{x^3}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}$

27 $\dfrac{3x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

28 $\dfrac{2x^2 + 7x}{x^2 + 6x + 9}$

29 $\dfrac{4x^3 + 4x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x - 1}$

30 $\dfrac{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 12}{x^3 - 3x^2}$

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–16: Resuelva el sistema.

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

$\left(\frac{19}{23}, -\frac{18}{23}\right)$

2 $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

Sin solución

3 $\begin{cases} y + 4 = x^2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

$(-3, 5), (1, -3)$

4 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$

$(4, -3), (3, -4)$

5 $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 140 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

$(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$

6 $\begin{cases} 2x = y^2 + 3z \\ x = y^2 + z - 1 \\ x^2 = xz \end{cases}$

$(-1, \pm 1, -1), (0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, -\frac{1}{2})$

7 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 7 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x + 5y - z = -2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y - 5z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$(-2c, -3c, c)$ para cualquier número real c

12 $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

$(0, 0, 0)$

13 $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

$(5c - 1, -\frac{19}{2}c + \frac{5}{2}, c)$

14 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

$(5c - 1, -19/2c + 5/2, c)$ para cualquier número real c

15 $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 4 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$ $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

16 $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = -3 \\ 3x + 2y - z + w = 13 \\ x - 3y + z - 2w = -4 \\ -x + y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$ $(3, -1, -2, 4)$

Ejer. 17–20: Trace la gráfica del sistema.

17 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$

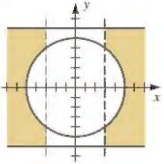
18 $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ y - 3x \leq 4 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$

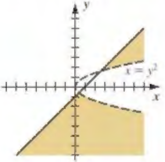
20 $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$

Ejer. 21–22: Encuentre un sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

21



22



Ejer. 23–32: Exprese como una sola matriz.

23 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

24 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -37 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$

27 $2\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

29 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

30 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right)$

32 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Ejer. 33–36: Encuentre la inversa de la matriz.

33 $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

34 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

37 Use el resultado del ejercicio 33 para resolver el sistema

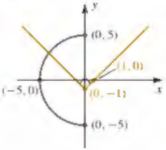
$$\begin{cases} 5x - 4y = 30 \\ -3x + 2y = -16 \end{cases}$$

38 Use el resultado del ejercicio 34 para resolver el sistema

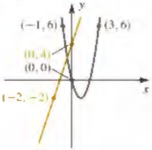
$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 4y + 2z = 15 \\ 3x - 2y + z = -7 \end{cases}$$

Ejer. 39–40: Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas.

39



40



Ejer. 41–48: Encuentre el determinante de la matriz.

41 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

42 $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

43 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

44 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

45 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

46 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

47 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

48 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Ejer. 49–50: Resuelva la ecuación $|A - xI| = 0$.

49 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad I = I_2$

50 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad I = I_3$

Ejer. 51–52: Sin expandir, explique por qué el enunciado es verdadero.

51 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

52 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$

53 Encuentre el determinante de la matriz (a_{ij}) de $n \times m$ en la que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

54 Sin expandir, demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Ejer. 55–56: Use la regla de Cramer para resolver el sistema.

55 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

56 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

Ejer. 57–60: Encuentre la descomposición en fracciones parciales.

57 $\dfrac{4x^2 + 54x + 134}{(x+3)(x^2+4x-5)}$

58 $\dfrac{2x^2 + 7x + 9}{x^2 + 2x + 1}$

59 $\dfrac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$

60 $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 16}{x^4 + 7x^2 + 10}$

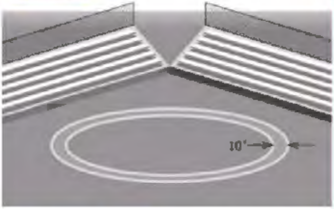
61 **Riesgo de campo** La cabeza giratoria de un aspersor con alcance de 50 pies se colocará en el centro de un campo rectangular (vea la figura). Si el área del campo es de 4,000 ft² y el agua debe llegar justo a las esquinas, encuentre las dimensiones del campo.

EJERCICIO 61

62 Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 1$ y pasan por el punto $(0, 3)$. (*Sugerencia*: sea $y = mx + 3$, y determine las condiciones en m que aseguren que el sistema tenga sólo una solución.)

63 **Dimensiones de una pista** Una pista circular habrá de tener un carril de carreras de 10 pies de ancho alrededor del exterior (vea la figura). La distancia interior alrededor de la pista debe ser 90% de la distancia exterior. Encuentre las dimensiones de la pista.

EJERCICIO 63



64 **Contabilidad de nómina** Un contador debe pagar impuestos y bonos de nómina a los empleados, tomando parte de las utilidades de \$2,000,000 de la empresa. El impuesto total es 40% de la cantidad restante después de pagar los bonos, y el total pagado en bonos es 10% de la cantidad restante después de impuestos. Encuentre el total de impuestos y la cantidad total en bonos.

65 **Remar en un bote** Una mujer rema en un bote 1.75 millas aguas arriba en contra de una corriente constante en 35 minutos. A continuación rema la misma distancia aguas abajo (con la misma corriente) en 15 minutos. Determine la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que se puede remar en aguas tranquilas.

66 **Cómo hacer una mezcla de frutas secas** Un comerciante desea mezclar cacahuates con costo de \$1.85 por libra con pasas a un costo de \$1.30 por libra para obtener 55 libras de una mezcla con un costo de \$1.55 por libra. ¿Cuántas libras de cada ingrediente debe mezclar?

67 **Viaje en el Concorde** Supongamos que un Concorde, volando con viento de cola, podría hacer el viaje de 3470 millas desde Nueva York a Londres en 2.5 horas. El viaje de regreso, contra el viento, es de 2.75 horas. Calcule, con una aproximación a la milla por hora más cercana, la velocidad de crucero del avión y la velocidad del viento (suponemos que las velocidades son constantes).

68 **Caudales** Tres tubos de entrada, A, B y C, se pueden usar para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 1000 ft³. Cuando los tres tubos están en operación, el tanque se puede llenar en 10 horas; cuando sólo se usan los tubos A y B, el tiempo aumenta a 20 horas. Con los tubos A y C, el tanque se puede llenar en 12.5 horas. Encuentre los caudales individuales (en ft³/h) de cada uno de los tres tubos.

69 Cargos por envío desde un almacén Para embarcar un pedido de 150 escritorios de oficina, un distribuidor de muebles debe enviar los escritorios desde dos almacenes. El costo de envío por escritorio es de \$48 del almacén poniente y de \$70 del almacén oriente. Si el costo total de envío es \$8,410, ¿cuántos escritorios se envían desde cada ubicación?

70 Tarifas de correo exprés Una empresa de correo exprés hace un cargo de \$25 por entregar una carta de un día al siguiente, siempre que las dimensiones del sobre estándar satisfagan las siguientes tres condiciones: a) la longitud, la mayor de las dos dimensiones, debe ser de 12 pulgadas a lo sumo; b) el ancho debe ser de 8 pulgadas a lo sumo; c) el ancho debe ser por lo menos la mitad de la longitud. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para las dimensiones de un sobre estándar.

71 Actividades de un venado Un venado pasa el día en tres actividades básicas: descansar, buscar alimento y pastar. Por lo menos 6 horas de cada día debe pasar descansando, y el número de horas que dedica a buscar alimento debe ser por lo menos el doble de las horas empleadas en pastar. Usando x como el número de horas empleadas en busca de alimento y y como el número de horas empleadas en pastar, encuentre y grafique el sistema de desigualdades que describa las posibles divisiones del día.

72 Programación de la producción Una empresa fabrica una podadora de césped y una cortadora eléctrica. Estos dos productos son de una calidad tan alta que la empresa puede vender todos los productos que fabrique, pero la capacidad de producción es limitada en áreas como maquinado, soldadura y ensamblaje. Cada semana, la empresa dispone de 600 horas para maquinado, 300 para soldadura y 550 horas para ensamblaje. El número de horas necesarias para la producción de un solo artículo se muestra en la siguiente tabla. Las utilidades por la venta de una podadora y una cortadora son de \$100 y \$80, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y cortadoras deben fabricarse cada semana para maximizar la utilidad?

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensamblaje
Podadora	6	2	5
Cortadora	4	3	5

73 Maximización del ingreso por inversiones Un matrimonio de jubilados desea invertir \$750,000, diversificando la inversión en tres áreas: una acción de alto riesgo que tiene una tasa de rendimiento anual esperada (o interés) de 12%, una acción de bajo riesgo que tiene un rendimiento anual esperado de 8%, y bonos emitidos por el gobierno que pagan un interés anual de 4% y no tienen riesgo. Para proteger el valor de la inversión, la pareja desea colocar por lo menos el doble de la cantidad en la acción de bajo riesgo que en la acción de alto riesgo y usar el resto para comprar bonos. ¿Cómo deben invertir el dinero para maximizar el rendimiento anual esperado?

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 a) Es fácil darse cuenta de que el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

no tiene solución. Sea $x + by = 5$ la segunda ecuación y despeje $b = 1.99$ y $b = 1.999$ en el sistema. Tenga en cuenta que un pequeño cambio en b produce un cambio considerable en x y y. Tal sistema se conoce como *sistema mal acondicionado* (una definición precisa se da en casi todos los textos de análisis numérico).

b) En este sistema despeje x y y en términos de b, y explique por qué un pequeño cambio en b (para b cercano a 2) produce un cambio importante en x y y.

c) Si b se hace muy grande, ¿qué le ocurre con la solución del sistema?

2 Tendencias de migración de aves Consulte el ejercicio 32 de la sección 8.5. Suponga que las poblaciones iniciales de aves en las islas A, B y C son de 12,000, 9000 y 14,000, respectivamente.

a) Represente las poblaciones iniciales con una matriz D de 1×3. Represente las proporciones de las poblaciones que emigran a cada isla con una matriz E de 3×3. (*Sugerencia:* el primer renglón de E es 0.90, 0.10 y 0.00, lo cual indica que 90% de las aves en A se quedan en A, 10% de las aves en A emigran a B y ninguna de las aves en A emigran a C.)

b) Encuentre el producto $F = DE$ e interprete el significado de los elementos de F.

c) Usando calculadora, multiplique F por E y continúe para multiplicar el resultado por E hasta que aparezca un patrón. ¿Cuál es su conclusión?

d) Suponga que la matriz D inicial de población es igual a $[34{,}000 \quad 500 \quad 500]$. Multiplique D por E y continúe para multiplicar el resultado por E hasta que aparezca un patrón. ¿Cuál es su conclusión?

3 Explique por qué una matriz no cuadrada A no puede tener una inversa.

4 Distribución de dinero El rector de una universidad ha recibido presupuestos del director de deportes (DD), del decano de estudiantes (DE) y del presidente del consejo estudiantil (PS), en los que proponen asignar fondos departamentales a las tres áreas básicas de becas, actividades y servicios para estudiantes, como se muestra en la tabla.

	Becas	Actividades	Servicios
DD	50%	40%	10%
DE	30%	20%	50%
PS	20%	40%	40%

El consejo de administración ha solicitado que toda la distribución de fondos para estas tres áreas quede en las siguientes proporciones: becas, 34%; actividades, 33%, y servicios, 33%. Determine el porcentaje del total de fondos que debe asignar el rector a cada departamento, para que los porcentajes gastados en estas tres áreas se ajusten a los requerimientos del consejo de administración.

5 Si $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces $x = -1$, 2 y 3, encuentre a, b, c y la cuarta raíz de la ecuación.

6 **Exploración de un cubo** Use el método de la inversa para encontrar la ecuación del cubo que pasa por los puntos $(-6, -6)$, $(-4, 3)$, $(2, 2)$ y $(6, 6)$. Ahora sustituya el punto $(-4, 3)$ con $(-4, y)$, donde y toma varios valores positivos y negativos, y encuentre la ecuación que pasa por esos puntos. ¿Qué observación general puede hacer acerca del aspecto de la gráfica y los coeficientes de su ecuación cuando el valor de y se hace grande positivo o grande negativo? *Sugerencia:* para facilitar este proceso, asigne

$$[C](1, 1)x^3 + [C](2, 1)x^2 + [C](3, 1)x + [C](4, 1)$$

a Y_1, donde $[C] = [A]^{-1} * [B]$.

7 Demuestre (*) de la página 617.

8 Encuentre, si posible, una ecuación de

a) una recta

b) un círculo

c) una parábola con eje vertical

d) una cúbica

e) una exponencial

que pase por los tres puntos $P(-1, 3)$, $Q(0, 4)$ y $R(3, 2)$.

1 Resuelva el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y - x = 1 \end{cases}$ usando el método de sustitución.

2 Resuelva el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ 2x^2 + y^2 = 107 \end{cases}$ utilizando cualquier método.

3 Encuentre dos números que tengan una diferencia de 8 y un cociente de 3.

4 Una recta interseca el eje y en 5 y es tangente al círculo $x^2 + y^2 = 10$. Encuentre los puntos de tangencia posibles.

5 Resuelva el sistema $\begin{cases} 4x - 7y = 9 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$ usando el método de eliminación.

6 Resuelva el sistema $\begin{cases} -0.3x + 0.4y = -0.9 \\ 9x - 12y = 28 \end{cases}$ usando cualquier método.

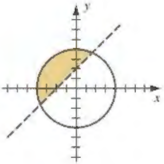
7 Resuelva el sistema $\begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y = -1 \\ -12x + 4y = 20 \end{cases}$ usando cualquier método.

8 Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. Cada sofá requiere 6 horas de mano de obra y \$150 de materiales, mientras que una silla se puede producir con \$135 en 7 horas. La empresa tiene 495 horas de mano de obra disponibles cada semana y puede pagar \$10,575 en materiales. ¿Cuántos sillones y sofás se pueden producir si todas las horas de trabajo y todos los materiales se deben utilizar?

9 Trace una gráfica del sistema $\begin{cases} |y| < 2 \\ x^2 + y^2 \geq 25 \end{cases}$

10 Encuentre un sistema de desigualdades para la gráfica.

EJERCICIO 10



11 Una mujer con \$25,000 para invertir decide colocar por lo menos \$3000 en una inversión de alto riesgo y de alto rendimiento, y por lo menos cuatro veces esa cantidad en un fondo de bajo riesgo y de bajo rendimiento. Encuentre y grafique un sistema de desigualdades que describa todas las posibilidades para colocar el dinero en las dos inversiones.

12 Dibuje la región R determinada por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$ y $x + 2y \leq 8$ y marque sus vértices. Encuentre el valor máximo de $C = 2x + y$ en R.

13 Una comunidad desea comprar autobuses usados y camionetas para su sistema de transporte público. La comunidad puede pagar no más de \$360,000 por los vehículos y no más de \$1,400 por mes para mantenimiento. Las camionetas se venden en \$20,000 cada una y los costos de mantenimiento son de \$200 por mes en promedio. Las estimaciones correspondientes de costo para cada autobús son de \$60,000 y \$160 por mes. Si cada camioneta puede llevar a 20 pasajeros y cada autobús puede acomodar a 50 pasajeros, determine el número de camionetas y autobuses que se deben comprar para maximizar la capacidad de pasajeros del sistema.

14 Utilice matrices para resolver el sistema $\begin{cases} 3x + 2y - z = -1 \\ x - 4y + 2z = 30 \\ 5y + z = -8 \end{cases}$

15 Utilice matrices para resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

16 Hay tres líneas de anclaje, con un peso de 51, 49 y 28 libras, cada una compuesta de una cuerda, una cadena y un ancla. Las líneas tienen 100, 60 y 40 pies de cuerda y 4, 8 y 0 pies de cadena, respectivamente. Encuentre el peso de la cuerda y el de la cadena por pie lineal, así como también el peso del ancla.

17 Encuentre una ecuación del polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que pasa por los puntos $P(0, -7)$, $Q(1, -8)$, $R(2, -1)$ y $S(3, 32)$.

18 Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre $A - 2B$.

19 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, encuentre AB.

20 Si $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ -4 & 6 & 3 & -2 \\ 5 & -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = AB$, encuentre c_{23}.

21 En una venta de liquidación de golf, los juegos de hierros para hombre se venden en \$100, los juegos de madera en \$80 y los híbridos en \$30. Los juegos de hierros para mujer se venden en \$90, los juegos de madera en \$75, y los híbridos en \$20. El inventario actual es el siguiente:

	Hombres	**Mujeres**
Juegos de hierros	23	7
Juegos de madera	35	12
Híbridos	40	19

Organice estos datos en una matriz de inventario A y una matriz de precios B para que el producto $C = AB$ esté definido. Encuentre C y describa lo que representan sus elementos.

22 Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ usando transformaciones elementales de renglón.

23 Resuelva el sistema $\begin{cases} 5x + 3y = -8 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ usando el método de la inversa. Escriba la ecuación matricial empleada para resolver el sistema.

24 Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 & 2 \\ -4 & 9 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, ¿existe A^{-1}? Explique.

25 Encuentre el menor M_{23} de $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

26 Encuentre el cofactor A_{23} de $\begin{bmatrix} -9 & -4 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

27 Encuentre el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

28 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $f(x) = |A - xI|$. Encuentre los ceros de $f(x)$.

29 Sin expandir, explique por qué $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

30 Encuentre el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ después de introducir ceros y use el teorema en las transformaciones de renglón y columna de un determinante.

31 Use la regla de Cramer para resolver el sistema $\begin{cases} 6x - 5y = 38 \\ -2x + 3y = -18 \end{cases}$

32 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{-x + 11}{(x - 2)(x + 1)}$

33 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{-x^2 + 11x + 15}{x^2(x + 3)}$

34 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 1)^2}$

9

Sucesiones, series y probabilidad

9.1 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

9.2 Sucesiones aritméticas

9.3 Sucesiones geométricas

9.4 Inducción matemática

9.5 El teorema del binomio

9.6 Permutaciones

9.7 Permutaciones y combinaciones distinguibles

9.8 Probabilidad

Las sucesiones y la notación de sumatoria, que se estudian en la primera sección, son muy importantes en matemáticas y aplicaciones avanzadas. De especial interés son las sucesiones aritméticas y geométricas, consideradas en las secciones 9.2 y 9.3. A continuación examinamos el método de inducción matemática, proceso que se emplea con frecuencia para demostrar que cada enunciado de una sucesión infinita de enunciados es verdadero. Como aplicación, lo usamos para demostrar el teorema del binomio de la sección 9.5. La última parte trata de procesos continuos que se presentan con frecuencia en matemáticas y en la vida diaria. Estos conceptos incluyen los de permutaciones, combinaciones y probabilidad.

9.1 Sucesiones infinitas y notación de sumatoria

Una *sucesión infinita* arbitraria puede denotarse como sigue:

Notación de sucesión infinita $\quad a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

Por comodidad, con frecuencia nos referimos a sucesiones infinitas como *sucesiones*. Podemos considerar que una sucesión infinita es un conjunto de números reales que está en correspondencia biunívoca con los enteros positivos. Cada número a_k es un **término** de la sucesión. La sucesión es *ordenada* en el sentido que hay un **primer término** a_1, un *segundo término* a_2, un *cuadragésimo quinto término* a_{45}, y, si n denota un entero positivo arbitrario, un ***n*-ésimo término** a_n. Las sucesiones infinitas se definen a menudo al expresar una fórmula para el n-ésimo término.

Con frecuencia, en matemáticas se presentan sucesiones infinitas. Por ejemplo, la sucesión

$$0.6, \quad 0.66, \quad 0.666, \quad 0.6666, \quad 0.66666, \quad \ldots$$

se puede usar para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso el n-ésimo término se acerca cada vez más a $\frac{2}{3}$ a medida que n aumenta.

Podemos considerar una sucesión infinita como una función. Recuerde de la sección 2.4 que una función f es una correspondencia que asigna a cada número x en el dominio D exactamente un número $f(x)$ en el rango R. Si restringimos el dominio a los enteros positivos 1, 2, 3, …, obtenemos una sucesión infinita, como en la siguiente definición.

Definición de sucesión infinita $\quad$ Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

En nuestro trabajo, el rango de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si una función f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n le corresponde un número real $f(n)$. Estos números en el rango de f pueden representarse escribiendo

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

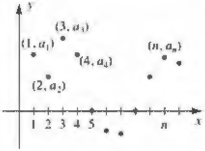
Para obtener la forma de subíndice de una sucesión, como se ve al principio de esta sección, sea $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n.

Si consideramos una sucesión como una función f, entonces podemos considerar su gráfica en un plano xy. Como el dominio de f es el conjunto de enteros positivos, los únicos puntos sobre la gráfica son

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots,$$

donde a_n es el n-ésimo término de la sucesión como se muestra en la figura 1. A veces usamos la gráfica de una sucesión para ilustrar el comportamiento del n-ésimo término a_n cuando n aumenta sin límite.

FIGURA 1 Gráfica de una sucesión



Por la definición de igualdad de funciones vemos que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots\, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k.

Otra notación para una sucesión con n-ésimo término a_n es $\{a_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{2^n\}$ tiene n-ésimo término $a_n = 2^n$. Usando notación de sucesión, escribimos esta sucesión como sigue:

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Por definición, la sucesión $\{2^n\}$ es la función f donde $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar términos de una sucesión**

Mencione los primeros cuatro términos y el décimo término de cada sucesión:

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **b)** $\{2 + (0.1)^n\}$ **c)** $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ **d)** $\{4\}$

SOLUCIÓN Para encontrar los primeros cuatro términos, sustituimos, sucesivamente, $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula para a_n. El décimo término se encuentra si se sustituye 10 por n; si hacemos esto y simplificamos, tendremos lo siguiente:

	Sucesión	n-ésimo término a_n	Primeros cuatro términos	Décimo término
a)	$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
b)	$\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.000 000 000 1
c)	$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
d)	$\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

La calculadora TI-83/4 Plus tiene un modo especial de sucesión. El uso de este modo se explica al final de esta sección. Por ahora, consideraremos un método genérico que aplica a cualquier calculadora.

Para generar una sucesión, usamos el comando

seq(expression, variable, begin, end, increment).

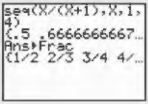
(Si omitimos increment, el valor predeterminado es 1.) Generemos los primeros cuatro términos de la sucesión del ejemplo 1a).

Generar la sucesión.

2nd LIST ▷ 5
X,T,θ,n ÷ (X,T,θ,n + 1) ,
X,T,θ,n , 1 , 4) ENTER

Convertir en fracciones.

MATH 1 ENTER

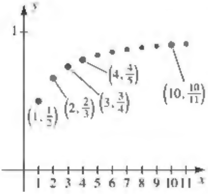


EJEMPLO 2 **Gráfica de una sucesión**

Grafique la sucesión del ejemplo 1a); es decir,

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

FIGURA 2



SOLUCIÓN Los valores de dominio son

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

Los valores de rango son

$$\frac{1}{1+1}, \quad \frac{2}{2+1}, \quad \frac{3}{3+1}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots$$

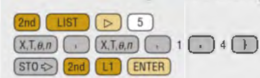
o bien, lo que es equivalente,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots$$

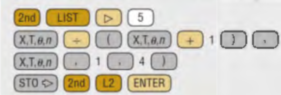
En la figura 2 se ilustra una gráfica de los pares ordenados $(n, n/(n+1))$. ■

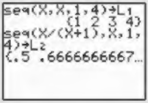
Haremos uso de *listas* para graficar la sucesión del ejemplo 2. (Una demostración de cómo graficar en modo de sucesión en la TI-83/4 Plus aparece al final de la sección.)

Guarde en una lista los primeros n enteros positivos (los valores de dominio).

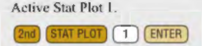


Guarde los primeros n términos de una segunda lista (los valores del rango).

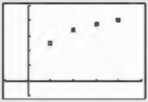




Active Stat Plot 1.



Establezca un visor rectangular de $[-1, 5]$ por $[-0.2, 1, 0.2]$ y grafique.



Observe que nuestro método es fácilmente adaptable para encontrar 50 términos de la sucesión (en lugar de 4).

Para algunas sucesiones expresamos el primer término a_1 junto con una regla para obtener cualquier término a_{k+1} a partir del término precedente a_k siempre que $k \geq 1$. Decimos que este enunciado es una **definición recursiva** y que la sucesión está definida **de forma recursiva**.

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar términos de una sucesión definida de forma recursiva**

Encuentre los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión infinita definida de forma recursiva como sigue:

$$a_1 = 3, \qquad a_{k+1} = 2a_k \qquad \text{para} \qquad k \geq 1.$$

SOLUCIÓN Los primeros cuatro términos son

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 && \text{dado} \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 && k = 1 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 && k = 2 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24. && k = 3 \end{aligned}$$

Hemos escrito los términos como productos para entender mejor la naturaleza del n-ésimo término. Continuando, obtenemos $a_5 = 2^4 \cdot 3$, $a_6 = 2^5 \cdot 3$, y en general,

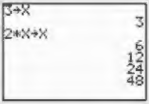
$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n. ■

Podemos generar los términos de una sucesión definida de forma recursiva al guardar primero un valor *semilla* (o inicial) en una variable. A continuación escribimos nuestra definición recursiva en términos de esa variable y luego guardamos el resultado en la misma variable. Podemos usar cualquier variable en la calculadora, pero la más fácil es la ubicación ANS, porque el último resultado calculado se guarda automáticamente ahí. Enseguida se presentan dos ejemplos de cómo se generan los términos del ejemplo 3, uno para la variable X y uno para la ubicación ANS. (Los comandos recursivos de la calculadora TI-83/4 Plus se explican al final de esta sección.)

Para generar una sucesión definida de forma recursiva usando la variable X, use

3 [STO▷] [X,T,θ,n] [ENTER]
2 [×] [X,T,θ,n] [STO▷] [X,T,θ,n]
[ENTER] [ENTER] . . .



Para generar una sucesión definida de forma recursiva usando ANS, use

3 [ENTER]
2 [×] [2nd] [ANS] [ENTER]
[ENTER] [ENTER] . . .

A veces encontramos un término de una sucesión definida de forma recursiva en función de dos o más términos anteriores, como en la famosa sucesión de Fibonacci (vea el ejercicio 59) y en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Cómo encontrar términos de una sucesión definida de forma recursiva

Encuentre los tres términos siguientes en una sucesión infinita definida de forma recursiva como sigue:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2ak \quad \text{para } k \geq 1$$

SOLUCIÓN Los siguientes tres términos se determinan como sigue:

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= 3a_{k+1} - 2a_k & &\text{fórmula dada}\\
a_3 &= 3a_2 - 2a_1 = 3(7) - 2(4) = 13 & &k = 1\\
a_4 &= 3a_3 - 2a_2 = 3(13) - 2(7) = 25 & &k = 2\\
a_5 &= 3a_4 - 2a_3 = 3(25) - 2(13) = 49 & &k = 3
\end{aligned}$$

Los siguientes tres términos son 13, 25 y 49. ■

Si se conocen sólo los primeros términos de una sucesión infinita, entonces es imposible predecir términos adicionales. Por ejemplo, si nos dan 3, 6, 9, … y nos piden encontrar el cuarto término, no podríamos continuar sin más información. La sucesión infinita con n-ésimo término

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n)$$

tiene como sus primeros cuatro términos a 3, 6, 9 y 120. Es posible describir sucesiones en las que los primeros términos sean 3, 6 y 9 y el cuarto término es *cualquier* número dado. Esto demuestra que cuando trabajamos con una sucesión infinita es esencial contar con información específica acerca del n-ésimo término o un esquema general para obtener cada término a partir del precedente. (Vea un problema relacionado en el ejercicio 1 de los ejercicios de análisis del capítulo 9.)

A veces necesitamos encontrar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para expresar con facilidad tales sumas, usamos **notación de sumatoria**. Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

el símbolo $\sum_{k=1}^{m} a_k$ representa la sumatoria de los primeros m términos, como sigue.

Notación de sumatoria

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

La letra griega mayúscula sigma, Σ, indica una suma, y el símbolo a_k representa el k-ésimo término. La letra k es el **índice de sumatoria**, o la **variable de la sumatoria**, y los números 1 y m indican los valores mínimo y máximo de la variable de la sumatoria, respectivamente.

EJEMPLO 5 **Evaluación de una suma**

Encuentre la suma $\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a_k = k^2(k - 3)$. Para encontrar la suma, simplemente sustituimos, en sucesión, los enteros 1, 2, 3 y 4 por k y sumamos los términos resultantes:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3) &= 1^2(1 - 3) + 2^2(2 - 3) + 3^2(3 - 3) + 4^2(4 - 3) \\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10\end{aligned}$$

■

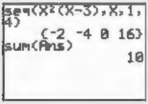
Para encontrar la suma del ejemplo 5 en una calculadora graficadora, simplemente sumamos una sucesión.

Genere la sucesión.

2nd LIST ▷ 5
X,T,θ,n x² (X,T,θ,n − 3) [illegible]
[illegible] [illegible] 1 [illegible] 4) ENTER

Obtenga la suma de la sucesión.

2nd LIST ◁ 5
2nd ANS) ENTER



La letra que usemos para la variable de la sumatoria no tiene importancia. Para ilustrar, si j es la variable de la sumatoria, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

que es la misma sumatoria que $\sum_{k=1}^{m} a_k$. Como ejemplo específico, la suma del ejemplo 5 se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{4} j^2(j - 3)$$

Si n es un entero positivo, entonces la suma de los primeros n términos de una sucesión infinita se denotará por S_n. Por ejemplo, dada la sucesión infinita a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n, \ldots,$

$$\begin{aligned}S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4\end{aligned}$$

y, en general

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Note que también podemos escribir

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= S_1 + a_2 \\ S_3 &= S_2 + a_3 \\ S_4 &= S_3 + a_4 \end{aligned}$$

y, para toda $n > 1$,

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

El número real S_n se llama **n-ésima suma parcial** de la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, y la sucesión

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots,$$

se llama **sucesión de sumas parciales**. Las sucesiones de sumas parciales son importantes en el estudio de *series infinitas*, un tema de cálculo. En la sección 9.3 estudiaremos algunos tipos especiales de series infinitas.

EJEMPLO 6 Cómo encontrar los términos de una sucesión de sumas parciales

Encuentre los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociada con la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de enteros positivos.

SOLUCIÓN Si $a_n = n$, entonces los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 \\ S_2 &= S_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= S_2 + a_3 = 3 + 3 = 6 \\ S_4 &= S_3 + a_4 = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

La n-ésima suma parcial S_n (esto es, la suma de $1, 2, 3, \ldots, n$) se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

La suma de términos correspondientes en cada lado de estas ecuaciones nos da

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

Como la expresión $(n + 1)$ aparece n veces en el lado derecho de la última ecuación, vemos que

$$2S_n = n(n+1) \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Para encontrar los términos de la sucesión de sumas parciales del ejemplo 6 en una calculadora graficadora, usamos la función de suma acumulativa.

Genere la sucesión.

[2nd] [LIST] [▷] [5]
[X,T,θ,n] [,] [X,T,θ,n] [,] 1 [,] 4 [)]
[ENTER]

```
seq(X,X,1,4)
       {1 2 3 4}
cumSum(Ans)
      {1 3 6 10}
```

Encuentre los términos de la sucesión de sumas parciales.

[2nd] [LIST] [▷] [6]
[2nd] [ANS] [)] [ENTER]

Para graficar la sucesión de sumas parciales, podríamos guardar los primeros n enteros positivos y la suma acumulativa en dos listas y luego graficarlos, como se demuestra en el recuadro de calculadora que sigue al ejemplo 2.

Si a_k es la misma para todo entero positivo k, por ejemplo, $a_k = c$ para un número real c, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= c + c + c + \cdots + c = nc\end{aligned}$$

Hemos demostrado la propiedad 1 del siguiente teorema.

Teorema sobre la suma de una constante

1) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ 2) $\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$

Para demostrar la propiedad 2, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} c &= \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c && \text{restamos los primeros } (m-1) \text{ términos de la suma de } n \text{ términos} \\ &= nc - (m-1)c && \text{usamos la propiedad 1 para cada suma} \\ &= [n - (m-1)]c && \text{factorizamos } c \\ &= (n - m + 1)c. && \text{simplificamos}\end{aligned}$$

EJEMPLOS **Suma de una constante**

- $\sum_{k=1}^{4} 7 = 4 \cdot 7 = 28$
- $\sum_{k=1}^{10} \pi = 10 \cdot \pi = 10\pi$

(continúa)

- $\sum_{k=3}^{8} 9 = (8 - 3 + 1)(9) = 6(9) = 54$
- $\sum_{k=10}^{20} 5 = (20 - 10 + 1)(5) = 11(5) = 55$

Como se muestra en la propiedad 2 del teorema precedente, el dominio de la variable de suma no tiene que comenzar con 1. Por ejemplo,

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Como otra variación, si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

entonces podemos considerar sumas de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

que es la suma de los primeros $n + 1$ términos de la sucesión.

Si la variable de suma no aparece en el término a_k, entonces *todo el término* puede ser considerado constante. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} a_k = n \cdot a_k$$

porque j no aparece en el término a_k.

La notación de suma se puede usar para denotar polinomios. Por lo tanto, si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

El siguiente teorema sobre sumas tiene numerosos usos.

Teorema sobre sumas

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ son sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n,

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número real c

DEMOSTRACIONES Para demostrar la fórmula 1, primero escribimos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Usando muchas veces las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales, podemos reacomodar los términos en el lado derecho para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Para una demostración de la fórmula 3, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

$$= c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

La demostración de la fórmula 2 se deja como ejercicio. ■

USO DEL MODO DE SUCESIÓN DE LA CALCULADORA TI-83/4

Presione MODE y use las teclas del cursor para destacar Seq y Dot. Desactive Stat Plot 1.

Listas y gráficas de una sucesión

Introduzca la sucesión del ejemplo 1a), $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$.

Y= X,T,θ,n ÷ (X,T,θ,n + 1)

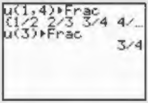
Nota: u(nMin) se puede dejar en blanco.

Escriba la sucesión.

2nd QUIT 2nd u (1 , 4) MATH 1 ENTER

Escriba un término específico.

2nd u (3) MATH 1 ENTER

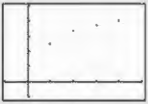


Ajuste las variables de ventana para graficar los primeros cuatro términos de la sucesión.

WINDOW 1 ▽ 4 ▽ 1 ▽ 1 ▽ −1 ▽ 5 ▽ 1 ▽ −.2 ▽ 1 ▽ .2

(continúa)

Para graficar la sucesión pulse [GRAPH]. Pulse [TRACE] y las teclas de izquierda y derecha del cursor para ver los valores de la sucesión.



Cómo generar una sucesión definida de forma recursiva

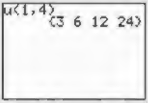
De forma recursiva defina la sucesión del ejemplo 3,

$$a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

[Y=] [CLEAR] 2 [×] [2nd] [u] [(] [X,T,θ,n] [−] 1 [)]
[ENTER] 3 [ENTER]

Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión.

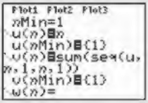
[2nd] [QUIT] [2nd] [u] [(] 1 [,] 4 [)] [ENTER]



Cómo graficar una sucesión de sumas parciales

Para graficar una sucesión de sumas parciales, definimos u como la sucesión de términos y v como la suma de esa sucesión. Demostraremos con la sucesión del ejemplo 6; es decir, $a_n = n$.

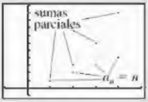
[Y=] [CLEAR] [X,T,θ,n] [▽] 1 [▽]
[2nd] [LIST] [◁] [5] [2nd] [LIST] [▷] [5]
[2nd] [u] [(] [X,T,θ,n] [,] 1 [,] [X,T,θ,n] [,] 1 [)]
[)] [▽] 1 [▽]



Ajuste las variables de ventana para graficar los primeros cuatro términos de las sucesiones.

[WINDOW] 1 [▽] 4 [▽] 1 [▽] 1 [▽] −1 [▽]
5 [▽] 1 [▽] −1 [▽] 11 [▽] 1

Para graficar la sucesión y la sucesión de sumas parciales, pulse [GRAPH]. Tenga en cuenta que la primera suma parcial es igual al primer término de la sucesión.



9.1 Ejercicios

Ejer. 1–16: Encuentre los primeros cuatro términos y el octavo término de la sucesión.

1 $\{12 - 3n\}$

2 $\left\{\dfrac{3}{5n - 2}\right\}$

3 $\left\{\dfrac{3n - 2}{n^2 + 1}\right\}$

4 $\left\{10 + \dfrac{1}{n}\right\}$

5 $\{9\}$

6 $\{\sqrt{2}\}$

7 $\{2 + (-0.1)^n\}$

8 $\{4 + (0.1)^n\}$

9 $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{n + 7}{2n}\right\}$

10 $\left\{(-1)^n\dfrac{6 - 2n}{\sqrt{n + 1}}\right\}$

11 $\{1 + (-1)^{n+1}\}$

12 $\{(-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}\}$

13 $\left\{\dfrac{2^n}{n^2 + 2}\right\}$

14 $\{(n - 1)(n - 2)(n - 3)\}$

15 a_n es el número de posiciones decimales en $(0.1)^n$.

16 a_n es el número de enteros positivos menores que n^3.

Ejer. 17–20: Grafique la sucesión.

17 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

18 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

19 $\{(-1)^{n+1}n^2\}$

20 $\{(-1)^n(2n + 1)\}$

Ejer. 21–28: Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión infinita definida de forma recursiva.

21 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

22 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

23 $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_k^2$

24 $a_1 = 128, \quad a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k$

25 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

26 $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 1/a_k$

27 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^k$

28 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

Ejer. 29–32: Encuentre los siguientes tres términos de la sucesión definida de forma recursiva.

29 $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{k+1} = 2a_k + 3a_{k-1}$ para $k \geq 2$

30 $a_1 = 3, \quad a_2 = 1, \quad a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$ para $k \geq 2$

31 $a_1 = 4, \quad a_2 = -2, \quad a_{k+2} = a_{k+1}a_k$ para $k \geq 1$

32 $a_1 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_{k+2} = a_{k+1}a_k^{-1}$ para $k \geq 1$

Ejer. 33–36: Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales para la sucesión dada.

33 $\{3 + \frac{1}{2}n\}$

34 $\{1/n^2\}$

35 $\{(-1)^n n^{-1/2}\}$

36 $\{(-1)^n(1/2)^n\}$

Ejer. 37–52: Encuentre la suma.

37 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k - 7)$

38 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (10 - 3k)$

39 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 5)$

40 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

41 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k(k - 2)$

42 $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (k - 1)(k - 3)$

43 $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} \frac{k - 5}{k - 1}$

44 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{3}{k + 1}$

45 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (-3)^{k-1}$

46 $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$

47 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 100$

48 $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} 5$

49 $\displaystyle\sum_{k=253}^{571} \tfrac{1}{3}$

50 $\displaystyle\sum_{k=137}^{428} 2.1$

51 $\displaystyle\sum_{j=1}^{7} \tfrac{1}{2}k^2$

52 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (3j + 2)$

53 Demuestre la fórmula 2 del teorema sobre sumas.

54 Extienda la fórmula 1 del teorema sobre sumas a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k).$$

55 Considere la sucesión definida de forma recursiva por $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ para $k \geq 1$. Describa lo que le ocurre a los términos de la sucesión cuando aumenta k.

56 Se pueden obtener aproximaciones a π a partir de la sucesión

$$x_1 = 3, \quad x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

Use la tecla TAN para tan.

a) Encuentre los primeros cinco términos de esta sucesión.

b) ¿Qué les ocurre a los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

57 **Sucesión de Bode** La sucesión de Bode, definida por

$$a_1 = 0.4, \quad a_k = 0.1(3 \cdot 2^{k-2} + 4) \quad \text{para} \quad k \geq 2,$$

se puede usar para aproximar distancias de planetas desde el Sol. Estas distancias se miden en unidades astronómicas, con 1 UA = 93,000,000 millas. Por ejemplo, el tercer término corresponde a la Tierra y el quinto al planeta menor Ceres. Aproxime los primeros cinco términos de la sucesión.

58 **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias en cierto cultivo es inicialmente de 500 y se duplica cada día.

a) Encuentre el número de bacterias presente después de uno, dos y tres días.

b) Encuentre una fórmula para el número de bacterias presente después de n días.

59 **La sucesión de Fibonacci** La sucesión de Fibonacci está definida de forma recursiva por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{k+1} = a_k + a_{k-1}, \quad \text{para} \quad k \geq 2.$$

a) Encuentre los primeros diez términos de la sucesión.

b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ dan cada vez mejores aproximaciones a τ, la proporción áurea. Calcule los primeros diez términos de esta sucesión.

60 **La sucesión de Fibonacci** La sucesión de Fibonacci puede estar definida por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Encuentre los primeros ocho términos y demuestre que concuerdan con los encontrados usando la definición del ejercicio 59.

61 **Niveles de cloro** Con frecuencia se agrega cloro a las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro aumenta por encima de 3 ppm (partes por millón), los nadadores experimentarán ardor de ojos y malestar en la piel. Si el nivel cae por debajo de 1 ppm, hay la posibilidad de que el agua se ponga verde, debido a la gran cantidad de algas. El cloro debe agregarse al agua de piscinas a intervalos regulares. Si no se agrega durante un periodo de 24 horas, alrededor de 20% del cloro se disipará en la atmósfera y 80% continuará en el agua.

a) Determine una sucesión recursiva a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días si la piscina tiene inicialmente a_0 ppm de cloro y no se agrega más.

b) Si una piscina tiene inicialmente 7 ppm de cloro, elabore una tabla para determinar el primer día en el que el nivel de cloro caerá por debajo de 3 ppm.

62 **Niveles de cloro** Consulte el ejercicio 61. Suponga que una piscina tiene inicialmente 2 ppm de cloro y se agregan 0.5 ppm al final de cada día.

a) Encuentre una sucesión recursiva a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días.

b) Determine la cantidad de cloro en la piscina después de 15 días y después de un largo tiempo.

c) Estime la cantidad de cloro que es necesario agregar diariamente para estabilizar el nivel de cloro de la piscina en 1.5 ppm.

63 **Costos de palos de golf** Una empresa fabricante de palos de golf vende palos llamados *driver* (que lanzan la pelota a mayor distancia) como sigue:

Número de palos	1-4	5-9	10+
Costo por palo	\$89.95	\$87.95	\$85.95

Encuentre una función C definida por partes que especifique el costo total por n palos. Trace una gráfica de C.

64 **Costo de reproductores de DVD** Un mayorista de aparatos electrónicos vende reproductores de DVD en \$20 cada uno por las primeras 4 unidades. Todas las unidades que pasen de 4 se venden en \$17 cada una. Encuentre una función C definida por partes que especifique el costo total de n reproductores. Trace una gráfica de C.

Ejer. 65–66: Algunas calculadoras usan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{N}$ para un número real positivo N: sea $x_1 = N/2$ y encuentre aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ usando

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{N}{x_2}\right), \quad \ldots$$

hasta obtener la precisión deseada. Use este método para aproximar el radical a una precisión de seis posiciones decimales.

65 $\sqrt{5}$ **66** $\sqrt{18}$

67 La ecuación $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} - x + 2 = 0$ tiene una raíz cercana a 2. Para aproximar esta raíz, reescriba la ecuación como $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 2$. Sea $x_1 = 2$ y encuentre aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ usando las fórmulas

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_1} + 2, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_2} + 2, \quad \ldots$$

hasta obtener una precisión de cuatro posiciones decimales.

68 La ecuación $2x + \dfrac{1}{x^4 + x + 2} = 0$ tiene una raíz cercana a 0. Use un procedimiento similar al del ejercicio 67 para calcular esta raíz a una precisión de cuatro posiciones decimales.

Ejer. 69–70: a) Demuestre que f toma valores positivos y negativos en el intervalo [1, 2]. b) Use el método del ejercicio 67, con $x_1 = 1.5$, para calcular un cero de f a una precisión de dos posiciones decimales.

69 $f(x) = x - 2 + \log x$

70 $f(x) = \log x - 10^{-x}$ (*Sugerencia:* despeje x en $\log x$.)

Ejer. 71–74: Para el n-ésimo término dado $a_n = f(n)$ de una sucesión, use la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo [1, 100] para verificar que cuando n aumenta sin límite, a_n se aproxima a algún número real c.

71 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}\right)^n$ **72** $a_n = n^{1/n}$

73 $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$ **74** $a_n = (2.1^n + 1)^{1/n}$

Ejer. 75–78: Grafique la sucesión a_k definida de forma recursiva en el modo de punto para $k = 1, 2, 3, \ldots, 20$; para ello, determine el valor de k a lo largo del eje x y el valor de a_k a lo largo del eje y. Trace la gráfica para determinar la mínima k tal que $a_k > 100$.

75 $a_1 = 0.25, \quad a_k = 1.7a_{k-1} + 0.5$

76 $a_1 = 6, \quad a_k = 1.05a_{k-1} + 4$

77 $a_1 = 7.25, \quad a_k = 0.1a_{k-1}^2 + 2$

78 $a_1 = 1, \quad a_k = 0.2a_{k-1}^3 + 1.5$

79 Población de insectos La sucesión definida por

$$a_{k+1} = ca_k(1 - a_k)$$

se usa en el estudio del crecimiento de poblaciones de insectos. La constante c recibe el nombre de factor de Malthus. Suponga que $1000a_k$ es igual al número de insectos después de k intervalos. Si inicialmente $a_1 = 0.25$, describa el comportamiento de la población de insectos para cada valor de c.

a) $c = 0.5$ **b)** $c = 1.5$ **c)** $c = 2.75$

80 Población de insectos Consulte el ejercicio 79. El factor de Malthus c afecta de forma importante la población a_k de insectos, y c se puede interpretar como el grado de fertilidad de los insectos.

a) Haga conjeturas acerca de la forma en que c afecta la población de insectos si $0 < c < 1$.

b) Pruebe su conjetura usando varios valores para c.

9.2 Sucesiones aritméticas

En esta sección y la siguiente consideramos dos tipos especiales de sucesiones: aritméticas y geométricas. El primer tipo se puede definir como sigue.

Definición de sucesión aritmética

Una sucesión $a_1, a_2, a_n, \ldots$, es una **sucesión aritmética** si hay un número real d tal que para todo entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k + d$$

El número $d = a_{k+1} - a_k$ se denomina **diferencia común** de la sucesión.

Observe que la diferencia común d es la diferencia de dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión aritmética.

EJEMPLOS **Sucesión aritmética y diferencia común**

- $-3, 2, 7, 12, \ldots, 5n - 8, \ldots$ diferencia común $= 2 - (-3) = 5$
- $17, 10, 3, -4, \ldots, 24 - 7n, \ldots$ diferencia común $= 10 - 17 = -7$

EJEMPLO 1 **Demostrar que una sucesión es aritmética**

Pruebe que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

es aritmética y encuentre la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$, entonces para todo entero positivo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k + 1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3 \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión dada es aritmética con diferencia común 3. ■

Dada una sucesión aritmética, sabemos que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k. Esto nos da una fórmula recursiva para obtener términos sucesivos. Comenzando con cualquier número real a_1, podemos obtener una sucesión aritmética con diferencia común d simplemente sumando d a a_1, luego a $a_1 + d$, y así sucesivamente, para obtener

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \quad a_1 + 4d, \quad \ldots$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

Fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

o, en general,

$$a_n = a_k + (n - k)d,$$

donde n y k son enteros positivos y d es la diferencia común.

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar un término específico de una sucesión aritmética**

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Encuentre el decimoquinto término.

SOLUCIÓN La diferencia común es

$$a_2 - a_1 = 16.5 - 20 = -3.5$$

Sustituyendo $n = 15$, $a_1 = 20$ y $d = -3.5$ en la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, nos da

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29$$ ■

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar un término específico de una sucesión aritmética**

Si el cuarto término de una sucesión aritmética es 5 y el noveno es 20, encuentre el primero y el sexto términos.

SOLUCIÓN 1 Nos dan $a_4 = 5$ y $a_9 = 20$ y deseamos encontrar a_6. Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones con las variables a_1 y d:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + (4 - 1)d & \text{sea } n = 4 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_9 = a_1 + (9 - 1)d & \text{sea } n = 9 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 + 3d & a_4 = 5 \\ 20 = a_1 + 8d & a_9 = 20 \end{cases}$$

Si de la segunda ecuación restamos la primera ecuación del sistema tendremos $15 = 5d$, o $d = 3$. Sustituyendo d por 3 en la primera ecuación, $5 = a_1 + 3d$, obtenemos $a_1 = 5 - 3d = 5 - 3(3) = -4$. En consecuencia, para encontrar el sexto término tenemos

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + (6 - 1)d && \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \\ &= (-4) + (5)(3) = 11. && a_1 = -4 \text{ y } d = 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 En esta solución usamos la fórmula general para el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

Encuentre d:

$$\begin{aligned} a_n &= a_k + (n - k)d && \text{fórmula del } n\text{-ésimo término} \\ a_9 &= a_4 + (9 - 4)d && n = 9, k = 4 \\ 20 &= 5 + 5d && \text{términos dados} \\ 15 &= 5d && \text{restamos 5} \\ 3 &= d && \text{dividimos entre 5} \end{aligned}$$

Encuentre a_1:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_4 + (1 - 4)d && n = 1, k = 4 \\ a_1 &= 5 - 3(3) && a_4 = 5, d = 3 \\ a_1 &= -4 && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que se usó $k = 4$, pero podríamos haber utilizado $k = 9$. Tal vez se pregunte si podríamos usar $n = 4$ y $k = 1$. Sí, y ello nos da $a_4 = a_1 + (4 - 1)d$, que se simplifica a $5 = a_1 + 3(3)$ y, por último, $a_1 = -4$.

Encuentre a_6:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_4 + (6 - 4)d && n = 6, k = 4 \\ a_6 &= 5 + 2(3) && a_4 = 5, d = 3 \\ a_6 &= 11 && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema contiene una fórmula para la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión aritmética.

Teorema: fórmulas para S_n

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, es una sucesión aritmética con diferencia común d, entonces la n-ésima suma parcial S_n (esto es, la suma de los primeros n términos) está dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \qquad \text{o} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

DEMOSTRACIÓN Podemos escribir

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 \qquad\quad + a_3 \qquad\quad + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Empleando varias veces las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales obtendremos

$$S_n = (a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + [d + 2d + \cdots + (n-1)d]$$

donde a_1 aparece n veces dentro del primer par de paréntesis. Así,

$$S_n = na_1 + d[1 + 2 + \cdots + (n-1)]$$

La expresión dentro de los corchetes es la suma de los primeros $n - 1$ enteros positivos. Usando la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos, $S_n = n(n+1)/2$, del ejemplo 6 de la sección 9.1, pero con $n - 1$ en lugar de n y n en lugar de $n + 1$, tenemos

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Sustituyendo en la última ecuación por S_n y factorizando $n/2$ tendremos

$$S_n = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Como $a_n = a_1 + (n-1)d$, la última ecuación es equivalente a

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

■

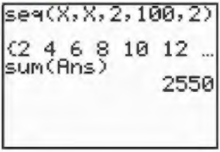
EJEMPLO 4 **Cómo encontrar una suma de enteros pares**

Encuentre la suma de todos los enteros pares del 2 al 100.

SOLUCIÓN Este problema es equivalente a encontrar la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

FIGURA 1



Sustituyendo $n = 50$, $a_1 = 2$ y $a_{50} = 100$ en $S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$, resulta

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}(2 + 100) = 2550.$$

Alternativamente, podemos usar $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ con $d = 2$:

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(2) + (50-1)2] = 25[4 + 98] = 2550$$

(Vea en la figura 1 el apoyo de calculadora para este resultado.) ■

La **media aritmética** de dos números a y b se define como $(a + b)/2$. Este es el **promedio** de a y b. Note que los tres números

$$a, \quad \frac{a+b}{2} \quad \text{y} \quad b$$

constituyen una sucesión aritmética (finita) con una diferencia común de $d = \frac{1}{2}(b - a)$. Este concepto se puede generalizar como sigue: si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son números reales tales que

$$a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$$

es una sucesión aritmética (finita), entonces $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son ***k* medias aritméticas** entre los números *a* y *b*. El proceso de determinar estos números se refiere a cómo *insertar k medias aritméticas entre a y b*.

EJEMPLO 5 **Cómo insertar medias aritméticas**

Inserte tres medias aritméticas entre 2 y 9.

SOLUCIÓN Deseamos encontrar tres números reales c_1, c_2 y c_3 tales que la siguiente sea una sucesión aritmética (finita):

$$2, c_1, c_2, c_3, 9$$

Podemos considerar esta como una sucesión aritmética con primer término $a_1 = 2$ y quinto término $a_5 = 9$. Para encontrar la diferencia común d, podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1)d && \text{sea } n = 5 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d \\ 9 &= 2 + 4d && a_5 = 9 \text{ y } a_1 = 2 \\ d &= \tfrac{7}{4} && \text{despejamos } d \end{aligned}$$

Entonces, las medias aritméticas son

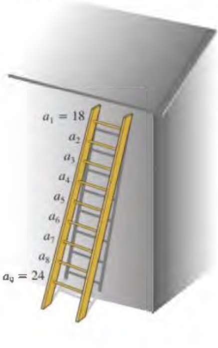
$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + d = 2 + \tfrac{7}{4} = \tfrac{15}{4} \\ c_2 &= c_1 + d = \tfrac{15}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{22}{4} = \tfrac{11}{2} \\ c_3 &= c_2 + d = \tfrac{22}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{29}{4}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 **Aplicación de una sucesión aritmética**

Un carpintero desea construir una escalera con nueve peldaños, cuyas longitudes disminuyen de manera uniforme de 24 pulgadas en la base a 18 en la parte superior. Determine las longitudes de los siete peldaños intermedios.

FIGURA 2



SOLUCIÓN En la figura 2 se ilustra la escalera. Las longitudes de los peldaños han de formar una sucesión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_9$ con $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$. En consecuencia, necesitamos insertar siete medias aritméticas entre 18 y 24. Usando $a_n = a_1 + (n-1)d$ con $n = 9$, $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$ tendremos

$$24 = 18 + 8d \qquad \text{o bien, lo que es equivalente,} \qquad 8d = 6$$

Por lo tanto, $d = \frac{6}{8} = 0.75$, y los peldaños intermedios tienen longitudes (en pulgadas)

$$18.75, \quad 19.5, \quad 20.25, \quad 21, \quad 21.75, \quad 22.5 \quad \text{y} \quad 23.25$$

■

A veces es deseable expresar una suma en términos de notación de sumatoria, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 **Cómo expresar una suma en notación de suma**

Exprese en términos de notación de sumatoria:

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{14} + \tfrac{4}{19} + \tfrac{5}{24} + \tfrac{6}{29}$$

SOLUCIÓN Los seis términos de la suma no forman una sucesión aritmética, pero los numeradores y denominadores de las fracciones, *considerados por separado*, son cada uno de ellos una sucesión aritmética. Específicamente, tenemos lo siguiente:

Numeradores: 1, 2, 3, 4, 5, 6 — diferencia común 1

Denominadores: 4, 9, 14, 19, 24, 29 — diferencia común 5

Usando dos veces la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión aritmética, obtenemos el siguiente n-ésimo término para cada sucesión:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)1 = n$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)5 = 5n - 1$$

Por lo tanto, el n-ésimo término de la suma dada es $n/(5n-1)$ y podemos escribir

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29} = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{5n-1}$$ ■

9.2 Ejercicios

Ejer. 1–2: Muestre que la sucesión dada es aritmética y encuentre la diferencia común.

1 $-6, -2, 2, \ldots, 4n - 10, \ldots$

2 $53, 48, 43, \ldots, 58 - 5n, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el n-ésimo término, el quinto término y el décimo término de la sucesión aritmética.

3 $2, 6, 10, 14, \ldots$

4 $1, 7, 13, 19, \ldots$

5 $16, 13, 10, 7, \ldots$

6 $32, 27, 22, 17, \ldots$

7 $3, 2.7, 2.4, 2.1, \ldots$

8 $-6, -4.5, -3, -1.5, \ldots$

9 $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \ldots$

10 $4.2, 1.5, -1.2, -3.9, \ldots$

11 $-8x + 12, -6x + 9, -4x + 6, -2x + 3, \ldots$

12 $x - 8, x - 3, x + 2, x + 7, \ldots$

13 $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \ldots$

14 $\log 1000, \log 100, \log 10, \log 1, \ldots$

Ejer. 15–16: Encuentre la diferencia común en la sucesión aritmética con los términos especificados.

15 $a_2 = 21, a_6 = -11$

16 $a_4 = 14, a_{11} = 35$

Ejer. 17–24: Encuentre el término especificado de la sucesión aritmética que tiene los dos términos dados.

17 a_{12}; $a_1 = 9.1$, $a_2 = 7.5$

18 a_{11}; $a_1 = 2 + \sqrt{2}$, $a_2 = 3$

19 a_1; $a_6 = 2.7$, $a_7 = 5.2$

20 a_1; $a_8 = 47$, $a_9 = 53$

21 a_{15}; $a_3 = 7$, $a_{20} = 43$

22 a_{10}; $a_2 = 1$, $a_{18} = 49$

23 a_{410}; $a_8 = 201$, $a_{317} = 2364$

24 a_{500}; $a_9 = -253$, $a_{412} = 2971$

Ejer. 25–30: Encuentre la suma S_n de la sucesión aritmética que satisface las condiciones dadas.

25 $a_1 = 40$, $d = -3$, $n = 30$

26 $a_1 = 5$, $d = 0.1$, $n = 40$

27 $a_1 = -9$, $a_{10} = 15$, $n = 10$

28 $a_1 = 5$, $a_{20} = 9$, $n = 20$

29 $a_7 = \frac{7}{3}$, $d = -\frac{2}{3}$, $n = 15$

30 $a_6 = -2$, $d = -\frac{3}{4}$, $n = 40$

Ejer. 31–36: Encuentre la suma.

31 $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

32 $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

33 $\sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{2}k + 7\right)$

34 $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3}k + 3\right)$

35 $\sum_{k=126}^{592} (5k + 2j)$

36 $\sum_{k=88}^{371} (3j - 2k)$

Ejer. 37–42: Exprese la suma en términos de notación de sumatoria. (Las respuestas no son únicas.)

37 $4 + 11 + 18 + 25 + 32$

38 $3 + 8 + 13 + 18 + 23$

39 $4 + 11 + 18 + \cdots + 466$

40 $3 + 8 + 13 + \cdots + 463$

41 $\frac{3}{7} + \frac{6}{11} + \frac{9}{15} + \frac{12}{19} + \frac{15}{23} + \frac{18}{27}$

42 $\frac{5}{13} + \frac{10}{11} + \frac{15}{9} + \frac{20}{7}$

Ejer. 43–44: Exprese la suma en términos de notación de sumatoria y encuentre la suma.

43 $8 + 19 + 30 + \cdots + 16{,}805$

44 $2 + 11 + 20 + \cdots + 16{,}058$

Ejer. 45–50: Encuentre el número de términos de la sucesión aritmética con las condiciones dadas:

45 $a_1 = 5$, último término $= 11$, $S = 224$

46 $a_1 = 3$, último término $= 17$, $S = 420$

47 $a_1 = -2$, $d = \frac{1}{4}$, $S = 21$

48 $a_1 = -1$, $d = \frac{1}{5}$, $S = 21$

49 $a_1 = -\frac{29}{6}$, $d = \frac{1}{3}$, $S = -36$

50 $a_6 = -3$, $d = 0.2$, $S = -33$

Ejer. 51–54: Inserte el número dado de medias aritméticas entre los números.

51 cinco, 2 y 10

52 tres, 3 y -5

53 tres, 52 y -56

54 cuatro, 22 y 108

55 **a)** Encuentre el número de enteros entre 32 y 395 que son divisibles entre 6.

b) Encuentre su suma.

56 **a)** Encuentre el número de enteros negativos mayores que -500 que son divisibles entre 33.

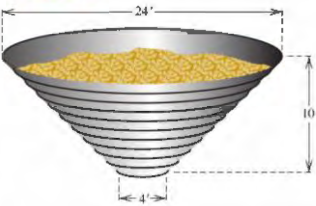
b) Encuentre su suma.

57 **Pila de troncos** Una pila de troncos tiene 24 troncos en la capa del fondo, 23 en la segunda capa, 22 en la tercera, y así sucesivamente. La capa superior contiene 10 troncos. Encuentre el número total de troncos en la pila.

58 **Asientos en un estadio** Las primeras diez filas de asientos en cierta sección de un estadio tienen 30 asientos, 32 asientos, 34 asientos, y así sucesivamente. Las filas de la 11 a la 20 tienen cada una de ellas 50 asientos. Encuentre el número total de asientos en la sección.

59 **Construcción de una tolva para granos** Se fabricará una tolva para granos con forma de cono truncado (vea la figura), la cual debe medir 10 pies de alto con 11 anillos metálicos colocados uniformemente a su alrededor, desde la abertura de 4 pies en el fondo a la de 24 pies en la parte superior. Encuentre la longitud total del metal necesario para hacer los anillos.

EJERCICIO 59



60 **Bajar por inercia** Un ciclista baja por inercia en una pendiente, recorriendo 4 pies el primer segundo. En los segundos sucesivos, el ciclista viaja a 5 pies más rápido que el segundo precedente. Si llega hasta la base de la pendiente en 11 segundos, encuentre la distancia total recorrida.

61 **Dinero de un premio** Un concurso tendrá cinco premios en dinero que totalizan $5,000 y habrá una diferencia de $100 entre premios sucesivos. Encuentre el primer premio.

62 **Bonos de ventas** Una empresa distribuirá $46,000 en bonos a sus diez mejores vendedores. El décimo vendedor de la lista recibirá $1,000 y la diferencia en dinero de los bonos entre vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Encuentre el bono para cada vendedor.

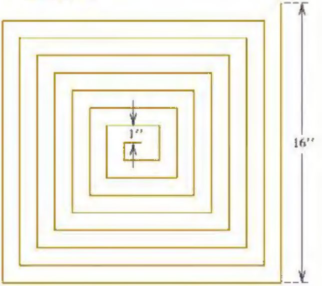
63 **Distancia a la que cae un cuerpo** Suponiendo que la resistencia del aire es insignificante, un cuerpo pequeño que se suelta desde un globo de aire caliente cae 16 pies durante el primer segundo, 48 pies el siguiente segundo, 80 pies durante el tercer segundo, 112 pies durante el cuarto y así sucesivamente. Encuentre una expresión para la distancia a la que cae el cuerpo en n segundos.

64 Si f es una función lineal, demuestre que la sucesión con n-ésimo término $a_n = f(n)$ es una sucesión aritmética.

65 **Sucesión genética** La sucesión definida de forma recursiva por $x_{k+1} = x_k/(1 + x_k)$ ocurre en genética en el estudio de la eliminación de un gen deficiente de una población. Demuestre que la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/x_n$ es aritmética.

66 **Dimensiones de un laberinto** Encuentre la longitud total de la curva en rojo de la figura, si el ancho del laberinto formado por la curva mide 16 pulgadas y todos los pasillos del laberinto tienen ancho de 1 pulgada. ¿Cuál es la longitud si el ancho del laberinto mide 32 pulgadas?

EJERCICIO 66



Ejer. 67–68: A veces, empresas y particulares emplean métodos de depreciación para calcular el valor de un activo en el lapso de n años de vida. En el método de dígitos de la suma de años, por cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, el valor de una propiedad disminuye en una fracción $A_k = \dfrac{n-k+1}{T_n}$ de su costo inicial, donde $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

67 **a)** Si $n = 8$, encuentre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$.

b) Demuestre que la sucesión en a) es aritmética y obtenga S_8.

c) Si el valor inicial de una propiedad es de \$1,000, ¿cuánto se habrá depreciado después de 4 años?

68 **a)** Si n es cualquier entero positivo, encuentre $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

b) Muestre que la sucesión en a) es aritmética y obtenga S_n.

9.3 Sucesiones geométricas

El segundo tipo especial de sucesión que estudiaremos, la sucesión geométrica, se presenta con frecuencia en aplicaciones.

Definición de sucesión geométrica

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, es una **sucesión geométrica** si $a_1 \neq 0$ y si hay un número real $r \neq 0$ tal que para todo entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k r$$

El número $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ se llama **razón común** de la sucesión.

Tenga en cuenta que la razón común $r = a_{k+1}/a_k$ es la razón de dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión geométrica.

EJEMPLOS **Sucesión geométrica y razón común**

- $6, -12, 24, -48, \ldots, (-2)^{n-1}(6), \ldots$ razón común $= \frac{-12}{6} = -2$
- $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots, (3)^{3-n}, \ldots$ razón común $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

La fórmula $a_{k+1} = a_k r$ da un método recursivo para obtener términos de una sucesión geométrica. Comenzando con cualquier número real a_1 diferente de cero, multiplicamos por el número r repetidas veces para obtener

$$a_1, \quad a_1 r, \quad a_1 r^2, \quad a_1 r^3, \quad \ldots.$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está dado por la siguiente fórmula.

Fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

o, en general,

$$a_n = a_k r^{n-k}$$

donde n y k son enteros positivos y r es la razón común.

EJEMPLO 1 **Cómo encontrar términos de una sucesión geométrica**

Una sucesión geométrica tiene 3 como primer término y una razón común de $-\frac{1}{2}$. Encuentre los primeros cinco y el décimo términos.

SOLUCIÓN Si multiplicamos $a_1 = 3$ sucesivamente por $r = -\frac{1}{2}$, entonces los primeros cinco términos son

$$3,\quad -\tfrac{3}{2},\quad \tfrac{3}{4},\quad -\tfrac{3}{8},\quad \tfrac{3}{16}$$

Usando la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 10$, encontramos que el décimo término es

$$a_{10} = a_1 r^9 = 3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^9 = -\tfrac{3}{512}$$

■

EJEMPLO 2 **Cómo encontrar un término específico de una sucesión geométrica**

El tercer término de una sucesión geométrica es 5 y el sexto término es -40. Encuentre el primero y el octavo términos.

SOLUCIÓN 1 Nos dan $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$ y deseamos encontrar a_8. Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones con las variables a_1 y r:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 r^{3-1} & \text{sea } n = 3 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1} \\ a_6 = a_1 r^{6-1} & \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 & a_3 = 5 \\ -40 = a_1 r^5 & a_6 = -40 \end{cases}$$

Al despejar a_1 del primer sistema de ecuaciones tendremos $a_1 = 5/r^2$. Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación tendremos

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5$$

Simplificando, obtenemos $r^3 = -8$ y, por lo tanto, $r = -2$. A continuación, usamos $a_1 = 5/r^2$ para obtener

$$a_1 = \frac{5}{(-2)^2} = \frac{5}{4}$$

Finalmente, usando $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$ tendremos

$$a_8 = a_1 r^7 = \left(\tfrac{5}{4}\right)(-2)^7 = -160$$

SOLUCIÓN 2 En esta solución usamos la fórmula para el n-ésimo término de una sucesión geométrica.

Encontrar r:

$$\begin{aligned} a_n &= a_k r^{n-k} && \text{fórmula del } n\text{-ésimo término} \\ a_6 &= a_3 r^{6-3} && n = 6,\ k = 3 \\ -40 &= 5r^3 && \text{términos dados} \\ -8 &= r^3 && \text{dividimos entre 5} \\ -2 &= r && \text{obtenemos la raíz cúbica} \end{aligned}$$

Encontrar a_1:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 r^{3-1} && n = 3,\ k = 1 \\ 5 &= a_1(-2)^2 && a_3 = 5,\ r = -2 \\ \tfrac{5}{4} &= a_1 && \text{dividimos entre 4} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que se utilizó $k = 1$ para encontrar a_1, pero podríamos haber utilizado $k = 6$. Tal vez se pregunte si podríamos usar $n = 1$ y $k = 3$. Sí, y ello nos da $a_1 = a_3 r^{1-3}$, que se simplifica en $a_1 = 5(-2)^{-2}$ y, por último, $a_1 = \frac{5}{4}$.

Encontrar a_8:

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 r^{8-6} && n = 8,\ k = 6 \\ a_8 &= -40(-2)^2 && a_6 = -40,\ r = -2 \\ a_8 &= -160 && \text{simplificamos} \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema contiene una fórmula para la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica.

Teorema: fórmula para S_n

La n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica es

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \tag{1}$$

Si multiplicamos ambos lados de 1) por r, obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n. \tag{2}$$

Si restamos la ecuación (2) de la (1), se cancelan todos los términos del lado derecho, con excepción de dos, y obtenemos lo siguiente:

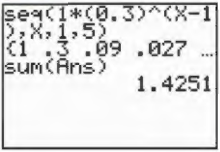
$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a_1 - a_1 r^n && \text{restamos (2) de (1)} \\ S_n(1 - r) &= a_1(1 - r^n) && \text{factorizamos ambos lados} \\ S_n &= a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} && \text{dividimos entre } (1 - r) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 **Cómo encontrar una suma de términos de una sucesión geométrica**

Si la sucesión 1, 0.3, 0.09, 0.027,... es una sucesión geométrica, encuentre la suma de los primeros cinco términos

FIGURA 1



SOLUCIÓN Si $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$ en la fórmula para S_n expresada en el teorema precedente, obtenemos

$$S_5 = a_1\frac{1 - r^5}{1 - r} = (1)\frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3} = 1.4251$$

(Vea en la figura 1 el apoyo de calculadora para este resultado.) ■

EJEMPLO 4 **El rápido crecimiento de términos de una sucesión geométrica**

Un hombre desea ahorrar dinero y guarda 1 centavo el primer día, 2 el segundo día, 4 el tercer día, y así sucesivamente.

a) Si continúa duplicando la cantidad guardada cada día, ¿cuánto debe haber ahorrado el decimoquinto día?

b) Suponiendo que no se le agote el dinero, ¿cuál es la cantidad ahorrada al término de 30 días?

SOLUCIÓN

a) La cantidad (en centavos) guardada en días sucesivos forma una sucesión geométrica

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

con primer término 1 y razón común 2. Para determinar la cantidad por guardar en el decimoquinto día usamos $a_n = a_1r^{n-1}$ con $a_1 = 1$ y $n = 15$:

$$a_{15} = a_1r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16{,}384$$

Por consiguiente, debe ahorrar \$163.84 en el decimoquinto día.

b) Para encontrar la cantidad total ahorrada después de 30 días, usamos la fórmula para S_n con $n = 30$, obteniendo (en centavos)

$$S_{30} = (1)\frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1{,}073{,}741{,}823$$

Por lo tanto, la cantidad total ahorrada es de \$10,737,418.23 ■

La terminología empleada con sucesiones geométricas es análoga a la empleada con sucesiones aritméticas. Si a y b son números reales positivos, entonces un número positivo c se denomina **media geométrica** de a y b si a, c, b es una sucesión geométrica. Si la razón común es r, entonces

$$r = \frac{c}{a} = \frac{b}{c}, \qquad \text{o} \qquad c^2 = ab$$

Obteniendo la raíz cuadrada de ambos lados de la última ecuación, vemos que *la media geométrica de los números positivos a y b es $\sqrt{ab}$*. Como generalización, k números reales positivos $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son **k medias geométricas** entre a y b si $c_1, c_2, \ldots, c_k$, es una sucesión geométrica. El proceso de determinar estos números se conoce como *insertar k medias geométricas entre a y b*.

EJEMPLOS **Medias geométricas**

	Números	**Medias geométricas**
■	20, 45	$\sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$
■	3, 4	$\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12} \approx 3.46$

Dada la serie geométrica con primer término a_1 y razón común $r \neq 1$, podemos escribir la fórmula para S_n del teorema precedente en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1}{1 - r}r^n$$

Si $|r| < 1$, entonces r^n *se aproxima a 0 cuando n aumenta* sin límite. Por lo tanto, S_n se aproxima a $a_1/(1 - r)$ cuando n aumenta sin límite. Usando la notación de flechas, tenemos

$$S_n \to \frac{a_1}{1 - r} \text{ a medida que } n \to \infty$$

El número $a_1/(1 - r)$ se denomina *suma S* de la **serie geométrica infinita**

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots.$$

Esto nos da el siguiente resultado.

Teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

El teorema precedente implica que cuando sumamos más términos de la serie geométrica infinita indicada, la suma se acerca a $a_1/(1 - r)$. El siguiente ejemplo ilustra cómo se puede usar el teorema para mostrar que todo número real representado por un decimal periódico es racional.

EJEMPLO 5 **Expresión de un decimal periódico infinito como número racional**

Encuentre un número racional que corresponda a $5.4\overline{27}$.

SOLUCIÓN Podemos escribir la expresión decimal 5.4272727... como

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

Comenzando con el segundo término, 0.027, esta suma tiene la forma dada en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. Por lo tanto, la suma S de esta serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0.027}{1 - 0.01} = \frac{0.027}{0.990} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$$

Entonces, el número deseado es

$$5.4 + \tfrac{3}{110} = \tfrac{594}{110} + \tfrac{3}{110} = \tfrac{597}{110}$$

Una prueba por división muestra que $\frac{597}{110}$ corresponde a $5.4\overline{27}$. ■

En general, dada cualquier sucesión infinita, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, la expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se denomina **serie infinita** o simplemente **serie**. Denotamos esta serie por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Cada número a_k es un **término** de la serie y a_n es el **n-ésimo término**. Como sólo sumas *finitas* se pueden agregar algebraicamente, es necesario definir lo que se entiende por *suma infinita*. Considere la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

Si hay un número S tal que $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$, entonces, como en nuestra exposición de serie geométrica infinita, S es la **suma** de la serie infinita y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

En el ejemplo anterior encontramos que el decimal periódico infinito 5.4272727... corresponde al número racional $\frac{597}{110}$. Como $\frac{597}{110}$ es la suma de una serie infinita determinada por el decimal, podemos escribir

$$\tfrac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

Si los términos de una sucesión infinita son alternadamente positivos y negativos, como en la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1}a_n] + \cdots$$

para números reales positivos a_k, entonces la expresión es una **serie alternante infinita** y la escribimos en la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots.$$

Los tipos más comunes de serie alternante infinita son las series geométricas infinitas en las que la razón común r es negativa.

EJEMPLO 6 **Cómo encontrar la suma de una serie geométrica infinita**

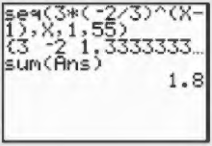
Encontrar la suma S de la serie geométrica alternante infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 3 - 2 + \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{9} + \cdots + 3\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots.$$

SOLUCIÓN Usando la fórmula para S en el teorema sobre la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 3$ y $r = -\frac{2}{3}$, obtenemos

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$
$$= \frac{3}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}$$

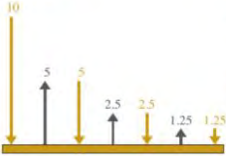
■



Para comprobar nuestro resultado del ejemplo 6, podemos sustituir ∞ con un número razonablemente grande y obtener la suma de esa serie geométrica. Como se ve en la figura, usar 55 términos nos da 1.8, la respuesta obtenida previamente.

Nota: la calculadora sólo da apoyo a nuestra respuesta; la fórmula debe usarse para encontrar sumas de series geométricas infinitas.

FIGURA 2



EJEMPLO 7 **Una aplicación de una serie geométrica infinita**

Una pelota de caucho se deja caer desde una altura de 10 metros. Suponga que rebota la mitad de la distancia después de cada caída, como se ilustra con flechas en la figura 2. Encuentre la distancia total que recorre la pelota.

SOLUCIÓN La suma de las distancias que baja la pelota y la suma de las distancias que recorre en los rebotes forman dos series geométricas infinitas:

$$\textit{Serie hacia abajo}: \ 10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$$

$$\textit{Serie hacia arriba}: \qquad 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$$

Suponemos que la distancia total S que recorre la pelota se puede encontrar sumando estas series infinitas. Esto nos da

$$\begin{aligned} S &= 10 + 2[5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots] \\ &= 10 + 2\left[5 + 5\left(\tfrac{1}{2}\right) + 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right] \end{aligned}$$

Usando la fórmula $S = a_1/(1 - r)$ con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$S = 10 + 2\left(\frac{5}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 10 + 2(10) = 30 \text{ m}$$

Un problema relacionado: ¿alguna vez llega la pelota al reposo? Vea el ejercicio de análisis 7 al final de este capítulo. ■

9.3 Ejercicios

Ejer. 1–2: Demuestre que la sucesión dada es geométrica y encuentre la razón común.

1 $5, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \ldots$

2 $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{1}{7}(3)^{n-1}, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el n-ésimo, el quinto y el octavo términos de la sucesión geométrica.

3 $8, 4, 2, 1, \ldots$

4 $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

5 $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

6 $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \ldots$

7 $5, 25, 125, 625, \ldots$

8 $2, 6, 18, 54, \ldots$

9 $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

10 $162, -54, 18, -6, \ldots$

11 $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

12 $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$

13 $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$

14 $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

Ejer. 15–18: Encuentre todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los dos términos dados.

15 $a_3 = 7, a_6 = 56$ **16** $a_4 = 1, a_7 = -27$

17 $a_4 = 3, a_6 = 9$ **18** $a_3 = 4, a_7 = \frac{1}{4}$

Ejer. 19–26: Encuentre los términos específicos de la sucesión geométrica que tiene los dos términos dados.

19 a_6; $a_1 = 4$, $a_2 = 6$

20 a_7; $a_2 = 3$, $a_3 = -\sqrt{3}$

21 a_8; $a_2 = 3$, $a_3 = -\sqrt{2}$

22 a_5; $a_1 = 4$, $a_2 = 7$

23 a_{10}; $a_4 = 4$, $a_7 = 12$

24 a_6; $a_2 = 3$, $a_5 = -81$

25 a_7; $a_1 = -4$, $a_3 = -1$

26 a_8; $a_2 = 3$, $a_4 = 6$

Ejer. 27–30: Encuentre la suma S_n de la sucesión geométrica que satisface las condiciones dadas.

27 $a_1 = \dfrac{3}{16}$, $r = 2$, $n = 9$

28 $a_1 = \dfrac{17}{16}$, $r = 3$, $n = 8$

29 $a_1 = 27$, $r = \dfrac{1}{3}$, $n = 7$

30 $a_1 = \dfrac{4}{13}$, $r = \dfrac{1}{4}$, $n = 6$

Ejer. 31–36: Encuentre la suma.

31 $\sum_{k=1}^{10} 3^k$ **32** $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

33 $\sum_{k=0}^{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ **34** $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

35 $\sum_{j=16}^{20} (2^{j-14} + 5j)$ **36** $\sum_{j=8}^{18} (3^{j-7} + 2j^2)$

Ejer. 37–40: Exprese la suma en términos de notación de sumatoria. (Las respuestas no son únicas.)

37 $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

38 $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

39 $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$ **40** $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625}$

Ejer. 41–50: Encuentre la suma de la serie geométrica infinita si existe.

41 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ **42** $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

43 $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

44 $1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots$

45 $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$

46 $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$

47 $256 + 192 + 144 + 108 + \cdots$

48 $250 - 100 + 40 - 16 + \cdots$

49 $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{x^3}{27} + \cdots, |x| < 3$

50 $2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots, |x| < \frac{1}{2}$

Ejer. 51–58: Encuentre el número racional representado por el decimal periódico.

51 $0.\overline{23}$ **52** $0.0\overline{71}$

53 $2.4\overline{17}$ **54** $10.\overline{5}$

55 $5.\overline{146}$ **56** $3.2\overline{394}$

57 $1.\overline{6124}$ **58** $123.61\overline{83}$

59 Encuentre la media geométrica de 12 y 48.

60 Encuentre la media geométrica de 20 y 25.

61 Inserte dos medias geométricas entre 4 y 500.

62 Inserte tres medias geométricas entre 2 y 512.

63 **Uso de una bomba de vacío** Una bomba de vacío extrae la mitad del aire de un recipiente en cada ciclo del pistón. Después de 10 ciclos del pistón, ¿qué porcentaje de la cantidad original de aire continúa en el recipiente?

64 **Cálculo de depreciación** La depreciación anual de cierta máquina es de 25% de su valor al principio del año. Si el costo original de la máquina es \$20,000, ¿cuál será su valor después de seis años?

65 **Crecimiento de bacterias** Cierto cultivo contiene inicialmente 10,000 bacterias y aumenta 20% cada hora.

a) Encuentre una fórmula para el número $N(t)$ de bacterias presentes después de t horas.

b) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo al término de 10 horas?

66 **Intereses sobre ahorros** Una cantidad de dinero P se deposita en una cuenta de ahorros que paga interés a una tasa de r por ciento anual capitalizado trimestralmente; el principal y el interés acumulado se dejan en la cuenta. Encuentre una fórmula para la cantidad total en la cuenta después de n años.

67 **Pelota que rebota** Una pelota de caucho se deja caer desde una altura de 60 pies. Si rebota aproximadamente dos tercios de la distancia después de cada caída, use una serie geométrica infinita para calcular la distancia total que recorre la pelota.

68 **Movimiento de un péndulo** La pesa de un péndulo oscila en un arco de 24 centímetros de largo en su primera oscilación. Si cada oscilación sucesiva es aproximadamente cinco sextos de la longitud de la precedente, use una serie geométrica infinita para calcular la distancia total que viaja la pesa.

69 **Efecto multiplicador** Una empresa manufacturera que acaba de instalarse en una pequeña comunidad pagará dos millones de dólares al año en sueldos. Se ha estimado que 60% de estos sueldos se gastarán en la localidad y 60% del dinero gastado cambiará de manos otra vez dentro de la comunidad. Este proceso, llamado *efecto multiplicador*, se repite hasta el infinito. Encuentre la cantidad total de gasto local que será generado por los sueldos de la empresa.

70 **Erradicación de plagas** En un programa de erradicación de plagas, N moscas macho esterilizadas se sueltan en una población general cada día. Se estima que 90% de estas moscas seguirán con vida en un día determinado.

a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas de la población n días después de iniciado el programa es

$$N + (0.9)N + (0.9)^2N + \cdots + (0.9)^{n-1}N.$$

b) Si la meta del programa *a largo plazo* es mantener 20,000 moscas esterilizadas en la población, ¿cuántas moscas deben soltarse todos los días?

71 **Dosis de medicamento** Cierto medicamento tiene una semivida de 2 horas en el torrente sanguíneo; está formulado para administrarse en dosis de D miligramos cada 4 horas, pero D está por determinarse.

a) Demuestre que el número de miligramos de medicamento en el torrente sanguíneo después que la n-ésima dosis se ha administrado es

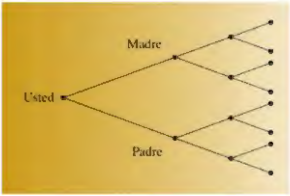
$$D + \tfrac{1}{4}D + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}D$$

y que esta suma es aproximadamente $\frac{4}{3}D$ para valores grandes de n.

b) Un nivel de más de 500 miligramos del medicamento en el torrente sanguíneo se considera peligroso. Encuentre la dosis máxima que se pueda dar repetidamente en un periodo largo.

72 **Genealogía** En la figura se muestra un árbol genealógico que muestra la generación actual (el lector) y 3 generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si usted estudiara la historia de su familia hasta 10 generaciones anteriores, ¿cuántos abuelos encontraría?

EJERCICIO 72



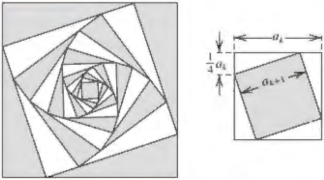
73 La primera figura muestra algunos términos de una sucesión de cuadrados $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Denote con a_k, A_k y P_k el lado, área y perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k. El cuadrado S_{k+1} está construido a partir de S_k al conectar cuatro puntos en S_k, con cada punto a una distancia de $\frac{1}{4}a_k$ desde un vértice, como se ve en la segunda figura.

a) Encuentre la relación entre a_{k+1} y a_k.

b) Encuentre a_n, A_n y P_n.

c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

EJERCICIO 73



74 La figura muestra varios términos de una sucesión formada por círculos y cuadrados alternados. Cada círculo está inscrito en un cuadrado y cada cuadrado (excluyendo el mayor) está inscrito en un círculo. Denote con S_n el área del n-ésimo cuadrado y con C_n el área del n-ésimo círculo.

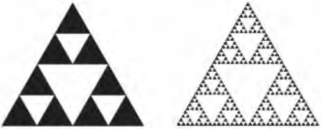
a) Encuentre las relaciones entre S_n y C_n y entre C_n y S_{n+1}.

b) ¿Qué parte del cuadrado más grande está sombreada en la figura?

EJERCICIO 74

75 **Tamiz de Sierpinski** El tamiz de Sierpinski, diseñado en 1915, es un ejemplo de un fractal (figura geométrica con cada parte igual al todo). Puede construirse comenzando con un triángulo equilátero negro sólido; este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes y se elimina el triángulo del medio. En el siguiente paso, cada uno de los tres triángulos equiláteros restantes se divide en cuatro triángulos equiláteros congruentes, y se elimina el triángulo del medio de cada uno de estos triángulos, como se ve en la primera figura. En el tercer paso se eliminan nueve triángulos. Si el proceso se continúa de forma indefinida, el resultado es el tamiz de Sierpinski (vea la segunda figura).

EJERCICIO 75



a) Encuentre una sucesión geométrica a_k que dé el número de triángulos removidos en el k-ésimo paso.

b) Calcule el número de triángulos eliminados en el decimoquinto paso.

c) Suponga que el triángulo inicial tiene un área de 1 unidad. Encuentre una sucesión geométrica b_k que dé el área eliminada en el k-ésimo paso.

d) Determine el área eliminada en el séptimo paso.

76 **Tamiz de Sierpinski** Consulte el ejercicio 75.

a) Escriba una serie geométrica que calcule el número total de triángulos eliminados después de n pasos.

b) Determine el número total de triángulos eliminados después de 12 pasos.

c) Escriba una serie geométrica que calcule el área total eliminada después de n pasos.

d) Determine el área total eliminada después de 12 pasos.

77 **Anualidad** Si se hace un depósito de \$100 el primer día de cada mes en una cuenta que paga 6% de interés por año compuesta cada mes, determine la cantidad que habrá en la cuenta después de 18 años.

78 **Anualidad** Consulte el ejercicio 77. Demuestre que si el depósito mensual es P dólares y la tasa es r% anual compuesta cada mes, entonces la cantidad A en la cuenta después de n meses está dada por

$$A = P\left(\frac{12}{r} + 1\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n - 1\right]$$

79 **Anualidad** Use el ejercicio 78 para encontrar A cuando $P =$ \$100, $r = 8\%$ y $n = 60$.

80 **Anualidad** Consulte el ejercicio 78. Si $r = 10\%$, ¿aproximadamente cuántos años se requieren para acumular \$100,000 si el depósito mensual P es de

a) \$100? **b)** \$200?

Ejer. 81–82: El *método de doble disminución de saldo* es un método de depreciación en el que, después de cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, el valor de una propiedad se reduce en la fracción

$$A_k = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}$$ **de su costo inicial.**

81 **a)** Si $n = 5$, encuentre $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

b) Muestre que la sucesión en a) es geométrica y encuentre S_5.

c) Si el valor inicial de una propiedad es \$25,000, ¿cuánto de su valor se habrá depreciado después de dos años?

82 **a)** Si n es cualquier entero positivo, encuentre $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

b) Muestre que la sucesión en a) es geométrica y encuentre S_n.

9.4 Inducción matemática

Si n es un entero positivo y con P_n denotamos el enunciado matemático $(xy)^n = x^n y^n$, obtenemos la siguiente sucesión infinita de enunciados:

$$\begin{aligned}
&\text{Enunciado } P_1\text{: } (xy)^1 = x^1y^1\\
&\text{Enunciado } P_2\text{: } (xy)^2 = x^2y^2\\
&\text{Enunciado } P_3\text{: } (xy)^3 = x^3y^3\\
&\quad\vdots\\
&\text{Enunciado } P_n\text{: } (xy)^n = x^ny^n\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Es fácil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son enunciados *verdaderos*, pero es imposible comprobar la validez de P_n para *todo* entero positivo n. Demostrar que P_n es verdadero para todo n requiere el siguiente principio.

Principio de inducción matemática Si con cada entero positivo n hay un enunciado P_n asociado, entonces todos los enunciados P_n son verdaderos, siempre que se satisfagan las siguientes dos condiciones.

1) P_1 es verdadero.

2) Siempre que k sea un entero positivo tal que P_k sea verdadero, entonces P_{k+1} también es verdadero.

Para ayudarnos a entender este principio, consideramos una sucesión infinita de enunciados marcados como

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$$

que satisfacen las condiciones 1) y 2). Por 1), el enunciado P_1 es verdadero. Como la condición 2) se cumple, siempre que el enunciado P_k sea verdadero, el *siguiente* enunciado P_{k+1} también lo será. En consecuencia, como P_1 es verdadero, P_2 también lo es, por 2). No obstante, si P_2 es verdadero, entonces, por 2), vemos que el siguiente enunciado P_3 es verdadero. Una vez más, si P_3 es verdadero, entonces, por 2), P_4 también es verdadero. Si continuamos de este modo, podemos decir que, si n es cualquier entero *particular*, entonces P_n es verdadero, porque podemos usar la condición 2) un paso a la vez, para finalmente llegar a P_n. Aun cuando este tipo de razonamiento no *demuestra* en realidad el principio de inducción matemática, lo hace plausible. El principio se demuestra en álgebra avanzada usando postulados para los enteros positivos.

Cuando apliquemos el principio de inducción matemática, siempre seguiremos dos pasos.

Pasos para aplicar el principio de inducción matemática

1 Demostrar que P_1 es verdadero.

2 *Suponer* que P_k es verdadero, y luego demostrar que P_{k+1} es verdadero.

Es frecuente que el paso 2 cause confusión. Note que no *demostramos* que P_k es verdadero (excepto para $k = 1$). En cambio, demostramos que *si* P_k es verdadero, entonces el enunciado P_{k+1} también lo es. Nos referimos al supuesto que P_k es verdadero como la **hipótesis de inducción.**

EJEMPLO 1 **Uso del principio de inducción matemática**

Use inducción matemática para demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, denotemos con P_n el enunciado

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Los siguientes son algunos casos especiales de P_n.

Si $n = 1$, entonces P_1 es

$$1=\frac{1(1+1)}{2}\text{; es decir, } 1 = 1$$

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}\text{; es decir, } 3 = 3$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}\text{; es decir, } 6 = 6$$

Aun cuando es instructivo comprobar la validez de P_n para diversos valores de n como lo hemos hecho, no es necesario hacerlo. Sólo debemos aplicar a este ejemplo el proceso de dos pasos indicado antes. Entonces, procedemos como sigue:

Paso 1 Si sustituimos $n = 1$ en P_n, entonces el lado izquierdo contiene sólo el número 1 y el lado derecho es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es igual a 1. Por lo tanto, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Nuestra meta es demostrar que P_{k+1} es verdadero, es decir, que

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Podemos demostrar que la última fórmula es verdadera si reescribimos el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción como sigue:

(*continúa*)

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+3+\cdots+k)+(k+1) && \text{agrupamos los primeros } k \text{ términos}\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) && \text{hipótesis de inducción}\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} && \text{sumamos términos}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{factorizamos } k+1\\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} && \text{cambiamos forma de } k+2
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero y, por lo tanto, la demostración por inducción matemática está completa. ■

EJEMPLO 2 **Uso del principio de inducción matemática**

Demuestre que para cada entero positivo n,

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el enunciado dado. Observe que esta es una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos impares. De nuevo seguimos el procedimiento de dos pasos.

Paso 1 Sustituyendo 1 por n en P_n, obtenemos

$$
\begin{aligned}
1^2 &= \frac{(1)(2-1)(2+1)}{3}\\
&= \frac{3}{3}=1.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$1^2+3^2+\cdots+[2(k+1)-1]^2=\frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

Esta ecuación se simplifica a

$$1^2+3^2+\cdots+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Recuerde que el término siguiente al último en el lado izquierdo de la ecuación (el k-ésimo término) es $(2k-1)^2$. De un modo semejante al empleado en la solución del ejemplo 1, podemos demostrar la fórmula para P_{k+1} al reescribir el lado izquierdo y usar la hipótesis de inducción como sigue:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 &= [1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] + (2k+1)^2 && \text{agrupamos los primeros } k \text{ términos}\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 && \text{hipótesis de inducción}\\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} && \text{sumamos términos}\\
&= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} && \text{factorizamos } 2k+1\\
&= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} && \text{simplificamos}\\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} && \text{factorizamos y cambiamos el orden}
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que P_{k+1} es verdadero y, por lo tanto, P_n es verdadero para toda n. ■

EJEMPLO 3 **Uso del principio de inducción matemática**

Demuestre que 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para todo entero positivo n.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el siguiente enunciado:

$$2 \text{ es un factor de } n^2 + 5n$$

Seguiremos el procedimiento de dos pasos.

Paso 1 Si $n = 1$, entonces

$$n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3.$$

Así, 2 es un factor de $n^2 + 5n$ para $n = 1$; esto es, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$2 \text{ es un factor de } k^2 + 5k$$

o bien, lo que es equivalente, $\quad k^2 + 5k = 2p$

para algún entero p.

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero, es decir, que

$$2 \text{ es un factor de } (k+1)^2 + 5(k+1).$$

Podemos hacer esto como sigue

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 + 5(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 && \text{multiplicamos}\\
&= (k^2 + 5k) + (2k + 6) && \text{reacomodamos términos}\\
&= 2p + 2(k+3) && \text{hipótesis de inducción, factorizamos } 2k+6\\
&= 2(p + k + 3) && \text{factorizamos 2}
\end{aligned}
$$

Como 2 es un factor de la última expresión, P_{k+1} es verdadero y, por lo tanto, P_n es verdadero para todo valor de n. ■

Sea j un entero positivo y suponga que con cada entero $n \geq j$ está asociado un enunciado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, entonces los enunciados están numerados P_6, P_7, P_8, ... El principio de inducción matemática se puede extender para abarcar esta situación. Para demostrar que los enunciados P_n son verdaderos para $n \geq j$, usamos los siguientes dos pasos en la misma forma que hicimos para $n \geq 1$.

Pasos para aplicar el principio extendido de inducción matemática para P_k, $k \geq j$	**1** Demuestre que P_j es verdadero. **2** Suponga que P_k es verdadero con $k \geq j$, y luego demuestre que P_{k+1} es verdadero.

EJEMPLO 4 **Uso del principio extendido de inducción matemática**

Sea a un número real diferente de cero tal que $a > -1$. Demuestre que

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, denotemos con P_n la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Note que P_1 es *falso*, porque $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. No obstante, podemos demostrar que P_n es verdadero para $n \geq 2$ si usamos el principio extendido con $j = 2$.

Paso 1 Primero observamos que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como $a \neq 0$, tenemos que $a^2 > 0$ y, por lo tanto, $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ o, lo que es equivalente, $(1 + a)^2 > 1 + 2a$. Por consiguiente, P_2 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Deseamos demostrar que P_{k+1} es verdadero; es decir, que

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Para demostrar la última desigualdad, primero observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &= (1 + a)^k(1 + a)^1 && \text{ley de los exponentes} \\ &> (1 + ka)(1 + a) && \text{hipótesis de inducción y } 1 + a > 0 \end{aligned}$$

A continuación, vemos que

$$\begin{aligned} (1 + ka)(1 + a) &= 1 + ka + a + ka^2 && \text{multiplicamos} \\ &= 1 + (ka + a) + ka^2 && \text{agrupamos términos} \\ &= 1 + (k + 1)a + ka^2 && \text{factorizamos } a \\ &> 1 + (k + 1)a && \text{porque } ka^2 > 0 \end{aligned}$$

Las últimas dos desigualdades nos dan

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Entonces, P_{k+1} es verdadero y la demostración por inducción matemática está completa. ■

Hemos visto diversos ejemplos de demostración de enunciados mediante la aplicación del principio de inducción matemática. Usted tal vez se pregunte: "¿de dónde salieron estos enunciados?". Es frecuente que estos enunciados sean "descubiertos" al observar patrones, combinar resultados de varios campos de las matemáticas o al reconocer ciertos tipos o categorías de relaciones. Dos de estos enunciados se dan en los ejercicios 41 y 42 en esta sección, y otros dos enunciados (ligeramente más difíciles) se presentan en los ejercicios de análisis 3 y 4 al final del capítulo.

9.4 Ejercicios

Ejer. 1–28: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo n.

1 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

2 $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n + 1)$

3 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

4 $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n - 3) = 3n^2$

5 $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3) = \frac{1}{2}n(5n - 1)$

6 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$

7 $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

8 $3 + 12 + 48 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$

9 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$

10 $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

11 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

12 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

13 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

14 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

15 $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

16 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

17 $n < 2^n$

18 $1 + 2n \leq 3^n$

19 $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

20 Si $0 < a < b$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

21 3 es un factor de $n^3 - n + 3$.

22 2 es un factor de $n^2 + n$.

23 4 es un factor de $5^n - 1$.

24 9 es un factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

25 Si a es mayor que 1, entonces $a^n > 1$.

26 Si $r \neq 1$, entonces

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

27 $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$.
(*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.)

28 $a + b$ es un factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

Ejer. 29–34: Encuentre el mínimo entero positivo j para el cual el enunciado es verdadero. Use el principio extendido de inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j.

29 $n + 12 \leq n^2$

30 $n^2 + 18 \leq n^3$

31 $5 + \log_2 n \leq n$

32 $n^2 \leq 2^n$

33 $2n + 2 \leq 2^n$

34 $n \log_2 n + 20 \leq n^2$

Ejer. 35–40: Exprese la suma en términos de n. (*Sugerencia:* de la sección 9.1, use el teorema sobre sumas, ejemplo 6, y el teorema sobre la suma de una constante; también use los ejercicios 11 y 12 anteriores.)

35 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k + 2)$

36 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k - 3)$

37 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$

38 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$

39 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 2k - 1)$

40 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$

Ejer. 41–42: a) Evalúe la fórmula dada para los valores expresados de n, y resuelva el sistema de ecuaciones resultante para a, b, c y d. (Este método se puede usar a veces para obtener fórmulas para sumas.) b) Compare el resultado del inciso a) con el ejercicio indicado y explique por qué este método no demuestra que la fórmula es verdadera para todo valor de n.

41 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn$;
$n = 1, 2, 3$ (Ejercicio 11)

42 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$;
$n = 1, 2, 3, 4$ (Ejercicio 12)

Ejer. 43–46: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo n.

43 $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$

44 $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$

45 Demuestre el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$$

para todo entero positivo n.

46 Demuestre que para todo entero positivo $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por la expresión $(n - 2) \cdot 180°$.

9.5 Teorema del binomio

Un **binomio** es una suma $a + b$, donde a y b representan números. Si n es un entero positivo, entonces una fórmula general para *expandir* $(a + b)^n$ (esto es, para expresarlo como suma) está dada por el **teorema del binomio**. En esta sección usaremos inducción matemática para establecer esta fórmula general. Los siguientes casos especiales se pueden obtener por multiplicación:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Estas expansiones de $(a + b)^n$ para $n = 2, 3, 4$ y 5 tienen las siguientes propiedades:

1) Hay $n + 1$ términos, siendo a^n el primero y b^n el último.

2) A medida que continuamos de cualquier término al siguiente, la potencia de a disminuye 1 y la potencia de b aumenta 1. Para cada término, la suma de los exponentes de a y b es n.

3) Cada término tiene la forma $(c)a^{n-k}b^k$, donde el coeficiente c es un entero y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4) La siguiente fórmula es verdadera para cada uno de los primeros n términos de la expansión:

$$\frac{(\text{coeficiente del término}) \cdot (\text{exponente de } a)}{\text{número del término}} = \text{coeficiente del siguiente término}$$

La tabla siguiente ilustra la propiedad 4 para la expansión de $(a + b)^5$.

Término	Número de término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del término siguiente
a^5	1	1	5	$\frac{1 \cdot 5}{1} = 5$
$5a^4b$	2	5	4	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
$10a^3b^2$	3	10	3	$\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$
$10a^2b^3$	4	10	2	$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$
$5ab^4$	5	5	1	$\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$

A continuación, consideremos $(a + b)^n$ para un entero positivo arbitrario n. El primer término es a^n, que tiene coeficiente 1. Si suponemos que la propiedad 4 es verdadera, obtenemos los coeficientes sucesivos que aparecen en la siguiente tabla.

Término	Número de término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del término siguiente
a^n	1	1	n	$\dfrac{1 \cdot n}{1} = n$
$\dfrac{n}{1}a^{n-1}b$	2	$\dfrac{n}{1}$	$n - 1$	$\dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$
$\dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}a^{n-2}b^2$	3	$\dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$	$n - 2$	$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a^{n-3}b^3$	4	$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	$n - 3$	$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

El patrón que aparece en la quinta columna lleva a la siguiente fórmula para el coeficiente del término general.

Coeficiente del $(k + 1)$-ésimo término de la expansión de $(a + b)^n$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

El $(k + 1)$-ésimo coeficiente se puede escribir en una forma compacta usando **notación factorial**. Si n es cualquier entero no negativo, entonces el símbolo $n!$ (*n factorial*) se define como sigue.

Definición de $n!$

1) $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 1 \quad \text{si} \quad n > 0$
2) $0! = 1$

Por lo tanto, si $n > 0$, entonces $n!$ es el producto de los primeros n enteros positivos. La definición $0! = 1$ se usa para que ciertas fórmulas que contienen factoriales sean verdaderas para todos los enteros *no negativos*.

EJEMPLOS n **factorial**

- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
- $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320$

Note el rápido crecimiento de $n!$ a medida que aumenta n.

Las aproximaciones factoriales se muestran a tres posiciones decimales. (El número de posiciones decimales se puede cambiar con [illegible].)

Factoriales

20 [illegible] ◁ 4 ENTER

```
20!
        2.433E18
30!
        2.653E32
40!
        8.159E47
```

A veces deseamos simplificar cocientes donde numerador y denominador contienen factoriales, como se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS **Simplificación de cocientes de factoriales**

- $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$
- $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Al igual que en el ejemplo anterior, si n y k son enteros positivos y $k < n$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \cdot [(n-k)!]}{(n-k)!} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1),\end{aligned}$$

que es el numerador del coeficiente del $(k+1)$-ésimo término de $(a+b)^n$. Dividiendo entre el denominador $k!$ tendremos la siguiente forma alternativa para el $(k+1)$-ésimo coeficiente:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Estos números se denominan **coeficientes binomiales** y con frecuencia se denotan con el símbolo $\dbinom{n}{k}$ o el símbolo $C(n, k)$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Coeficiente del $(k+1)$-ésimo término de la expansión de $(a+b)^n$ (forma alternativa)	$\dbinom{n}{k} = C(n,k) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Los símbolos $\dbinom{n}{k}$ o $C(n, k)$ se leen a veces como "n de k".

EJEMPLO 1 **Evaluar $\dbinom{n}{k}$**

Encuentre $\dbinom{5}{0}, \dbinom{5}{1}, \dbinom{5}{2}, \dbinom{5}{3}, \dbinom{5}{4}$ y $\dbinom{5}{5}$.

SOLUCIÓN Estos seis números son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$, que tabulamos antes en esta sección. Por definición,

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{5!}{1 \cdot 5!} = 1$$
$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5!}{1 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$
$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$
$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5!}{4! \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$
$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{5!}{5! \cdot 1} = 1$$
■

EJEMPLO 2 **Simplificación de un cociente de factoriales**

Reescriba $(3n + 3)!/(3n)!$ como una expresión que no contenga factoriales.

SOLUCIÓN Por la definición de $n!$, podemos escribir $(3n + 3)!$ como

$$(3n+3)(3n+2)(3n+1)\underbrace{(3n)(3n-1)(3n-2)\cdots(3)(2)(1)}_{(3n)!}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{(3n+3)!}{(3n)!} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}}{\cancel{(3n)!}} && \text{definición de } n! \\ &= (3n+3)(3n+2)(3n+1). && \text{cancelamos } (3n)! \neq 0 \end{aligned}$$
■

El teorema del binomio se puede expresar como sigue.

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Usando notación de sumatoria, podemos escribir el teorema del binomio como

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Tenga en cuenta que hay $n + 1$ términos (no n términos) en la expansión $(a + b)^n$, y por lo tanto,

$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ es una fórmula para el $(k + 1)$-ésimo término de la expansión.

Un planteamiento alterno del teorema del binomio es como sigue. (Al final de esta sección se presenta una demostración.)

Teorema del binomio (forma alternativa)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Los ejemplos siguientes se pueden resolver ya sea usando las fórmulas generales del teorema del binomio o por el uso reiterado de la propiedad 4, expresada al inicio de esta sección.

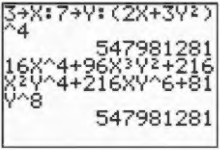
EJEMPLO 3 Encontrar una expansión binomial

Encuentre la expansión binomial de $(2x+3y^2)^4$.

SOLUCIÓN Usamos el teorema del binomio con $a = 2x$, $b = 3y^2$ y $n = 4$:

$$\begin{aligned}(2x+3y^2)^4 &= (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y^2)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(3y^2)^3 + (3y^2)^4 \\ &= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8 \\ &= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8\end{aligned}$$

FIGURA 1



Al examinar los términos de la expansión de izquierda a derecha, vemos que los exponentes en x disminuyen 1 y que los exponentes en y aumentan 2. Es buena idea comprobar los patrones de exponentes después de simplificar una expansión binomial.

La figura 1 apoya la exactitud de la expansión. ■

El siguiente ejemplo ilustra que si a o b es negativo, entonces los términos de la expansión son alternadamente positivos y negativos.

EJEMPLO 4 Encontrar una expansión binomial

Expanda $\left(\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5$.

SOLUCIÓN Los coeficientes binomiales para $(a+b)^5$ se calcularon en el ejemplo 1. Por lo tanto, si $a = 1/x$, $b = -2\sqrt{x}$ y $n = 5$ en el teorema del binomio, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 &= \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x})^1 + 10\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2 \\ &\quad + 10\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^1(-2\sqrt{x})^4 + (-2\sqrt{x})^5,\end{aligned}$$

que se pueden escribir como

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{1/2}} + 80x - 32x^{5/2}$$ ■

Para encontrar un término específico de $(a + b)^n$, es conveniente primero encontrar el exponente k que se ha de asignar a b. Note que, por el teorema del binomio, *el exponente de b es siempre uno menos que el número del término*. Una vez encontrada k, sabemos que el exponente de a es $n - k$ y el coeficiente es $\binom{n}{k}$

EJEMPLO 5 **Encontrar un término específico de una expansión binomial**

Encontrar el quinto término en la expansión de $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$.

SOLUCIÓN Sea $a = x^3$ y $b = \sqrt{y}$. El exponente de b en el quinto término es $k = 5 - 1 = 4$ y, por lo tanto, el exponente de a es $n - k = 13 - 4 = 9$. De la exposición del párrafo precedente obtenemos

$(k + 1)$-ésimo término $= \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$\binom{13}{4}(x^3)^9(\sqrt{y})^4 = \frac{13!}{4!(13-4)!}x^{27}y^2 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}x^{27}y^2 = 715x^{27}y^2$$

EJEMPLO 6 **Encontrar un término específico de una expansión binomial**

Encuentre el término que contiene q^{10} en la expansión binomial de $(\frac{1}{3}p + q^2)^{12}$.

SOLUCIÓN Del enunciado del teorema del binomio con $a = \frac{1}{3}p$, $b = q^2$ y $n = 12$, cada término de la expansión tiene la forma

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{12}{k}\left(\frac{1}{3}p\right)^{12-k}(q^2)^k$$

Como $(q^2)^k = q^{2k}$, sea $k = 5$ para obtener el término que contiene q^{10}. Al hacer esto tendremos

$$\binom{12}{5}\left(\frac{1}{3}p\right)^{12-5}(q^2)^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!}\left(\frac{1}{3}\right)^7p^7q^{10} = \frac{88}{243}p^7q^{10}$$

Hay un interesante conjunto triangular de números, llamado **triángulo de Pascal**, que se puede usar para obtener coeficientes binomiales. Los números están dispuestos como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Los números de la segunda fila son los coeficientes de la expansión de $(a + b)^1$; los de la tercera fila son los coeficientes determinados por $(a + b)^2$; los de la cuarta fila se obtienen de $(a + b)^3$, y así sucesivamente. Cada número del conjunto que es diferente de 1 se puede encontrar al sumar los dos números de la fila anterior que aparecen arriba e inmediatamente a la izquierda y derecha del número, como se ilustra en la solución del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 **Uso del triángulo de Pascal**

Encuentre la octava fila del triángulo de Pascal y úsela para expandir $(a + b)^7$.

SOLUCIÓN Reescribamos la séptima fila y luego usemos el proceso descrito líneas antes. En la siguiente serie de números, las flechas indican que dos números de la séptima fila se suman para obtener los números de la octava fila.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

La octava fila nos da los coeficientes de la expansión de $(a + b)^7$:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$ ■

El triángulo de Pascal es útil para expandir pequeñas potencias de $a + b$; no obstante, para expandir potencias grandes o encontrar un término específico, como en los ejemplos 5 y 6, la fórmula general dada por el teorema del binomio es más útil.

Concluiremos esta sección dando una demostración del teorema del binomio mediante el uso de inducción matemática.

Demostración del teorema del binomio Para cada entero positivo n, denotemos con P_n el enunciado dado en la forma alternativa del teorema del binomio.

Paso 1 Si $n = 1$, el enunciado se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. En consecuencia, P_1 es verdadero.

Paso 2 Suponga que P_k es verdadero. Así, la hipótesis de inducción es

$$\begin{aligned}(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} \\ + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \cdots + kab^{k-1} + b^k\end{aligned}$$

Hemos mostrado el r-ésimo término y el $(r + 1)$-ésimo término en la expansión anterior.

Para demostrar que P_{k+1} es verdadero, primero escribimos

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k(a + b).$$

Usando la hipótesis de inducción para sustituir por $(a + b)^k$ y luego multiplicando esa expresión por $a + b$, obtenemos

$$\begin{aligned}(a + b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^kb + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k\right] \\ + \left[a^kb + ka^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + kab^k + b^{k+1}\right]\end{aligned}$$

donde los términos del primer par de corchetes son resultado de multiplicar por a el lado derecho de la hipótesis de inducción y los términos del segundo par de corchetes son resultado de multiplicar por b. A continuación, reacomodamos y combinamos términos:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^kb + \left(\frac{k(k-1)}{2!} + k\right)a^{k-1}b^2 + \cdots \\ + \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\right)a^{k-r+1}b^r \\ + \cdots + (1+k)ab^k + b^{k+1}\end{aligned}$$

Si los coeficientes se simplifican, obtenemos el enunciado P_n con $k + 1$ sustituido por n. Entonces, P_{k+1} es verdadero y, por lo tanto, P_n se cumple para todo entero positivo n, lo que completa la demostración. ■

9.5 Ejercicios

Ejer. 1–12: Evalúe la expresión.

1 $6!0!$ 2 $8!0!$

3 $3!5!$ 4 $4!7!$

5 $\dfrac{8!}{5!}$ 6 $\dfrac{6!}{3!}$

7 $\dbinom{8}{0}$ 8 $\dbinom{9}{9}$

9 $\dbinom{7}{5}$ 10 $\dbinom{8}{4}$

11 $\dbinom{52}{5}$ 12 $\dbinom{52}{2}$

Ejer. 13–18: Reescriba como una expresión que no contenga factoriales.

13 $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ 14 $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

15 $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$ 16 $\dfrac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

17 $\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2}$ 18 $\dfrac{[(2n+2)!]^2}{[(2n)!]^2}$

Ejer. 19–32: Use el teorema del binomio para expandir y simplificar.

19 $(4x-y)^3$ 20 $(x^2+2y)^3$

21 $(x+y)^6$ 22 $(x+y)^4$

23 $(x-y)^7$ 24 $(x-y)^5$

25 $(3t-5s)^4$ 26 $(2t-s)^5$

27 $(\frac{1}{3}x+y^2)^5$ 28 $(\frac{1}{2}x+y^3)^4$

29 $\left(\dfrac{1}{x^2}+3x\right)^6$ 30 $\left(\dfrac{1}{x^3}-2x\right)^5$

31 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 32 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

Ejer. 33–50: Sin expandir completamente, encuentre el (los) término(s) indicado(s) en el desarrollo de la expresión.

33 $(x^3-2x^{-2})^8$; primeros dos términos

34 $(2x^4+3x^{-2})^6$; primeros dos términos

35 $(3c^{2/5}+c^{4/5})^{25}$; primeros tres términos

36 $(x^3+5x^{-2})^{20}$; primeros tres términos

37 $(4z^{-1}-3z)^{15}$; últimos tres términos

38 $(s-2t^3)^{12}$; últimos tres términos

39 $\left(\dfrac{3}{c}+\dfrac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término

40 $\left(3x^2 - \sqrt{y}\right)^9$: quinto término

41 $\left(\frac{1}{3}u + 4v\right)^8$: séptimo término

42 $(3x^2 - y^3)^{10}$: cuarto término

43 $(x^{1/2} + y^{1/2})^8$: término central

44 $(rs^2 + t)^7$: dos términos centrales

45 $(2y + x^2)^8$: término que contenga x^{10}

46 $(x^2 - 2y^3)^5$: término que contenga y^6

47 $(3y^3 - 2x^2)^4$: término que contenga y^9

48 $\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^8$: término que contenga c^2

49 $\left(3x - \dfrac{1}{4x}\right)^6$: término que no contenga x

50 $(xy - 3y^{-3})^8$: término que no contenga y

51 Calcule $(1.2)^{10}$ usando los primeros tres términos en la expansión de $(1 + 0.2)^{10}$ y compare su respuesta con la obtenida usando calculadora.

52 Calcule $(0.9)^4$ usando los primeros tres términos en la expansión de $(1 - 0.1)^4$ y compare su respuesta con la obtenida usando calculadora.

Ejer. 53–54: Simplifique la expresión usando el teorema del binomio.

53 $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

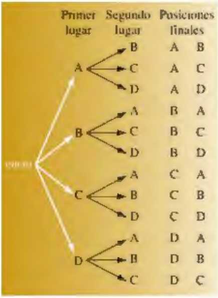
54 $\dfrac{(x + h)^5 - x^5}{h}$

55 Muestre que $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n - 1}$ para $n \geq 1$.

56 Muestre que $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n}$ para $n \geq 0$.

9.6 Permutaciones

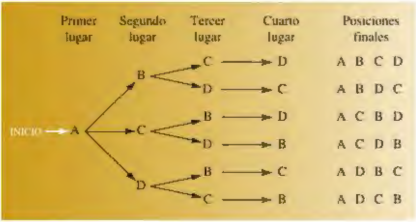
FIGURA 1



Suponga que cuatro equipos participan en un torneo en el que se determinarán el primero, segundo, tercero y cuarto lugares. Para identificarlos, marcamos los equipos A, B, C y D. Encontremos el número de formas diferentes en que el primero y segundo lugares se pueden decidir. Es conveniente usar un **diagrama de árbol**, como en la figura 1. Después de la palabra INICIO, aparecen las cuatro posibilidades para primer lugar. De cada una de éstas, una flecha apunta a un posible ganador del segundo lugar. Las posiciones finales indican de izquierda a derecha los posibles resultados. Se encuentran al seguir las diferentes trayectorias (*ramas* del árbol) que llevan de la palabra INICIO al equipo en segundo lugar. El número total de resultados es 12, que es el producto del número de opciones (4) para el primer lugar y el número de opciones (3) para el segundo lugar (después que el primero se haya determinado).

Encontremos ahora el número total de formas en que se pueden llenar las posiciones primera, segunda, tercera y cuarta. Para trazar un diagrama de árbol, podemos empezar por dibujar flechas de la palabra INICIO a cada posible ganador A, B, C o D del primer lugar. A continuación trazamos flechas de éstos a los posibles ganadores del segundo lugar, como se hizo en la figura 1. Desde cada posición de segundo lugar trazamos entonces flechas que indiquen las posibles posiciones en tercer lugar. Por último, trazamos flechas al equipo en cuarto lugar. Si consideramos sólo el caso en el que el equipo A termina en primer lugar, tenemos el diagrama que se muestra en la figura 2.

FIGURA 2



Observe que hay seis posibles posiciones finales en las que el equipo A ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo habría también otras tres ramas de este tipo correspondientes a llegadas en primer lugar para B, C y D. Un diagrama completo mostraría las siguientes 24 posibilidades para las posiciones finales:

A primero	ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,
B primero	BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
C primero	CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
D primero	DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Tenga en cuenta que el número de posibilidades (24) es el producto del número de formas (4) en que el primer lugar puede ocurrir, el número de formas (3) en que el segundo lugar puede ocurrir (después que el primer lugar se haya determinado), el número de posibles resultados (2) para el tercer lugar (después que los primeros dos lugares se hayan determinado) y el número de formas (1) en que el cuarto lugar puede presentarse (después que los tres primeros lugares se hayan ocupado).

La exposición precedente ilustra la siguiente regla general, que aceptamos como axioma básico de conteo.

Principio fundamental de conteo Sea $E_1, E_2, \ldots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si, para cada i, el evento E_i puede ocurrir en m_i formas, entonces el número total de formas en que todos los eventos pueden tener lugar es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

Volviendo a nuestro primer ejemplo, representemos con E_1 la determinación del equipo en primer lugar, de modo que $m_1 = 4$. Si E_2 denota la determinación del equipo en segundo lugar, entonces $m_2 = 3$. Por lo tanto, el número de resultados para la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es igual que lo obtenido por medio del diagrama de árbol. Si continuamos con E_3, la determinación del equipo en tercer lugar, entonces $m_3 = 2$, y por lo tanto $m_1 m_2 m_3 = 24$. Por último, si E_1, E_2 y E_3 han ocurrido, hay sólo un resultado posible para E_4. Entonces, $m_4 = 1$ y $m_1 m_2 m_3 m_4 = 24$.

En lugar de equipos, veamos ahora a a, b, c y d meramente como símbolos y consideremos los diversos *órdenes* o *distribuciones* que se pueden asignar a estos símbolos, tomándolos dos a la vez, tres a la vez o cuatro a la vez. Si abstraemos de esta forma, podemos aplicar nuestros métodos a otras situaciones similares. Los arreglos que hemos explicado son **arreglos sin repeticiones**, ya que un símbolo no puede usarse más de una vez en una configuración. En el ejemplo 1 consideraremos arreglos en los que las repeticiones *se permiten*.

Previamente definimos pares ordenados y ternas ordenadas. Del mismo modo, una *cuarteta ordenada* es un conjunto que contiene cuatro elementos, x_1, x_2, x_3, x_4 en el que se ha especificado un ordenamiento, de modo que uno de los elementos puede mencionarse como el primer elemento, otro como el segundo elemento, y así sucesivamente. El símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) se usa para la cuarteta ordenada que tiene primer elemento x_1, segundo elemento x_2, tercer elemento x_3 y cuarto elemento x_4. En general, para cualquier entero positivo r, hablamos de la **r-upla ordenada**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

como un conjunto de r elementos en los que x_1 está designado como el primer elemento, x_2 como el segundo elemento, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 **Determinación del número de r-uplas**

Usando sólo las letras a, b, c y d, determine cuántas de las siguientes se pueden obtener:

a) ternas ordenadas **b)** cuartetas ordenadas **c)** r-uplas ordenadas

SOLUCIÓN

a) Debemos determinar el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se puede obtener usando sólo las letras a, b, c y d. Esto no es lo mismo que una lista de primero, segundo y tercer lugares como en nuestro ejemplo anterior, porque no hemos excluido la posibilidad de repeticiones. Por ejemplo, (a, b, a), (a, a, b) y (a, a, a) son ternas ordenadas diferentes. Si, para $i = 1, 2, 3$, con E_i representamos la determinación de x_i en la terna ordenada (x_1, x_2, x_3), entonces, como se permiten repeticiones, hay cuatro posibilidades, que son a, b, c y d, para cada E_1, E_2 y E_3. En consecuencia, por el principio fundamental de conteo, el número total de ternas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, o sea 64.

b) El número de posibles cuartetas ordenadas de la forma (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, o 256.

c) El número de r-uplas ordenadas es el producto $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 4$, donde 4 aparece r veces como factor. Ese producto es igual a 4^r. ■

EJEMPLO 2 **Selección de un comité en un grupo**

Un grupo escolar está formado por 60 mujeres y 40 hombres. ¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, vicepresidente, tesorero y secretario si el tesorero debe ser una mujer, el secretario debe ser un hombre y un estudiante no puede tener más de un cargo?

SOLUCIÓN Si un evento está especializado en alguna forma (por ejemplo, el tesorero *debe* ser una mujer), entonces el evento debe ser considerado antes que los eventos no especializados. Así, representamos con E_1 la selección del tesorero y con E_2 la selección del secretario. A continuación, denotamos con E_3 y E_4 las selecciones para presidente y vicepresidente, respectivamente. Al igual que en el principio fundamental de conteo, con m_i denotamos el número de formas diferentes en que E_i puede ocurrir para $i = 1, 2, 3$ y 4. Se deduce que $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 60 + 40 - 2 = 98$ y $m_4 = 97$. Por el principio fundamental de conteo, el número total de posibilidades es

$$m_1m_2m_3m_4 = 60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22{,}814{,}400$$

Cuando trabajamos con conjuntos, por lo general no nos interesa el orden o arreglo de los elementos, pero en el resto de esta sección el arreglo de los elementos será nuestro principal interés.

Definición de permutación

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. Una **permutación** de r elementos de S es un arreglo, sin repeticiones, de r elementos.

También usamos la frase **permutación de n elementos tomados r a la vez**. El símbolo $P(n, r)$ denotará el número de permutaciones diferentes de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Como caso especial, $P(n, n)$ denota el número de arreglos de n elementos de S; es decir, el número de formas en que se pueden configurar *todos* los elementos de S.

En nuestra primera exposición sobre cuatro equipos A, B, C y D, teníamos $P(4, 2) = 12$, porque hay 12 formas diferentes de configurar los cuatro equipos en grupos de dos. También mostramos que el número de formas en que se pueden configurar los elementos A, B, C y D es 24. En notación de permutación escribimos este resultado como $P(4, 4) = 24$.

El siguiente teorema nos da una fórmula general para $P(n, r)$.

Teorema sobre el número de permutaciones diferentes

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. El número de permutaciones diferentes de r elementos de S es

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

DEMOSTRACIÓN El problema de determinar $P(n, r)$ es equivalente a determinar el número de r-uplas diferentes $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ tales que cada x_i es un elemento de S y ningún elemento de S aparece dos veces en la misma r-upla. Podemos encontrar este número por medio del principio fundamental de conteo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, representemos con E_i la determinación del elemento x_i y sea m_i el número de formas diferentes de escoger x_i. Deseamos aplicar la sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Tenemos n posibles opciones para x_1 y, consecuentemente, $m_1 = n$. Como no se permiten repeticiones, tenemos $n - 1$ opciones para x_2, de modo que $m_2 = n - 1$. Si continuamos en esta forma, sucesivamente obtenemos $m_3 = n - 2$, $m_4 = n - 3$, y por último, $m_r = n - (r - 1)$, o bien, lo que es equivalente, $m_r = n - r + 1$. En consecuencia, usando el principio fundamental de conteo, obtenemos la fórmula para $P(n, r)$.

Note que *la fórmula para $P(n, r)$ en el teorema previo contiene exactamente r factores del lado derecho*, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS **Número de permutaciones diferentes**

- $P(n, 1) = n$
- $P(n, 2) = n(n-1)$
- $P(n, 3) = n(n-1)(n-2)$
- $P(n, 4) = n(n-1)(n-2)(n-3)$

EJEMPLO 3 **Evaluar $P(n, r)$**

Encuentre $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN Usaremos la fórmula para $P(n, r)$ del teorema precedente. En cada caso, primero calculamos el valor de $(n - r + 1)$.

$$5 - 2 + 1 = \underline{4}, \quad \text{entonces} \quad P(5, 2) = 5 \cdot \underline{4} = 20$$
$$6 - 4 + 1 = \underline{3}, \quad \text{entonces} \quad P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \underline{3} = 360$$
$$5 - 5 + 1 = \underline{1}, \quad \text{entonces} \quad P(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1} = 120$$

EJEMPLO 4 **Arreglar el orden de bateo para un equipo de béisbol**

Un equipo de béisbol está formado por nueve jugadores. Encuentre el número de formas de arreglar las primeras cuatro posiciones del orden de bateo si se excluye al lanzador.

SOLUCIÓN Deseamos encontrar el número de permutaciones de 8 objetos tomados 4 a la vez. Usando la fórmula para $P(n, r)$ con $n = 8$ y $r = 4$, tenemos $n - r + 1 = 5$ y se deduce que

$$P(8, 4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

El siguiente resultado nos da una forma de $P(n, r)$ que contiene el símbolo factorial.

Forma factorial de $P(n, r)$

Si n es un entero positivo y $1 \le r \le n$, entonces

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

DEMOSTRACIÓN Si $r = n$ en la fórmula de $P(n, r)$ del teorema sobre permutaciones, obtenemos el número de arreglos diferentes de *todos* los elementos de un conjunto formado por n elementos. En este caso,

$$n - r + 1 = n - n + 1 = 1$$

y

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

En consecuencia, $P(n, n)$ es el producto de los primeros n enteros positivos. Este resultado también está dado por la forma factorial, porque si $r = n$, entonces

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Si $1 \leq r < n$, entonces

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot[(n-r)!]}{(n-r)!}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Esto concuerda con la fórmula de $P(n, r)$ del teorema sobre permutaciones. ■

EJEMPLO 5 **Evaluar $P(n, r)$ usando factoriales**

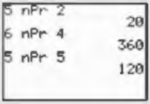
Use la forma factorial de $P(n, r)$ para encontrar $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$$
$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$
$$P(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$ ■

$P(n, r)$ se denota como nPr en muchas calculadoras. Podemos calcular las permutaciones del ejemplo 5 como sigue.

5 [MATH] [◁] [2] 2 [ENTER]



9.6 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el número.

1 $P(17, 1)$ **2** $P(20, 1)$

3 $P(9, 6)$ **4** $P(5, 3)$

5 $P(5, 5)$ **6** $P(4, 4)$

7 $P(6, 5)$ **8** $P(7, 6)$

9 $P(52, 5)$ **10** $P(52, 2)$

Ejer. 11–14: Simplifique la permutación.

11 $P(n, 0)$ **12** $P(n, 1)$

13 $P(n, n-1)$ **14** $P(n, 2)$

15 ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si las repeticiones

a) no se permiten? **b)** se permiten?

16 Trabaje el ejercicio 15 para números de cuatro dígitos.

17 ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si no se permiten repeticiones? (*Nota*: 42 y 231 son ejemplos de esos números.)

18 Determine el número de enteros positivos menores que 10,000 que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 si se permiten repeticiones.

19 **Posiciones en basquetbol** Si ocho equipos de basquetbol participan en un torneo, encuentre el número de formas diferentes que el primero, segundo y tercer lugares se pueden decidir, suponiendo que no se permiten empates.

20 **Posiciones en basquetbol** Trabaje el ejercicio 19 para 12 equipos.

21 **Combinación de prendas de vestir** Una mujer tiene cuatro faldas y seis blusas. ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda y blusa puede usar?

22 **Combinación de prendas de vestir** Consulte el ejercicio 21. Si la mujer tiene también tres suéteres, ¿Cuántas combinaciones diferentes de falda, blusa y suéter puede usar?

23 **Números de placas de vehículos** En un cierto estado, las placas de automóviles comienzan con una letra del alfabeto, seguida de cinco dígitos (0, 1, 2, ..., 9). Encuentre cuántas placas diferentes de vehículos son posibles si

a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0

b) la primera letra no puede ser O o I, y el primer dígito no puede ser 0

24 **Lanzar los dados** Dos dados son lanzados uno después del otro. ¿En cuántas formas diferentes pueden caer? Escriba en lista el número de formas diferentes en que la suma de los puntos puede ser igual a

a) 3 **b)** 5 **c)** 7 **d)** 9 **e)** 11

25 **Arreglo de asientos** Una fila de seis asientos de un aula de clases se llenará seleccionando miembros de un grupo de diez estudiantes.

a) ¿En cuántas formas diferentes pueden ser ocupados los asientos?

b) Si hay seis hombres y cuatro mujeres en el grupo, y si hombres y mujeres han de estar alternados, encuentre el número de arreglos diferentes de asientos.

26 **Programación de cursos** Un estudiante de cierta universidad puede tomar matemáticas a las 8, 10, 11 o 14 horas; inglés a las 9, 10, 13 o 14 horas, e historia a las 8, 11, 14 o 15 horas. Encuentre el número de formas diferentes en las que el estudiante puede programar los tres cursos.

27 **Examen de verdadero o falso** ¿En cuántas formas diferentes puede contestarse un examen formado por diez preguntas de verdadero o falso?

28 **Examen de opción múltiple** Un examen está formado por seis preguntas de opción múltiple y hay cinco opciones para cada pregunta. ¿En cuántas formas diferentes puede contestarse el examen?

29 **Arreglo de asientos** ¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse ocho personas en una fila?

30 **Arreglo de libros** ¿En cuántas formas diferentes pueden acomodarse diez libros en un estante?

31 **Señales** Con seis banderas diferentes, ¿cuántas señales diferentes pueden enviarse si se colocan tres banderas, una arriba de la otra, en un asta bandera?

32 **Selección de libros** ¿En cuántas formas diferentes pueden seleccionarse cinco libros de un conjunto de libros de doce volúmenes?

33 **Claves de estación de radio** ¿Cuántas claves de cuatro letras de identificación de una estación de radio se pueden formar si la primera letra debe ser K o W y las repeticiones

a) no se permiten? **b)** se permiten?

34 **Designaciones de fraternidad** Hay 24 letras en el alfabeto griego. ¿Cuántas fraternidades pueden especificarse al seleccionar tres letras griegas si las repeticiones

a) no se permiten? **b)** se permiten?

35 **Números telefónicos** ¿Cuántos números telefónicos de diez dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9 si el primer dígito no puede ser 0?

36 **Orden de bateo en béisbol** Después de seleccionar nueve jugadores para un partido de béisbol, el manager del equipo arregla el orden al bat de modo que el lanzador sea el último en batear y el mejor bateador sea el tercero en el orden al bat. ¿En cuántas formas diferentes puede acomodarse el resto del orden al bat?

37 **Código de acceso en cajeros automáticos** Un cliente recuerda que 2, 4, 7 y 9 son los dígitos de un código de acceso de cuatro dígitos para un cajero automático. Desafortunadamente, el cliente ha olvidado el orden de los dígitos. Encuentre el máximo número posible de intentos necesario para obtener el código correcto.

38 **Código de acceso en cajeros automáticos** Trabaje el ejercicio 37 si los dígitos son 2, 4 y 7 y uno de estos dígitos se repite en el código de cuatro dígitos.

39 **Posibilidades de un candado de combinación** Una mujer tiene un candado de combinación que tiene 60 números. Ella sabe que la combinación correcta consiste en 3 números no repetibles, pero los ha olvidado. Si tarda 8 segundos en intentar una combinación, ¿cuánto tiempo se tarda aproximadamente en probar todas las combinaciones?

40 **Posibilidades de asegurar la cerradura de un maletín** Un hombre tiene un maletín con una cerradura que consta de 6 diales, cada uno con 10 números y ha olvidado la combinación correcta. Si le lleva tres segundos intentar una combinación, ¿cuánto tiempo se tarda en probar todas las combinaciones?

41 **Selección de asientos en un teatro** Tres matrimonios han comprado boletos para una obra. Las esposas han de tomar asiento juntas y los seis asientos están en una fila. ¿En cuántas formas pueden acomodarse las seis personas?

42 **Resultados de una carrera de caballos** Diez caballos están registrados en una carrera. Si se pasa por alto la posibilidad de un empate para cualquier lugar, ¿en cuántas formas pueden determinarse los ganadores de los lugares primero, segundo y tercero?

43 **Posibilidades de almuerzos** Los propietarios de un restaurante anuncian que ofrecen 1,114,095 almuerzos diferentes basados en el hecho de que tienen 16 "guarniciones gratis" junto con cualquiera de sus 17 platos de menú (sándwiches, hot dogs y ensaladas). ¿Cómo llegaron a ese número?

44 **Barajar cartas**

a) ¿En cuántas formas pueden quedar las 52 cartas de un mazo al barajarlas?

b) ¿En cuántas formas pueden quedar las cartas para que los cuatro ases aparezcan arriba del mazo?

45 **Palíndromos numéricos** Un palíndromo es un entero, por ejemplo 45654, que se lee igual de izquierda a derecha que a la inversa.

a) ¿Cuántos palíndromos de cinco dígitos hay?

b) ¿Cuántos palíndromos de n dígitos hay?

46 **Arreglo de colores** Cada uno de los seis cuadrados que se ven en la figura ha de llenarse con alguno de diez colores posibles. ¿Cuántas formas hay de aplicar color a la franja mostrada en la figura para que no haya dos cuadros adyacentes con el mismo color?

EJERCICIO 46

47 Este ejercicio requiere de una calculadora graficadora que pueda graficar $x!$.

a) Grafique $y = \dfrac{x!\,e^x}{x^x\sqrt{2\pi x}}$ en $(0, 20]$, y calcule la asíntota horizontal.

b) Use la gráfica del inciso a) para encontrar una aproximación de $n!$ si n es un entero positivo grande.

48 **a)** ¿Qué sucede si se usa calculadora para encontrar $P(150, 50)$? Explique.

b) Calcule r si $P(150, 50) = 10^r$ usando la siguiente fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\log n! \approx \frac{n \ln n - n}{\ln 10}$$

9.7 Permutaciones y combinaciones distinguibles

Ciertos problemas consisten en encontrar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles. Por ejemplo, suponga que nos dan cinco discos del mismo tamaño, tres de los cuales son negros, uno es blanco y el otro es rojo. Encontremos el número de formas en que se pueden acomodar en fila para que se obtengan arreglos de colores diferentes. Si los discos fueran todos de diferentes colores, entonces el número de arreglos sería 5!, o sea 120. Sin embargo, como algunos de los discos tienen la misma apariencia, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para aclarar este punto, escribiremos

N N N B R

para el arreglo que tiene discos negros en las primeras tres posiciones de la fila, el disco blanco en la cuarta posición y el disco rojo en la quinta. Los primeros tres discos se pueden acomodar en 3!, o sea 6, formas diferentes, pero estos arreglos no se pueden distinguir uno del otro, porque los primeros tres discos son idénticos. Decimos que esas 3! permutaciones son **no distinguibles**. Del mismo modo, dado cualquier otro arreglo, por ejemplo

N R N B N

hay 3! formas diferentes de acomodar los tres discos, pero aquí también cada uno de estos arreglos es no distinguible de los otros. Llamemos **permutaciones distinguibles** a dos arreglos de objetos si uno no se puede obtener del otro mediante el reacomodo de objetos semejantes. Así, N N N B R y N R N B N son permutaciones distinguibles de los cinco discos. Denotemos con k el número de permutaciones distinguibles. Como a cada uno de estos arreglos corresponden 3! permutaciones *no distinguibles*, debemos tener $3!k = 5!$, el número de permutaciones de cinco objetos *diferentes*. En consecuencia, $k = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. Por el mismo tipo de razonamiento podemos obtener la siguiente extensión de esta exposición.

Primer teorema sobre permutaciones distinguibles

Si r objetos de un conjunto de n objetos son iguales y si los objetos restantes son diferentes entre sí y distintos de los r objetos, entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{r!}.$$

Podemos generalizar este teorema para el caso en el que hay varios subconjuntos de objetos no distinguibles. Por ejemplo, considere ocho discos, de los cuales cuatro son negros, tres son blancos y uno es rojo. En este caso, con cada arreglo como el siguiente

N B N B N B N R

hay 4! arreglos de los discos negros y 3! arreglos de los discos blancos que no tienen efecto en el arreglo de colores. En consecuencia, 4!3! posibles arreglos de los discos no producirán permutaciones distinguibles. Si denotamos con k el número de permutaciones *distinguibles*, entonces $4!3!k = 8!$, porque 8! es el número de permutaciones que obtendríamos si los discos fueran todos diferentes. Por lo tanto, el número de permutaciones distinguibles es

$$k = \frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280$$

Se puede demostrar el siguiente resultado general.

Segundo teorema sobre permutaciones distinguibles

Si, en un conjunto de n objetos, n_1 son iguales de una clase, n_2 son iguales de otra clase, ..., n_k son iguales de otra clase más y

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

entonces el número de permutaciones distinguibles de n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!}$$

EJEMPLO 1 **Encontrar un número de permutaciones distinguibles**

Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *Mississippi*.

SOLUCIÓN En este ejemplo nos dan un conjunto de once objetos en el que cuatro son de una clase (la letra s), cuatro son de otra clase (i), dos son de una tercera clase (p) y uno es de una cuarta clase (M). En consecuencia, por el teorema precedente, tenemos $11 = 4 + 4 + 2 + 1$ y el número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!} = 34{,}650$$

■

Cuando trabajamos con permutaciones, nuestro interés se centra en los ordenamientos o arreglos de elementos. Por ahora, hagamos caso omiso del orden o arreglo de elementos y consideremos la siguiente pregunta: dado un conjunto que contiene n elementos distintos, ¿en cuántas formas puede escogerse un subconjunto de r elementos si $r \leq n$? Antes de contestar, expresemos una definición.

Definición de combinación

Sea S un conjunto de n elementos y sea $1 \leq r \leq n$. Una **combinación** de r elementos de S es un subconjunto de S que contiene r elementos distintos.

Si S contiene n elementos, también usamos la frase **combinación de n elementos tomados r a la vez**. El símbolo $C(n, r)$ denotará el número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos.

Teorema sobre el número de combinaciones

El número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \quad 1 \leq r \leq n$$

La fórmula de $C(n, r)$ es idéntica a la fórmula del coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ de la sección 9.5.

DEMOSTRACIÓN Si S contiene n elementos, entonces, para encontrar $C(n, r)$, debemos encontrar el número total de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

tal que los x_i son elementos *diferentes* de S. Como los r elementos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se pueden arreglar en $r!$ formas diferentes, cada subconjunto produce $r!$ diferentes r-uplas. Así, el número total de r-uplas diferentes es $r!C(n, r)$. No obstante, en la sección anterior hallamos que el número total de r-uplas es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En consecuencia,
$$r!\,C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dividiendo entre $r!$ ambos lados de la última ecuación, obtenemos la fórmula de $C(n, r)$. ■

En la demostración, note que

$$P(n, r) = r!\,C(n, r),$$

lo cual significa que hay *más permutaciones que combinaciones* cuando escogemos un subconjunto de r elementos de un conjunto de n elementos. Para recordar esta relación, considere una presidencia, por ejemplo, la de Obama-Biden. Hay sólo un grupo o combinación de estas dos personas, pero cuando un ordenamiento de presidente-vicepresidente se relaciona con estas dos personas, hay dos permutaciones y Obama-Biden es claramente diferente de Biden-Obama.

Cuando usted lea los ejemplos y trabaje los ejercicios, recuerde lo siguiente:

Si el orden de selección *es* importante, use una *permutación*.

Si el orden de selección *no es* importante, use una *combinación*.

EJEMPLO 2 Elección de un equipo de béisbol

Recuerde: si el orden de selección se puede pasar por alto, use una combinación.

Un equipo de béisbol de la liga menor tiene seis jardineros, cinco pitchers y dos catchers. Cada uno de los jardineros puede jugar cualquiera de las tres posiciones de jardines y cada jugador de cuadro puede jugar cualquiera de las cuatro posiciones del campo corto. ¿En cuántas formas puede escogerse un equipo de nueve jugadores?

SOLUCIÓN El número de formas para elegir tres jardineros de los seis candidatos es

$$C(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!\,3!}=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$$

El número de formas en que se pueden escoger los jugadores de cuadro es

$$C(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!\,4!}=\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$$

Hay cinco formas de escoger un pitcher y dos opciones para el catcher. Se deduce del principio fundamental de conteo que el número total de formas de escoger un equipo es ■

$$20\cdot 35\cdot 5\cdot 2=7000$$

EJEMPLO 3 Recibir un *full* en cartas

En un tipo de póquer, una mano de cinco cartas se reparte de un mazo de 52 cartas.

a) ¿Cuántas manos son posibles?

b) Un *full* es una mano de tres cartas de una denominación y dos cartas de otra denominación. (Las 13 denominaciones son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K y A.) ¿Cuántas manos son *full*?

SOLUCIÓN

FIGURA 1

a) El orden en el que se dan las cinco cartas no es importante, de modo que usamos una combinación:

$$C(52,5)=\frac{52!}{(52-5)!\,5!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47!}{47!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=2{,}598{,}960$$

b) Primero determinamos en cuántas formas nos puede tocar un full específico, por ejemplo 3 ases y dos reyes (vea la figura 1). Hay cuatro cartas de cada denominación y el orden de selección se puede pasar por alto, de modo que usamos combinaciones:

El orden de selección ***no es*** *importante, de modo que usamos* ***combinaciones***. →

número de formas de recibir 3 ases $= C(4,3)$

número de formas de recibir 2 reyes $= C(4,2)$

Ahora debemos elegir las dos denominaciones. Como 3 ases y 2 reyes forman un *full* diferente de 3 reyes y 2 ases, el orden en que se seleccionan las denominaciones es importante, de modo que usamos una permutación:

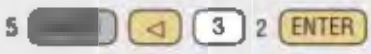
El orden de selección es importante, por lo que usamos una ***permutación****.*

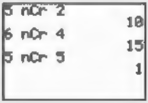
$$\text{número de formas de seleccionar dos denominaciones} = P(13, 2)$$

Por el principio fundamental de conteo, el número de *fulls* es

$$C(4, 3) \cdot C(4, 2) \cdot P(13, 2) = 4 \cdot 6 \cdot 156 = 3744.$$ ■

Las secuencias de teclas para calcular combinaciones son casi idénticas a aquellas para calcular permutaciones; sólo use nCr en lugar de nPr.





Note que si $r = n$, la fórmula para $C(n, r)$ se convierte en

$$C(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

Es conveniente asignar un significado a $C(n, r)$ si $r = 0$. Si la fórmula ha de ser verdadera en este caso, debemos tener

$$C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

En consecuencia, *definimos* $C(n, 0) = 1$, que es igual que $C(n, n)$. Por último, por consistencia, también *definimos* $C(0, 0) = 1$. Por lo tanto, $C(n, r)$ tiene significado para todos los enteros negativos n y r con $r \leq n$.

EJEMPLO 4 Encontrar el número de subconjuntos de un conjunto

Sea S un conjunto de n elementos. Encuentre el número de subconjuntos distintos de S.

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. Por nuestro trabajo anterior, el número de subconjuntos de S que constan de r elementos es $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$. En consecuencia, para encontrar el número total de subconjuntos es suficiente encontrar la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} \qquad (*)$$

Recordando la fórmula para el teorema del binomio,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

podemos ver que la suma indicada (*) es precisamente la expansión binomial de $(1 + 1)^n$. Por lo tanto, hay 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene 2^3, o sea 8, subconjuntos diferentes. Un conjunto de 4 elementos tiene 2^4, o 16, subconjuntos. Un conjunto de 10 elementos tiene 2^{10}, o 1024, subconjuntos. ■

El triángulo de Pascal, introducido en la sección 9.5, se puede recordar fácilmente mediante la siguiente forma de combinación:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

FIGURA 2

```
seq(3 nCr R,R,0,
3)
          {1 3 3 1}
seq(5 nCr R,R,0,
5)
  {1 5 10 10 5 1}
```

Si combinamos esta información con la del ejemplo 4, concluimos que el tercer coeficiente de la expansión de $(a + b)^4$, $\binom{4}{2}$, es exactamente el mismo que el número de subconjuntos de dos elementos de un conjunto que contiene cuatro elementos. Dejamos como ejercicio encontrar una generalización del último enunciado (vea el ejercicio de análisis 6 al final del capítulo). Tenga en cuenta que podemos usar el comando de sucesión para generar las filas del triángulo de Pascal, como se muestra en la figura 2.

9.7 Ejercicios

Ejer. 1–10: Encuentre el número.

1 $C(17, 1)$ **2** $C(20, 1)$

3 $C(9, 6)$ **4** $C(5, 3)$

5 $C(5, 5)$ **6** $C(4, 4)$

7 $C(6, 5)$ **8** $C(7, 6)$

9 $C(52, 5)$ **10** $C(52, 2)$

Ejer. 11–14: Simplifique la combinación.

11 $C(n, 0)$ **12** $C(n, 1)$

13 $C(n, n - 1)$ **14** $C(n, 2)$

Ejer. 15–16: Encuentre el número de posibles arreglos de color para los 12 discos dados, acomodados en una fila.

15 5 negros, 3 rojos, 2 blancos, 2 verdes

16 3 negros, 3 rojos, 3 blancos, 3 verdes

17 Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *bookkeeper* (contador).

18 Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *moon* (luna). Mencione todas las permutaciones.

19 **Elección de equipos de basquetbol** Diez personas desean jugar en un partido de basquetbol. ¿En cuántas formas diferentes pueden formarse dos equipos de cinco jugadores?

20 **Selección de preguntas de examen** Un estudiante puede contestar seis preguntas cualesquiera de un total de diez en un examen.

a) ¿En cuántas formas pueden seleccionarse seis preguntas?

b) ¿Cuántas selecciones son posibles si las primeras dos preguntas deben contestarse?

Ejer. 21–22: Considere ocho puntos cualesquiera tales que no haya tres colineales.

21 ¿Cuántas líneas se determinan?

22 ¿Cuántos triángulos se determinan?

23 **Arreglo de libros** Un estudiante tiene cinco libros de matemáticas, cuatro libros de historia y ocho libros de ficción. ¿En cuántas formas diferentes se pueden acomodar en un estante si libros de la misma categoría se ponen uno junto al otro?

24 **Selección de un equipo de basquetbol** Un equipo de basquetbol está formado de doce jugadores.

a) Sin tomar en cuenta las posiciones, ¿en cuántas formas puede seleccionarse un equipo de cinco?

b) Si el centro de un equipo debe ser seleccionado entre dos personas específicas del equipo y los otros cuatro miembros del equipo de los diez jugadores restantes, encuentre el número de diferentes equipos posibles

25 **Selección de un equipo de futbol americano** Un equipo completo de futbol americano está formado por tres centros, diez linieros que pueden ser guardias o tacles, tres mariscales de campo, seis corredores medios, cuatro alas cerradas y cuatro corredores de poder. Un equipo debe tener un centro, dos guardias, dos tacles, dos alas cerradas, dos corredores medio, un mariscal de campo y un corredor de poder. ¿En cuántas formas diferentes puede seleccionarse un equipo del grupo?

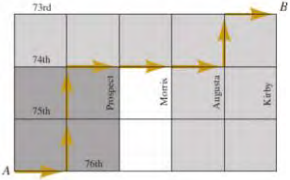
26 **Acomodar llaves en un llavero** ¿En cuántas formas diferentes se pueden acomodar siete llaves en un llavero, si las llaves se pueden deslizar por completo alrededor del anillo?

27 **Comité de selección** Un comité de 3 hombres y 2 mujeres se debe seleccionar de un grupo de 12 hombres y 8 mujeres. Determine el número de formas diferentes de seleccionar el comité.

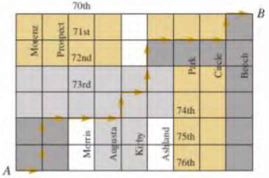
28 **Orden de nacimiento** Denotemos con las letras G y B el nacimiento de una niña y un niño, respectivamente. Para una familia de tres niños y tres niñas, un orden posible de nacimientos es G G G B B B. ¿Cuántas órdenes de nacimiento son posibles para estos seis hijos?

Ejer. 29–30: En la figura se muestra un mapa de calles y un posible camino del punto *A* al punto *B*. ¿Cuántos caminos posibles hay de *A* a *B* si los movimientos están restringidos para ser a la derecha o hacia arriba? (*Sugerencia*: si R denota el movimiento de una unidad a la derecha y U denota el movimiento de una unidad hacia arriba, entonces el camino del ejercicio 29 puede especificarse con R U U R R R U R.)

29



30



31 **Selecciones de lotería** Para ganar un juego de lotería estatal, un jugador debe seleccionar correctamente seis números del 1 al 49.

a) Encuentre el número total de selecciones posibles.

b) Trabaje el inciso a) si un jugador selecciona sólo números pares.

32 **Asignaciones de oficina** Un departamento de matemáticas tiene diez profesores, pero sólo nueve oficinas, de modo que una oficina debe ser compartida por dos personas. ¿En cuántas formas diferentes se pueden asignar las oficinas?

33 **Torneo de tenis** En un torneo de tenis *round robin*, cada uno de los jugadores se enfrenta al resto de los jugadores exactamente una vez. ¿Cuántos jugadores deben participar en un torneo de 45 encuentros?

34 **Examen de verdadero o falso** Un examen de verdadero o falso tiene 20 preguntas.

a) ¿En cuántas formas diferentes puede contestarse el examen?

b) ¿En cuántas formas diferentes puede un estudiante contestar correctamente 10 preguntas?

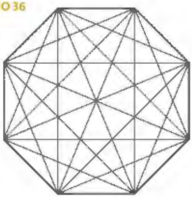
35 **Serie de campeonato de basquetbol** El ganador de la serie de campeonato de siete juegos de la NBA es el equipo que gana cuatro juegos. ¿En cuántas formas diferentes puede extenderse la serie a siete juegos?

36 Un diseño geométrico se determina mediante la unión de cada par de vértices de un octágono (vea la figura).

a) ¿Cuántos triángulos en el diseño tienen sus tres vértices en el octágono?

b) ¿Cuántos cuadriláteros en el diseño tienen sus cuatro vértices en el octágono?

EJERCICIO 36



37 **Selección de helados** Una nevería tiene 31 sabores diferentes y anuncia que sirve casi 4,500 barquillos diferentes de tres bolas de helado, cada bola de un sabor diferente. ¿Cómo se obtuvo este número?

38 **Selección de condimentos para hamburguesa** Un restaurante de comida rápida anuncia que ofrece cualquier combinación de 8 condimentos en una hamburguesa, dando así 256 opciones a un cliente. ¿Cómo se obtuvo este número?

39 **Selección de becarios** Un comité seleccionará 30 estudiantes de un grupo de 1,000 para que reciban becas. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse los estudiantes si cada beca vale

a) la misma cantidad?

b) una cantidad diferente?

40 **Clasificación en pista** Doce velocistas están corriendo en una eliminatoria; los que obtengan los cuatro mejores tiempos avanzarán a las finales.

a) ¿En cuántas formas puede ser seleccionado este grupo de cuatro?

b) Si los cuatro mejores tiempos se "siembran" (clasifican) en las finales, ¿en cuántas formas puede seleccionarse y "sembrarse" este grupo de cuatro?

41 **Manos de póquer** Consulte el ejemplo 3. ¿Cuántas "manos" tendrán exactamente tres reyes?

42 **Manos de bridge** ¿Cuántas manos de 13 cartas repartidas de un mazo estándar tendrán exactamente siete espadas?

Ejer. 43–44: a) Calcule la suma S_n para $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$, donde si $n < r$, entonces $\binom{n}{r} = 0$. b) Prediga una fórmula general para S_n.

43 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$

44 $(1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - (4)\binom{n}{4} + (5)\binom{n}{5} - \cdots$

Ejer. 45–48: a) Grafique $C(n, r)$ para un valor dado de n, donde $r = 1, 2, 3, \ldots, n$. b) Determine el máximo de $C(n, r)$ y el (los) valor(es) de r donde ocurre este máximo.

45 $n = 10$ **46** $n = 13$

47 $n = 19$ **48** $n = 20$

49 Demuestre que $C(n, r - 1) + C(n, r) = C(n + 1, r)$. Interprete esta fórmula en términos del triángulo de Pascal.

9.8 Probabilidad

Si se lanzan al aire dos dados, ¿cuál es la posibilidad de que salga un 7? Si una persona recibe cinco cartas de un mazo estándar de 52 cartas, ¿cuál es la posibilidad de que obtenga tres ases? En el siglo XVII, preguntas similares acerca de juegos de azar llevaron al estudio de la *probabilidad*. Desde ese tiempo, la teoría de probabilidad ha crecido extensamente y ahora se usa para pronosticar resultados de una gran variedad de situaciones que surgen en ciencias naturales y sociales.

Cualquier proceso de posibilidad, por ejemplo, lanzar al aire una moneda, lanzar un dado, recibir una carta de un mazo, determinar si un artículo fabricado es defectuoso o tomar la presión arterial de una persona, es un **experimento**. Una consecuencia de un experimento es un **resultado**. Restringiremos nuestra exposición a experimentos en los que los resultados son **igualmente probables** a menos que se indique otra cosa. Esto significa, por ejemplo, que si una moneda se lanza al aire, suponemos que la posibilidad de obtener una "cara" es igual que la de obtener una "cruz". Del mismo modo, si se lanza un dado, suponemos que el dado es "limpio", es decir, hay igual posibilidad de obtener ya sea 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento es el **espacio muestral** del experimento. Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire y hacemos que H o T denoten el resultado de obtener una "cara" o "cruz", respectivamente, entonces el espacio muestral S puede denotarse por

$$S = \{H, T\}$$

Si un dado "limpio" se lanza al aire en un experimento, entonces el conjunto S de todos los posibles resultados (el espacio muestral) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* de un experimento.

Definición de evento Sea S el espacio muestral de un experimento. Un **evento** relacionado con el experimento es cualquier subconjunto E de S.

Consideremos el experimento de lanzar al aire un solo dado, de modo que el espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $E = 4$, entonces el evento E asociado con el experimento consiste en el resultado de obtener un 4 en el tiro. Diferentes eventos pueden relacionarse con el mismo experimento. Por ejemplo, si $E = \{1, 3, 5\}$, entonces este evento consiste en obtener un número impar en un tiro del dado.

Como otro ejemplo, suponga que el experimento consiste en lanzar al aire dos monedas, una después de la otra. Si HH denota el resultado en el que aparecen dos caras, HT el de una cara en la primera moneda y una cruz en la segunda, y así sucesivamente, entonces el espacio muestral S del experimento puede denotarse por

$$S = \{\text{HH, HT, TH, TT}\}$$

Si definimos $$E = \{\text{HT, TH}\}$$

entonces el evento E consiste en la aparición de una cara en una de las monedas y una cruz en la otra.

A continuación definiremos lo que significa la *probabilidad* de un evento. En toda nuestra exposición supondremos que el espacio muestral S de un experimento contiene sólo un número finito de elementos. Si E es un evento, *los símbolos $n(E)$ y $n(S)$ denotarán el número de elementos en E y S, respectivamente*. Recuerde que E y S constan de resultados que son igualmente probables.

Definición de la probabilidad de un evento Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. La **probabilidad** $P(E)$ de E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Como E es un subconjunto de S, vemos que

$$0 \le n(E) \le n(S).$$

Dividiendo entre $n(S)$ obtenemos

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{o, lo que es equivalente,} \quad 0 \le P(E) \le 1.$$

Note que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos, y $P(E) = 1$ si $E = S$.

El siguiente ejemplo proporciona tres ilustraciones de la definición precedente si E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1 **Encontrar la probabilidad de un evento**

a) Si una moneda se lanza al aire, encuentre la probabilidad de que caiga con cara hacia arriba.

b) Si se lanza un dado limpio, encuentre la probabilidad de obtener un 4.

c) Si se lanzan al aire dos monedas, encuentre la probabilidad de que ambas caigan "cara" arriba.

SOLUCIÓN Para cada experimento indicaremos los conjuntos S y E, y luego usaremos la definición de probabilidad de un evento para encontrar $P(E)$.

a) $S = \{H, T\}$, $\quad E = \{H\}$, $\quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\quad E = \{4\}$, $\quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

c) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$, $\quad E = \{HH\}$, $\quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$ ■

En el inciso a) del ejemplo 1 encontramos que la probabilidad de obtener cara en un tiro de una moneda es $\frac{1}{2}$. Consideramos que esto significa que si una moneda se lanza al aire muchas veces, el número de veces que una "cara" quede hacia arriba debe ser de alrededor de la mitad del número total de tiros. Por lo tanto, para 100 tiros, debe aparecer una "cara" alrededor de 50 veces. Es poco probable que este número sea *exactamente* 50. Una probabilidad de $\frac{1}{2}$ significa que si aumenta el número de tiros, entonces el número de veces que "cara" quedará hacia arriba *se aproxima* a la mitad del número total de tiros. Se pueden hacer observaciones similares para los incisos b) y c) del ejemplo 1.

En los siguientes dos ejemplos consideramos experimentos en los que un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 Encontrar probabilidades cuando dos dados se lanzan al aire

Si dos dados se lanzan al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de

a) 7? **b)** 9?

SOLUCIÓN Consideremos un dado como *el primer dado* y el otro como *el segundo dado*. Usaremos pares ordenados para representar resultados como sigue: (2, 4) denota el resultado de obtener un 2 en el primer dado y un 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 en el primer dado y un 3 en el segundo; y así sucesivamente. Como hay seis posibilidades diferentes para el primer número del par ordenado y, con cada uno de éstos, seis posibilidades diferentes para el segundo número, el número total de pares ordenados es $6 \times 6 = 36$. Por lo tanto, si S es el espacio muestral, entonces $n(S) = 36$.

a) El evento E correspondiente a obtener una suma de 7 está dado por

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

y, en consecuencia, $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Si E es el evento correspondiente a obtener una suma de 9, entonces

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$ ■

En el siguiente ejemplo (y en los ejercicios), cuando se indica que una o más cartas se sacan de un mazo, queremos decir que cada carta se saca de un mazo estándar de 52 cartas y *no* se restituye antes de sacar la siguiente carta.

EJEMPLO 3 **Encontrar la probabilidad de sacar cierta mano de cartas**

Suponga que cinco cartas se sacan de un mazo de cartas. Encuentre la probabilidad de que las cinco sean de corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestral S del experimento es el conjunto de todas las manos posibles de cinco cartas que se pueden formar con las 52 cartas del mazo. Se deduce de nuestro trabajo en la sección precedente que $n(S) = C(52,5)$.

Como hay 13 cartas de corazones, el número de formas diferentes de obtener una mano que contenga cinco corazones es $C(13, 5)$. En consecuencia, si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(13,5)}{C(52,5)} = \frac{\frac{13!}{5!8!}}{\frac{52!}{5!47!}} = \frac{1287}{2,598,960} \approx 0.0005 = \frac{5}{10,000} = \frac{1}{2000}$$

Este resultado implica que si el experimento se realiza muchas veces, una mano de cinco corazones debe sacarse aproximadamente una vez cada 2,000 veces. ■

Suponga que S es el espacio muestral de un experimento y E_1 y E_2 son dos eventos relacionados con el experimento. Si E_1 y E_2 no tienen elementos en común, se denominan *conjuntos disjuntos* y escribimos $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (el *conjunto vacío*). En este caso, si ocurre un evento, el otro no puede ocurrir; hay **eventos mutuamente excluyentes**. Así, si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2).$$

En consecuencia,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)}$$
$$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$$

o $$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

La probabilidad de E es, por lo tanto, la suma de las probabilidades de E_1 y E_2. Hemos demostrado lo siguiente.

Teorema sobre eventos mutuamente excluyentes

Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes y $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

El teorema precedente se puede extender a cualquier número de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que sean mutuamente excluyentes en el sentido que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \varnothing$. La conclusión del teorema es entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E)$$

EJEMPLO 4 **Encontrar probabilidades cuando se lanzan al aire dos dados**

Si se lanzan al aire dos dados, encuentre la probabilidad de obtener una suma de 7 o 9.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de obtener un 7 y con E_2 el de obtener un 9. Como E_1 y E_2 no pueden ocurrir de forma simultánea, son eventos mutuamente excluyentes. Deseamos encontrar la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. Del ejemplo 2 sabemos que $P(E_1) = \frac{6}{36}$ y $P(E_2) = \frac{4}{36}$. En consecuencia, por el último teorema,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_2) \\ &= \tfrac{6}{36} + \tfrac{4}{36} = \tfrac{10}{36} = 0.2\overline{7} \end{aligned}$$

Si E_1 y E_2 son eventos que posiblemente tienen elementos en común, entonces se puede demostrar lo siguiente.

Teorema sobre la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos (unión de eventos)

Si E_1 y E_2 son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Note que si E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. En consecuencia, el último teorema incluye, como caso especial, el teorema sobre eventos mutuamente excluyentes.

EJEMPLO 5 **Encontrar la probabilidad de seleccionar cierta carta de un mazo**

Si se selecciona una carta de un mazo, encuentre la probabilidad de que la carta sea un jack o una de espadas.

SOLUCIÓN Denotemos con E_1 el evento de que la carta es un jack y E_2 el evento que es una de espadas. Los eventos E_1 y E_2 *no* son mutuamente excluyentes, porque hay una carta (el jack de espadas) en ambos eventos y, por lo tanto, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. Por el teorema precedente, la probabilidad de que la carta sea un jack o una espada es

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} = \tfrac{16}{52} \approx 0.31 \end{aligned}$$

Al resolver problemas de probabilidad, con frecuencia es útil clasificar los resultados de un espacio muestral S en un evento E y el conjunto E' de elementos de S que no están en E. E' recibe el nombre de **complemento** de E. Observe que

$$E \cup E' = S \qquad \text{y} \qquad n(E) + n(E') = n(S)$$

Si dividimos ambos lados de la última ecuación entre $n(S)$, tendremos

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = 1$$

En consecuencia,

$$P(E) + P(E') = 1, \qquad \text{o} \qquad P(E) = 1 - P(E').$$

Usaremos la última fórmula en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Encontrar la probabilidad de sacar cierta mano de cartas**

Si 13 cartas se sacan de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas sean de corazones?

SOLUCIÓN Si $P(k)$ denota la probabilidad de obtener k corazones, entonces la probabilidad de obtener *al menos* dos corazones es

$$P(2) + P(3) + P(4) + \cdots + P(13)$$

Como las únicas probabilidades restantes son $P(0)$ y $P(1)$, la probabilidad deseada es igual a

$$1 - [P(0) + P(1)]$$

Para calcular $P(k)$ para cualquier k, podemos considerar el mazo como dividido en dos grupos: corazones y no corazones. Para $P(0)$ observamos que de los 13 corazones del mazo, no obtenemos ninguno y de las 39 cartas que no son corazones, obtenemos 13. Como el número de formas de seleccionar 13 cartas de un mazo de 52 cartas es $C(52, 13)$, vemos que

$$P(0) = \frac{n(0)}{n(S)} = \frac{C(13, 0) \cdot C(39, 13)}{C(52, 13)} \approx 0.0128$$

La probabilidad $P(1)$ corresponde a obtener 1 de los corazones y 12 de las 39 cartas que no son corazones. Así,

$$P(1) = \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{C(13, 1) \cdot C(39, 12)}{C(52, 13)} \approx 0.0801$$

En consecuencia, la probabilidad deseada es

$$1 - [P(0) + P(1)] \approx 1 - [0.0128 + 0.0801] = 0.9071$$

Las palabras *probabilidad* y *posibilidad* se usan a veces indistintamente. Si bien conocer una nos permite calcular la otra, son muy diferentes.

Definición de las posibilidades de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento, E un evento y E' su complemento. Las **posibilidades** $O(E)$ a favor de que ocurra el evento E están dadas por

$$n(E) \qquad \text{a} \qquad n(E')$$

Las posibilidades $n(E)$ a $n(E')$ a veces se denotan con $n(E){:}n(E')$.

Podemos considerar que las posibilidades a favor de que un evento E son el número de formas en que ocurre E, en comparación con el número de formas en que no ocurre E. Del mismo modo, las posibilidades en *contra* de que ocurra E están dadas por $n(E')$ a $n(E)$.

EJEMPLO 7 **Encontrar posibilidades cuando se lanzan dos dados**

Si se lanzan dos dados y E es el evento de tirar una suma de 7, ¿cuáles son las posibilidades

a) a favor de E? **b)** en contra de E?

SOLUCIÓN Del ejemplo 2 tenemos $n(E) = 6$ y $n(S) = 36$, de modo que

$$n(E') = n(S) - n(E) = 36 - 6 = 30.$$

a) Las posibilidades a favor de obtener una suma de 7 son $n(E)$ a $n(E')$ o

$$6 \quad \text{a} \quad 30 \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad 1 \quad \text{a} \quad 5.$$

b) Las posibilidades en contra de obtener una suma de 7 son $n(E')$ a $n(E)$ o

$$30 \quad \text{a} \quad 6 \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad 5 \quad \text{a} \quad 1.$$

■

EJEMPLO 8 **Encontrar probabilidades y posibilidades**

a) Si $P(E) = 0.75$, encuentre $O(E)$.

b) Si $O(E)$ son 6 a 5, encuentre $P(E)$.

SOLUCIÓN

a) Como $P(E) = 0.75 = \frac{3}{4}$ y $P(E) = n(E)/n(S)$, sea

$$n(E) = 3 \text{ y } n(S) = 4.$$

Entonces, $n(E') = n(S) - n(E) = 4 - 3 = 1$, y $O(E)$ están dadas por

$$n(E) \quad \text{a} \quad n(E'), \quad \text{o} \quad 3 \quad \text{a} \quad 1$$

b) Como $O(E)$ son 6 a 5 y $O(E)$ son $n(E)$ a $n(E')$, sea

$$n(E) = 6 \text{ y } n(E') = 5$$

En consecuencia, $n(S) = n(E) + n(E') = 6 + 5 = 11$, y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{11}$$

■

Se dice que dos eventos E_1 y E_2 son **independientes** si el suceso de uno no influye en que ocurra el otro.

Teorema sobre eventos independientes

Si E_1 y E_2 son eventos independientes, entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

En palabras, el teorema expresa que si E_1 y E_2 son eventos independientes, la probabilidad de que *tanto* E_1 *como* E_2 ocurran simultáneamente es el producto de sus probabilidades. Tenga en cuenta que si dos eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $P(E_1 \cap E_2) = 0$ y no pueden ser independientes. (Suponemos que tanto E_1 como E_2 son no vacíos.)

Si un evento ocurre una vez cada n ensayos (en promedio), una pregunta común es: "¿Cuántos ensayos son necesarios para tener 50% de probabilidad de que ocurra el evento?" El siguiente ejemplo responde una pregunta similar para un evento específico.

EJEMPLO 9 **Probabilidades de sacar una escalera real**

FIGURA 1

Una escalera real es una mano de cinco cartas formada por A, K, Q, J y 10 del mismo palo (vea figura 1). En un determinado juego de póquer, un ciclo de escalera real se produce aproximadamente en 40,390 manos (cada mano comienza con un nuevo mazo de cartas). Aproxime el número de manos que hay que jugar para tener 25% de probabilidades de sacar una escalera real.

SOLUCIÓN Sea E el evento de obtener una escalera real, por lo que $p(E) = \frac{1}{40{,}390}$ y $p(E') = \frac{40{,}389}{40{,}390}$. Debido a que cada mano se inicia con un nuevo mazo de cartas, las manos son eventos independientes, por lo que la probabilidad de *no* sacar una escalera real en dos manos consecutivas es de $\frac{40{,}389}{40{,}390} \cdot \frac{40{,}389}{40{,}390} = \left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^2$, en tres manos consecutivas es de $\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^3$, y en n manos consecutivas $\left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n$. Un 25% de probabilidades de que ocurra E es lo mismo que 75% de probabilidades de que ocurra E'. Podemos despejar n de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\left(\tfrac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n &= 0.75 && \text{igualamos probabilidades para } E' \\
\ln \left(\tfrac{40{,}389}{40{,}390}\right)^n &= \ln 0.75 && \text{obtenemos ln en ambos lados} \\
n \ln \left(\tfrac{40{,}389}{40{,}390}\right) &= \ln 0.75 && \text{ley 3 de los logaritmos} \\
n &= \frac{\ln 0.75}{\ln \left(\frac{40{,}389}{40{,}390}\right)} && \text{dividimos} \\
n &\approx 11{,}619 && \text{aproximamos}
\end{aligned}
$$

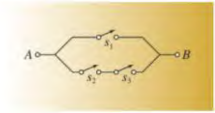
Porcentaje de probabilidad de sacar una escalera real	Número de manos jugadas
25%	11,619
50%	27,996
75%	55,992
90%	93,000

Así, jugar alrededor de 11,619 manos nos da una probabilidad de 25% de sacar una escalera real. Cálculos similares se presentan en la tabla al margen. Tenga en cuenta que 27,996 manos es un poco inferior a la media dada de 40,390 manos, pero 93,000 indica que se pueden jugar muchas manos sin sacar una escalera real; de hecho, ¡*ningún* número de manos jugadas garantizará sacar la escurridiza escalera real!

EJEMPLO 10 **Una aplicación de probabilidad a un sistema eléctrico**

Un sistema eléctrico tiene interruptores de campo cerrado/abierto s_1, s_2 y s_3, como se ve en la figura 2. Los interruptores operan de manera independiente uno del otro y la corriente circulará de A a B si s_1 está cerrado o si *tanto* s_2 *como* s_3 están cerrados.

FIGURA 2



a) Si S_k denota el evento que s_k está cerrado, donde $k = 1, 2, 3$, exprese, en términos de $P(S_1)$, $P(S_2)$ y $P(S_3)$, la probabilidad p de que circule corriente de A a B.

b) Encuentre p si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k.

SOLUCIÓN

a) La probabilidad p de que ocurra S_1 o S_2 y S_3 es

$$p = P(S_1 \cup (S_2 \cap S_3))$$

Usando el teorema sobre la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos eventos S_1 o $S_2 \cap S_3$, obtenemos

$$p = P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3))$$

Aplicando dos veces el teorema sobre eventos independientes, tendremos

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2 \cap S_3)$$

Por último, usando una vez más el teorema sobre eventos independientes, vemos que

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3)$$

b) Si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k, entonces, con base en el inciso a), la probabilidad de que circule corriente de A a B es

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} = 0.625$$

EJEMPLO 11 **Una continuación del ejemplo 10**

Consulte el ejemplo 10. Si la probabilidad de que s_k esté cerrado es igual para cada k, determine $P(S_k)$ de manera que $p = 0.99$.

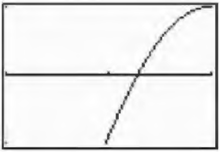
SOLUCIÓN Como la probabilidad $P(S_k)$ es igual para cada k, sea $P(S_k) = x$ para $k = 1, 2, 3$. Sustituyendo en la fórmula por p obtenida en el inciso a) del ejemplo 10, obtenemos

$$p = x + x \cdot x - x \cdot x \cdot x = -x^3 + x^2 + x$$

Si $p = 0.99$, tendremos la ecuación

$$-x^3 + x^2 + x = 0.99$$

FIGURA 3
$[0.8, 1, 0.1]$ por $[-0.01, 0.01, 0.01]$

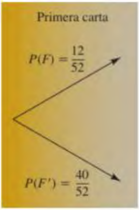


Al graficar $y = -x^3 + x^2 + x - 0.99$ usando un visor rectangular estándar, vemos que hay tres puntos de intersección con el eje x. La probabilidad deseada debe estar entre $x = 0$ y $x = 1$, y debe ser más bien cercana a 1. Usando las dimensiones de pantalla $[0.8, 1, 0.1]$ por $[-0.01, 0.01, 0.01]$, obtenemos un trazo semejante al de la figura 3. Usando una función raíz o cero tendremos $x \approx 0.93$. En consecuencia, $P(S_k) = 0.93$.

Note que la probabilidad de que un interruptor esté cerrado es *menor* que la probabilidad de que circule corriente por el sistema.

EJEMPLO 12 **Uso de un diagrama de árbol para encontrar una probabilidad**

FIGURA 4

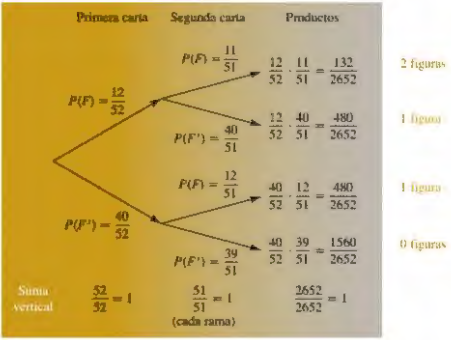


Si dos cartas se sacan de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas sea una figura?

SOLUCIÓN Denotemos con F el evento de sacar una figura. Hay 12 cartas de figura en un mazo de 52 cartas, de modo que $P(F) = \frac{12}{52}$. Podemos representar esta probabilidad, así como la probabilidad de su complemento, con el *diagrama de árbol* que se ve en la figura 4.

Las probabilidades para la segunda carta dependen de lo que haya sido la primera. Para abarcar todas las posibilidades para la segunda carta, unimos ramas con probabilidades semejantes al extremo de cada rama del primer diagrama de árbol, como se ve en la figura 5.

FIGURA 5



La columna Productos presenta las probabilidades para todas las posibilidades de dos cartas; por ejemplo, la probabilidad de que ambas cartas sean figuras es de $\frac{132}{2652}$. Las sumas verticales deben ser iguales a 1; calcular esto es una buena forma de comprobar las operaciones. Para contestar la pregunta, podemos sumar las primeras tres probabilidades en la columna Productos o restar la cuarta probabilidad de 1. Usando el último método, tenemos

$$1 - \frac{1560}{2652} = \frac{1092}{2652} = \frac{7}{17} \approx 41\%$$

■

Con frecuencia es de interés conocer qué cantidad de rendimiento se puede esperar de una inversión en un juego de azar. La siguiente definición nos ayudará a contestar preguntas que caen en esta categoría.

Definición de valor esperado

Suponga que una variable puede pagar cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con probabilidades correspondientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$. El **valor esperado** VE de la variable está dado por

$$\text{VE} = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n = \sum_{k=1}^{n} a_kp_k$$

EJEMPLO 13 **Valor esperado de un solo billete**

Algunos estados donde se permiten loterías ofrecen a veces juegos en los que se imprime cierto número de boletas con lengüetas desprendibles, algunas de las cuales se canjean por dinero y las demás no tienen valor. Suponga que en un juego en particular hay 4,000 billetes, 432 de los cuales se canjean con base en la tabla siguiente.

Número de boletas	Valor
4	$100
8	50
20	20
400	2

Encuentre el valor esperado de una boleta que se vende en $1.

SOLUCIÓN Las cantidades de pago de $100, $50, $20 y $2 tienen probabilidades de $\frac{4}{4000}$, $\frac{8}{4000}$, $\frac{20}{4000}$ y $\frac{400}{4000}$, respectivamente. Las restantes 3,568 boletas tienen un pago de $0. Por la definición precedente, el valor esperado de una sola boleta es

$$\begin{aligned} \text{VE} &= 100 \cdot \tfrac{4}{4000} + 50 \cdot \tfrac{8}{4000} + 20 \cdot \tfrac{20}{4000} + 2 \cdot \tfrac{400}{4000} + 0 \cdot \tfrac{3568}{4000} \\ &= \tfrac{2000}{4000} = \$0.50 \end{aligned}$$

Así, después de restar el costo de $1 de la boleta, podemos esperar una *pérdida* de $0.50 en cada boleta que compremos. Observe que no podemos perder $0.50 en ninguna boleta individual, pero podemos esperar perder esta cantidad en cada boleta a largo plazo. Este juego da un rendimiento muy malo para el comprador y una sana utilidad para el vendedor. ■

El valor esperado de $0.50 obtenido en el ejemplo 13 se puede considerar como la cantidad que esperaríamos pagar por participar en el juego si éste fuera *justo*, es decir, no esperaríamos ganar o perder ningún dinero después de participar varias veces en el juego.

En esta sección simplemente hemos introducido varios conceptos básicos acerca de probabilidades. La persona interesada debe consultar libros y cursos completos dedicados a esta rama de las matemáticas.

9.8 Ejercicios

Ejer. 1–2: Una sola carta se saca de un mazo. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que la carta sea como se especifica.

1 **a)** un rey

b) un rey o una reina

c) un rey, una reina o un jack

2 **a)** un corazón

b) un corazón o un diamante

c) un corazón, un diamante o un trébol

Ejer. 3–4: Se lanza al aire un solo dado. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que el dado sea como se especifica.

3 **a)** un 4 **b)** un 6 **c)** un 4 o un 6

4 **a)** un número par **b)** un número divisible entre 5

c) un número par o un número divisible entre 5

Ejer. 5–6: Una urna contiene cinco bolas rojas, seis verdes y cuatro blancas. Si se saca una sola de ellas, encuentre la probabilidad y las posibilidades de que sea como se especifica.

5 **a)** roja **b)** verde **c)** roja o blanca

6 **a)** blanca **b)** verde o blanca **c)** no verde

Ejer. 7–8: Se lanzan al aire dos dados. Encuentre la probabilidad y las posibilidades de que la suma sea como se especifica.

7 **a)** 11 **b)** 8 **c)** 11 u 8

8 **a)** mayor que 9 **b)** un número impar

Ejer. 9–10: Se lanzan al aire tres dados. Encuentre la probabilidad del evento especificado.

9 Una suma de 5

10 Un seis aparece en exactamente un dado

11 Si se lanzan al aire tres monedas, encuentre la probabilidad de que aparezcan exactamente dos caras.

12 Si se lanzan al aire cuatro monedas, encuentre la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces.

13 Si $P(E) = \frac{5}{7}$, encuentre $O(E)$ y $O(E')$.

14 Si $P(E) = 0.4$, encuentre $O(E)$ y $O(E')$.

15 Si $O(E)$ son 9 a 5, encuentre $O(E')$ y $P(E)$.

16 Si $O(E')$ son 7 a 3, encuentre $O(E)$ y $P(E)$.

Ejer. 17–18: Para el valor dado de $P(E)$, calcule $O(E)$ en términos de "X a 1".

17 $P(E) = 0.659$ **18** $P(E) = 0.822$

Ejer. 19–24: Suponga que se sacan cinco cartas de un mazo. Encuentre la probabilidad de obtener las cartas indicadas.

19 Cuatro de un tipo (por ejemplo, cuatro ases o cuatro reyes)

20 Tres ases y dos reyes

21 Cuatro diamantes y una de espadas

22 Cinco figuras

23 Una flor (cinco cartas del mismo palo)

24 Una escalera real (un as, rey, reina, jack y 10 del mismo palo)

25 Si se lanza al aire un solo dado, encuentre la probabilidad de obtener un número impar o un número primo.

26 Una sola carta se saca de un mazo. Encuentre la probabilidad de que la carta sea roja o de figura.

27 Si la probabilidad de que un bateador en béisbol conecte un cuadrangular en un turno al bate es de 0.326, encuentre la probabilidad de que el bateador no conecte hit en 4 turnos al bate.

28 Si la probabilidad de que un jugador de basquetbol enceste un tiro libre es de 0.9, encuentre la probabilidad de que el jugador enceste al menos 1 de 2 tiros libres.

Ejer. 29–30: Los resultados 1, 2, ..., 6 de un experimento y sus probabilidades aparecen en la tabla siguiente.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25	0.05

Para los eventos indicados, encuentre a) $P(E_1)$, b) $P(E_1 \cap E_2)$, c) $P(E_1 \cup E_2)$ y d) $P(E_1 \cup E_3')$.

29 $E_1 = \{1, 2\}$; $E_2 = \{2, 3, 4\}$; $E_3 = \{4, 6\}$

30 $E_1 = \{1, 2, 3, 6\}$; $E_2 = \{3, 4\}$; $E_3 = \{4, 5, 6\}$

Ejer. 31–32: Una caja contiene 10 fichas rojas, 20 azules y 30 verdes. Si se sacan 5 fichas de la caja, encuentre la probabilidad de sacar las que se indican.

31 **a)** todas azules

b) por lo menos 1 verde

c) por lo menos 1 roja

32 **a)** exactamente 4 verdes

b) por lo menos 2 rojas

c) a lo sumo 2 azules

33 **Examen de verdadero o falso** Un examen de verdadero o falso contiene ocho preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta de cada pregunta, encuentre la probabilidad de que

a) ocho respuestas sean correctas

b) siete respuestas sean correctas y una sea incorrecta

c) seis respuestas sean correctas y dos sean incorrectas

d) por lo menos seis respuestas sean correctas

34 **Selección de comité** Para seleccionar un comité de 6 miembros, se sacarán nombres de personas de un sombrero. Si el sombrero contiene los nombres de 8 hombres y 14 mujeres, encuentre la probabilidad de que el comité esté formado por 3 hombres y 3 mujeres.

Ejer. 35–36: Se sacan cinco cartas de un mazo. Encuentre la probabilidad del evento especificado.

35 Obtener por lo menos un as

36 Obtener por lo menos una carta de corazones

37 **Experimento de cartas y dados** Cada palo de un mazo está formado por un as (A), nueve cartas numeradas (2, 3, ..., 10) y tres figuras (J, Q, K). Un experimento consiste en sacar una sola carta de un mazo y, enseguida, lanzar un solo dado.

a) Describa el espacio muestral S del experimento y encuentre $n(S)$.

b) Sea E_1 el evento formado por los resultados en los que una carta de número se saca y el número de puntos en el dado es igual que el número de la carta. Encuentre $n(E_1)$, $n(E_1')$ y $P(E_1)$.

c) Sea E_2 el evento en el que la carta extraída es una figura, y sea E_3 el evento en el que el número de puntos del dado es par. ¿E_2 y E_3 son mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

d) ¿E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_1 \cap E_2)$ y $P(E_1 \cup E_2)$.

38 Experimento de letra y número Un experimento consiste en seleccionar una letra del alfabeto y uno de los dígitos 0, 1, ..., 9.

a) Describa el espacio muestral S del experimento y encuentre $n(S)$.

b) Suponga que las letras del alfabeto se asignan a números como sigue: $A = 1$, $B = 2$, ..., $Z = 26$. Sea E_1 el evento en el que el dígito de unidades del número asignado a la letra del alfabeto es igual al dígito seleccionado. Encuentre $n(E_1)$, $n(E_1')$ y $P(E_1)$.

c) Sea E_2 el evento en que la letra es una de las cinco vocales y E_3 el evento en que el dígito un número primo. ¿E_2 y E_3 son mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

d) Sea E_4 el evento en el que el valor numérico de la letra es par. ¿E_2 y E_4 son mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Encuentre $P(E_2 \cap E_4)$ y $P(E_2 \cup E_4)$.

39 Lanzar dados Si se lanzan dos dados, encuentre la probabilidad de que la suma sea mayor que 5.

40 Lanzar dados Si se lanzan tres dados, encuentre la probabilidad de que la suma sea menor que 16.

41 Conformación de familia Suponiendo que los nacimientos de niñas y niños sean igualmente probables, encuentre la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga

a) sólo niños **b)** por lo menos una niña

42 Máquina tragamonedas Una máquina tragamonedas común y corriente contiene tres carretes, y cada uno de éstos contiene 20 símbolos. Si el primer carrete tiene cinco campanas, el carrete del medio tiene cuatro y el último carrete tiene dos, encuentre la probabilidad de obtener tres campanas en una fila.

43 Experimento de percepción extrasensorial (PE) En un sencillo experimento diseñado para probar la PE, cuatro cartas (jack , reina, rey y un as) se barajan y luego se ponen boca abajo en una mesa. El individuo trata entonces de identificar cada una de las cuatro cartas, dando un nombre diferente a cada una de ellas. Si el individuo está adivinando, encuentre la probabilidad de identificar correctamente

a) las cuatro cartas

b) exactamente dos de las cuatro cartas

44 Lanzar dados Se lanzan tres dados.

a) Encuentre la probabilidad de que todos los dados muestren el mismo número de puntos.

b) Encuentre la probabilidad de que los números de puntos en los dados sean todos diferentes.

c) Trabaje los incisos a) y b) para n dados.

45 Dados "cargados" Para un dado normal, la suma de los puntos en las caras opuestas es 7. En la figura se muestra un par de dados "cargados" en los que el *mismo* número de puntos aparece en caras opuestas. Encuentre la probabilidad de tirar una suma de

a) 7 **b)** 8

EJERCICIO 45

46 Juego de feria En un juego común de feria, tres bolas se lanzan en un plano inclinado hacia ranuras numeradas del 1 al 9, como se ve en la figura. Debido a que las ranuras son tan angostas, los jugadores no tienen control sobre dónde se recolectan las bolas. Se da un premio si la suma de los tres números es menor que 7. Encuentre la probabilidad de ganar un premio.

EJERCICIO 46

47 Muertes por fumar En un año promedio durante 1995–1996, el tabaquismo causó 442,398 muertes en Estados Unidos. De estas muertes, las enfermedades cardiovasculares fueron 148,605, los casos de cáncer 155,761 y los de enfermedades respiratorias, por ejemplo, enfisema, fueron 98,007.

a) Encuentre la probabilidad de que una muerte relacionada con fumar fuera el resultado ya sea de enfermedad cardiovascular o de cáncer.

b) Determine la probabilidad de que una muerte relacionada con fumar no fuera resultado de enfermedades respiratorias.

48 Horas de inicio de trabajo En una encuesta acerca de la hora en que las personas van a trabajar, se encontró que 8.2 millones lo hacen entre la medianoche y las 6:00 A.M., 60.4 millones entre las 6:00 y las 9:00 A.M. y 18.3 millones entre las 9:00 A.M. y la medianoche.

a) Encuentre la probabilidad de que una persona vaya al trabajo entre las 6:00 A.M. y la medianoche.

b) Encuentre la probabilidad de que una persona vaya a trabajar entre la medianoche y las 6:00 A.M.

49 **Exposición al arsénico y cáncer** En cierto condado, 2% de las personas tienen cáncer. De los que lo padecen, 70% han estado expuestos a altos niveles de arsénico; de los que no lo padecen, 10% han estado expuestos. ¿Qué porcentaje de las personas que han estado expuestas a altos niveles de arsénico tienen cáncer? (*Sugerencia*: use un diagrama de árbol.)

50 **Computadoras y chips defectuosos** Un fabricante de computadoras compra 30% de sus chips al proveedor A y el resto al proveedor B. De los chips del proveedor A, 2% salen defectuosos, así como 4% de los chips del proveedor B. ¿Aproximadamente qué porcentaje de los chips defectuosos son del proveedor B?

51 **Demostración de probabilidad** En la figura se muestra una pequeña versión de un aparato para demostración de probabilidad. Una pequeña bola se deja caer en la parte superior del laberinto y cae al fondo. Cada vez que la bola golpea un obstáculo, hay 50% de probabilidad de que se mueva a la izquierda. Encuentre la probabilidad de que la bola termine en la ranura

a) de la extrema izquierda **b)** del centro

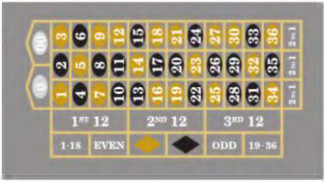
EJERCICIO 51

52 **Ruleta** En la versión estadounidense de la ruleta, una pelota se lanza alrededor de una rueda y tiene igual probabilidad de caer en cualquiera de las 38 ranuras numeradas 0, 00, 1, 2, ..., 36. En la figura se muestra una distribución estándar de apuestas para ruleta, donde el color del óvalo corresponde al color de la ranura de la rueda. Encuentre la probabilidad de que la pelota caiga

a) en una ranura negra

b) en una ranura negra dos veces consecutivas

EJERCICIO 52



53 **Selección de números de lotería** En una versión de un popular juego de lotería, un jugador selecciona seis números del 1 al 54. La agencia a cargo de la lotería también selecciona seis números. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador iguale los seis números si se compran dos boletos de 50¢? (El premio mayor vale por lo menos $2 millones en dinero y crece con base en el número de boletos vendidos.)

54 **Lotería** Consulte el ejercicio 53. El jugador puede ganar unos $1,000 por igualar cinco de los seis números y alrededor de $40 si iguala cuatro de los seis números. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane algún dinero del premio en la compra de un billete.

55 **Control de calidad** En un procedimiento de control de calidad para probar focos defectuosos, se seleccionan al azar dos focos de una muestra grande sin restituirlas. Si cualquiera de los focos está defectuoso, todo el lote se rechaza. Suponga que una muestra de 200 focos contiene 5 de ellos defectuosos. Encuentre la probabilidad de que la muestra sea rechazada. (*Sugerencia*: primero calcule la probabilidad de que ningún foco resulte defectuoso.)

56 **Esperanza de vida** Un hombre tiene 54 años de edad y una mujer 34. La probabilidad de que el hombre viva 10 años más es de 0.74, mientras que la probabilidad de que la mujer viva 10 años más a partir de ahora es de 0.94. Suponga que sus esperanzas de vida no están relacionadas.

a) Encuentre la probabilidad de que ambos vivan 10 años más a partir de ahora.

b) Determine la probabilidad de que ninguno viva dentro de 10 años.

c) Determine la probabilidad de que por lo menos uno de ellos viva 10 años más a partir de ahora.

57 **Jugar *craps*** En el juego de dados conocido como *craps*, hay dos formas en que un jugador pueda ganar una apuesta de *línea de pase*. El jugador gana de inmediato si dos dados se tiran y la suma de ambos es 7 u 11. Si su suma es 4, 5, 6, 8, 9 o 10, el jugador todavía puede ganar una apuesta de línea de pase si este mismo número (llamado *punto*) se tira otra vez antes de tirar un 7. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane

a) una apuesta de línea de pase en el primer tiro

b) una apuesta de línea de pase con un 4 en el primer tiro

c) en cualquier apuesta de línea de paso

58 **Dados sin dados** Consulte el ejercicio 57. En el juego de *craps*, un jugador pierde una apuesta de línea de pase si obtiene una suma de 2, 3 o 12 en el primer tiro (conocido como "*craps*"). En otra versión del juego, llamada "*crapless craps*", el jugador no pierde si tira *craps* y no gana al tirar un 11 en el primer tiro. En cambio, el jugador gana si el primer tiro es un 7 o si el punto (2–12, excluyendo 7) se repite antes de tirar un 7. Encuentre la probabilidad de que el jugador gane en una apuesta de línea de pase en dados sin dados.

59 **Probabilidades de escoger una canica única** Hay una canica morada en una caja de 200 canicas. Un niño elige una canica al azar y la reemplaza hasta que la canica morada es seleccionada. ¿Cuántas selecciones producen alrededor de 60% de posibilidad de seleccionar la canica morada?

60 Vuelva a hacer el ejercicio 59 si ahora hay sólo 100 canicas en la caja.

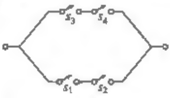
61 **Pesca de patos** Hay 20 patos de goma en un tanque de una feria local, y capturar uno de los tres patos especialmente marcados otorga un gran premio. Si un abuelo quiere que haya 80% de posibilidad de que su nieto gane un gran premio, ¿cuántas rondas de pesca debe estar dispuesto a pagar?

EJERCICIO 61

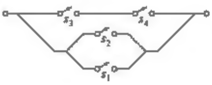
62 **Giros de la gran rueda** Un juego tiene una gran rueda con 24 ranuras. Cuando un concursante hace girar la rueda, y ésta se detiene en una de las dos ranuras especialmente marcadas, el concursante recibe el gran premio. Los productores del programa quieren saber cuántas vueltas darán lugar a una probabilidad de 90% de que los grandes premios sean ganados. Determine el número de vueltas.

Ejer. 63–64: Consulte los ejemplos 10 y 11. a) Encuentre p para el sistema eléctrico que se muestra en la figura si $P(S_k) = 0.9$ para cada k. b) Use una gráfica para estimar $P(S_k)$ si $p = 0.99$.

63



64



65 **Probabilidad de cumpleaños**

a) Demuestre que la probabilidad p de que n personas tengan todas ellas diferentes cumpleaños está dada por

$$p = \frac{365!}{365^n(365 - n)!}.$$

b) Si en un aula hay 32 personas, calcule la probabilidad de que dos o más de ellas tengan el *mismo* cumpleaños. (Primero calcule $\ln p$ al usar la siguiente fórmula de matemáticas avanzadas:

$$\ln n! \approx n \ln n - n.)$$

66 **Probabilidad de cumpleaños** Consulte el ejercicio 65. Encuentre el mínimo número de personas en un aula tal que la probabilidad de que cada una tenga un cumpleaños diferente sea menor que $\frac{1}{2}$. *Sugerencia:* reescriba la fórmula para p del inciso a) del ejercicio previo como

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365 - n + 1}{365}.$$

67 **Una apuesta en dados** Consulte el ejercicio 57. Un jugador recibe \$2 por ganar una apuesta de línea de pase de \$1. Calcule el valor esperado de una apuesta de \$1.

68 **Una apuesta en la ruleta** Consulte el ejercicio 52. Si un jugador apuesta \$1 a que la bolita caerá en una ranura negra, recibirá \$2 si así ocurre. Calcule el valor esperado de una apuesta de \$1.

69 **Ganar el premio de un concurso** Un concurso ofrece los siguientes premios en dinero:

Número de premios	1	10	100	1000
Valores de los premios	\$1,000,000	\$100,000	\$10,000	\$1000

Si el patrocinador espera 20 millones de concursantes, encuentre el valor esperado para un solo concursante.

70 **Ganancias del premio de un torneo** Un torneo de boliche está organizado por handicap de modo que los 80 jugadores participantes están todos empatados. Los premios del torneo aparecen en la tabla.

Lugar	1o	2o	3o	4o	5o-10o
Premio	\$1000	\$500	\$300	\$200	\$100

Encuentre las ganancias esperadas para un concursante.

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–4: Encuentre los primeros cuatro y el séptimo términos de la sucesión que tiene el n-ésimo término dado.

1 $\left\{\dfrac{5n}{3-2n^2}\right\}$

2 $\{(-1)^{n+1} - (0.1)^n\}$

3 $\left\{1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

4 $\left\{\dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$

Ejer. 5–8: Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión infinita definida de forma recursiva.

5 $a_1 = 10, \quad a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

6 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = a_k!$

7 $a_1 = 9, \quad a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

8 $a_1 = 1, \quad a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Ejer. 9–14: Evalúe.

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 4)$

10 $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} \frac{2k-8}{k-1}$

11 $\displaystyle\sum_{k=7}^{100} 10$

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (2^k - 10)$

13 $\displaystyle\sum_{k=5}^{72} (3x^2)$

14 $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$

Ejer. 15–26: Exprese la suma en términos de notación de suma. (Las respuestas no son únicas.)

15 $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

16 $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

17 $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99\cdot 100}$

18 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

19 $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11}$

20 $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

21 $100 - 95 + 90 - 85 + 80$

22 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

23 $a_0 + a_1x^4 + a_2x^8 + \cdots + a_{25}x^{100}$

24 $a_0 + a_1x^3 + a_2x^6 + \cdots + a_{20}x^{60}$

25 $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$

26 $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$

27 Una sucesión está definida recursivamente por $a_1 = 4$, $a_2 = 5$,

$$a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1},$$

para $k \geq 2$. Encuentre los siguientes dos términos de la sucesión.

28 Encuentre el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la sucesión aritmética cuyos primeros dos términos son $4 + \sqrt{3}$ y 3.

29 Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la sucesión aritmética en la que el cuarto término es 9 y la diferencia común es -5.

30 Los términos quinto y decimotercero de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Encuentre el primero y el décimo términos.

31 Encuentre el número de términos de la sucesión aritmética con $a_1 = 1$, $d = 5$ y $S = 342$.

32 Inserte cuatro medias aritméticas entre 20 y -10.

33 Encuentre el décimo término de la sucesión geométrica cuyos primeros dos términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

34 Si una sucesión geométrica tiene 3 y -0.3 como sus términos tercero y cuarto, respectivamente, encuentre el octavo término.

35 Dada una sucesión geométrica con $a_3 = 16$ y $a_7 = 625$, encuentre a_8.

36 Encuentre la media geométrica de 4 y 8.

37 En cierta sucesión geométrica, el octavo término es 100 y la razón común es $-\frac{3}{2}$. Encuentre el primer término.

38 Inserte dos medias geométricas entre 7 y 354,571.

39 Dada una sucesión aritmética tal que $S_{12} = 402$ y $a_{12} = 50$, encuentre a_1 y d.

40 Dada una sucesión geométrica tal que $a_5 = \frac{1}{16}$ y $r = \frac{3}{2}$, encuentre a_1 y S_5.

Ejer. 41–44: Evalúe.

41 $\sum_{k=1}^{15}(5k-2)$ 42 $\sum_{k=1}^{10}\left(6-\frac{1}{2}k\right)$

43 $\sum_{k=1}^{10}\left(2^k-\frac{1}{2}\right)$ 44 $\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2}-2^k\right)$

45 Encuentre la suma de la serie geométrica infinita

$$1-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\frac{8}{125}+\cdots.$$

46 Encuentre el número racional cuya representación decimal es $6.\overline{274}$.

Ejer. 47–51: Demuestre que el enunciado es verdadero para todo entero positivo *n*.

47 $2+5+8+\cdots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

48 $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$

49 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

50 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

51 3 es un factor de n^3+2n.

52 Demuestre que para todo entero positivo $n^2+3<2^n$ para todo entero positivo $n\geq 5$.

Ejer. 53–54: Encuentre el mínimo entero positivo *j* para el cual el enunciado es verdadero. Use el principio extendido de inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que *j*.

53 $2^n\leq n!$ 54 $10^n\leq n^n$

Ejer. 55–56: Use el teorema del binomio para expandir y simplificar la expresión.

55 $(x^2-3y)^6$ 56 $(2x+y^3)^4$

Ejer. 57–60: Sin expandir por completo, encuentre el (los) término(s) indicado(s) en la expansión de la expresión.

57 $(x^{2/5}+2x^{-3/5})^{20}$;   primeros tres términos

58 $\left(y^3-\frac{1}{2}c^2\right)^9$;   sexto término

59 $(4x^2-y)^7$;   término que contiene x^{10}

60 $(2c^3+5c^{-2})^{10}$;   término que no contiene c

61 **Bloques de construcción** Tramos de diez pies de tablón de madera de 2×2 se deben cortar en cinco secciones para formar bloques de construcción para niños; las longitudes de los cinco bloques deben formar una sucesión aritmética.

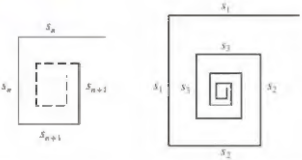
a) Demuestre que la diferencia d en longitud debe ser menor que 1 pie.

b) Si el bloque más pequeño ha de tener una longitud de 6 pulgadas, encuentre las longitudes de las otras cuatro piezas.

62 **Construcción de una escalera** Una escalera se debe construir con 16 peldaños cuyas longitudes disminuyen uniformemente de 20 pulgadas en la base a 16 pulgadas en el otro extremo. Encuentre la longitud total del material necesario para los peldaños.

63 En la primera figura se muestra una curva de rectas interrumpidas obtenida al tomar dos lados adyacentes de un cuadrado, cada uno de longitud s_n, decreciendo la longitud del lado en un factor f con $0<f<1$ y formando dos lados de un cuadrado más pequeño, cada uno de longitud $s_{n+1}=f\cdot s_n$. El proceso se repite entonces hasta el infinito. Si $s_1=1$ en la segunda figura, exprese la longitud de la curva de recta interrumpida resultante (infinita) en términos de f.

EJERCICIO 63



64 Las leyes conmutativa y asociativa de la adición garantizan que la suma de los enteros del 1 al 10 sea independiente del orden en el que se sumen los números. ¿En cuántas formas diferentes se pueden sumar estos enteros?

65 **Selección de cartas**

a) ¿En cuántas formas se pueden seleccionar 13 cartas de un mazo?

b) ¿En cuántas formas se pueden seleccionar 13 cartas para obtener cinco espadas, tres corazones, tres tréboles y dos diamantes?

66 ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si las repeticiones

a) no se permiten?   **b)** se permiten?

67 **Selección de preguntas de examen**

a) Si un estudiante debe contestar 8 de 12 preguntas sobre un examen, ¿cuántas selecciones diferentes de preguntas son posibles?

b) ¿Cuántas selecciones son posibles si las primeras tres preguntas deben ser contestadas?

68 **Arreglos de color** Si seis discos negros, cinco rojos, cuatro blancos y dos verdes son acomodados en una fila, ¿cuál es el número de posibles combinaciones de colores?

69 Si $O(E)$ son 8 a 5, encuentre $O(E')$ y $P(E)$.

70 **Lanzar monedas al aire** Encuentre la probabilidad de que las monedas sean iguales si

a) dos hombres lanzan cada uno una moneda

b) tres hombres lanzan cada uno una moneda

71 **Dar cartas** Si se dan cuatro cartas de un mazo, encuentre la probabilidad de que

a) las cuatro cartas sean del mismo color

b) las cartas repartidas sean alternadas rojo-negro-rojo-negro

72 **Probabilidades de ganar en una rifa** Si 1,000 boletos se venden para una rifa, encuentre la probabilidad de ganar si una persona compra

a) 1 boleto b) 10 boletos c) 50 boletos

73 **Lanzar monedas al aire** Si cuatro monedas se lanzan al aire, encuentre la probabilidad y las posibilidades de obtener una cara y tres cruces.

74 **Examen de verdadero o falso** Un examen contiene seis preguntas de verdadero o falso; se requieren por lo menos cuatro respuestas correctas para obtener una calificación aprobatoria. Si un estudiante adivina en cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad de

a) aprobar? b) reprobar?

75 **Probabilidades en dados y cartas** Si se lanza un solo dado y luego se saca una carta de un mazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener

a) un 6 en el dado y el rey de corazones?

b) un 6 en el dado o el rey de corazones?

76 **Datos demográficos** En una población de 5,000 personas, 1,000 tienen más de 60 años de edad y 2,000 son mujeres. Se sabe que 40% de las mujeres tienen más de 60 años de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar de esa ciudad sea mujer o tenga más de 60 años?

77 **Movimiento en backgammon** En el juego de backgammon, a los jugadores se les permite mover sus fichas el mismo número de espacios que la suma de los puntos de dos dados, pero si se tira un doble (esto es, ambos dados muestran el mismo número de puntos), entonces los jugadores pueden mover sus fichas dos veces la suma de los puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador pueda mover sus fichas por lo menos 10 espacios en un tiro dado?

78 **Probabilidades de escoger una carta única** Un hombre selecciona al azar una carta de una nueva baraja y la restituye hasta que selecciona la reina de espadas. ¿Cuántas selecciones producen alrededor de 75% de probabilidades de seleccionar la reina de espadas?

79 **Juegos en una serie** Dos equipos de béisbol igualmente acoplados están jugando una serie de partidos. El primer equipo en ganar cuatro juegos gana la serie. Encuentre el número esperado de partidos de la serie.

80 **Probabilidad de ases** En un popular juego de póquer, a los jugadores se les reparten dos cartas de una baraja de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que a un jugador le toque un par de ases.

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 Una pregunta de examen contiene cuatro términos de una sucesión como 2, 4, 6 y 8 y pide el quinto término. Demuestre que el quinto término puede ser *cualquier* número real a al encontrar el n-ésimo término de una sucesión que tiene 2, 4, 6, 8 y a como sus primeros cinco términos.

2 Determine si $\boxed{}$ debe sustituirse con $\leq$ o $\geq$. En

$$n \boxed{} (\ln n)^3$$

para que el enunciado sea verdadero cuando $n \geq j$, donde j es el mínimo entero positivo para el cual el enunciado es verdadero. Encuentre j.

Ejer. 3–4: a) Use el método de los ejercicios 41 y 42 de la sección 9.4 para encontrar una fórmula para la suma. b) Verifique que la fórmula encontrada en el inciso a) sea verdadera para toda n.

3 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$

4 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3$

5 Determine el máximo factorial que su calculadora pueda calcular. Algunos valores comunes son 69! y 449! Especule en cuanto a por qué estos números son los máximos valores que su calculadora puede evaluar.

6 Encuentre una relación entre los coeficientes de la expansión de $(a + b)^n$ y el número de subconjuntos distintos de un conjunto de n elementos.

7 **Rebote de pelota** Cuando una pelota se deja caer de una altura de h pies, llega al suelo en $\sqrt{h}/4$ segundos. La pelota rebota a una altura de d pies en $\sqrt{d}/4$ segundos. Si una pelota de caucho se deja caer de una altura de 10 pies y rebota a la mitad de su altura después de cada caída, ¿durante aproximadamente cuántos segundos viaja la pelota?

8 **Torneo de tragamonedas** Un torneo de tragamonedas se llevará a cabo durante un mes de 30 días, ocho horas al día, con 36 participantes por hora. La estructura del premio es como sigue:

Lugar	1°	2°	3°	4°	5°
Precio $	4000	2000	1500	1000	800

Lugar	6°	7°	8°	9°	10°
Precio $	600	500	400	300	200

Lugar	11°-50°	51°-100°	101°-300°	301°-500°
Precio $	100	75	50	25

También hay un premio diario otorgado como sigue: \$250 para el primero, \$100 para el segundo y \$50 para el tercero. ¿Cuánto esperaría pagar una persona por una cuota de entrada si el torneo ha de ser limpio?

9 **Dinero de un premio** Suponga que el décimo premio de un torneo de \$1,600 será de \$100 y cada lugar debe valer aproximadamente 10% más que el siguiente premio. Analice la distribución realista de valores de premio si se redondean al más cercano centavo, dólar, cinco dólares y diez dólares.

10 **Ingredientes de pizzas** Un restaurante de pizzas patrocina un anuncio que dice que logró un total de 1,048,576 formas posibles de ordenar 2 pizzas, con hasta 5 ingredientes cada una. Analice la forma en que la empresa calculó el número de posibles formas de ordenar una pizza y determine cuántos ingredientes existen.

11 **Powerball** El powerball es un popular juego de lotería en muchos estados de la Unión Americana. El jugador selecciona cinco enteros del 1 al 55 y un entero del 1 al 42. Estos números corresponden a cinco bolas blancas y una roja de Powerball sacada por la Asociación de Loterías Estatales. Para ganar el premio mayor, el jugador debe igualar los seis números. Los premios para todos los aciertos se indican en la tabla siguiente.

Acierto	Premio
5 blancas y una roja	Premio mayor
5 blancas	\$200,000
4 blancas y una roja	\$10,000
4 blancas	\$100
3 blancas y una roja	\$100
3 blancas	\$7
2 blancas y una roja	\$7
1 blanca y una roja	\$4
sólo roja	\$3

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio mayor?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar cualquier premio?

c) ¿Cuál es el valor esperado del juego sin el premio mayor?

d) ¿Cuánto necesita valer el premio mayor para que esta lotería sea considerada limpia?

12 **Probabilidad y probabilidades de confusión** Analice el siguiente enunciado: "Existe 20% de probabilidad de que un solicitante masculino sea admitido, pero la probabilidad es tres veces mayor para una solicitante femenina". ¿Cuál es la probabilidad de que una solicitante femenina sea admitida?

13 Sea $a = 0$ y $b = 1$ en

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

y analice el resultado.

14 Investigue las sumas parciales de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{1/2}}{2^{3n+2}} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

y analícelas.

15 **a)** Examine las siguientes identidades para $\tan nx$ en términos de $\tan x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\tan 4x = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$$

Usando un patrón formado por las tres identidades, prediga una identidad para $\tan 5x$ en términos de $\tan x$.

b) A continuación aparecen identidades para $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$:

$\cos 2x = 1 \cos^2 x \qquad\qquad - 1 \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen} 2x = \qquad\qquad 2 \cos x \operatorname{sen} x$

Escriba identidades similares para $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$ y luego $\cos 4x$ y $\operatorname{sen} 4x$. Use un patrón para predecir identidades para $\cos 5x$ y $\operatorname{sen} 5x$.

CAPÍTULO 9 EXAMEN

1 Calcule la suma del cuarto y el octavo términos de la sucesión $\{3 + 1/n\}$.

2 Calcule los dos términos siguientes de la sucesión definida de forma recursiva:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 2, \quad a_{k+2} = 4a_{k+1} - 3a_k \quad \text{para} \quad k \geq 1$$

3 Obtenga la suma $\sum_{k=100}^{652} \frac{3}{5k}$.

4 Obtenga la suma $\sum_{k=0}^{8} (2j - 7)$.

5 Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión aritmética 25, 18, 11, ...

6 Dados $a_{12} = 109$ y $a_{141} = 2119$ para una sucesión aritmética, calcule a_{858}.

7 Exprese la suma $6 + 17 + 28 + \cdots + 25{,}460$ en términos de notación de sumatoria y obtenga la suma.

8 Inserte tres medias aritméticas entre 5,217 y 8,789.

9 Un hombre compra una podadora de césped que cuenta con 7 ajustes de altura que varían entre 1 y 3.8 pulgadas. Su servicio de jardinería informa que la hierba se corta a una altura entre 2.5 y 3.5 pulgadas. Suponiendo que las configuraciones forman una secuencia aritmética, encuentre todas las configuraciones de altura aceptables (con una precisión de 0.01 pulgadas).

10 Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión geométrica 36, 12, 4, ...

11 Dados $a_2 = \frac{1}{2}$ y $a_5 = -32$ para una sucesión geométrica, calcule a_9.

12 Dados $a_1 = \frac{3}{8}$ y $r = 3$ para una sucesión geométrica, use una fórmula de suma para encontrar S_8.

13 Calcule la suma $2125 - 1275 + 765 - \cdots$.

14 Encuentre el número racional representado por $1.\overline{47}$.

15 Calcule la media geométrica de 40 y 250.

16 Considere el enunciado "la bolsa de valores sube 8% cada año". Escriba una fórmula para el n-ésimo término de una secuencia geométrica que describa el enunciado e interprete a_{15}.

17 Demuestre que el enunciado $2 + 8 + 14 + \cdots + (6n - 4) = 3n^2 - n$ es verdadero para todo entero positivo n.

18 Utilice el teorema del binomio para expandir y simplificar $(2x - 5y^2)^3$.

19 Calcule el decimocuarto término (simplificado) en la expansión de $(2x^2 - x^{-1})^{18}$.

20 Calcule los dos primeros términos en la expansión de $(x^4 - 3x^{-2})^{12}$.

21 En términos de factoriales, ¿cómo se compara $P(150, 50)$ con $C(150, 50)$?

22 Suponga que cualquier dígito puede utilizarse en cualquier lugar de un número de 9 dígitos de seguridad social. Si la población de Estados Unidos es de 300 millones, ¿cuántos números de seguridad social no utilizados hay?

23 Un número de serie se compone de una letra del alfabeto, seguida por otra letra diferente, seguidas de dos dígitos. ¿Cuántos números de serie diferentes son posibles?

24 De un grupo de equipos de futbol, los concursantes pueden elegir uno de los 30 equipos cada semana durante 17 semanas, pero no pueden escoger el mismo equipo más de una vez. Aproxime la cantidad de formas en las que un competidor puede elegir los equipos durante 17 semanas.

25 Hay ocho partidos de béisbol que se juegan en un día. ¿De cuántas maneras pueden listarse los ganadores (o perdedores)?

26 ¿De cuántas maneras puede un mazo estándar de 52 cartas barajarse de forma que las primeras 13 cartas sean todas espadas (hay sólo 13 espadas en la baraja)?

27 Un comité de siete personas se elige entre un grupo de 10 hombres y 12 mujeres. Calcule la *probabilidad* (a cuatro decimales) de que este comité esté compuesto por 3 hombres y 4 mujeres.

28 Una librería seleccionará a cinco alumnos de un grupo de 5,000 para entregarles certificados de regalo. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los alumnos si cada certificado vale la misma cantidad?

29 Si se lanzan diez monedas, encuentre la probabilidad (a la décima más cercana) de obtener exactamente siete caras.

30 Una sola carta se extrae de un mazo de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que la carta sea negra o de figura.

31 Si la probabilidad de que un evento ocurra es de 3/11, ¿cuáles son las posibilidades de que ocurra el mismo evento?

32 Si $P(E) = 0.63$, calcule $O(E)$ (con dos decimales) en términos de "X a 1".

33 Si una mujer lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que *no* salga un seis en cuatro lanzamientos?

34 Si una mujer lanza un dado, ¿cuántos lanzamientos producirán alrededor de 90% de probabilidades de que salga un seis?

35 Un concurso ofrece los siguientes premios en efectivo.

Número de premios	1	10	50
Valor de los premios	\$1,000,000	\$100,000	\$5000

Si el patrocinador espera 20 millones de concursantes, calcule el valor esperado para un solo concursante.

10

Temas de geometría analítica

10.1 Parábolas
10.2 Elipses
10.3 Hipérbolas
10.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas
10.5 Coordenadas polares
10.6 Ecuaciones polares de cónicas

La geometría plana incluye el estudio de figuras, por ejemplo, rectas, circunferencias y triángulos, que se encuentren en un plano. Los teoremas se demuestran por razonamiento en forma deductiva a partir de ciertos postulados. En geometría analítica las figuras geométricas planas se investigan mediante la introducción de sistemas de coordenadas y luego se usan ecuaciones y fórmulas. Si el estudio de la geometría analítica se resumiera por medio de un enunciado, quizá lo siguiente sería apropiado: dada una ecuación, encuentre su gráfica y, a la inversa, dada una gráfica, encuentre su ecuación. En este capítulo aplicaremos métodos de coordenadas a varias figuras planas básicas.

10.1 Parábolas

Las *secciones cónicas*, también llamadas *cónicas*, pueden obtenerse al cortar un cono circular recto de doble rama con un plano. Al variar la posición del plano, obtenemos una *circunferencia*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*, como se ilustra en la figura 1.

FIGURA 1

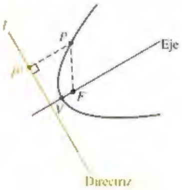
Se obtienen *cónicas degeneradas* si el plano interseca el cono sólo en un punto o a lo largo de una o dos rectas que se encuentren en el cono. Las secciones cónicas fueron estudiadas ampliamente por los antiguos griegos, que descubrieron propiedades que hacen posible que expresemos sus definiciones en términos de puntos y rectas, como lo hacemos en nuestra exposición.

De nuestro trabajo en la sección 2.6, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con un eje vertical. A continuación expresamos una definición general de una parábola y obtendremos ecuaciones para parábolas que tienen un eje vertical o un eje horizontal.

Definición de una parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (el **foco**) y una recta fija l (la **directriz**) que está en el plano.

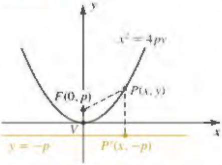
FIGURA 2



Supondremos que F no está en l, porque esto produciría una recta. Si P es un punto del plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P que es perpendicular a l (vea la figura 2), entonces, por la definición precedente, P está en la parábola si y sólo si las distancias $d(P, F)$ y $d(P, P')$ son iguales. El **eje** de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz. El **vértice** de la parábola es el punto V sobre el eje situado a media distancia entre F y l. El vértice es el punto en la parábola más cercano a la directriz.

Para obtener una ecuación sencilla para una parábola, coloque el eje y a lo largo del eje de la parábola, con el origen en el vértice V, como se ve en la figura 3. En este caso, el foco F tiene coordenadas $(0, p)$ para algún número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. (La figura muestra el caso $p > 0$.) Por la fórmula

FIGURA 3



de la distancia, un punto $P(x, y)$ está en la gráfica de la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$; es decir, si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Una ecuación equivalente para la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la parábola satisfacen $x^2 = 4py$. A la inversa, si (x, y) es una solución de $x^2 = 4py$, entonces al revertir los pasos previos vemos que el punto (x, y) está sobre la parábola.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como en la figura 3. Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. La gráfica es simétrica respecto al eje y porque la sustitución de $-x$ por x no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Si intercambiamos los papeles de x y y, obtenemos

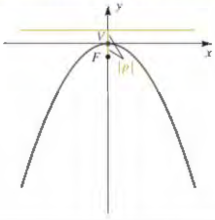
$$y^2 = 4px \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad x = \frac{1}{4p}y^2$$

Esta es una ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$, y abre a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Por comodidad, nos referimos a "la parábola $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4px$) en lugar de "la parábola con ecuación $x^2 = 4py$" (o $y^2 = 4px$).

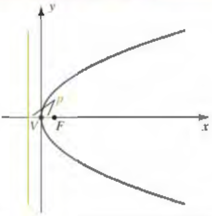
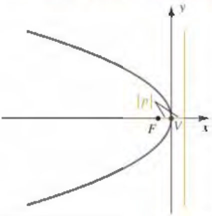
La siguiente tabla resume nuestra exposición.

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o $y = \frac{1}{4p}x^2$ Foco: $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$		

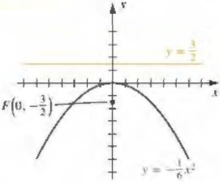
(continúa)

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$y^2 = 4px$ o $x = \frac{1}{4p}y^2$ Foco: $F(p, 0)$ Directriz: $x = -p$		

Vemos en la tabla que, para cualquier número real a diferente de cero, la gráfica de la **ecuación estándar** $y = ax^2$ o $x = ay^2$ es una parábola con vértice $V(0, 0)$. Además, $a = 1/(4p)$ o, lo que es equivalente, $p = 1/(4a)$, donde $|p|$ es la distancia entre el foco F y el vértice V. Para encontrar la directriz l, recuerde que l está también a una distancia $|p|$ de V.

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Determinación del foco y la directriz de una parábola**

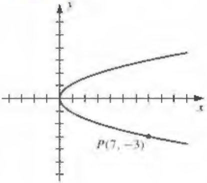
Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = ax^2$, con $a = -\frac{1}{6}$. Al igual que en la tabla precedente, $a = 1/(4p)$ y, por tanto,

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{-\frac{4}{6}} = -\frac{3}{2}$$

Así, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F(0, -\frac{3}{2})$, como se ilustra en la figura 4. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que está a una distancia de $\frac{3}{2}$ por encima de V, como se muestra en la figura. ■

FIGURA 5



EJEMPLO 2 **Encontrar una ecuación de una parábola que satisfaga condiciones prescritas**

a) Encuentre la ecuación de una parábola que tenga vértice en el origen, abra a la derecha y pase por el punto $P(7, -3)$.

b) Encuentre el foco de la parábola.

SOLUCIÓN

a) La parábola está trazada en la figura 5. Una ecuación de una parábola con vértice en el origen que abre a la derecha tiene la forma $x = ay^2$ para algún número a. Si $P(7, -3)$ está sobre la gráfica, entonces podemos sustituir 7 por x y -3 por y para encontrar a:

$$7 = a(-3)^2, \qquad \text{o} \qquad a = \frac{7}{9}$$

En consecuencia, una ecuación para la parábola es $x = \frac{7}{9}y^2$.

b) El foco está a una distancia p a la derecha del vértice. Como $a = \frac{7}{9}$, tenemos

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{9}{28}$$

Por lo tanto, el foco tiene coordenadas $\left(\frac{9}{28}, 0\right)$ ▪

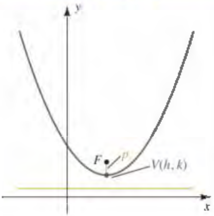
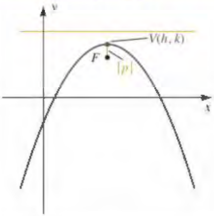
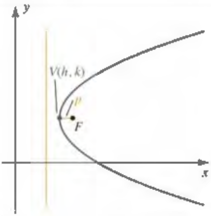
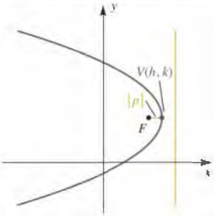
Si tomamos una ecuación estándar de una parábola (de la forma $x^2 = 4py$) y sustituimos x con $x - h$ y y con $y - k$, entonces

$$x^2 = 4py \quad \text{se convierte en} \quad (x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (*)$$

De nuestra explicación de las traslaciones en la sección 2.5, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación puede obtenerse de la gráfica de la primera ecuación al desplazarla h unidades a la derecha y k unidades hacia arriba, con lo que el vértice se mueve de $(0, 0)$ a (h, k). Si elevamos al cuadrado el lado izquierdo de $(*)$ y simplificamos, tendremos una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales.

Del mismo modo, si comenzamos con $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, se puede escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$. En la siguiente tabla, $V(h, k)$ ha sido colocado en el primer cuadrante, pero la información dada en la columna de la extrema izquierda se cumple cualquiera que sea la posición de V.

Parábolas con vértice $V(h, k)$

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o $y = ax^2 + bx + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h, k + p)$ Directriz: $y = k - p$		
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o $x = ay^2 + by + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

EJEMPLO 3 **Trazo de una parábola con un eje horizontal**

Trace la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$.

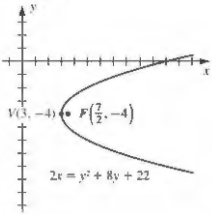
SOLUCIÓN La ecuación puede escribirse en la forma que se muestra en la segunda fila de la tabla precedente, $x = ay^2 + by + c$, de modo que vemos en la tabla que la gráfica es una parábola con un eje horizontal. Primero escribimos la ecuación dada como

$$y^2 + 8y + \_\_ = 2x - 22 + \_\_$$

y luego completamos el cuadrado al sumar $\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 16$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 &= 2x - 6 \\ (y + 4)^2 &= 2(x - 3) \end{aligned}$$

FIGURA 6



Al consultar la última tabla, vemos que $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$, o bien, lo que es equivalente, $p = \frac{1}{2}$. Esto nos da lo siguiente.

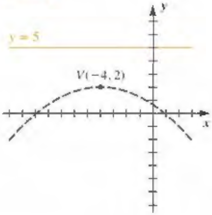
El vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$

El foco es $F(h + p, k) = F(3 + \frac{1}{2}, -4)$, o $F(\frac{7}{2}, -4)$

La directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2}$, o $x = \frac{5}{2}$

La parábola está trazada en la figura 6. ■

FIGURA 7



EJEMPLO 4 **Encontrar una ecuación de una parábola dados su vértice y directriz**

Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Exprese la ecuación de la parábola en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

SOLUCIÓN El vértice y directriz se muestran en la figura 7. Las marcas sobre la línea indican una posible posición de la parábola. La última tabla muestra que una ecuación de la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

con $h = -4$ y $k = 2$ y con p igual a 3 *negativo*, porque V está 3 unidades *debajo* de la directriz. Esto nos da

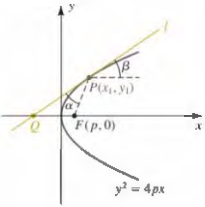
$$(x + 4)^2 = -12(y - 2)$$

FIGURA 8

La última ecuación puede expresarse en la forma $y = ax^2 + bx + c$, como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= -12y + 24 \\ 12y &= -x^2 - 8x + 8 \\ y &= -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

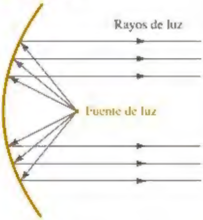
■



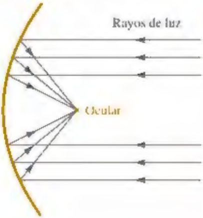
Una propiedad importante se relaciona con una recta tangente a la parábola. (Una *recta tangente* a una parábola tiene exactamente un punto en común con la parábola, pero no la cruza.) Suponga que l es la recta tangente en un punto $P(x_1, y_1)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$, y sea F el foco. Como en la figura 8, denotemos con α el ángulo entre l y el segmento de recta FP, y sea β el ángulo entre l y la semirrecta horizontal indicada con el punto extremo P. Se puede demostrar

FIGURA 9

a) Espejo de faro



b) Espejo de telescopio



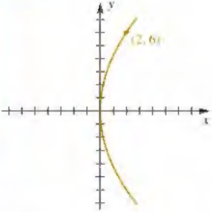
que $\alpha = \beta$. Esta *propiedad reflexiva* tiene numerosas aplicaciones. Por ejemplo, la forma del espejo de un faro se obtiene al hacer girar una parábola alrededor de su eje. Esta superficie tridimensional resultante se dice que está *generada* por la parábola y se llama **paraboloide**. El **foco** del paraboloide es el mismo que el foco de la parábola generadora. Si una fuente de luz se coloca en F, entonces, por una ley de la física (el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia), un haz de luz se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje (vea la figura 9a)). El mismo principio se usa en la construcción de espejos para telescopios u hornos solares: un haz de luz dirigido hacia el espejo parabólico y paralelo al eje se reflejará en el foco (vea la figura 9b)). Las antenas para sistemas de radar, telescopios de radio y micrófonos de campo que se emplean en juegos de futbol también hacen uso de esta propiedad.

EJEMPLO 5 **Localización del foco de una antena satelital de TV**

El interior de una antena satelital de TV es un disco que tiene forma de un paraboloide (finito) que tiene diámetro de 12 pies y 2 pies de profundidad, como se muestra en la figura 10. Encuentre la distancia del centro del disco al foco.

FIGURA 10

FIGURA 11



SOLUCIÓN La parábola generadora está trazada en un plano xy en la figura 11, donde hemos colocado el vértice de la parábola en el origen y su eje a lo largo del eje x. Una ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida del centro del disco al foco. Como el punto $(2, 6)$ está en la parábola, obtenemos

$$6^2 = 4p \cdot 2, \qquad \text{o} \qquad p = \tfrac{36}{8} = 4.5 \text{ ft}$$

■

En el siguiente ejemplo se usa una calculadora graficadora para trazar la gráfica de una parábola con un eje horizontal.

EJEMPLO 6 **Cómo graficar semiparábolas**

Grafique $x = y^2 + 2y - 4$.

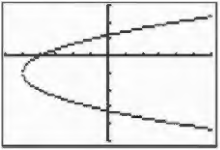
SOLUCIÓN La gráfica es una parábola con eje horizontal. Como y no es una función de x, despejaremos y de la ecuación y obtendremos dos ecuaciones (en forma muy semejante a como lo hicimos con circunferencias en el ejemplo 11 de la sección 2.2). Comenzamos por despejar y de la ecuación equivalente

$$y^2 + 2y - 4 - x = 0$$

en términos de x usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4 - x$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4 - x)}}{2(1)} && \text{fórmula cuadrática} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20 + 4x}}{2} && \text{simplificamos} \\ &= -1 \pm \sqrt{x + 5} && \text{factorizamos } \sqrt{4}\text{; simplificamos} \end{aligned}$$

FIGURA 12
$[-6, 6]$ por $[-5, 3]$



La última ecuación, $y = -1 \pm \sqrt{x + 5}$, representa la mitad superior de la parábola $\left(y = -1 + \sqrt{x + 5}\right)$ y la mitad inferior $\left(y = -1 - \sqrt{x + 5}\right)$. Note que $y = -1$ es el eje de la parábola.

A continuación, hacemos las asignaciones

$$Y_1 = -1 + \sqrt{x + 5} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = -1 - \sqrt{x + 5}$$

Ahora graficamos Y_1 y Y_2 para obtener una imagen semejante a la figura 12. ■

10.1 Ejercicios

Ejer. 1–12: Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. Trace su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

1 $8y = x^2$

2 $x^2 = -3y$

3 $2y^2 = -3x$

4 $20x = y^2$

5 $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$

6 $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$

7 $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

8 $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

9 $y = x^2 - 4x + 2$

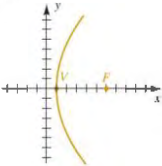
10 $x^2 + 20y = 10$

11 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

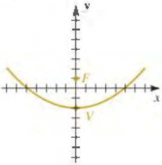
12 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Ejer. 13–20: Encuentre la ecuación para la parábola que se muestra en la figura.

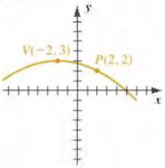
13



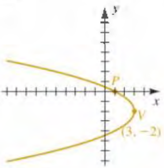
14



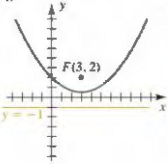
15



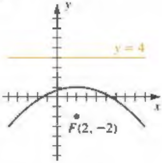
16



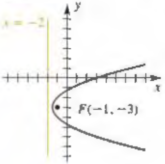
17



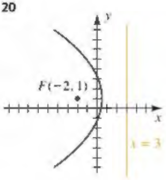
18



19



20



Ejer. 21–36: Encuentre la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

21 Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$

22 Foco $F(-4, 0)$, directriz $x = 4$

23 Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$

24 Foco $F(-3, -2)$, directriz $y = 1$

25 Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$

26 Vértice $V(-2, 3)$, directriz $x = 1$

27 Vértice $V(-2, 3)$, directriz $y = 5$

28 Vértice $V(4, 2)$, directriz $y = -6$

29 Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$

30 Vértice $V(-2, 1)$, foco $F(2, 1)$

31 Vértice $V(1, -2)$, foco $F(1, 0)$

32 Vértice $V(4, 7)$, foco $F(4, 2)$

33 Vértice en el origen, simétrica respecto al eje y que pasa por el punto $(2, -3)$

34 Vértice en el origen, simétrica respecto al eje y que pasa por el punto $(6, 3)$

35 Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5, 9)$

36 Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x e intersección en 1 con el eje y.

Ejer. 37–40: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy que son equidistantes del punto P y la recta l.

Ejer. 41–48: Encuentre la ecuación para la mitad indicada de la parábola.

41 Mitad inferior de $(y + 1)^2 = x + 3$

42 Mitad superior de $(y - 2)^2 = x - 4$

43 Mitad derecha de $(x + 1)^2 = y - 4$

44 Mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 2$

45 Mitad superior de $(y - 5)^2 = x + 2$

46 Mitad inferior de $(y + 4)^2 = x - 3$

47 Mitad izquierda de $(x - 2)^2 = y + 1$

48 Mitad derecha de $(x - 4)^2 = y - 5$

Ejer. 49–52: Determine si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una parábola, y encuentre la ecuación de la parábola.

49 $y = \sqrt{x - 6} - 2$

50 $y = -\sqrt{x + 3} + 4$

51 $x = -\sqrt{y + 7} - 3$

52 $x = \sqrt{y - 4} + 8$

Ejer. 53–54: Encuentre la ecuación para la parábola que tiene un eje vertical y pasa por los puntos dados.

53 $P(2, 5)$, $Q(-2, -3)$, $R(1, 6)$

54 $P(3, -1)$, $Q(1, -7)$, $R(-2, 14)$

Ejer. 55–56: Encuentre la ecuación para la parábola que tiene un eje horizontal y pasa por los puntos dados.

55 $P(-1, 1)$, $Q(11, -2)$, $R(5, -1)$

56 $P(2, 1)$, $Q(6, 2)$, $R(12, -1)$

57 **Espejo de telescopio** Un espejo para un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide (finito) de 8 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de profundidad. ¿A qué distancia del centro del espejo se acumulará la luz entrante?

EJERCICIO 57

58 **Plato de antena** El plato de una antena satelital tiene la forma de un paraboloide que mide 10 pies de diámetro en el extremo abierto y tiene 3 pies de profundidad. ¿A qué distancia del centro del plato debe colocarse el receptor para recibir la máxima intensidad de ondas de sonido?

59 **Reflector de un proyector** El reflector de un proyector tiene la forma de un paraboloide, con la fuente de luz en el foco. Si el reflector mide 3 pies de diámetro en la abertura y 1 pie de profundidad, ¿dónde está el foco?

60 **Espejo de una linterna** El espejo de una linterna tiene la forma de un paraboloide de 4 pulgadas de diámetro y $\frac{3}{4}$ de pulgada de profundidad, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse el foco para que los rayos de luz emitidos sean paralelos al eje del paraboloide?

EJERCICIO 60

61 **Plato receptor** Un plato receptor de sonido, que se emplea en espectáculos deportivos al aire libre, está construido en forma de un paraboloide con su foco a 5 pulgadas del vértice. Determine el ancho del plato si la profundidad debe ser de 2 pies.

62 **Plato receptor** Trabaje el ejercicio 61 si el receptor está a 9 pulgadas del vértice.

63 **Reflector parabólico**

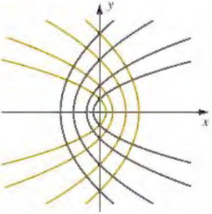
a) La longitud focal del paraboloide (finito) de la figura es la distancia p entre su vértice y foco. Exprese p en términos de r y h.

b) Un reflector se construirá con una longitud focal de 10 pies y una profundidad de 5 pies. Encuentre el radio del reflector.

EJERCICIO 63

64 **Parábolas confocales** La parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tiene su foco en el origen y su eje a lo largo del eje x. Al asignar diferentes valores a p, obtenemos una familia de parábolas cofocales, como se ve en la figura. Estas familias se presentan en el estudio de electricidad y magnetismo. Demuestre que hay exactamente dos parábolas en la familia que pasan por un punto dado $P(x_1, y_1)$ si $y_1 \neq 0$.

EJERCICIO 64



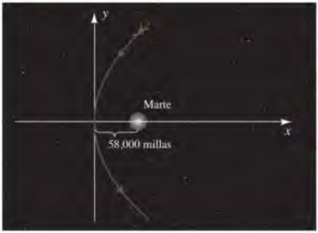
65 **Radiotelescopio de Jodrell Bank** Un radiotelescopio tiene la forma de un paraboloide de revolución, con longitud focal p y diámetro de base $2a$. Por cálculo, el área superficial S disponible para recolectar ondas de radio es

$$S = \frac{8\pi p^2}{3}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)^{3/2} - 1\right]$$

Uno de los radiotelescopios más grandes, situado en Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra, tiene diámetro de 250 pies y longitud focal de 75 pies. Calcule S a los mil pies cuadrados más cercanos.

66 **Trayectoria de satélite** Un satélite se desplazará en una trayectoria parabólica cercana a un planeta si su velocidad v en metros por segundo satisface la ecuación $v = \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia en metros entre el satélite y el centro del planeta y k es una constante positiva. El planeta estará situado en el foco de la parábola y el satélite pasará una vez por el planeta. Suponga que un satélite está diseñado para seguir una trayectoria parabólica y pasará a no más de 58,000 millas de Marte, como se ve en la figura de la página siguiente.

EJERCICIO 66



a) Determine una ecuación de la forma $x = ay^2$ que describa su trayectoria de vuelo.

b) Para Marte, $k = 4.28 \times 10^{13}$. Aproxime la máxima velocidad del satélite.

c) Calcule la velocidad del satélite cuando su coordenada y es de 100,000 millas.

Ejer. 67–68: Grafique la ecuación.

67 $x = 2y^2 + 2y + 5$ **68** $x = 2y^2 + 3y - 7$

Ejer. 69–70: Grafique las parábolas en el mismo plano de coordenadas y calcule los puntos de intersección.

68 $y = x^2 - 2.1x - 1;$ $x = y^2 + 1$

70 $y = -2.1x^2 + 0.1x + 1.2;$ $x = 0.6y^2 + 1.7y - 1.1$

10.2 Elipses

Una elipse se puede definir como sigue.

Definición de una elipse Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

FIGURA 1

Podemos trazar una elipse en papel como sigue: inserte dos tachuelas en el papel en cualesquiera puntos F y F', y sujete los extremos de una cuerda a las tachuelas. Después de enrollar la cuerda en un lápiz y tensarla, como en el punto P de la figura 1, mueva el lápiz manteniendo tensa la cuerda. La suma de las distancias $d(P, F)$ y $d(P, F')$ es la longitud de la cuerda y, por lo tanto, es constante; así, el lápiz trazará una elipse con focos en F y F'. El punto medio del segmento $F'F$ se llama **centro** de la elipse. Al cambiar las posiciones de F y F' mientras se mantiene fija la longitud de la cuerda, podemos variar considerablemente la forma de la elipse. Si F y F' están separadas de modo que $d(F, F')$ es casi igual a la longitud de la cuerda, la elipse es plana. Si $d(F, F')$ es cercana a cero, la elipse es casi una circunferencia. Si $F = F'$, obtenemos una circunferencia con centro F.

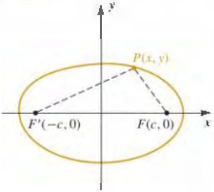
Para obtener una ecuación sencilla para una elipse, seleccione el eje x como la recta por la cual pasan los dos focos F y F', con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$, entonces, como en la figura 2, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$. En consecuencia, la distancia entre F y F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P desde F y F' será denotada por $2a$. Para obtener puntos que no estén sobre el eje x, debemos tener $2a > 2c$; es decir, $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si las siguientes ecuaciones equivalentes son verdaderas:

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

FIGURA 2



Si elevamos al cuadrado ambos lados de la última ecuación tendremos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

o bien,

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Al elevar de nuevo al cuadrado ambos lados tendremos

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

o bien,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Si se dividen ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Recordando que $a > c$ y, por lo tanto, $a^2 - c^2 > 0$, tenemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \qquad \text{o} \qquad b^2 = a^2 - c^2$$

Esta sustitución nos da la ecuación

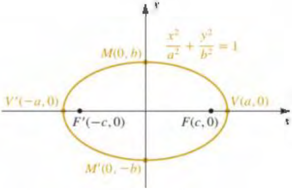
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que si $c = 0$, entonces $b^2 = a^2$ y tenemos una circunferencia. *También observe que si $c = a$, entonces $b = 0$ y tenemos una* cónica degenerada*; es decir, un punto.*

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a^2 > b^2$ y, por lo tanto, $a > b$.

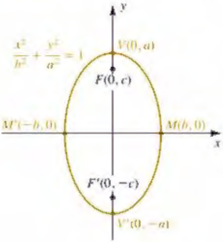
Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la elipse en la figura 3 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al invertir los pasos precedentes vemos que el punto (x, y) está sobre la elipse.

FIGURA 3



Podemos encontrar los puntos de intersección de la elipse con el eje x si $y = 0$ en la ecuación y obtendremos $x^2/a^2 = 1$, o $x^2 = a^2$. En consecuencia, los puntos de intersección con el eje x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ en la gráfica se llaman **vértices** de la elipse (vea la figura 3). El segmento de recta $V'V$ se denomina **eje mayor**. Del mismo modo, si $x = 0$ en la ecuación, obtenemos $y^2/b^2 = 1$, o $y^2 = b^2$. Por lo tanto, los puntos de intersección con el eje y son b y $-b$. El segmento entre $M'(0, -b)$ y $M(0, b)$ recibe el nombre de **eje menor** de la elipse. El eje mayor es siempre más largo que el eje menor porque $a > b$.

FIGURA 4



Si aplicamos las pruebas de simetría, vemos que la elipse es simétrica respecto al eje x, el eje y y el origen.

De manera similar, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

En este caso, los vértices de la elipse son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$, como se ve en la figura 4.

La exposición precedente puede resumirse como sigue.

Ecuaciones estándar de una elipse con centro en el origen

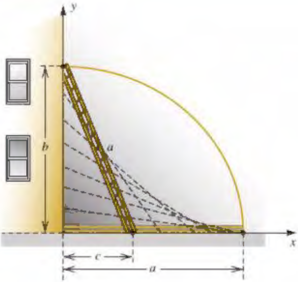
La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$, y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Para ayudar a recordar la relación para los focos, considere el triángulo recto formado por una escalera de longitud a que se apoya en un edificio, como se ve en la figura 5. Por el teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$. En esta posición, los extremos de la escalera están en un foco y un punto extremo del eje menor. Si la escalera baja, sus extremos estarán en el centro de la elipse y en un punto extremo del eje mayor

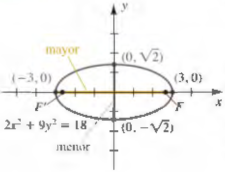
FIGURA 5



EJEMPLO 1 **Trazo de una elipse con centro en el origen**

Trace la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$ y encuentre los focos.

FIGURA 6



SOLUCIÓN Para escribir esta ecuación en forma estándar, divida cada término entre 18 para obtener una constante de 1:

$$\frac{2x^2}{18} + \frac{9y^2}{18} = \frac{18}{18}, \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje de coordenadas. De la última ecuación, como $9 > 2$, el eje mayor y los focos están en el eje x. Con $a^2 = 9$, tenemos $a = 3$ y los vértices son $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$. Como $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$ y los puntos extremos del eje menor son $M(0, \sqrt{2})$ y $M'(0, -\sqrt{2})$. Note que en este caso V y V' también son los puntos de intersección con el eje x, y M y M' son también los puntos de intersección con el eje y.

Ahora trazamos la gráfica con eje mayor de longitud $2a = 2(3) = 6$ (que se muestra en naranja en la figura 6) y eje menor de longitud $2b = 2\sqrt{2} \approx 2.8$ (que se muestra en gris).

Para encontrar los focos, sea $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$ y calculamos

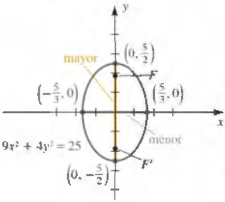
$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 7$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{7}$ y los focos son $F(\sqrt{7}, 0)$ y $F'(-\sqrt{7}, 0)$ ■

EJEMPLO 2 **Trazo de una elipse con centro en el origen**

Trace la gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 25$ y encuentre los focos.

FIGURA 7



SOLUCIÓN Divida cada término entre 25 para obtener la forma estándar:

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = \frac{25}{25}, \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

La gráfica es una elipse con centro en el origen. Como $\frac{25}{4} > \frac{25}{9}$, el eje mayor y los focos están en el eje y. Con $a^2 = \frac{25}{4}$, $a = \frac{5}{2}$ y, por lo tanto, los vértices son $V(0, \frac{5}{2})$ y $V'(0, -\frac{5}{2})$ (también los puntos de intersección con el eje y). Como $b^2 = \frac{25}{9}$, $b = \frac{5}{3}$, y los puntos extremos del eje menor son $M(\frac{5}{3}, 0)$ y $M'(-\frac{5}{3}, 0)$ (también los puntos de intersección con el eje x).

Trace la gráfica con eje mayor de longitud $2a = 2(\frac{5}{2}) = 5$ (que se muestra en negro en la figura 7) y eje menor de longitud $2b = 2(\frac{5}{3}) = 5$ (que se muestra en gris claro).

Para encontrar los focos, sea $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{5}{3}$ y calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 = \tfrac{125}{36}$$

Por lo tanto, $c = \sqrt{125/36} = 5\sqrt{5}/6 \approx 1.86$ y los focos son aproximadamente $F(0, 1.86)$ y $F'(0, -1.86)$. ■

EJEMPLO 3 **Encontrar una ecuación de una elipse dados sus vértices y focos**

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Como los focos están sobre el eje x y son equidistantes del origen, el eje mayor está sobre el eje x y la elipse tiene centro $(0, 0)$. Así, la ecuación general de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$. Como los focos son $(\pm 2, 0)$, tenemos $c = 2$. Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

y la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

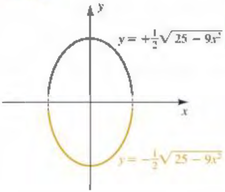
■

En ciertas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de una elipse. El siguiente ejemplo indica cómo encontrar ecuaciones en tales casos.

EJEMPLO 4 **Encontrar ecuaciones para semielipses**

Encuentre ecuaciones para la mitad superior, mitad inferior, mitad izquierda y mitad derecha de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$.

FIGURA 8



SOLUCIÓN La gráfica de toda la elipse se trazó en la figura 7. Para encontrar ecuaciones para las mitades superior e inferior, despejamos y en términos de x, como sigue:

$$9x^2 + 4y^2 = 25 \qquad \text{dado}$$

$$y^2 = \frac{25 - 9x^2}{4} \qquad \text{despejamos } y^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{25 - 9x^2}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2} \qquad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$

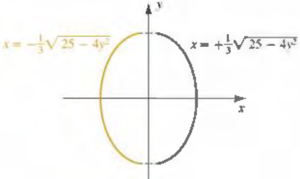
Como $\sqrt{25 - 9x^2} \geq 0$, se deduce que las ecuaciones para las mitades superior e inferior son $y = \frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$ y $y = -\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2}$, respectivamente, como se ve en la figura 8.

Para encontrar ecuaciones para las mitades izquierda y derecha, seguimos un procedimiento similar al anterior y despejamos x en términos de y, obteniendo

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 - 4y^2}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$$

La mitad izquierda de la elipse tiene la ecuación $x = -\frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$, y la mitad derecha está dada por $x = \frac{1}{3}\sqrt{25 - 4y^2}$, como se muestra en la figura 9.

FIGURA 9



■

Si tomamos una ecuación estándar de una elipse ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) y sustituimos x con $x - h$ y y con $y - k$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{se convierte en} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

La gráfica de (*) es una elipse con centro (h, k). Elevando al cuadrado los términos en (*) y simplificando, tendremos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde los coeficientes son números reales y tanto A como C son positivos. A la inversa, si comenzamos con esa ecuación, entonces al completar cuadrados podemos obtener una forma que nos ayuda a obtener el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Trazo de una elipse con centro (h, k)**

Trace la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$$

SOLUCIÓN Comenzamos por agrupar los términos que contienen x y los que contienen y:

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

A continuación, factorizamos los coeficientes de x^2 y y^2 como sigue:

$$16(x^2 + 4x + \underline{\quad}) + 9(y^2 - 2y + \underline{\quad}) = 71$$

Ahora completamos los cuadrados para las expresiones dentro de los paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + \underline{16 \cdot 4} + \underline{9 \cdot 1}$$

Al sumar 4 a la expresión dentro del primer par de paréntesis, hemos sumado 64 al lado izquierdo de la ecuación y, por lo tanto, debemos compensar y sumar 64 al lado derecho. Del mismo modo, al sumar 1 a la expresión dentro del segundo par de paréntesis hemos sumado 9 al lado izquierdo y, en consecuencia, debemos sumar 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144$$

Al dividir entre 144 para obtener 1 en el lado derecho, tendremos

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

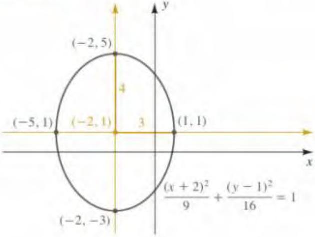
La gráfica de la última ecuación es una elipse con centro $C(-2, 1)$ y eje mayor en la recta vertical $x = -2$ (porque $9 < 16$). Usando $a = 4$ y $b = 3$ tendremos la elipse de la figura 10.

Para encontrar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

La distancia del centro de la elipse a los focos es $c = \sqrt{7}$. Como el centro es $(-2, 1)$, los focos son $\left(-2, 1 \pm \sqrt{7}\right)$.

FIGURA 10



Las calculadoras graficadoras y el software a veces no pueden trazar las gráficas de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como la que se considera en el último ejemplo. En estos casos debemos primero despejar y de la ecuación en términos de x y luego trazar las dos funciones resultantes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 **Gráficas de semielipses**

Trace la gráfica de $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación puede ser considerada una ecuación cuadrática en y de la forma $ay^2 + by + c = 0$ al reacomodar términos como sigue:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática a la ecuación previa, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$ tendremos

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8} \\ &= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)} \end{aligned}$$

Note que no simplificamos por completo el radicando, porque estaremos usando una calculadora graficadora.

(*continúa*)

Ahora hacemos las asignaciones

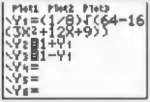
$$Y_1 = \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1 \quad \text{y} \quad Y_3 = 1 - Y_1$$

Hacer asignaciones Y.

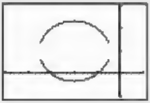
[Y=] [(] 1 [÷] 8 [)] [2nd] [√] 64 [−] 16
[(] 3 [X,T,θ,n] [x²] [+] 12 [X,T,θ,n] [+] 9
[)] [)] [▽]
1 [+] [VARS] [▷] [1] [1] [▽]
1 [−] [VARS] [▷] [1] [1]

Desactivar Y_1.

[△] [△] [△] [◁] [ENTER]



Ahora grafique Y_2 y Y_3 en el visor rectangular de $[-5, 1]$ por $[-1, 3]$.



Las elipses pueden ser muy planas o casi circulares. Para obtener información acerca de la *redondez* de una elipse, en ocasiones empleamos el término *excentricidad*, que se define como sigue, con a, b y c teniendo el mismo significado que antes.

Definición de excentricidad La **excentricidad** e de una elipse es

$$\begin{aligned} e &= \frac{\text{distancia de centro a foco}}{\text{distancia de centro a vértice}} \\ &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

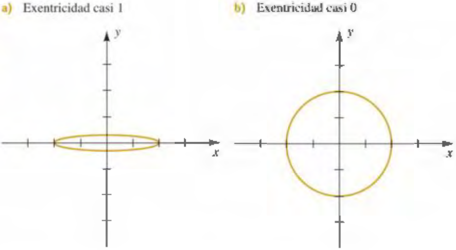
Considere la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, y suponga que la longitud $2a$ del eje mayor es fija y la longitud $2b$ del eje menor es variable (note que $0 < b < a$). Como b^2 es positiva, $a^2 - b^2 < a^2$ y, por lo tanto, $\sqrt{a^2 - b^2} < a$. Dividiendo entre a ambos lados de la última desigualdad, obtenemos $\sqrt{a^2 - b^2}/a < 1$, o $0 < e < 1$. Si b es cercano a 0 (c es cercano a a), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$, $e \approx 1$, y la elipse es muy plana. Este caso se ilustra en la figura 11a), con $a = 2$, $b = 0.3$ y $e \approx 0.99$. Si b es cercano a a (c es cercano a 0), entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, $e \approx 0$, y la elipse es casi circular. Este caso se ilustra en la figura 11b), con $a = 2$, $b = 1.9999$ y $e \approx 0.01$.

En la figura 11a), los focos están cercanos a los vértices.

En la figura 11b), los focos están cercanos al origen.

Note que la elipse de la figura 5 en la página 727 tiene excentricidad de $\frac{5}{13} \approx 0.38$ y parece casi circular.

FIGURA 11



Después de muchos años de analizar una enorme cantidad de datos empíricos, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571–1630) formuló tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La primera ley de Kepler establece que la órbita de cada planeta del sistema solar es una elipse con el Sol en un foco. La mayoría de estas órbitas son casi circulares, de modo que sus excentricidades correspondientes son cercanas a 0. Para ilustrar, en el caso de la Tierra, $e \approx 0.017$; para Marte, $e \approx 0.093$; y para Urano, $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y Plutón son menos circulares, con excentricidades de 0.206 y 0.249, respectivamente.

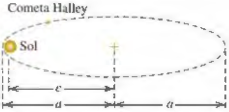
Numerosos cometas tienen órbitas elípticas con el Sol en un foco. En este caso la excentricidad e es cercana a 1, y la elipse es muy plana. En el siguiente ejemplo usamos la **unidad astronómica** (UA), es decir, la distancia promedio de la Tierra al Sol, para especificar grandes distancias (1 UA ≈ 93,000,000 millas).

EJEMPLO 7 **Aproximación de una distancia en una trayectoria elíptica**

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad $e = 0.967$. Lo más cerca que el cometa Halley llega al Sol es 0.587 UA. Aproxime la distancia máxima del cometa al Sol, al 0.1 de UA más cercano.

SOLUCIÓN La figura 12 ilustra la órbita del cometa, donde c es la distancia del centro de la elipse a un foco (el Sol) y $2a$ es la longitud del eje mayor.

FIGURA 12



Como $a - c$ es la distancia mínima entre el Sol y el cometa, tenemos (en UA)

$$a - c = 0.587 \qquad \text{o} \qquad a = c + 0.587$$

Como $e = c/a = 0.967$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} c &= 0.967a && \text{multiplicamos por } a \\ &= 0.967(c + 0.587) && \text{sustituimos por } a \\ &\approx 0.967c + 0.568 && \text{multiplicamos} \\ c - 0.967c &\approx 0.568 && \text{restamos } 0.967c \\ c(1 - 0.967) &\approx 0.568 && \text{factorizamos } c \\ c &\approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2 && \text{despejamos } c \end{aligned}$$

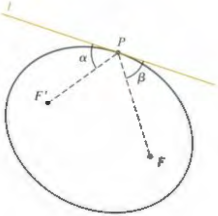
Como $a = c + 0.587$, obtenemos

$$a \approx 17.2 + 0.587 \approx 17.8,$$

y la distancia máxima entre el Sol y el cometa es

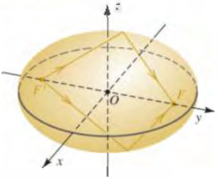
$$a + c \approx 17.8 + 17.2 = 35.0 \text{ UA}$$

FIGURA 13



Una elipse tiene una *propiedad reflectora* análoga a la de la parábola que se estudió al final de la sección anterior. Para ilustrar, denotemos con l la recta tangente en el punto P sobre una elipse con focos F y F', como se ve en la figura 13. Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l y si β es el ángulo agudo entre FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Entonces, si un rayo de luz o un sonido emana de un foco, se refleja en el otro foco. Esta propiedad se usa en el diseño de ciertos tipos de equipo óptico.

FIGURA 14



Si la elipse con centro O y focos F' y F sobre el eje x se hace girar alrededor del eje x, como se ilustra en la figura 14, obtenemos una superficie tridimensional llamada **elipsoide**. La mitad superior o la inferior es un **semielipsoide**, como lo es la mitad derecha o la mitad izquierda. Las ondas de sonido u otros impulsos que se emiten desde el foco F' serán reflejados por el elipsoide hacia el foco F. Esta propiedad se usa en el diseño de *galerías susurrantes*, que son estructuras con techos elipsoidales, donde una persona que susurra en un foco puede ser escuchada en el otro foco. Ejemplos de galerías susurrantes se pueden encontrar en la Rotonda del edificio del Capitolio en Washington, D.C., y el tabernáculo mormón en Salt Lake City.

La propiedad reflectora de los elipsoides (y semielipsoides) se usa en medicina moderna en un aparato llamado *litotriptor*, que desintegra cálculos del riñón por medio de ondas de choque de alta energía bajo el agua. Después de tomar mediciones extremadamente precisas, el operador coloca al paciente, de modo que el cálculo esté en un foco. Entonces se generan ondas de choque de muy alta frecuencia en el otro foco y las ondas reflejadas rompen el cálculo del riñón. El tiempo de recuperación con esta técnica suele ser de 3 a 4 días, en lugar de 2 a 3 semanas con cirugía convencional. Además, la tasa de mortalidad es menor que 0.01% en comparación con 2-3% para la cirugía tradicional (vea los ejercicios 63–64).

10.2 Ejercicios

Ejer. 1–14: Encuentre los vértices y focos de la elipse. Trace su gráfica, mostrando los focos.

1 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

3 $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

4 $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

5 $4x^2 + y^2 = 16$

6 $y^2 + 9x^2 = 9$

7 $4x^2 + 25y^2 = 1$

8 $10y^2 + x^2 = 5$

9 $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+4)^2}{9} = 1$

10 $\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

11 $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

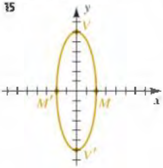
12 $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

13 $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

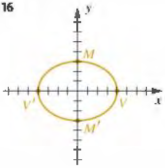
14 $4x^2 + y^2 = 2y$

Ejer. 15–18: Encuentre la ecuación para la elipse que se muestra en la figura.

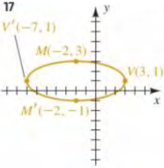
15



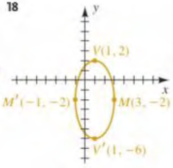
16



17



18



Ejer. 19–36: Encuentre la ecuación para la elipse que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

19 Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$

20 Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$

21 Vértices $V(0, \pm 5)$, eje menor de longitud 3

22 Vértices $V(\pm 7, 0)$, eje menor de longitud 5

23 Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2

24 Focos $F(0, \pm 4)$, eje menor de longitud 4

25 Vértices $V(0, \pm 6)$, que pasan por $(3, 2)$

26 Vértices $V(\pm 13, 0)$, que pasan por $(5, 6)$

27 Que pasan por $(2, 3)$ y $(6, 1)$

28 Que pasan por $(2, 8)$ y $(4, 4)$

29 Excentricidad $\frac{3}{4}$, vértices $V(0, \pm 4)$

30 Excentricidad $\frac{4}{7}$, vértices $V(\pm 7, 0)$

31 Excentricidad $\frac{1}{2}$, vértices en el eje x, que pasa por $(1, 3)$

32 Excentricidad $\frac{2}{3}$, vértices en el eje y, que pasa por $(1, 4)$

33 Intersecciones con eje x ± 2, intersecciones con el eje y $\pm \frac{1}{3}$

34 Intersecciones con el eje x $\pm \frac{1}{2}$, intersecciones con el eje y ± 4

35 Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5

36 Eje mayor vertical de longitud 7, eje menor de longitud 6

Ejer. 37–40: Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas y muestre los puntos de intersección.

37 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ **38** $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 189 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

39 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 + y^2 = 43 \end{cases}$ **40** $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

Ejer. 41–44: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano *xy* tal que la suma de las distancias de *F* y *F'* es *k*.

41 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$; $k = 10$

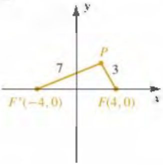
42 $F(12, 0)$, $F'(-12, 0)$; $k = 26$

43 $F(0, 15)$, $F'(0, -15)$; $k = 34$

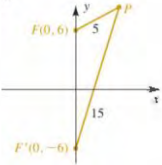
44 $F(0, 8)$, $F'(0, -8)$; $k = 20$

Ejer. 45–46: Encuentre la ecuación para la elipse con focos *F* y *F'* que pasa por *P*. Trace la elipse.

45



46



Ejer. 47–50: Encuentre la ecuación para la mitad indicada de la elipse.

47 Mitad izquierda $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

48 Mitad derecha $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{121} = 1$

49 Mitad superior $x^2 + 3y^2 = 17$

50 Mitad inferior $2x^2 + 5y^2 = 12$

Ejer. 51–58: Determine si la gráfica de la ecuación es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una elipse, y encuentre una ecuación para la elipse.

51 $y = 11\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$ **52** $y = -6\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

53 $x = -\frac{1}{3}\sqrt{9 - y^2}$ **54** $x = \frac{4}{5}\sqrt{25 - y^2}$

55 $x = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{(y + 2)^2}{9}}$

56 $x = -2 - 5\sqrt{1 - \frac{(y - 1)^2}{16}}$

57 $y = 2 - 7\sqrt{1 - \frac{(x + 1)^2}{9}}$

58 $y = -1 + \sqrt{1 - \frac{(x - 3)^2}{16}}$

59 **Dimensiones de un arco** Un arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies de diámetro y la parte más alta del arco mide 10 pies arriba del pavimento horizontal, como se ve en la figura. Encuentre la altura del arco a 6 pies del centro de la base.

EJERCICIO 59

60 **Diseño de un puente** Se ha de construir un puente para cruzar un río que tiene 200 pies de ancho. El arco del puente debe ser semielíptico y estar construido de modo que un barco, de menos de 50 pies de ancho y 30 pies de alto, pueda pasar con seguridad por debajo, como se muestra en la figura en la siguiente página.

a) Encuentre una ecuación para el arco.

b) Aproxime la altura del arco en el centro del puente.

EJERCICIO 60

61 **Órbita de la Tierra** Suponga que la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra es de 186,000,000 millas y que la excentricidad es de 0.017. Aproxime, a las 1000 millas más cercanas, las distancias máxima y mínima entre la Tierra y el Sol.

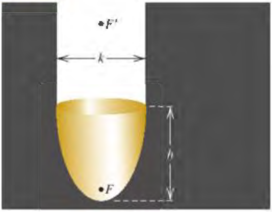
62 **Órbita de Mercurio** El planeta Mercurio se desplaza en una órbita elíptica que tiene excentricidad 0.206 y eje mayor de longitud 0.774 UA. Calcule las distancias máxima y mínima entre Mercurio y el Sol.

63 **Reflector elíptico** La forma básica de un reflector elíptico es un semielipsoide de altura h y diámetro k, como se muestra en la figura. Las ondas emitidas desde el foco F se reflejan de la superficie y entran al foco F'.

a) Exprese las distancias $d(V, F)$ y $d(V, F')$ en términos de h y k.

b) Un reflector elíptico de 17 cm de altura se construirá para que las ondas emitidas desde F se reflejen en un punto F', que está a 32 cm de V. Calcule el diámetro del reflector y la ubicación de F.

EJERCICIO 63

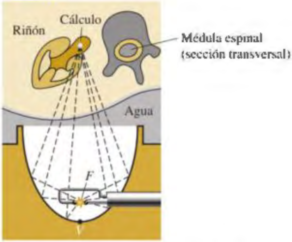


64 **Operación de un litotriptor** Se construirá un litotriptor de 15 cm de altura y 18 cm de diámetro (vea la figura). Ondas de choque de alta energía bajo el agua se emitirán desde el foco F que está más cercano al vértice V.

a) Encuentre la distancia de V a F.

b) ¿A qué distancia de V (en la dirección vertical) debe estar ubicado un cálculo renal?

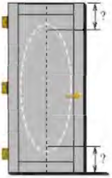
EJERCICIO 64



65 **Galería susurrante** El techo de una galería susurrante tiene la forma de semielipsoide que se ve en la figura 14, con el punto más alto del techo 15 pies arriba del piso elíptico y los vértices del piso a 50 pies entre sí. Si dos personas están de pie en los focos F' y F, ¿a qué distancia de los vértices están sus pies?

66 **Diseño ovalado** Un artista planea crear un diseño elíptico con eje mayor de 60" y eje menor de 24", centrado en una puerta que mide 80" por 36", usando el método descrito por la figura 1. En una recta vertical que divide en dos la puerta, ¿aproximadamente a qué distancia de cada extremo de la puerta deben insertarse las tachuelas? ¿De qué largo debe ser la cuerda?

EJERCICIO 66



Ejer. 67–68: Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas. Dado el semieje mayor a en millones de kilómetros y excentricidad e, grafique la órbita del planeta. Centre el eje mayor sobre el eje x y trace la ubicación del Sol en un foco.

67 Trayectoria de la Tierra $\quad a = 149.6, \quad e = 0.093$

68 Trayectoria de Plutón $\quad a = 5913, \quad e = 0.249$

Ejer. 69–72: Grafique las elipses en el mismo plano de coordenadas y calcule sus puntos de intersección.

69 $\dfrac{x^2}{2.9} + \dfrac{y^2}{2.1} = 1$; $\dfrac{x^2}{4.3} + \dfrac{(y - 2.1)^2}{4.9} = 1$

70 $\dfrac{x^2}{3.9} + \dfrac{y^2}{2.4} = 1$; $\dfrac{(x + 1.9)^2}{4.1} + \dfrac{y^2}{2.5} = 1$

71 $\dfrac{(x + 0.1)^2}{1.7} + \dfrac{y^2}{0.9} = 1$; $\dfrac{x^2}{0.9} + \dfrac{(y - 0.25)^2}{1.8} = 1$

72 $\dfrac{x^2}{3.1} + \dfrac{(y - 0.2)^2}{2.8} = 1$; $\dfrac{(x + 0.23)^2}{1.8} + \dfrac{y^2}{4.2} = 1$

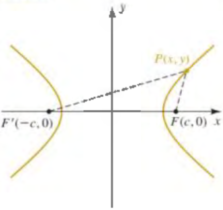
10.3 Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse. El único cambio es que, en lugar de usar la *suma* de distancias desde dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición de hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

FIGURA 1



Para encontrar una ecuación sencilla para una hipérbola, seleccionamos un sistema de coordenadas con focos en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) con $2a$. El punto medio del segmento $F'F$ (el origen) se denomina **centro de la hipérbola**. Al consultar la figura 1, vemos que un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si y sólo si es verdadero cualquiera de los dos postulados siguientes:

$$\text{1)}\quad d(P, F') - d(P, F) = 2a \qquad \text{o} \qquad \text{2)}\quad d(P, F) - d(P, F') = 2a$$

Si P no está en el eje x, entonces en la figura 1 vemos que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

porque la longitud de un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Del mismo modo,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F)$$

Formas equivalentes de las dos desigualdades anteriores son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F) \qquad \text{y} \qquad d(P, F') - d(P, F) < d(F', F)$$

Como las diferencias en los lados izquierdos de estas desigualdades son ambas iguales a $2a$ y como $d(F', F) = 2c$, las últimas dos desigualdades implican que $2a < 2c$ o $a < c$. (Recuerde que para elipses teníamos $a > c$.)

A continuación, las ecuaciones 1) y 2) pueden ser sustituidas por la ecuación única

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$$

Usando la fórmula de la distancia para encontrar $d(P, F)$ y $d(P, F')$, obtenemos una ecuación de la hipérbola:

$$\left|\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}\right| = 2a$$

Si se emplea el tipo de procedimiento de simplificación que utilizamos para deducir una ecuación para una elipse, podemos reescribir la ecuación precedente como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por último, si

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{con} \quad b > 0$$

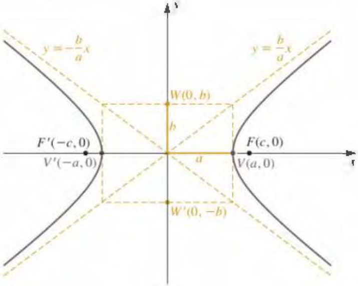
en la ecuación precedente, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la hipérbola de la figura 1 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. A la inversa, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces al invertir pasos vemos que el punto (x, y) está sobre la hipérbola.

Aplicando pruebas de simetría, vemos que la hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes y el origen. Podemos encontrar los puntos de intersección con el eje x de la hipérbola si $y = 0$ en la ecuación. Si hacemos esto, tendremos $x^2/a^2 = 1$, o $x^2 = a^2$; y, en consecuencia, los puntos de intersección con el eje x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ sobre la gráfica se denominan **vértices** de la hipérbola (vea la figura 2). El segmento de recta $V'V$ recibe el nombre de **eje transversal**. La gráfica no tiene puntos de intersección con el eje y, porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones *complejas* $y = \pm bi$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son puntos extremos del **eje conjugado** $W'W$. Los puntos W y W' no están sobre la hipérbola, pero, como veremos, son útiles para describir la gráfica.

FIGURA 2



Si despejamos y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ tendremos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Si $x^2 - a^2 < 0$, o bien, lo que es equivalente, $-a < x < a$, entonces no hay puntos (x, y) sobre la gráfica. *Hay* puntos $P(x, y)$ sobre la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Se puede demostrar que *las rectas* $y = \pm(b/a)x$ *son asíntotas para la hipérbola*. Estas asíntotas sirven como guías excelentes para trazar la gráfica. Una forma práctica de trazar las asíntotas es localizar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (vea la figura 2). Si se trazan rectas, una vertical y una horizontal, que pasen por estos puntos extremos de los ejes transversal y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del **rectán-**

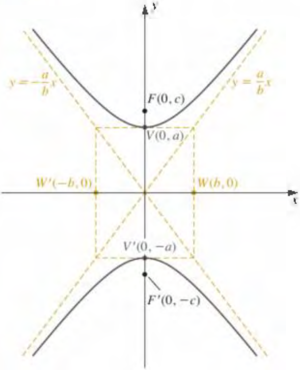
gulo auxiliar resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$. En consecuencia, al extender estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$. La hipérbola se traza entonces como en la figura 2, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se denominan **rama derecha** y **rama izquierda** de la hipérbola.

Del mismo modo, si tomamos los focos sobre el eje y, obtenemos la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En este caso, los vértices de la hipérbola son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje conjugado son $(\pm b, 0)$, como se ve en la figura 3. Las asíntotas son $y = \pm(a/b)x$ (*no* $y = \pm(b/a)x$, como en el caso anterior), y ahora nos referimos a las dos partes que conforman la hipérbola como la **rama superior** y la **rama inferior** de la hipérbola.

FIGURA 3



La exposición precedente puede resumirse como sigue:

Ecuaciones estándar de una hipérbola con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

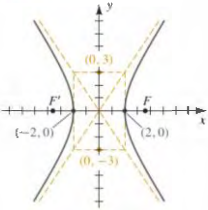
es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transversal es $2a$ y la longitud del eje conjugado es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Note que los vértices están sobre el eje x si el término x^2 tiene un coeficiente positivo (la primera ecuación del recuadro anterior) o en el eje y si el término y^2 tiene coeficiente positivo (la segunda ecuación).

EJEMPLO 1 **Trazo de una hipérbola con centro en el origen**

Trace la gráfica de $9x^2 - 4y^2 = 36$. Encuentre los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

FIGURA 4



SOLUCIÓN Por las observaciones que preceden a este ejemplo, la gráfica es una hipérbola con centro en el origen. Para expresar la ecuación dada en forma estándar, dividimos ambos lados entre 36 y simplificamos, obteniendo

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Al comparar $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ con $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, vemos que $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$; esto es, $a = 2$ y $b = 3$. La hipérbola tiene sus vértices sobre el eje x, porque x^2 tiene coeficiente positivo. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos $(0, \pm 3)$ del eje conjugado determinan el rectángulo auxiliar cuyas diagonales (prolongadas) nos dan las asíntotas. La gráfica de la ecuación está trazada en la figura 4.

Para encontrar los focos, calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$$

Entonces, $c = \sqrt{13}$, y los focos son $F(\sqrt{13}, 0)$ y $F'(-\sqrt{13}, 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm\frac{3}{2}x$, se pueden encontrar remitiéndose a la gráfica o a las ecuaciones $y = \pm(b/a)x$. ■

El ejemplo precedente indica que para hipérbolas no es siempre verdadero que $a > b$, como en el caso de las elipses. De hecho, podemos tener $a < b$, $a > b$ o $a = b$.

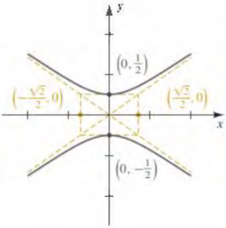
EJEMPLO 2 **Trazo de una hipérbola con centro en el origen**

Trace la gráfica de $4y^2 - 2x^2 = 1$. Encuentre los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación dada en forma estándar, escribimos

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

FIGURA 5



Entonces,

$$a^2 = \tfrac{1}{4}, \qquad b^2 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = \tfrac{3}{4},$$

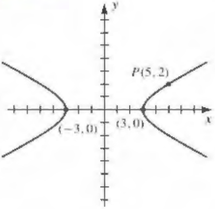
y, en consecuencia,

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La hipérbola tiene sus vértices en el eje y, porque y^2 tiene coeficiente positivo. Los vértices son $(0, \pm\frac{1}{2})$, los puntos extremos de los ejes conjugados son $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$, y los focos son $(0, \pm\sqrt{3/2})$. La gráfica está trazada en la figura 5.

(continúa)

FIGURA 6



Para encontrar las ecuaciones de las asíntotas, consultamos la figura o usamos $y = \pm(a/b)x$, para obtener $y = \pm(\sqrt{2}/2)x$. ■

EJEMPLO 3 **Encontrar una ecuación de una hipérbola que satisfaga condiciones prescritas**

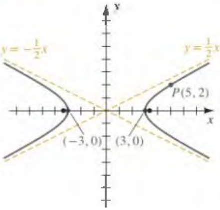
Una hipérbola tiene vértices $(\pm 3, 0)$ y pasa por el punto $P(5, 2)$. Encuentre su ecuación, focos y asíntotas.

SOLUCIÓN Comenzamos por trazar una hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ que pase por el punto $P(5, 2)$, como en la figura 6.

Una ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 7



Como $P(5, 2)$ está sobre la hipérbola, las coordenadas x y y satisfacen esta ecuación; es decir,

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1$$

Al despejar b^2 obtenemos $b^2 = \frac{9}{4}$ y, por lo tanto, una ecuación para la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

o bien, lo que es equivalente,

$$x^2 - 4y^2 = 9$$

Para encontrar los focos, primero calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{45}{4}$$

Por lo tanto, $\sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3.35$, y los focos son $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}, 0\right)$.

Las ecuaciones generales de las asíntotas son $y = \pm(b/a)x$. Sustituyendo $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$ nos da $y = \pm\frac{1}{2}x$, como se muestra en la figura 7. ■

El siguiente ejemplo indica cómo encontrar ecuaciones para ciertas partes de una hipérbola.

EJEMPLO 4 **Encontrar ecuaciones de partes de una hipérbola**

La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se estudió en el ejemplo 1. Resuelva la ecuación como se indica y describa la gráfica resultante.

a) Para x en términos de y **b)** Para y en términos de x

SOLUCIÓN

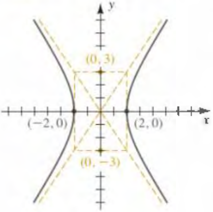
a) Despejamos x en términos de y como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad \text{enunciado}$$

$$x^2 = \frac{36 + 4y^2}{9} \qquad \text{despejamos } x^2$$

$$x = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9 + y^2} \qquad \text{factorizamos 4 y obtenemos la raíz cuadrada}$$

FIGURA 8



La gráfica de la ecuación $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama derecha de la hipérbola trazada en la figura 4 (y repetida en la figura 8), y la gráfica de $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama izquierda.

b) Despejamos y en términos de x como sigue:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 &= 36 && \text{enunciado} \\ y^2 &= \frac{9x^2 - 36}{4} && \text{despejamos } y^2 \\ y &= \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4} && \text{factorizamos 9 y obtenemos la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

La gráfica de $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad superior de las ramas derecha e izquierda, y la gráfica de $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad inferior de estas ramas. ■

Como ocurrió con las elipses, podemos usar traslaciones para trazar hipérbolas que tienen centros en algún punto $(h, k) \neq (0, 0)$. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

EJEMPLO 5 **Trazo de una hipérbola con centro (h, k)**

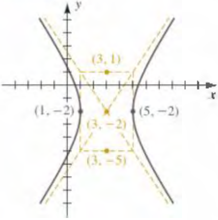
Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$$

SOLUCIÓN Organizamos nuestro trabajo siguiendo un procedimiento semejante al que se usó para elipses en el ejemplo 5 de la sección anterior:

$$\begin{aligned} (9x^2 - 54x) + (-4y^2 - 16y) &= -29 && \text{agrupamos términos} \\ 9(x^2 - 6x + \underline{\quad}) - 4(y^2 + 4y + \underline{\quad}) &= -29 && \text{factorizamos 9 y } -4 \\ 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) &= -29 + \underline{9 \cdot 9} - \underline{4 \cdot 4} && \text{completamos los cuadrados} \\ 9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 &= 36 && \text{factorizamos y simplificamos} \\ \frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} &= 1 && \text{dividimos entre 36} \end{aligned}$$

FIGURA 9



La última ecuación indica que la hipérbola tiene centro $C(3, -2)$ con vértices y focos en la recta horizontal $y = -2$, porque el término que contiene a x es positivo. También sabemos que

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 13$$

Por lo tanto,

$$a = 2, \qquad b = 3 \qquad \text{y} \qquad c = \sqrt{13}$$

Como se ilustra en la figura 9, los vértices son $(3 \pm 2, -2)$; es decir, $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Los puntos extremos del eje conjugado son $(3, -2 \pm 3)$; es decir, $(3, 1)$ y $(3, -5)$. Los focos son $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$, y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y + 2 = \pm\tfrac{3}{2}(x - 3)$$ ■

Los resultados de las secciones 10.1 a 10.3 indican que la gráfica de toda ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

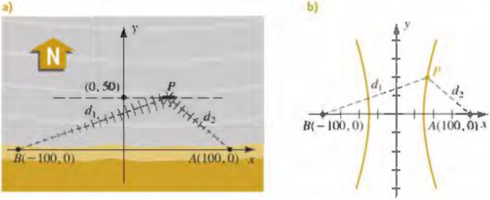
es una cónica, excepto para ciertos casos degenerados en los que se obtiene un punto, una o dos rectas o no se obtiene gráfica. Aun cuando hemos considerado sólo ejemplos especiales, nuestros métodos se pueden aplicar a cualquier ecuación como esta. Si A y C son iguales y diferentes de 0, entonces la gráfica, cuando exista, será una circunferencia o, en casos excepcionales, un punto. Si A y C son desiguales, pero tienen el mismo signo, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando exista, será una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos contrarios, se obtiene una ecuación de una hipérbola o, posiblemente, en el caso degenerado, dos rectas que se cruzan. Si A o C (pero no ambas) es 0, la gráfica es una parábola o, en ciertos casos, un par de rectas paralelas.

Concluiremos esta sección con una aplicación donde aparecen hipérbolas.

EJEMPLO 6 **Localización de un barco**

La estación A de la guardia costera está a 200 millas directamente al este de otra estación B. Un barco navega en línea paralela a 50 millas al norte de la recta que pasa por A y B. Se transmiten señales de radio de A y B a una velocidad de 980 pies/μs (microsegundo). Si, a la 1:00 P.M., la señal desde B llega al barco 400 microsegundos después de la señal desde A, localice la posición del barco en ese momento.

FIGURA 10



SOLUCIÓN Introduzcamos un sistema de coordenadas, como se ve en la figura 10a), con las estaciones en los puntos A y B sobre el eje x y el barco en el punto P sobre la recta $y = 50$. Como a la 1:00 P.M. la señal tarda 400 microsegundos más en llegar desde B que desde A, la diferencia $d_1 - d_2$ en las distancias indicadas a esa hora es

$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392{,}000 \text{ pies}$$

Dividiendo entre 5,280 (pies/millas) nos da

$$d_1 - d_2 = \frac{392{,}000}{5280} = 74.\overline{24} \text{ mi}$$

A la 1:00 P.M., el punto P está en la rama derecha de una hipérbola cuya ecuación es $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ (vea la figura 10b)), formada por todos los puntos cuya diferencia en distancias desde los focos B y A es $d_1 - d_2$. En nuestra deducción de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, $d_1 - d_2 = 2a$; concluimos que en la presente situación

$$a = \frac{74.\overline{24}}{2} = 37.\overline{12} \qquad \text{y} \qquad a^2 \approx 1378$$

Como la distancia c desde el origen a cualquiera de los focos es 100,

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10{,}000 - 1378, \text{ o } b^2 \approx 8622$$

En consecuencia, una ecuación (aproximada) para la hipérbola que tiene focos A y B y pasa por P es

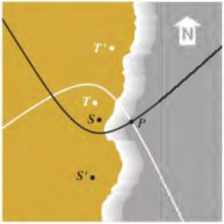
$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1$$

Si $y = 50$ (la coordenada y de P), obtenemos

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1$$

Al despejar x tendremos $x \approx 42.16$. Redondeando a la milla más cercana, encontramos que las coordenadas de P son aproximadamente (42, 50). ■

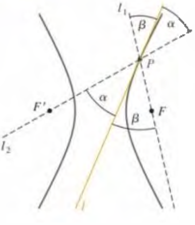
FIGURA 11



Una extensión del método empleado en el ejemplo 6 es la base para el sistema de navegación LORAN (acrónimo de *Long Range Navigation*). Este sistema contiene dos pares de radiotransmisores, como los situados en T, T' y S, S' en la figura 11. Suponga que las señales enviadas por los transmisores en T y T' llegan a un radiorreceptor en un barco situado en algún punto P. La diferencia en los tiempos de llegada de las señales se puede usar para determinar la diferencia en las distancias de P a T y T'. Así, P se encuentra en una rama de una hipérbola con focos en T y T'. Repitiendo este proceso para el otro par de transmisores, vemos que P también está en una rama de una hipérbola con focos en S y S'. La intersección de estas dos ramas determina la posición de P.

Una hipérbola tiene una *propiedad reflectora* análoga a la de la elipse estudiada en la sección anterior. Para ilustrar, denotemos con l la recta tangente a un punto P en una hipérbola con focos F y F', como se ve en la figura 12. Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l y si β es el ángulo agudo entre FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Si un rayo de luz se dirige a lo largo de la recta l_1 hacia F, se refleja en P a lo largo de la recta l_2 hacia F'. Esta propiedad se usa en el diseño de telescopios del tipo Cassegrain (vea el ejercicio 78).

FIGURA 12



10.3 Ejercicios

Ejer. 1–16: Encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Trace su gráfica, mostrando las asíntotas y los focos.

1 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

2 $\dfrac{y^2}{49} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

3 $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

4 $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

5 $x^2 - \dfrac{y^2}{24} = 1$

6 $y^2 - \dfrac{x^2}{15} = 1$

7 $y^2 - 4x^2 = 16$

8 $x^2 - 2y^2 = 8$

9 $16x^2 - 36y^2 = 1$

10 $y^2 - 16x^2 = 1$

11 $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

12 $\dfrac{(x-3)^2}{25} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

13 $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

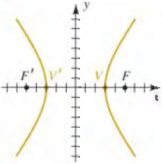
14 $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

15 $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

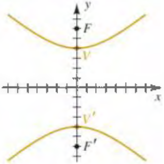
16 $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$

Ejer. 17-20: Encuentre una ecuación para la hipérbola que se muestra en la figura.

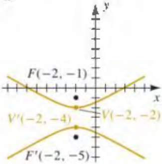
17



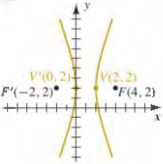
18



19



20



Ejer. 21–36: Encuentre la ecuación para la hipérbola que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

21 Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$

22 Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$

23 Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$

24 Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$

25 Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4

26 Focos $F(\pm 7, 0)$, eje conjugado de longitud 8

27 Vértices $V(\pm 4, 0)$, que pasa por $(8, 2)$

28 Vértices $V(0, \pm 12)$, que pasa por $(5, 13)$

29 Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

30 Vértices $V(0, \pm 6)$, asíntotas $y = \pm 3x$

31 Focos $F(0, \pm 10)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$

32 Focos $F(\pm 34, 0)$, asíntotas $y = \pm 3/5x\ \frac{3}{5}$

33 Intersección con x ± 5, asíntotas $y = \pm 2x$

34 Intersecciones con eje y ± 2, asíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$

35 Eje vertical transversal de longitud 10, eje conjugado de longitud 14

36 Eje horizontal transversal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2

Ejer. 37–46: Identifique la gráfica de la ecuación como una parábola (con eje vertical u horizontal), circunferencia, elipse o hipérbola.

37 $\frac{1}{3}(x + 2) = y^2$

38 $y^2 = \frac{14}{3} - x^2$

39 $x^2 + 6x - y^2 = 7$

40 $x^2 + 4x + 4y^2 - 24y = -36$

41 $-x^2 = y^2 - 25$

42 $x = 2x^2 - y + 4$

43 $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$

44 $x + 4 = y^2 + y$

45 $x^2 + 3x = 3y - 6$

46 $9x^2 - y^2 = 10 - 2y$

Ejer. 47–50: Encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas sobre el mismo plano de coordenadas y muestre los puntos de intersección.

47 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

49 $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 32 \end{cases}$ **50** $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 106 \end{cases}$

Ejer. 51–54: Encuentre la ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy de manera que la diferencia de las distancias desde F y F' sea k.

51 $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$; $k = 24$

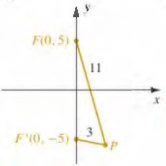
52 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$; $k = 8$

53 $F(0, 10)$, $F'(0, -10)$; $k = 16$

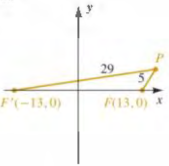
54 $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$; $k = 30$

Ejer. 55–56: Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos F y F' que pasa por P. Trace la hipérbola.

55



56



Ejer. 57–64: Encuentre una ecuación para la parte indicada de la hipérbola.

57 Rama inferior de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$

58 Rama superior de $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = 1$

59 Rama izquierda de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

60 Rama derecha de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

61 Mitades derechas de las ramas de $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{81} = 1$

62 Mitades izquierdas de las ramas de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$

63 Mitades superiores de las ramas de $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

64 Mitades inferiores de las ramas de $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

Ejer. 65–72: Describa la parte de una hipérbola dada por la ecuación.

65 $x = \frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$ **66** $x = -\frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

67 $y = \frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$ **68** $y = -\frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

69 $y = -\frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ **70** $y = \frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

71 $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$ **72** $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

73 Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se denominan *hipérbolas conjugadas*. Trace las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, con $a = 5$ y $b = 3$, y describa la relación entre las dos gráficas.

74 Encuentre una ecuación de la hipérbola con focos $(h \pm c, k)$ y vértices $(h \pm a, k)$, donde

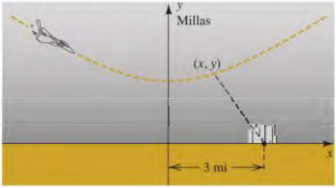
$$0 < a < c \qquad \text{y} \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

75 **Torre de enfriamiento** Una torre de enfriamiento, como la que se ve en la figura, es una estructura hiperbólica. Suponga que el diámetro de su base es de 100 metros y su diámetro más pequeño de 48 metros se encuentra a 84 metros de la base. Si la torre mide 120 metros de altura, calcule su diámetro en la parte más alta.

EJERCICIO 75

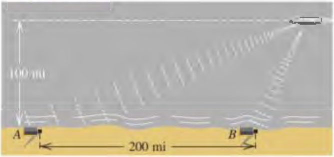
76 **Maniobra de un avión** Un avión está volando a lo largo de la trayectoria hiperbólica que se ilustra en la figura. Si una ecuación de la trayectoria es $2y^2 - x^2 = 8$, determine la proximidad a la que llega el avión de un pueblo situado en $(3, 0)$. (*Sugerencia*: denote con S el cuadrado de la distancia desde un punto (x, y) sobre la trayectoria a $(3, 0)$ y encuentre el valor mínimo de S.)

EJERCICIO 76



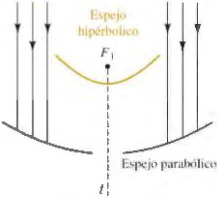
77 **Localización de un barco** Un barco está siguiendo un curso que está a 100 millas de una costa recta y paralelo a ésta. El barco transmite una señal de auxilio que es recibida por dos estaciones de guardacostas A y B, situadas a 200 millas una de la otra, como se ve en la figura. Al medir la diferencia en tiempos de recepción de señal, se determina que el barco está 160 millas más cerca de B que de A. ¿Dónde está el barco?

EJERCICIO 77



78 **Diseño de un telescopio** El diseño de un telescopio Cassegrain (que data de 1672) hace uso de las propiedades reflectoras de la parábola y la hipérbola. En la figura se muestra un espejo parabólico (seccionado), con foco en F_1 y eje a lo largo de la recta l, y un espejo hiperbólico, con un foco también en F_1 y eje transversal a lo largo de l. ¿Dónde, finalmente, se acumulan las ondas de luz entrantes paralelas al eje común?

EJERCICIO 78



Ejer. 79–80: Grafique las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas y estime el punto de intersección en el primer cuadrante de ambas.

79 $\frac{(y - 0.1)^2}{1.6} - \frac{(x + 0.2)^2}{0.5} = 1;$

$\frac{(y - 0.5)^2}{2.7} - \frac{(x - 0.1)^2}{5.3} = 1$

80 $\frac{(x - 0.1)^2}{0.12} - \frac{y^2}{0.1} = 1;\ \frac{x^2}{0.9} - \frac{(y - 0.3)^2}{2.1} = 1$

Ejer. 81–82: Grafique las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas y determine el número de puntos de intersección.

81 $\dfrac{(x-0.3)^2}{1.3} - \dfrac{y^2}{2.7} = 1;\ \dfrac{y^2}{2.8} - \dfrac{(x-0.2)^2}{1.2} = 1$

82 $\dfrac{(x+0.2)^2}{1.75} - \dfrac{(y-0.5)^2}{1.6} = 1;$

$\dfrac{(x-0.6)^2}{2.2} - \dfrac{(y+0.4)^2}{2.35} = 1$

83 **Trayectoria de un cometa** Los cometas pueden desplazarse en trayectorias elípticas, parabólicas o hiperbólicas alrededor del Sol. Si un cometa se mueve en una trayectoria parabólica o hiperbólica, pasará cerca del Sol una vez y nunca regresará. Suponga que las coordenadas de un cometa en millas se pueden describir con la ecuación

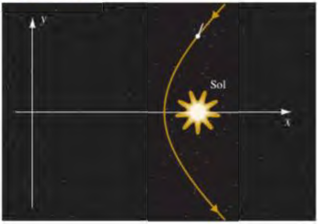
$$\frac{x^2}{26 \times 10^{14}} - \frac{y^2}{18 \times 10^{14}} = 1 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

donde el Sol está ubicado en un foco, como se ve en la figura.

a) Aproxime las coordenadas del Sol.

b) Para que el cometa mantenga una trayectoria hiperbólica, la velocidad mínima v del cometa, en metros por segundo, debe satisfacer $v > \sqrt{2k/r}$, donde r es la distancia entre el cometa y el centro del Sol en metros, y $k = 1.325 \times 10^{20}$ es una constante. Determine v cuando r es mínima.

EJERCICIO 83



10.4 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

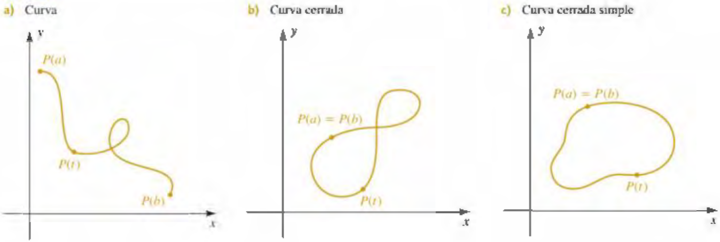
Si f es una función, la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ se denomina *curva plana*. Sin embargo, esta definición es restrictiva porque excluye numerosas gráficas útiles. La siguiente definición es más general.

Definición de curva plana Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo I.

Para mayor sencillez, nos referimos a una curva plana como una **curva**. La **gráfica** de C en la definición precedente está formada por todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ en un plano xy, para t en I. Usaremos el término *curva* indistintamente con *gráfica de una curva*. A veces consideramos el punto $P(t)$ como que traza la curva C a medida que t varía en el intervalo I.

Las gráficas de varias curvas están trazadas en la figura 1, donde I es un intervalo cerrado $[a, b]$; es decir, $a \leq t \leq b$. En la parte a) de la figura, $P(a) \neq P(b)$,

FIGURA 1



y $P(a)$ y $P(b)$ se denominan **puntos extremos** de C. La curva en a) se interseca a sí misma; esto es, dos valores diferentes de t producen el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como en la figura 1b), entonces C es una **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$y C no se interseca a sí misma en ningún otro punto, como en la figura 1c), entonces C es una **curva cerrada simple**.

Una forma práctica de representar curvas se da en la siguiente definición.

Definición de ecuaciones paramétricas

Sea C la curva formada por todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g están definidas en un intervalo I. Las ecuaciones

$$x = f(t),\ y = g(t),$$

para t en I, son **ecuaciones paramétricas** para C con **parámetro** t.

La curva C en esta definición se conoce como una **curva parametrizada** y las ecuaciones paramétricas son una **parametrización** de C. Con frecuencia usamos la notación

$$x = f(t),\ y = g(t);\ t \text{ en } I$$

para indicar el dominio I de f y g. Podemos referirnos a estas ecuaciones como la **ecuación x** y la **ecuación y**.

A veces es posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación conocida con x y y para C. En casos sencillos podemos trazar una gráfica de una curva parametrizada al localizar puntos y unirlos en orden creciente de t, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una curva parametrizada**

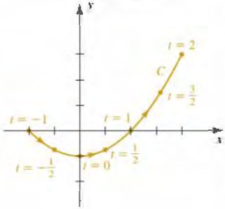
Trace la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = 2t,\ y = t^2 - 1;\ -1 \leq t \leq 2$$

SOLUCIÓN Usamos las ecuaciones paramétricas para tabular coordenadas de puntos $P(x, y)$ en C, como sigue.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

FIGURA 2
$x = 2t, y = t^2 - 1; -1 \leq t \leq 2$



La localización de puntos lleva al trazo de la figura 2. Las puntas de flecha en la gráfica indican la dirección en la que $P(x, y)$ traza la curva cuando *t aumenta* de -1 a 2.

Podemos obtener una descripción más conocida de la gráfica al eliminar el parámetro. Si de la ecuación en x despejamos t, obtenemos $t = \frac{1}{2}x$. Sustituyendo esta expresión por t en la ecuación y nos da

$$y = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 - 1$$

La gráfica de esta ecuación en x y y es una parábola simétrica con respecto al eje y con vértice $(0, -1)$. No obstante, como $x = 2t$ y $-1 \leq t \leq 2$, vemos que $-2 \leq x \leq 4$ para los puntos (x, y) en C y, por lo tanto, C es la parte de la parábola entre los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 3)$ que se muestra en la figura 2. ■

Como indican las puntas de flecha de la figura 2, el punto $P(x, y)$ traza la curva C de *izquierda a derecha* cuando aumenta t. Las ecuaciones paramétricas

$$x = -2t, y = t^2 - 1; -2 \leq t \leq 1$$

nos dan la misma gráfica; pero, a medida que aumenta t, $P(x, y)$ traza la curva de *derecha a izquierda*. Para otras parametrizaciones, el punto $P(x, y)$ puede oscilar hacia adelante y hacia atrás cuando aumenta t.

La **orientación** de una curva parametrizada C es la dirección determinada al *aumentar* los valores del parámetro. Con frecuencia indicamos una orientación mediante la colocación de puntas de flecha en C, como en la figura 2. Si $P(x, y)$ se mueve hacia adelante y hacia atrás cuando aumenta t, podemos colocar flechas *al lado* de C.

Como hemos observado, una curva puede tener diferentes orientaciones, dependiendo de la parametrización. Para ilustrar, la curva C del ejemplo 1 está dada en forma paramétrica por cualquiera de las siguientes:

$$\begin{aligned} x &= 2t, & y &= t^2 - 1; & -1 &\leq t \leq 2 \\ x &= t, & y &= \tfrac{1}{4}t^2 - 1; & -2 &\leq t \leq 4 \\ x &= -t, & y &= \tfrac{1}{4}t^2 - 1; & -4 &\leq t \leq 2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 **Trazo de gráficas en modo paramétrico**

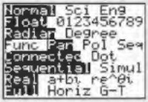
Trace la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = t^2 - 3,\ y = 3t;\ -4 \le t \le 4$$

SOLUCIÓN

Establecer en modo paramétrico.

MODE ▽ (3 veces) ▷ ENTER



Asignar las ecuaciones.

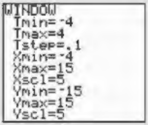
Y= X,T,θ,n x^2 − 3
▽ 3 X,T,θ,n ▽

(El subíndice 1T en X y Y indica que X_{1T} y Y_{1T} representan el primer *par* de ecuaciones paramétricas.)

Cuando graficamos ecuaciones paramétricas, necesitamos asignar valores mínimos (Tmin) y máximos (Tmax) al parámetro t, además de dimensiones de pantalla. También necesitamos seleccionar un incremento, o valor de paso (Tstep), para t. Un valor típico de Tstep es 0.1. Si se selecciona un valor más pequeño de Tstep, la precisión del trazo aumenta, pero también aumenta el tiempo necesario para trazar la gráfica.

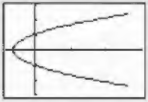
Asignar valores de ventana.

WINDOW −4 ▽ 4 ▽ .1 ▽
−4 ▽ 15 ▽ 5 ▽ −15 ▽ 15 ▽ 5



Graficar la curva.

GRAPH



Observe la orientación de la curva.

Ahora pulse TRACE y use las teclas de izquierda y derecha del cursor para trazar C. Observe los valores citados para T, X y Y. Note la forma en que los valores de T corresponden a la selección de Tstep. Trate de graficar C con Tstep = 1, 2, 4 y 8. ■

El siguiente ejemplo demuestra que a veces es útil eliminar el parámetro *antes* de graficar los puntos.

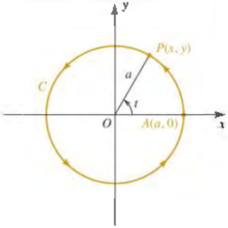
EJEMPLO 3 **Descripción del movimiento de un punto**

Un punto se mueve en un plano tal que su posición $P(x, y)$ en el tiempo t está dada por

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

donde $a > 0$. Describa el movimiento del punto.

FIGURA 3
$x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$; t en $\mathbb{R}$



SOLUCIÓN Cuando x y y contienen funciones trigonométricas de t, a veces podemos eliminar el parámetro t al aislar las funciones trigonométricas, elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones y luego usamos una de las identidades de Pitágoras, como sigue:

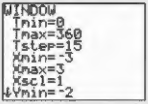
$$\begin{aligned}
x = a\cos t, \quad y &= a \operatorname{sen} t && \text{dado}\\
\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{a} &= \operatorname{sen} t && \text{aislamos } \cos t \text{ y } \operatorname{sen} t\\
\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{a^2} &= \operatorname{sen}^2 t && \text{elevamos ambos lados al cuadrado}\\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 && \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1\\
x^2 + y^2 &= a^2 && \text{multiplicamos por } a^2
\end{aligned}$$

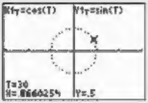
Esto muestra que el punto $P(x, y)$ se mueve en la circunferencia C de radio a con centro en el origen (vea la figura 3). El punto está en $A(a, 0)$ cuando $t = 0$, en $(0, a)$ cuando $t = \pi/2$, en $(-a, 0)$ cuando $t = \pi$, en $(0, -a)$ cuando $t = 3\pi/2$, y de nuevo en $A(a, 0)$ cuando $t = 2\pi$. Así, P se mueve alrededor de C en dirección contraria al giro de las agujas del reloj, haciendo una revolución cada 2π unidades de tiempo. La orientación de C está indicada por puntas de flecha en la figura 3.

Tenga en cuenta que en este ejemplo podemos interpretar t geométricamente como la medida en radianes del ángulo generado por el segmento de recta OP. ■

Valores de seno y coseno en circunferencia unitaria

Para completar el último ejemplo, se pueden usar ecuaciones paramétricas como ayuda para conocer y recordar valores de las funciones seno y coseno. Ajuste la calculadora en los siguientes modos: Degree (grados), Par(amétrico) y Dot (punto). Haga las asignaciones de función cos(T) a X_{1T} y sen(T) a Y_{1T}. A continuación, asigne 0 a Tmin, 360 a Tmax y 15 a Tstep. Grafique en la ventana de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. El uso del comando trace (trazar) y las teclas del cursor deja ver numerosos valores conocidos acerca de la circunferencia unitaria.





EJEMPLO 4 **Trazo de la gráfica de una curva parametrizada**

Trace la gráfica de la curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + t^2,\ y = 1 + 2t^2;\ t \text{ en } \mathbb{R},$$

e indique la orientación.

SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro, usamos la ecuación x para obtener $t^2 = x + 2$ y luego sustituimos por t^2 en la ecuación y. Entonces,

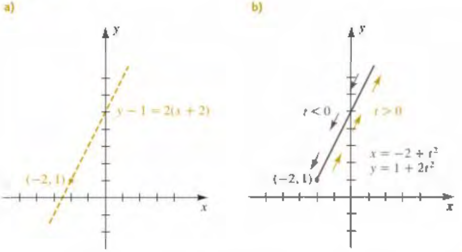
$$y = 1 + 2(x + 2)$$

La gráfica de la última ecuación es la recta de pendiente 2 que pasa por el punto $(-2, 1)$, como lo indica la línea discontinua de la figura 4a) en la página siguiente. Sin embargo, como $t^2 \geq 0$, vemos por las ecuaciones paramétricas para C que

$$x = -2 + t^2 \geq -2 \qquad \text{y} \qquad y = 1 + 2t^2 \geq 1$$

Entonces, la gráfica de C es la parte de la recta a la derecha de $(-2, 1)$ (el punto correspondiente a $t = 0$), como se muestra en la figura 4b). La orientación está indicada por las flechas al lado de C. A medida que t aumenta en el intervalo $(-\infty, 0]$, $P(x, y)$ baja la curva hacia el punto $(-2, 1)$. Cuando aumenta t en $[0, \infty)$, $P(x, y)$ sube la curva alejándola de $(-2, 1)$.

FIGURA 4



Si una curva C es descrita por una ecuación $y = f(x)$ para alguna función f, entonces una forma fácil de obtener ecuaciones paramétricas para C es si

$$x = t,\ y = f(t),$$

donde t está en el dominio de f. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t,\ y = t^3;\ t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Podemos usar muchas sustituciones diferentes por x, siempre que cuando t varíe en algún intervalo, x tome todo valor en el dominio de f. Entonces, la gráfica de $y = x^3$ está dada también por

$$x = t^{1/3},\ y = t,\ t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, observe que las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\ t \text{ en } \mathbb{R}$$

dan sólo la parte de la gráfica de $y = x^3$ entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 5 **Encontrar ecuaciones paramétricas para una recta**

Encuentre tres parametrizaciones para la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1).

SOLUCIÓN Por la forma de punto-pendiente, una ecuación para la recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (*)$$

Si $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y obtenemos la parametrización

$$x = t,\ y = y_1 + m(t - x_1);\ t \text{ en } \mathbb{R}$$

Obtenemos otra parametrización para la recta si $x - x_1 = t$ en $(*)$. En este caso $y - y_1 = mt$, y tenemos

$$x = x_1 + t,\ y = y_1 + mt;\ t \text{ en } \mathbb{R}$$

Como tercera ilustración, si $x - x_1 = \tan t$ en $(*)$, entonces

$$x = x_1 + \tan t,\ y = y_1 + m \tan t;\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Hay muchas otras parametrizaciones para la recta. ■

En el siguiente ejemplo usamos ecuaciones paramétricas para modelar la trayectoria de un proyectil (objeto). Estas ecuaciones se desarrollan por medio de métodos de física y cálculo. Suponemos que el cuerpo se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia sólo de la gravedad; esto es, la resistencia del aire y otras fuerzas que pudieran afectar la aceleración son insignificantes. También suponemos que el suelo está nivelado y que la curvatura de la Tierra no es un factor para determinar la trayectoria del cuerpo.

EJEMPLO 6 **Trayectoria de un proyectil**

La trayectoria de un proyectil en el tiempo t se puede modelar usando las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = (s \cos \alpha)t,\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (s \operatorname{sen} \alpha)t + h;\ t \geq 0, \qquad \textbf{(1)}$$

donde, en $t = 0$, s es la velocidad del proyectil en pies/s, α es el ángulo que la trayectoria forma con la horizontal y h está en pies. La aceleración debida a la gravedad es $g = 32$ pies/s^2. Suponga que el proyectil es disparado a una velocidad de 1,024 pies/s a un ángulo de 30° de la horizontal desde una altura de 2,304 pies (vea la figura 5 en la página siguiente).

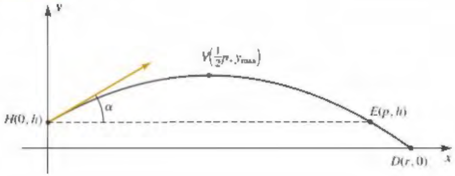
a) Encuentre ecuaciones paramétricas para el proyectil.

b) Determine el alcance r del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre antes de llegar al suelo.

c) Encuentre una ecuación con x y y para el proyectil.

d) Determine el punto y el tiempo en los que el proyectil alcanza su máxima altitud.

FIGURA 5



SOLUCIÓN

a) Sustituyendo 1024 por v, 30° por α, 32 por g y 2304 por h en las ecuaciones paramétricas en (1), tendremos

$$x = (1024 \cos 30°)t, \; y = -\tfrac{1}{2}(32)t^2 + (1024 \operatorname{sen} 30°)t + 2304; \; t \geq 0$$

La simplificación dará

$$x = 512\sqrt{3}t, \; y = -16t^2 + 512t + 2304; \; t \geq 0. \qquad \textbf{(2)}$$

b) Para determinar el alcance r del proyectil, debemos encontrar el punto D de la figura 5 en el que el proyectil cae al suelo. Como la coordenada y de D es 0, sea $y = 0$ en la ecuación y de (2) y despejamos t:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{enunciado en (2)} \\ 0 &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{sea } y = 0 \\ 0 &= t^2 - 32t - 144 && \text{dividimos entre } -16 \\ 0 &= (t - 36)(t + 4) && \text{factorizamos} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$, debemos tener $t = 36$ segundos. Ahora podemos usar la ecuación x de (2) para obtener el alcance:

$$x = 512\sqrt{3}t = 512\sqrt{3}(36) = 18{,}432\sqrt{3} \approx 31{,}925 \text{ ft}$$

c) Para eliminar el parámetro t, despejamos t de la ecuación x en (2) y sustituimos esta expresión por t en la ecuación y en (2):

$$\begin{aligned} x &= 512\sqrt{3}t \quad \text{implica} \quad t = \frac{x}{512\sqrt{3}} && \text{de la ecuación } x \text{ en (2) despeje } t \\ y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{ecuación y en (2)} \\ y &= -16\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right)^2 + 512\left(\frac{x}{512\sqrt{3}}\right) + 2304 && \text{sea } t = \frac{x}{512\sqrt{3}} \\ y &= -\frac{1}{49{,}152}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2304 && \text{simplificamos} \qquad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

La última ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, que muestra que la trayectoria del proyectil es parabólica.

d) La coordenada y del punto E en la figura 5 es 2304, de modo que podemos encontrar el valor de t en E al resolver la ecuación $y = 2304$:

$$\begin{aligned} y &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{enunciado en (2)} \\ 2304 &= -16t^2 + 512t + 2304 && \text{sea } y = 2304 \\ 0 &= -16t^2 + 512t && \text{restamos 2304} \\ 0 &= -16t(t - 32) && \text{factorizamos} \end{aligned}$$

Entonces, si $y = 2304$, $t = 0$ o $t = 32$. Como la trayectoria es parabólica, la coordenada x de V es la mitad de la coordenada p en x de E. También, el valor de t en V es la mitad del valor de t en E, así $t = \frac{1}{2}(32) = 16$ en V. Podemos encontrar los valores x y y en V al sustituir 16 por t en (2):

$$x = 512\sqrt{3}\,t = 512\sqrt{3}(16) = 8192\sqrt{3} \approx 14{,}189 \text{ pies}$$

y

$$y = -16t^2 + 512t + 2304 = -16(16)^2 + 512(16) + 2304 = 6400 \text{ pies}$$

Así, el proyectil alcanza su máxima altitud cuando $t = 16$ a aproximadamente $(14{,}189, 6400)$.

Una forma alternativa de calcular la máxima altitud es usar el teorema para localizar el vértice de una parábola para obtener el valor de x ($x = -b/(2a)$) del punto más alto en la gráfica de la ecuación (3) y luego usar las ecuaciones en (2) para encontrar t y y. ■

Vea en los ejercicios de análisis 7 y 8, al final del capítulo, problemas relacionados que se refieren al ejemplo 6.

Ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a \operatorname{sen} \omega_1 t, \qquad y = b \cos \omega_2 t; \qquad t \geq 0,$$

donde a, b, ω_1 y ω_2 son constantes, se presentan en teoría eléctrica. Las variables x y y por lo general representan voltajes o corrientes en el tiempo t. La curva resultante es a veces difícil de trazar; pero, usando un osciloscopio y aplicando voltajes o corrientes en las terminales de entrada, podemos representar la gráfica, una **figura de Lissajous**, en la pantalla del osciloscopio. Las calculadoras graficadoras son muy útiles para obtener estas complicadas gráficas.

EJEMPLO 7 **Gráfica de una figura de Lissajous**

Trace la gráfica de la figura de Lissajous que tiene la parametrización

$$x = \operatorname{sen} 2t, \qquad y = \cos t; \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

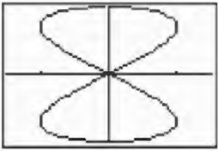
Determine los valores de t que correspondan a la curva en cada cuadrante.

SOLUCIÓN Primero necesitamos fijar en modo paramétrico la calculadora graficadora. A continuación, hacemos las asignaciones

$$X_{1T} = \operatorname{sen} 2t \qquad \text{y} \qquad Y_{1T} = \cos t$$

Para este ejemplo, usamos Tmin = 0, Tmáx = 2π y Tstep = 0.1. Como x y y están entre -1 y 1, asignaremos -1 a Ymin y 1 a Ymáx. Para conservar nuestra proporción de pantalla en 3:2, seleccionamos -1.5 para Xmin y 1.5 para Xmáx y entonces graficamos X_{1T} y Y_{1T} para obtener la figura de Lissajous de la figura 6.

FIGURA 6
$[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$



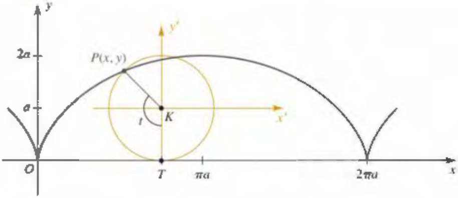
Al consultar las ecuaciones paramétricas vemos que cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, el punto $P(x, y)$ comienza en $(0, 1)$ y traza la parte de la curva en el primer cuadrante (por lo general en la dirección de giro de las agujas del reloj). Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, $P(x, y)$ traza la parte en el tercer cuadrante (en dirección contraria al giro de las agujas del reloj). Para $\pi < t < 3\pi/2$, obtenemos la parte en el cuarto cuadrante; y $3\pi/2 < t < 2\pi$ nos da la parte en el segundo cuadrante. ■

EJEMPLO 8 **Encontrar ecuaciones paramétricas para una cicloide**

La curva trazada por un punto fijo P en la circunferencia de un círculo, cuando el círculo gira a lo largo de una recta en un plano, se denomina **cicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para una cicloide.

SOLUCIÓN Suponga que el círculo tiene radio a y que gira a lo largo (y arriba) del eje x en la dirección positiva. Si una posición de P es el origen, entonces la figura 7 describe parte de la curva y una posición posible del círculo. La parte de la curva en forma de V en $x = 2\pi a$ se llama **cúspide**.

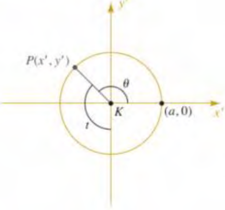
FIGURA 7



Denotemos con K el centro del círculo y sea T el punto de tangencia con el eje x. Introducimos, como parámetro t, la medida en radianes del ángulo TKP. La distancia que el círculo ha girado es $d(O, T) = at$ (fórmula de la longitud de un arco circular). En consecuencia, las coordenadas de K son $(x, y) = (at, a)$. Si consideramos un sistema de coordenadas $x'y'$ con origen en $K(at, a)$ y si $P(x', y')$ denota el punto P respecto a este sistema, entonces, al sumar x' y y' a las coordenadas x y y de K, obtenemos

$$x = at + x', y = a + y'$$

FIGURA 8



Si, como en la figura 8, θ denota un ángulo en posición estándar en el plano $x'y'$, entonces $\theta + t = 3\pi/2$ o bien, lo que es equivalente, $\theta = (3\pi/2) - t$. En consecuencia,

$$x' = a\cos\theta = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\,\text{sen}\,t$$

$$y' = a\,\text{sen}\,\theta = a\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\cos t,$$

y la sustitución en $x = at + x'$, $y = a + y'$ nos da ecuaciones paramétricas para la cicloide:

$$x = a(t - \text{sen}\,t),\ y = a(1 - \cos t);\ t \text{ en } \mathbb{R}$$ ■

FIGURA 9

Si $a < 0$, entonces la gráfica de $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ es la cicloide invertida que resulta si el círculo del ejemplo 8 gira *por debajo* del eje x. Esta curva tiene varias propiedades físicas importantes. Para ilustrar, suponga que un alambre delgado pasa por dos puntos fijos A y B, como se ve en la figura 9, y que la forma del alambre se puede cambiar al doblarlo en cualquier forma. Suponga, además, que se permite que una cuenta pequeña se deslice por el alambre y que la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Ahora preguntamos cuál de todas las trayectorias posibles permitirá que la cuenta se deslice de A a B en el mínimo tiempo. Es natural pensar que la trayectoria deseada es el segmento de recta de A a B, pero esta no es la respuesta correcta. La trayectoria que requiere el menor tiempo coincide con la gráfica de una cicloide invertida con A en el origen. Como la velocidad de la cuentecilla aumenta con más rapidez a lo largo de la cicloide que de la recta que pasa por A y B, la cuentecilla llega a B con más rapidez, aun cuando la distancia sea mayor.

Hay otra propiedad interesante de esta **curva de mínimo descenso**. Suponga que A es el origen y B es el punto con coordenada x de $\pi|a|$, es decir, el punto más bajo en la cicloide en el primer arco a la derecha de A. Si la cuenta se suelta en *cualquier* punto entre A y B, se puede demostrar que el *tiempo* necesario para que llegue a B es siempre el *mismo*.

Ocurren variaciones de la cicloide en aplicaciones. Por ejemplo, si la rueda de una motocicleta gira en un camino recto, entonces la curva trazada por un punto fijo en uno de los rayos es una curva semejante a una cicloide. En este caso la curva no tiene cúspides ni se cruza con el camino (el eje x) como lo cruza la gráfica de una cicloide. Si la rueda de un tren gira en una vía de ferrocarril, entonces la curva trazada por un punto fijo en la circunferencia de la rueda (que se prolonga bajo la vía) contiene lazos a intervalos regulares. Otras cicloides se definen en los ejercicios 53 y 54.

10.4 Ejercicios

Ejer. 1–30: Encuentre la ecuación en x y y cuya gráfica contiene los puntos sobre la curva C. Trace la gráfica de C e indique la orientación.

1 $x = t - 2$, $y = 2t + 3$; $0 \le t \le 5$

2 $x = 1 - 2t$, $y = 1 + t$; $-1 \le t \le 4$

3 $x = t^2 + 1$, $y = t^2 - 1$; $-2 \le t \le 2$

4 $x = t^3 + 1$, $y = t^3 - 1$; $-2 \le t \le 2$

5 $x = 4t^2 - 5$, $y = 2t + 3$; t en $\mathbb{R}$

6 $x = 1 - 9t^2$, $y = 3t + 1$; t en $\mathbb{R}$

7 $x = t^4 - 5$, $y = t^3$; $t \ge -\frac{1}{2}$

8 $x = \sqrt{t}$, $y = 3t + 4$; $t \ge 0$

9 $x = 4 \cos t + 1$, $y = 3 \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$

10 $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 3 \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$

11 $x = 2 - 3 \operatorname{sen} t$, $y = -1 - 3 \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$

12 $x = \cos t - 2$, $y = \operatorname{sen} t + 3$; $0 \le t \le 2\pi$

13 $x = \sec t$, $y = \tan t$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

14 $x = \csc t$, $y = \cot t$; $-\pi < t < 0$

15 $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$; $-\pi \le t \le \pi$

16 $x = \cos t$, $y = \cos 2t$; $-\pi \le t \le \pi$

17 $x = t^2$, $y = 2 \ln t$; $t > 0$

18 $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$; $0 \le t \le 2\pi$

19 $x = \operatorname{sen} t$, $y = \csc t$; $0 < t \leq \pi/2$

20 $x = e^t$, $y = e^{-t}$; t en $\mathbb{R}$

21 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$; $|t| \geq 1$

22 $x = -\sqrt{t^2 - 1}$, $y = t$; $|t| \geq 1$

23 $x = -2\sqrt{1 - t^2}$, $y = t$; $|t| \leq 1$

24 $x = \frac{6}{5}\sqrt{25 - t^2}$, $y = t$; $|t| \leq 5$

25 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}$; $0 \leq t \leq 4$

26 $x = 2t$, $y = 8t^3$; $-1 \leq t \leq 1$

27 $x = (t + 1)^3$, $y = (t + 2)^2$; $0 \leq t \leq 2$

28 $x = t^3$, $y = t^2$; t en $\mathbb{R}$

29 $x = e^t$, $y = e^{-2t}$; t en $\mathbb{R}$

30 $x = \tan t$, $y = 1$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

31 **a)** Describa la gráfica de una curva C que tiene la parametrización

$$x = 3 + 2 \operatorname{sen} t, y = -2 + 2 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

b) Cambie la parametrización a

$$x = 3 - 2 \operatorname{sen} t, y = -2 + 2 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso a).

c) Cambie la parametrización

$$x = 3 - 2 \operatorname{sen} t, y = -2 - 2 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso a).

32 **a)** Describa la gráfica de una curva C que tiene la parametrización

$$x = -2 + 3 \operatorname{sen} t, y = 3 + 3 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

b) Cambie la parametrización a

$$x = -2 - 3 \operatorname{sen} t, y = 3 + 3 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso a).

c) Cambie la parametrización a

$$x = -2 + 3 \operatorname{sen} t, y = 3 + 3 \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

y describa cómo cambia la gráfica del inciso a).

Ejer. 33–34: Las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 están dadas paramétricamente, para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas e indique orientaciones.

33 C_1: $x = t^2$, $y = t$
C_2: $x = t^4$, $y = t^2$
C_3: $x = \operatorname{sen}^2 t$, $y = \operatorname{sen} t$
C_4: $x = e^{2t}$, $y = -e^t$

34 C_1: $x = t$, $y = 1 - t$
C_2: $x = 1 - t^2$, $y = t^2$
C_3: $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$
C_4: $x = \ln t - t$, $y = 1 + t - \ln t$; $t > 0$

Ejer. 35–36: Las ecuaciones paramétricas especifican la posición de un punto en movimiento $P(x, y)$ en el tiempo t. Trace la gráfica e indique el movimiento de P cuando aumenta t.

35 **a)** $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq \pi$

b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$; $0 \leq t \leq \pi$

c) $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$; $-1 \leq t \leq 1$

36 **a)** $x = t^2$, $y = 1 - t^2$; $0 \leq t \leq 1$

b) $x = 1 - \ln t$, $y = \ln t$; $1 \leq t \leq e$

c) $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

37 Demuestre que

$$x = a \cos t + h, y = b \operatorname{sen} t + k; 0 \leq t \leq 2\pi$$

son ecuaciones paramétricas de una elipse con centro (h, k) y ejes de longitudes $2a$ y $2b$.

38 Demuestre que

$$x = a \sec t + h, \quad y = b \tan t + k;$$
$$-\pi/2 < t < 3\pi/2 \text{ y } t \neq \pi/2$$

son ecuaciones paramétricas de una hipérbola con centro (h, k), eje transversal de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$. Determine los valores de t para cada rama.

Ejer. 39–40: a) Encuentre tres parametrizaciones que den la misma gráfica que la ecuación dada. b) Encuentre tres parametrizaciones que den sólo una parte de la gráfica de la ecuación dada.

39 $y = x^2$ **40** $y = \ln x$

Ejer. 41–44: Consulte las ecuaciones en (1) del ejemplo 6. Determine el alcance y la altitud máxima para los valores dados.

41 $s = 256\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$, $h = 400$

42 $s = 512\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, $h = 1088$

43 $s = 704$, $\alpha = 45°$, $h = 0$

44 $s = 2448$, $\alpha = 30°$, $h = 0$

45 Consulte el ejemplo 7.

a) Describa la figura de Lissajous dada por $f(t) = a \operatorname{sen} \omega t$ y $g(t) = b \cos \omega t$ para $t \geq 0$ y $a \neq b$.

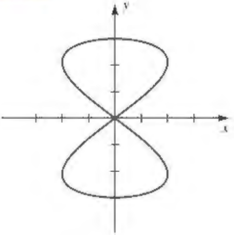
b) Suponga que $f(t) = a \operatorname{sen} \omega_1 t$ y $g(t) = b \operatorname{sen} \omega_2 t$, donde ω_1 y ω_2 son números racionales positivos, y escriba ω_2/ω_1 como m/n para enteros positivos m y n. Demuestre que si $p = 2\pi n/\omega_1$, entonces $f(t + p) = f(t)$ y $g(t + p) = g(t)$. Concluya que la curva se traza de nuevo a sí misma cada p unidades de tiempo.

46 A continuación se observa la figura de Lissajous dada por

$$x = 2 \operatorname{sen} 3t,\ y = 3 \operatorname{sen} 1.5t;\ t \geq 0$$

Encuentre el periodo de la figura, es decir, la duración del intervalo de t más pequeño que trace la curva.

EJERCICIO 46



Ejer. 47–50: Las figuras de Lissajous se usan en el estudio de circuitos eléctricos para determinar la diferencia de fase φ entre un voltaje conocido $V_1(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$ y un voltaje desconocido $V_2(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ que tiene la misma frecuencia. Los voltajes se grafican paramétricamente como $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$. Si φ es agudo, entonces

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} \frac{y_{int}}{y_{max}},$$

donde y_{int} es el punto de intersección con el eje y no negativo y y_{max} es el valor y máximo sobre la curva.

a) Grafique la curva paramétrica $x = V_1(t)$ y $y = V_2(t)$ para el intervalo especificado de t.

b) Use la gráfica para calcular φ en grados.

47 $V_1(t) = 3 \operatorname{sen}(240\pi t)$, $V_2(t) = 4 \operatorname{sen}(240\pi t)$; $0 \leq t \leq 0.01$

48 $V_1(t) = 6 \operatorname{sen}(120\pi t)$, $V_2(t) = 5 \cos(120\pi t)$; $0 \leq t \leq 0.02$

49 $V_1(t) = 80 \operatorname{sen}(60\pi t)$, $V_2(t) = 70 \cos(60\pi t - \pi/3)$; $0 \leq t \leq 0.035$

50 $V_1(t) = 163 \operatorname{sen}(120\pi t)$, $V_2(t) = 163 \operatorname{sen}(120\pi t + \pi/4)$; $0 \leq t \leq 0.02$

Ejer. 51–52: Grafique la figura de Lissajous en el visor rectangular de $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ para el intervalo especificado de t.

51 $x(t) = \operatorname{sen}(6\pi t)$, $y(t) = \cos(5\pi t)$; $0 \leq t \leq 2$

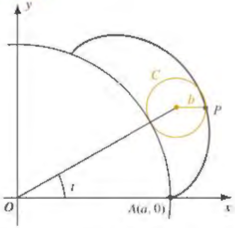
52 $x(t) = \operatorname{sen}(4t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(3t + \pi/6)$; $0 \leq t \leq 6.5$

53 Un círculo C de radio b gira en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y $b < a$. Sea P un punto fijo en C y sea la posición inicial de P $A(a, 0)$, como se ve en la figura. Si el parámetro t es el ángulo desde el eje x positivo al segmento de recta que va de O al centro de C, demuestre que las ecuaciones paramétricas para la curva trazada por P (una *epicicloide*) son

$$x = (a + b) \cos t - b \cos\left(\frac{a + b}{b} t\right),$$

$$y = (a + b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{b} t\right);\quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

EJERCICIO 53



54 Si el círculo C del ejercicio 53 gira en el interior del segundo círculo (vea la figura), entonces la curva trazada por P es una *hipocicloide*.

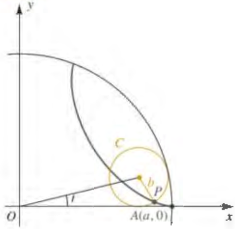
a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = (a - b) \cos t + b \cos\left(\frac{a - b}{b} t\right),$$

$$y = (a - b) \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{b} t\right);\quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

b) Si $b = \frac{1}{4}a$, demuestre que $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ y trace la gráfica.

EJERCICIO 54



55 Si $b = \frac{1}{3}a$ en el ejercicio 53, encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide y trace la gráfica.

56 El radio del círculo B es un tercio del que tiene el círculo A. ¿Cuántas revoluciones hará el círculo B cuando ruede alrededor del círculo A hasta llegar a su punto de partida? (*Sugerencia*: use el ejercicio 55.)

Ejer. 57–60: Grafique la curva.

57 $x = 3\ \mathrm{sen}^5 t, \quad y = 3\cos^5 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

58 $x = 8\cos t - 2\cos 4t, \quad y = 8\ \mathrm{sen}\, t - 2\ \mathrm{sen}\, 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

59 $x = 3t - 2\ \mathrm{sen}\, t, \quad y = 3 - 2\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

60 $x = 2t - 3\ \mathrm{sen}\, t, \quad y = 2 - 3\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

Ejer. 61–64: Grafique las curvas dadas en el mismo plano de coordenadas y describa la forma de la figura resultante.

61 C_1: $x = 2\ \mathrm{sen}\, 3t, \quad y = 3\cos 2t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{1}{4}\cos t + \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{4}\ \mathrm{sen}\, t + \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_3: $x = \frac{1}{4}\cos t - \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{4}\ \mathrm{sen}\, t + \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_4: $x = \frac{3}{4}\cos t, \quad y = \frac{1}{4}\ \mathrm{sen}\, t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

C_5: $x = \frac{1}{4}\cos t, \quad y = \frac{1}{8}\ \mathrm{sen}\, t + \frac{3}{4}; \quad \pi \le t \le 2\pi$

62 C_1: $x = \frac{1}{2}\cos t + 1, \quad y = \mathrm{sen}\, t - 1; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{1}{2}\cos t + 1, \quad y = \mathrm{sen}\, t + 1; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_3: $x = 1, \quad y = 2\tan t; \quad -\pi/4 \le t \le \pi/4$

63 C_1: $x = \tan t, \quad y = 3\tan t; \quad 0 \le t \le \pi/4$

C_2: $x = 1 + \tan t, \quad y = 3 - 3\tan t; \quad 0 \le t \le \pi/4$

C_3: $x = \frac{1}{2} + \tan t, \quad y = \frac{3}{2}; \quad 0 \le t \le \pi/4$

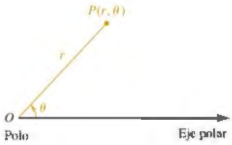
64 C_1: $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 + \mathrm{sen}\, t; \quad \pi/3 \le t \le 2\pi$

C_2: $x = 1 + \tan t, \quad y = 1; \quad 0 \le t \le \pi/4$

10.5 Coordenadas polares

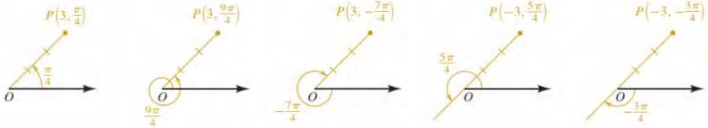
En un sistema de coordenadas rectangulares, el par ordenado (a, b) denota el punto cuyas distancias dirigidas desde los ejes x y y son b y a, respectivamente. Otro método para representar puntos es usar *coordenadas polares*. Comenzamos con un punto fijo O (el **origen**, o **polo**) y una semirrecta dirigida (el **eje polar**) con punto extremo O. A continuación, consideramos cualquier punto P en el plano diferente de O. Si, como se ilustra en la figura 1, $r = d(O, P)$y θ denota la medida de cualquier ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ son **coordenadas polares** de P y los símbolos (r, θ) o $P(r, \theta)$ se usan para denotar P. Como de costumbre, θ se considera positivo si el ángulo es generado por una rotación del eje polar en sentido contrario al giro de las agujas de un reloj y negativo si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. Se pueden usar medidas en radianes o en grados para θ.

FIGURA 1



Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan todas el mismo punto (vea la figura 2). También consideramos que r es negativa. En este caso, en lugar de medir $|r|$ unidades a lo largo del lado terminal del ángulo θ, medimos a lo largo de la semirrecta con punto extremo O que tiene dirección *opuesta* a la del lado terminal. Los puntos correspondientes a los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$ se localizan también en la figura 2.

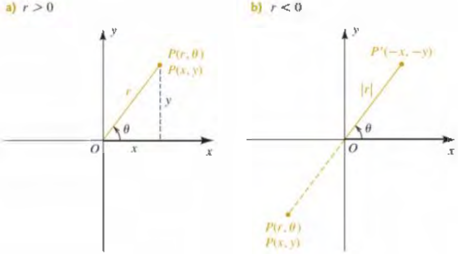
FIGURA 2



Acordamos que el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ para *cualquier* θ. Una asignación de pares ordenados de la forma (r, θ) a puntos en un plano es un **sistema de coordenadas polares** y el plano es un **plano $r\theta$**.

A continuación, superponemos un plano xy sobre un plano $r\theta$ de modo que el eje x positivo coincida con el eje polar. A cualquier punto P en el plano se le pueden asignar entonces coordenadas rectangulares (x, y) o coordenadas polares (r, θ). Si $r > 0$, tenemos una situación semejante a la que se ilustra en la figura 3a); si $r < 0$, tenemos la que se muestra en el inciso b) de la figura. En la figura 3b), para fines posteriores, también hemos localizado el punto P', que tiene coordenadas polares $(|r|, \theta)$ y coordenadas rectangulares $(-x, -y)$.

FIGURA 3



El siguiente resultado especifica relaciones entre (x, y) y (r, θ), donde se supone que el eje x positivo coincide con el eje polar.

Relaciones entre coordenadas rectangulares y polares

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P se relacionan como sigue:

1) $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

2) $r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0$

DEMOSTRACIONES

1) Aun cuando hemos representado θ como un ángulo agudo en la figura 3, el análisis que sigue es válido para todos los ángulos.

Si $r > 0$, como en la figura 3a), entonces $\cos\theta = x/r$ y $\mathrm{sen}\,\theta = y/r$ y, por lo tanto,

$$x = r\cos\theta, \ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Si $r < 0$, entonces $|r| = -r$, y en la figura 3b) vemos que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}, \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

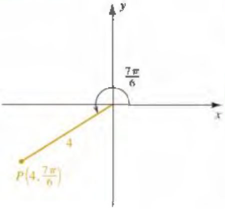
La multiplicación por r nos da la relación 1 y, por lo tanto, estas fórmulas se cumplen si r es positiva o negativa.

Si $r = 0$, entonces el punto es el polo y otra vez vemos que las fórmulas en 1) son verdaderas.

2) Las fórmulas de la relación 2 se obtienen fácilmente de la figura 3a). Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2$. De la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, $\tan\theta = y/x$ (si $x \neq 0$). Si $x = 0$, entonces $\theta = (\pi/2) + \pi n$ para algún entero n. ■

Podemos usar el resultado precedente para cambiar de un sistema a otro de coordenadas.

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Cambio de coordenadas polares a coordenadas rectangulares**

Si $(r, \theta) = (4, 7\pi/6)$ son coordenadas polares de un punto P, encuentre las coordenadas rectangulares de P.

SOLUCIÓN El punto P está trazado en la figura 4. Sustituyendo $r = 4$ y $\theta = 7\pi/6$ en la relación 1 del resultado anterior, obtenemos lo siguiente:

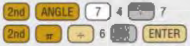
$$x = r\cos\theta = 4\cos(7\pi/6) = 4\left(-\sqrt{3}/2\right) = -2\sqrt{3}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 4\,\mathrm{sen}(7\pi/6) = 4(-1/2) = -2$$

En consecuencia, las coordenadas rectangulares de P son $(x, y) = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$. ■

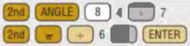
Confirmemos los resultados del ejemplo 1 en una calculadora graficadora.

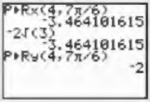
Conversión de polar a rectangular

Usamos el comando "dada polar–ejecuta x".



La segunda entrada, $-2\sqrt{(3)}$, confirma que el valor x es correcto. Ahora usamos el comando "dada polar–ejecuta y".



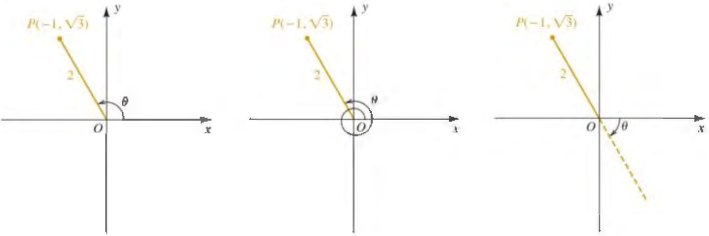


EJEMPLO 2 **Cambio de coordenadas rectangulares a coordenadas polares**

Si $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ son coordenadas rectangulares de un punto P, encuentre tres pares diferentes de coordenadas polares (r, θ) para P.

FIGURA 5

a) b) c)



SOLUCIÓN En la figura 5a)-c) se ilustran tres posibilidades para θ. Si usamos $x = -1$ y $y = \sqrt{3}$ en la relación 2 entre coordenadas rectangulares y polares, obtenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4,$$

y como r es positivo en la figura 5a), $r = 2$. Usando

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$$

vemos que el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/3$, y entonces

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

(continúa)

Así, $(2, 2\pi/3)$ es un par de coordenadas polares para P.

Al consultar la figura 5b) y los valores obtenidos para P en la figura 5a), obtenemos

$$r = 2 \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

En consecuencia, $(2, 8\pi/3)$ es otro par de coordenadas polares para P.

En la figura 5c), $\theta = -\pi/3$. En este caso usamos $r = -2$ para obtener $(-2, -\pi/3)$ como tercer par de coordenadas polares para P. ■

Confirmamos el primer resultado del ejemplo 2 en una calculadora graficadora.

Conversión rectangular a polar

Usamos el comando "dada rectangular–ejecutar r".

2nd ANGLE 5 −1 ,
2nd √ 3)) ENTER

A continuación, usamos el comando "dada rectangular–ejecutar θ".

2nd ANGLE 6 −1 ,
2nd √ 3)) ENTER

Para ver el último resultado en grados, cambiamos el modo de radianes a modo de grados.

MODE ▽ ▽ ▷ ENTER
2nd QUIT 2nd ENTRY ENTER

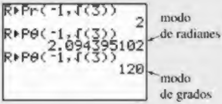
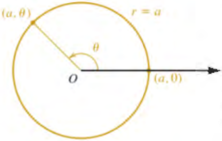


FIGURA 6

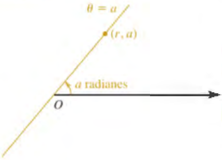


Una **ecuación polar** es una ecuación con r y θ. Una **solución** de una ecuación polar es un par ordenado (a, b) que lleva a una igualdad si a es sustituida por r y b por θ. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en un plano $r\theta$) que corresponden a las soluciones.

Las ecuaciones polares más sencillas son $r = a$ y $\theta = a$, donde a es un número real diferente de cero. Como las soluciones de la ecuación polar $r = a$ son de la forma (a, θ) para *cualquier* ángulo θ, se deduce que la gráfica es una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el polo. Una gráfica para $a > 0$ está trazada en la figura 6. La misma gráfica se obtiene para $r = -a$.

Las soluciones de la ecuación polar $\theta = a$ son de la forma (r, a) para *cualquier* número real r. Como la coordenada a (el ángulo) es constante, la gráfica de $\theta = a$ es una recta que pasa por el origen, como se ve en la figura 7 para un ángulo agudo a.

FIGURA 7



Podemos usar las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares para transformar una ecuación polar en una ecuación con x y y, y viceversa. Este procedimiento se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 **Encontrar una ecuación polar de una recta**

Encuentre una ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Toda recta en un plano de coordenadas xy es la gráfica de una ecuación lineal que se puede escribir en la forma $ax + by = c$. Usando las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ tendremos las siguientes ecuaciones polares equivalentes:

$$ar\cos\theta + br\,\text{sen}\,\theta = c \qquad \text{sustituimos por } x \text{ y } y$$
$$r(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta) = c \qquad \text{factorizamos}$$

Si $a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta \neq 0$, la última ecuación se puede escribir como sigue:

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta}$$

■

EJEMPLO 4 **Cambio de una ecuación con x y y a ecuación polar**

Encuentre una ecuación polar para la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

SOLUCIÓN Usando las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, obtenemos las siguientes ecuaciones polares:

$$(r\cos\theta)^2 - (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = 16 \qquad \text{sustituimos por } x \text{ y } y$$
$$r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 16 \qquad \text{elevamos al cuadrado los términos}$$
$$r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) = 16 \qquad \text{factorizamos } r^2$$
$$r^2\cos 2\theta = 16 \qquad \text{fórmula de doble ángulo}$$
$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta} \qquad \text{dividimos entre } \cos 2\theta$$

La división entre $\cos 2\theta$ es permisible porque $\cos 2\theta \neq 0$. (Note que si $\cos 2\theta = 0$, entonces $r^2\cos 2\theta \neq 16$.) También podemos escribir la ecuación polar como $r^2 = 16\sec 2\theta$. ■

EJEMPLO 5 **Cambio de una ecuación polar a una ecuación con x y y**

Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r = a\,\text{sen}\,\theta$, con $a \neq 0$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Una fórmula que relaciona $\text{sen}\,\theta$ y y está dada por $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Para introducir la expresión $r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación $r = a\,\text{sen}\,\theta$, multiplicamos ambos lados por r y tendremos

$$r^2 = ar\,\text{sen}\,\theta$$

A continuación, si sustituimos $x^2 + y^2$ por r^2 y y por $r\,\text{sen}\,\theta$, la última ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 = ay,$$

o

$$x^2 + y^2 - ay = 0$$

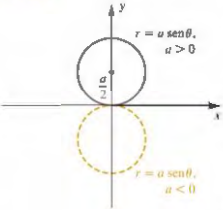
Si completamos el cuadrado en y tendremos

$$x^2 + y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

o

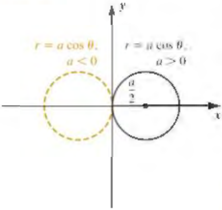
$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

FIGURA 8



En el plano xy, la gráfica de la última ecuación es una circunferencia con centro $(0, a/2)$ y radio $|a|/2$, como se ilustra en la figura 8 para el caso $a > 0$ (la circunferencia de línea continua) y $a < 0$ (la circunferencia de línea discontinua). ■

FIGURA 9



Usando el mismo método que en el ejemplo precedente, podemos demostrar que la gráfica de $r = a\cos\theta$, con $a \neq 0$, es un círculo de radio $a/2$ del tipo ilustrado en la figura 9.

En los siguientes ejemplos obtenemos las gráficas de ecuaciones polares mediante la localización de puntos y el examen de la relación entre intervalos θ e intervalos r. A medida que usted avance en esta sección, debe tratar de reconocer formas de las ecuaciones polares para que pueda trazar sus gráficas con sólo localizar algunos puntos, si acaso.

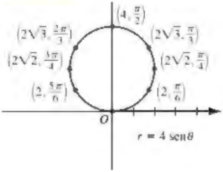
EJEMPLO 6 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 4$ sen θ.

SOLUCIÓN La demostración de que la gráfica de $r = 4$ sen θ es una circunferencia se dio en el ejemplo 5. La siguiente tabla muestra algunas soluciones de la ecuación. Hemos incluido una tercera fila en la tabla que contiene aproximaciones a r de una posición decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.5	4	3.5	2.8	2	0

FIGURA 10

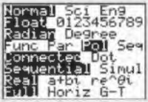


Como ayuda para localizar puntos en el plano $r\theta$ que se muestra en la figura 10, hemos prolongado el eje polar en la dirección negativa e introducido una recta vertical que pasa por el polo (esta recta es la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/2$). Otros puntos adicionales que se obtienen al variar θ de π a 2π se encuentran en el mismo círculo. Por ejemplo, la solución $(-2, 7\pi/6)$ nos da el mismo punto que $(2, \pi/6)$; el punto correspondiente a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ es el mismo que se obtuvo a partir de $(2\sqrt{2}, \pi/4)$; etcétera. Si θ aumenta a través de todos los números reales, obtenemos los mismos puntos una y otra vez debido a la periodicidad de la función seno. ■

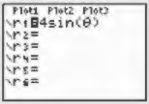
Gráfica de una ecuación polar

Ahora examinaremos algunas funciones de coordenadas polares en una calculadora graficadora, usando $r = 4$ sen θ del ejemplo 6.

Cambiar a modo polar. MODE ▽ (3 veces) ▷ ▷ ENTER



Hacer una asignación *r*. [Y=] 4 [SIN] [X,T,θ,n] [ )]



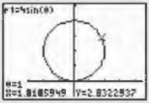
Fijar valores de ventana. Usaremos θmín $= 0$ a θmáx $= \pi$ porque esto nos da el círculo. Para θstep, usaremos 0.05. Un valor más pequeño, como 0.01, hace más lento el proceso de graficación, y un valor más grande, como 0.5, produce una figura más burda.

[WINDOW] 0 [▽] [2nd] [π] [▽]
.05 [▽] −4.5 [▽] 4.5 [▽] 1 [▽]
−1 [▽] 5 [▽] 1

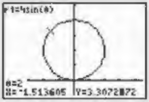
Graficar la función. [GRAPH]

Trazar la gráfica (modo rectangular). Ahora introducimos el modo *trace* (trazar) y usamos teclas del cursor para movernos alrededor del círculo. Note que la calculadora muestra los valores θ, X y Y.

[TRACE] ([▷] y [◁])



Evaluar la función para $\theta = 2$. [2nd] [CALC] [1] 2 [ENTER]



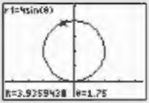
Cambiar a coordenadas polares. [2nd] [FORMAT] [▷] [ENTER]

(*continúa*)

Trazar la gráfica (modo polar).

Ahora graficamos y trazamos el círculo otra vez. Note que la calculadora muestra los valores de R y θ.

GRAPH TRACE (▷ y ◁)



Crear una tabla.

A continuación examinamos la tabla de valores, poniendo TblStart en 0 y ΔTbl en $\pi/12$.

2nd TBLSET 0 ▽ 2nd π ÷ 12

Comparar tablas.

Ahora comparamos los valores de las tablas con los obtenidos en el ejemplo 6.

2nd TABLE

EJEMPLO 7 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar**

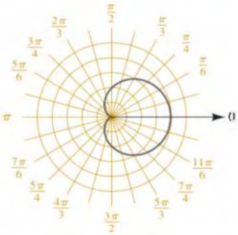
Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 2\cos\theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno disminuye de 1 a -1 cuando θ varía de 0 a π, se deduce que r disminuye de 4 a 0 en este intervalo de θ. La siguiente tabla presenta algunas soluciones de $r = 2 + 2\cos\theta$, junto con aproximaciones a r con un lugar decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

Trazar puntos en un plano $r\theta$ lleva a la mitad superior de la gráfica trazada en la figura 11. (Hemos empleado papel milimétrico para graficar coordenadas polares, que muestra líneas que pasan por O a varios ángulos y circunferencias concéntricas con centros en el polo.)

FIGURA 11

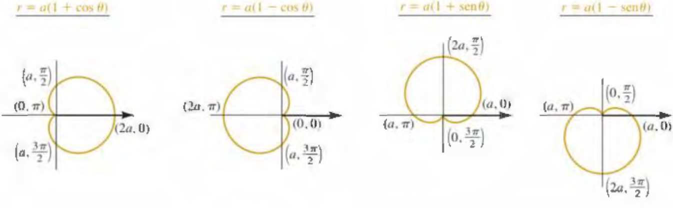


Si θ aumenta de π a 2π, entonces $\cos\theta$ aumenta de -1 a 1 y en consecuencia r aumenta de 0 a 4. Localizar puntos para $\pi \le \theta \le 2\pi$ nos da la mitad inferior de la gráfica.

Puede obtenerse la misma gráfica si se toman otros intervalos de longitud 2π para θ. ■

La gráfica en forma de corazón del ejemplo 7 es un **cardioide**. En general, la gráfica de cualquiera de las ecuaciones polares de la figura 12, con $a \neq 0$, es un cardioide.

FIGURA 12



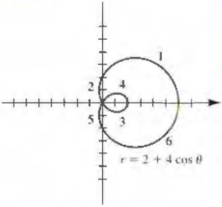
Si a y b no son cero, entonces las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son **limaçones** (caracoles):

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$

Note que los limaçons especiales en los que $|a| = |b|$ son cardioides.

Usar el intervalo θ $[0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$) suele ser suficiente para graficar ecuaciones polares. Para ecuaciones con gráficas más complejas, a menudo es útil graficar con subintervalos de $[0, 2\pi]$ que están determinados por los valores de θ que hacen que $r = 0$; es decir, los **valores polares**. Demostraremos esta técnica en el siguiente ejemplo.

FIGURA 13



EJEMPLO 8 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4\cos\theta$.

SOLUCIÓN Primero encontramos los valores polares resolviendo la ecuación $r = 0$:

$$2 + 4\cos\theta = 0 \qquad \text{sea } r = 0$$

$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{despejamos con } \theta$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad \text{despejamos con } \theta \text{ en } [0, 2\pi]$$

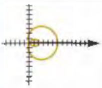
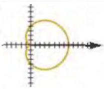
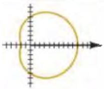
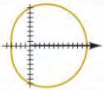
A continuación creamos una tabla de valores θ de 0 a 2π usando subintervalos determinados por los ángulos cuadrantales y los valores polares. Los números de fila en el lado izquierdo corresponden a los números en la figura 13.

	θ	$\cos\theta$	$4\cos\theta$	$r = 2 + 4\cos\theta$
1)	$0 \to \pi/2$	$1 \to 0$	$4 \to 0$	$6 \to 2$
2)	$\pi/2 \to 2\pi/3$	$0 \to -1/2$	$0 \to -2$	$2 \to 0$
3)	$2\pi/3 \to \pi$	$-1/2 \to -1$	$-2 \to -4$	$0 \to -2$
4)	$\pi \to 4\pi/3$	$-1 \to -1/2$	$-4 \to -2$	$-2 \to 0$
5)	$4\pi/3 \to 3\pi/2$	$-1/2 \to 0$	$-2 \to 0$	$0 \to 2$
6)	$3\pi/2 \to 2\pi$	$0 \to 1$	$0 \to 4$	$2 \to 6$

Usted debe verificar las entradas de la tabla con la figura, en especial la de las filas 3 y 4 (en las que el valor de r es negativo). La gráfica se llama limaçon con un lazo interior. ■

La siguiente tabla resume las cuatro categorías de limaçones, con base en la relación entre a y b en las ecuaciones generales citadas.

Limaçones $a \pm b\cos\theta$, $a \pm b\,\text{sen}\,\theta$ $(a > 0, b > 0)$

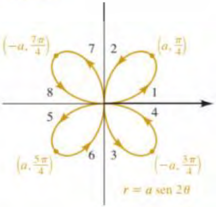
Nombre	Limaçon con un lazo interior	Cardioide	Limaçon con un rizo	Limaçon convexo
Condición	$\frac{a}{b} < 1$	$\frac{a}{b} = 1$	$1 < \frac{a}{b} < 2$	$\frac{a}{b} \geq 2$
Gráfica específica				
Ecuación específica	$r = 2 + 4\cos\theta$	$r = 4 + 4\cos\theta$	$r = 6 + 4\cos\theta$	$r = 8 + 4\cos\theta$

EJEMPLO 9 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = a$ sen 2θ para $a > 0$.

SOLUCIÓN La tabla siguiente contiene intervalos de θ y los correspondientes valores de r. Los números de fila en el lado izquierdo corresponden a los números de la figura 14.

FIGURA 14



	θ	2θ	sen 2θ	$r = a$sen 2θ
1)	$0 \to \pi/4$	$0 \to \pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
2)	$\pi/4 \to \pi/2$	$\pi/2 \to \pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
3)	$\pi/2 \to 3\pi/4$	$\pi \to 3\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
4)	$3\pi/4 \to \pi$	$3\pi/2 \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$
5)	$\pi \to 5\pi/4$	$2\pi \to 5\pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
6)	$5\pi/4 \to 3\pi/2$	$5\pi/2 \to 3\pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
7)	$3\pi/2 \to 7\pi/4$	$3\pi \to 7\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
8)	$7\pi/4 \to 2\pi$	$7\pi/2 \to 4\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$

Usted debe verificar las entradas de la tabla con la figura, en especial las de las filas 3, 4, 7 y 8 (en las que el valor de r es negativo). ■

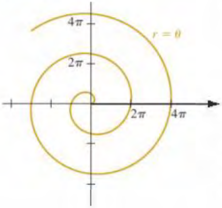
La gráfica del ejemplo 9 es una **rosa de cuatro hojas**. En general, una ecuación polar de la forma

$$r = a \text{ sen } n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \cos n\theta$$

para cualquier entero positivo n mayor que 1 y cualquier número real a diferente de cero tiene una gráfica que está formada por varias espiras que pasan por el origen. Si n es par, hay $2n$ espiras, y si n es impar, hay n espiras.

La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta$ para cualquier número real a diferente de cero es una **espiral de Arquímedes**. El caso $a = 1$ se considera en el siguiente ejemplo.

FIGURA 15



EJEMPLO 10 **Trazo de la gráfica de una espiral de Arquímedes**

Trace la gráfica de la ecuación polar $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

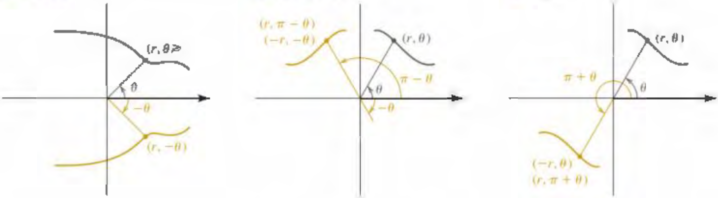
SOLUCIÓN La gráfica está formada por todos los puntos que tienen coordenadas polares de la forma (c, c) para todo número real $c \geq 0$. Así, la gráfica contiene los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π), etcétera. Cuando aumenta θ, r aumenta con la misma rapidez, y la espiral se enrolla alrededor del origen en dirección contraria al giro de las agujas de un reloj, cruzando el eje polar en $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, como se ilustra en la figura 15.

Si se permite que θ sea negativo, entonces cuando θ disminuye a través de los valores negativos, la espiral resultante se enrolla alrededor del origen y es la imagen simétrica, respecto al eje vertical, de la curva trazada en la figura 15. ■

Si superponemos un plano xy sobre un plano $r\theta$, entonces la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje x (el eje polar), el eje y (la recta $\theta = \pi/2$) o el origen (el polo). Algunas simetrías típicas se ilustran en la figura 16. El siguiente resultado resume estas simetrías.

FIGURA 16 Simetrías de gráficas de ecuaciones polares

a) Eje polar b) Recta $\theta = \pi/2$ c) Polo



Pruebas de simetría

1) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica respecto al eje polar si la sustitución de $-\theta$ por θ lleva a una ecuación equivalente.

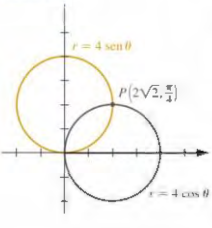
2) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$ si la sustitución ya sea de a) $\pi - \theta$ por θ o b) $-r$ por r y $-\theta$ por θ lleva a una ecuación equivalente.

3) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica respecto al polo si la sustitución ya sea de a) $\pi + \theta$ por θ o b) $-r$ por r produce una ecuación equivalente.

Para ilustrar, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4\cos\theta$ en el ejemplo 8 es simétrica respecto al eje polar, por la prueba 1. Como $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, la gráfica del ejemplo 6 es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$, por la prueba 2. La gráfica de la rosa de cuatro hojas en el ejemplo 9 es simétrica respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ y el polo. Pueden establecerse otras pruebas de simetría, pero las que hemos mencionado están entre las más fáciles de aplicar.

A diferencia de la gráfica de una ecuación con x y y, la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ puede ser simétrica respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ o el polo *sin* que satisfaga una de las pruebas precedentes de simetría. Esto es cierto debido a las numerosas formas diferentes de especificar un punto en coordenadas polares.

FIGURA 17



Otra diferencia entre sistemas de coordenadas rectangulares y polares es que los puntos de intersección de dos gráficas no siempre pueden encontrarse resolviendo simultáneamente ecuaciones polares. Para ilustrar, del ejemplo 6, la gráfica de $r = 4\operatorname{sen}\theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, \pi/2)$ (vea la figura 17.) Del mismo modo, la gráfica de $r = 4\cos\theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, 0)$ en el eje polar. Al consultar la figura 17, vemos que las coordenadas del punto de intersección $P(2\sqrt{2}, \pi/4)$ en el primer cuadrante satisfacen ambas ecuaciones; no obstante, el origen O, que está en cada circunferencia, *no se puede* determinar resolviendo simultáneamente las ecuaciones. Entonces, al buscar puntos de intersección de gráficas polares, a veces es necesario consultar las gráficas mismas, *además* de resolver simultáneamente las dos ecuaciones.

Un método alterno consiste en usar ecuaciones diferentes (equivalentes) para las gráficas. Vea el ejercicio de análisis 12 al final del capítulo.

10.5 Ejercicios

1 ¿Cuáles coordenadas polares representan el mismo punto que $(3, \pi/3)$?

a) $(3, 7\pi/3)$ b) $(3, -\pi/3)$ c) $(-3, 4\pi/3)$

d) $(3, -2\pi/3)$ e) $(-3, -2\pi/3)$ f) $(-3, -\pi/3)$

2 ¿Cuáles coordenadas polares representan el mismo punto que $(4, -\pi/2)$?

a) $(4, 5\pi/2)$ b) $(4, 7\pi/2)$ c) $(-4, -\pi/2)$

d) $(4, -5\pi/2)$ e) $(-4, -3\pi/2)$ f) $(-4, \pi/2)$

Ejer. 3–8: Cambie las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

3 a) $(3, \pi/4)$ b) $(-1, 2\pi/3)$

4 a) $(5, 5\pi/6)$ b) $(-6, 7\pi/3)$

5 a) $(8, -2\pi/3)$ b) $(-3, 5\pi/3)$

6 a) $(4, -\pi/4)$ b) $(-2, 7\pi/6)$

7 $\left(6, \arctan\frac{3}{4}\right)$ 8 $\left(10, \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

Ejer. 9–12: Cambie las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

9 a) $(-1, 1)$ b) $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

10 a) $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ b) $(2, -2)$

11 a) $\left(7, -7\sqrt{3}\right)$ b) $(5, 5)$

12 a) $\left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ b) $\left(-4, 4\sqrt{3}\right)$

Ejer. 13–36: Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación con x y y.

13 $x = -3$ 14 $y = 2$

15 $y = -4$ 16 $x = 5$

17 $x^2 + y^2 = 16$ 18 $x^2 + y^2 = 2$

19 $y^2 = 6x$ 20 $x^2 = 8y$

21 $x^2 = 5y$ 22 $y^2 = 3x$

23 $x + y = 3$ 24 $2y = -x + 4$

25 $2y = -x$ 26 $y = 6x$

27 $y^2 - x^2 = 4$ 28 $xy = 8$

29 $xy = -3$ 30 $x^2 - y^2 = 9$

31 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 32 $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

33 $x^2 + (y + 3)^2 = 9$ 34 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

35 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

36 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

Ejer. 37–60: Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar. Úsela para ayudar a trazar la gráfica en un plano $r\theta$.

37 $r \cos \theta = 5$ 38 $r \operatorname{sen} \theta = -2$

39 $r = -3 \csc \theta$ 40 $r = 4 \sec \theta$

41 $r = -5$ 42 $r = 2$

43 $r - 6 \operatorname{sen} \theta = 0$ 44 $r - 6 \cos \theta = 0$

45 $\theta = \pi/4$ 46 $\theta = 2\pi/3$

47 $r^2(4 \operatorname{sen}^2 \theta - 9 \cos^2 \theta) = 36$

48 $r^2(\cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$

49 $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$ 50 $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = -10$

51 $r^2 \cos 2\theta = 1$ 52 $r^2 \cos 2\theta = -9$

53 $r(\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta) = 6$

54 $r(3 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta) = 12$

55 $r(\operatorname{sen} \theta + r \cos^2 \theta) = 1$

56 $r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 3$

57 $r = 8 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta$

58 $r = 2 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta$

59 $r = \tan \theta$

60 $r = 6 \cot \theta$

Ejer. 61–94: Trace la gráfica de la ecuación polar.

61 $r = 5$ 62 $r = -2$

63 $\theta = -\pi/6$ 64 $\theta = \pi/4$

65 $r = 3 \cos \theta$ 66 $r = -2 \operatorname{sen} \theta$

67 $r = 4 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$ 68 $r = 6 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta$

69 $r = 4(1 - \operatorname{sen} \theta)$ 70 $r = 3(1 + \cos \theta)$

71 $r = -6(1 + \cos \theta)$ 72 $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$

73 $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$

74 $r = 1 + 2 \cos \theta$

75 $r = \sqrt{3} - 2 \operatorname{sen} \theta$

76 $r = 2\sqrt{3} - 4 \cos \theta$

77 $r = 2 - \cos \theta$

78 $r = 5 + 3 \operatorname{sen} \theta$

79 $r = 4 \csc \theta$

80 $r = -3 \sec \theta$

81 $r = 8 \cos 3\theta$

82 $r = 2 \operatorname{sen} 4\theta$

83 $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

84 $r = 8 \cos 5\theta$

85 $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (lemniscata)

86 $r^2 = -16 \operatorname{sen} 2\theta$

87 $r = 2^\theta, \theta \geq 0$ (espiral)

88 $r = e^{2\theta}, \theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

89 $r = 2\theta, \theta \geq 0$

90 $r\theta = 1, \theta > 0$ (espiral)

91 $r = 6 \operatorname{sen}^2 (\theta/2)$

92 $r = -4 \cos^2 (\theta/2)$

93 $r = 2 + 2 \sec \theta$ (concoide)

94 $r = 1 - \csc \theta$

95 Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos en un plano $r\theta$, use la ley de los cosenos para demostrar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

96 Demuestre que la gráfica de cada ecuación es una circunferencia, y encuentre su centro y radio.

a) $r = a \operatorname{sen} \theta, a \neq 0$

b) $r = b \cos \theta, b \neq 0$

c) $r = a \operatorname{sen} \theta + b, a \neq 0$ y $b \neq 0$

Ejer. 97–98: Consulte el ejercicio 85 de la sección 6.6. Suponga que una estación de radio tiene dos torres de transmisión ubicadas a lo largo de una recta norte-sur y que las torres están separadas por una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la señal de transmisión de la estación. Entonces la intensidad I de la señal en la dirección θ puede expresarse con la ecuación dada, donde I_0 es la máxima intensidad de la señal.

a) Grafique I usando coordenadas polares con $I_0 = 5$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) Determine las direcciones en las que la señal de radio tiene intensidad máxima y mínima.

97 $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \operatorname{sen} \theta)]$

98 $I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\pi \operatorname{sen} 2\theta)]$

Ejer. 99–100: Grafique la ecuación polar para los valores indicados de θ y use la gráfica para determinar simetrías.

99 $r = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \tan^2 \theta; \quad -\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$

100 $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Ejer. 101–102: Grafique las ecuaciones polares sobre el mismo plano de coordenadas y estime los puntos de intersección de las gráficas.

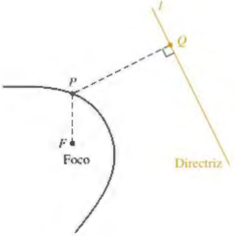
101 $r = 8 \cos 3\theta, \quad r = 4 - 2.5 \cos \theta$

102 $r = 2 \operatorname{sen}^2 \theta, \quad r = \frac{3}{4}(\theta + \cos^2 \theta)$

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

El siguiente teorema combina las definiciones de parábola, elipse e hipérbola en una descripción unificada de las secciones cónicas. La constante e en el enunciado del teorema es la **excentricidad** de la cónica. El punto F es el **foco** de la cónica y la recta l es una **directriz**. Las posibles posiciones de F y l están ilustradas en la figura 1.

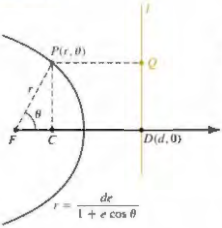
FIGURA 1



Teorema sobre cónicas

Sea F un punto fijo y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón $d(P, F)/d(P, Q)$ es una constante positiva e con $d(P, Q)$ la distancia de P a l, es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

FIGURA 2



PRUEBA Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la cónica resultante es una parábola con foco F y directriz l.

Suponga a continuación que $0 < e < 1$. Es conveniente introducir un sistema de coordenadas polares en el plano con F como el polo y l perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, con $d > 0$, como se ilustra en la figura 2. Si $P(r, \theta)$ es un punto en el plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, entonces P se encuentra a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como

$$d(P, F) = r \qquad \text{y} \qquad d(P, Q), = d - r\cos\theta,$$

se deduce que P satisface la condición del teorema si y sólo si lo siguiente es verdadero:

$$\begin{aligned} \frac{r}{d - r\cos\theta} &= e \\ r &= de - er\cos\theta \\ r(1 + e\cos\theta) &= de \\ r &= \frac{de}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

Las mismas ecuaciones se obtienen si $e = 1$, pero no hay punto (r, θ) sobre la gráfica si $1 + \cos\theta = 0$.

Una ecuación con x y y correspondiente a $r = de - er\cos\theta$ es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevar al cuadrado ambos lados y reacomodar términos lleva a

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2$$

Al completar el cuadrado y simplificar, obtenemos

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}$$

Por último, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ nos da una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $h = -de^2/(1 - e^2)$. En consecuencia, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(h, 0)$ sobre el eje x y con

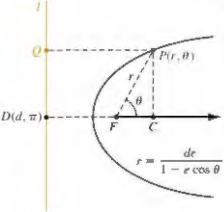
$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}$$

Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2},$$

obtenemos $c = de^2/(1 - e^2)$ y, por lo tanto, $|h| = c$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse. También se tiene que $e = c/a$. Una demostración similar se puede dar para el caso $e > 1$. ∎

FIGURA 3



También podemos demostrar que toda cónica que no sea degenerada puede describirse por medio del enunciado del teorema sobre cónicas. Esto nos da una formulación de secciones cónicas que es equivalente a la empleada previamente. Como el teorema incluye los tres tipos de cónicas, a veces se considera como definición de las secciones cónicas.

Si hubiéramos escogido el foco F a la *derecha* de la directriz, como se ve en la figura 3 (con $d > 0$), entonces hubiera resultado la ecuación $r = de/(1 - e\cos\theta)$. (Note el signo menos en lugar del signo más.) Ocurren otros cambios de signo si d es negativa.

Si hubiéramos tomado l *paralela* al eje polar a través uno de los puntos $(d, \pi/2)$ o $(d, 3\pi/2)$, como se ilustra en la figura 4, entonces las ecuaciones correspondientes habrían contenido sen θ en lugar de cos θ.

FIGURA 4

El siguiente teorema resume nuestra exposición.

Teorema sobre ecuaciones polares de cónicas

Una ecuación polar que tiene una de las cuatro formas

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{de}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

es una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar de una elipse**

Trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}.$$

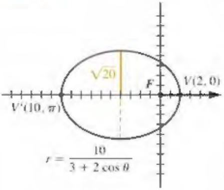
SOLUCIÓN Primero dividimos entre 3 el numerador y el denominador de la fracción para obtener el término constante 1 del denominador:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Esta ecuación tiene una de las formas del teorema precedente, con $e = \frac{2}{3}$. Entonces, la gráfica es una elipse con foco F en el polo y eje mayor a lo largo del eje polar. Encontramos los puntos extremos del eje mayor con $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Esto nos da los puntos $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. Por lo tanto,

$$2a = d(V', V) = 12, \text{ o } a = 6$$

FIGURA 5



El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$ del segmento $V'V$. Usando el hecho de que $e = c/a$, obtenemos

$$c = ae = 6\left(\tfrac{2}{3}\right) = 4.$$

Por lo tanto, $\quad b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20.$

Así, $b = \sqrt{20}$. La gráfica está trazada en la figura 5. Para referencia, hemos superpuesto un sistema de coordenadas xy sobre el sistema polar. ■

EJEMPLO 2 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar de una hipérbola**

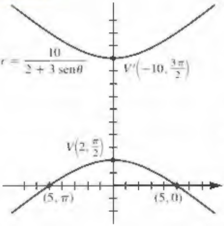
Trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{2 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma apropiada, dividimos entre 2 el numerador y el denominador de la fracción:

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

FIGURA 6



Así, $e = \frac{3}{2}$ y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una hipérbola con un foco en el polo. La expresión sen θ nos dice que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para encontrar los vértices, sea $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Esto nos da los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$. En consecuencia,

$$2a = d(V, V') = 8 \text{ o } a = 4$$

Los puntos $(5, 0)$ y $(5, \pi)$ sobre la gráfica se pueden usar para trazar la rama inferior de la hipérbola. La rama superior se obtiene por simetría, como se ve en la figura 6. Si deseamos más precisión o más información, calculamos

$$c = ae = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6$$

y $\quad b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

Las asíntotas se pueden construir entonces como de costumbre. ■

EJEMPLO 3 **Trazo de la gráfica de una ecuación polar de una parábola**

Trace la gráfica de la ecuación polar

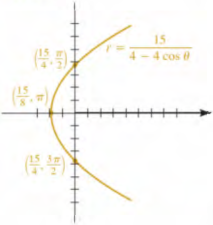
$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}$$

SOLUCIÓN Para obtener la forma apropiada, dividimos el numerador y el denominador entre 4:

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}$$

(continúa)

FIGURA 7



En consecuencia, $e = 1$ y, por el teorema sobre ecuaciones polares de cónicas, la gráfica es una parábola con foco en el polo. Podemos trazar la gráfica localizando los puntos que corresponden a los ángulos cuadrantales indicados en la siguiente tabla.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	no definido	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

Tenga en cuenta que no hay punto sobre la gráfica que corresponda a $\theta = 0$, porque el denominador $1 - \cos\theta$ es 0 para ese valor. Localizando los tres puntos y usando el hecho de que la gráfica es una parábola con foco en el polo, obtenemos el trazo de la figura 7. ■

Si deseamos sólo un trazo aproximado de una cónica, entonces se recomienda la técnica empleada en el ejemplo 3. Para usar este método, localizamos (si es posible) puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Estos puntos, junto con el tipo de cónica (obtenido del valor de la excentricidad e), producen fácilmente el trazo.

EJEMPLO 4 **Cómo expresar una ecuación polar de una cónica en términos de x y y**

Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
r(4 - 4\cos\theta) &= 15 && \text{multiplicamos por el mcd}\\
4r - 4r\cos\theta &= 15 && \text{distribuimos}\\
4\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) - 4x &= 15 && \text{sustituimos por } r \text{ y } r\cos\theta\\
4\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right) &= 15 + 4x && \text{aislamos el término radical}\\
16(x^2 + y^2) &= 225 + 120x + 16x^2 && \text{elevamos ambos lados al cuadrado}\\
16y^2 &= 225 + 120x && \text{simplificamos}
\end{aligned}$$

Podemos escribir la última ecuación como $x = \frac{16}{120}y^2 - \frac{225}{120}$ o, simplificada, $x = \frac{2}{15}y^2 - \frac{15}{8}$. Reconocemos esta ecuación como la de una parábola con vértice $V\left(-\frac{15}{8}, 0\right)$ y abertura a la derecha. Su gráfica sobre un sistema de coordenadas xy sería igual que la gráfica de la figura 7. ■

EJEMPLO 5 **Encontrar una ecuación polar de una cónica que satisface condiciones prescritas**

Encuentre una ecuación polar de la cónica con un foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y directriz $r = -3\sec\theta$.

SOLUCIÓN La ecuación $r = -3 \sec \theta$ de la directriz se puede escribir $r \cos \theta = -3$, que es equivalente a $x = -3$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Esto nos da la situación que se ilustra en la figura 3, con $d = 3$. En consecuencia, una ecuación polar tiene la forma

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}.$$

Ahora sustituimos $d = 3$ y $e = \frac{1}{2}$:

$$r = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}\cos \theta} \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$$

10.6 Ejercicios

Ejer. 1–12: Encuentre la excentricidad y clasifique la cónica. Trace la gráfica y marque los vértices.

1 $r = \dfrac{12}{6 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

2 $r = \dfrac{12}{6 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

3 $r = \dfrac{12}{2 - 6 \cos \theta}$

4 $r = \dfrac{12}{2 + 6 \cos \theta}$

5 $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

6 $r = \dfrac{3}{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

7 $r = \dfrac{4}{\cos \theta - 2}$

8 $r = \dfrac{4 \sec \theta}{2 \sec \theta - 1}$

9 $r = \dfrac{6 \csc \theta}{2 \csc \theta + 3}$

10 $r = \dfrac{8 \csc \theta}{2 \csc \theta - 5}$

11 $r = \dfrac{4 \csc \theta}{1 + \csc \theta}$

12 $r = \csc \theta (\csc \theta - \cot \theta)$

Ejer. 13–24: Encuentre ecuaciones con x y y para las ecuaciones polares de los ejercicios 1-12.

Ejer. 25–32: Encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el polo que tiene la excentricidad y la ecuación de directriz dadas.

25 $e = \frac{1}{3}$, $r = 2 \sec \theta$

26 $e = 1$, $r \cos \theta = 5$

27 $e = \frac{4}{3}$, $r \cos \theta = -3$

28 $e = 3$, $r = -4 \sec \theta$

29 $e = 1$, $r \operatorname{sen} \theta = -2$

30 $e = 4$, $r = -3 \csc \theta$

31 $e = \frac{2}{5}$, $r = 4 \csc \theta$

32 $e = \frac{3}{4}$, $r \operatorname{sen} \theta = 5$

Ejer. 33–34: Encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el polo y el vértice dados.

33 $V\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$

34 $V(5, 0)$

Ejer. 35–36: Una elipse tiene un foco en el polo con el centro C y vértice V dados. Encuentre a) la excentricidad y b) una ecuación polar para la elipse.

35 $C\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $V\left(1, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

36 $C(2, \pi)$, $V(1, 0)$

37 **Primera ley de Kepler** La primera ley de Kepler establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Para encontrar una ecuación de una órbita, coloque el polo O en el centro del Sol y el eje polar a lo largo del eje mayor de la elipse (vea la figura).

a) Demuestre que una ecuación de la órbita es

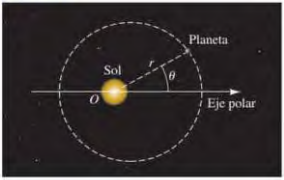
$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta},$$

donde e es la excentricidad y $2a$ la longitud del eje mayor.

b) El perihelio r_{per} y el afelio r_{af} se definen como las distancias mínima y máxima, respectivamente, de un planeta desde el Sol. Demuestre que

$$r_{per} = a(1 - e) \text{ y } r_{af} = a(1 + e)$$

EJERCICIO 37



38 Primera ley de Kepler Consulte el ejercicio 37. El planeta enano Plutón se desplaza en una órbita elíptica de excentricidad 0.249. Si la distancia del perihelio es de 29.62 UA, encuentre una ecuación polar para la órbita y calcule el afelio.

Ejer. 39–42: Se pueden usar ecuaciones polares de cónicas para describir el movimiento de cometas. Estas trayectorias se grafican usando la ecuación polar

$$r = \frac{r_{per}(1 + e)}{1 - e \cos \theta},$$

donde e es la excentricidad de la cónica y r_{per} es la distancia del perihelio medida en UA.

a) Para cada cometa, determine si su trayectoria es elíptica, parabólica o hiperbólica.

b) La órbita de Saturno tiene r_{per} = 9.006 y e = 0.056. Grafique el movimiento del cometa y la órbita de Saturno en la pantalla especificada.

39 Cometa Halley $r_{per} = 0.5871$, $e = 0.9673$,
$[-36, 36, 3]$ por $[-24, 24, 3]$

40 Cometa Encke $r_{per} = 0.3317$, $e = 0.8499$,
$[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

41 Cometa 1959 III $r_{per} = 1.251$, $e = 1.003$,
$[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

42 Cometa 1973.99 $r_{per} = 0.142$, $e = 1.000$,
$[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

43 Órbita de la Tierra Lo más que se acerca la Tierra al Sol es alrededor de 91,405,950 millas, y lo más que se aleja del mismo es aproximadamente 94,505,420 millas. Con respecto a las fórmulas del ejercicio 37, encuentre fórmulas para a y e en términos de r_{per} y r_{af}.

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE REPASO

Ejer. 1–16: Encuentre los vértices y focos de la cónica y trace su gráfica.

1 $y^2 = 64x$

2 $y = 8x^2 + 32x + 33$

3 $9y^2 = 144 - 16x^2$

4 $9y^2 = 144 + 16x^2$

5 $x^2 - y^2 - 4 = 0$

6 $25x^2 + 36y^2 = 1$

7 $25y = 100 - x^2$

8 $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

9 $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

10 $x = 2y^2 + 8y + 3$

11 $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

12 $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

13 $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

14 $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

15 $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

16 $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Ejer. 17–18: Encuentre la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que satisfaga las condiciones dadas.

17 Puntos de intersección con eje x: -10 y -4, con el eje y: 80

18 Puntos de intersección con eje x: -11 y 3, que pasa por $(2, 39)$.

Ejer. 19–28: Encuentre una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

19 Hipérbola con vértices $V(0, \pm 7)$ y puntos extremos de eje conjugado $(\pm 3, 0)$

20 Parábola con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$

21 Parábola con foco $F(0, -10)$ y directriz $y = 10$

22 Parábola, con vértice en el origen, simétrica con el eje x y que pase por el punto $(5, -1)$

23 Elipse con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$

24 Hipérbola, con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$

25 Hipérbola con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm 9x$

26 Elipse con focos $F(\pm 2, 0)$ y que pasa por el punto $(2, \sqrt{2})$

27 Elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$ y puntos extremos de eje menor $(\pm 5, 0)$

28 Elipse, con excentricidad $\frac{3}{4}$ y focos $F(\pm 12, 0)$

Ejer. 29–34: Determine la ecuación para la sección de la cónica.

29 Mitad derecha de $(x - 2)^2 = 4(y + 3)$

30 Mitad inferior de $(y + 3)^2 = \frac{1}{4}(x - 5)$

31 Mitad izquierda de $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

32 Mitad superior de $x^2 + 4y^2 = 16$

33 Rama derecha de $9x^2 - 4y^2 = 64$

34 Rama inferior de $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{100} = 1$

35 **a)** Determine A para que el punto $(2, -3)$ esté sobre la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

b) ¿La cónica es una elipse o una hipérbola?

36 Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenadas está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, exprese el área A del cuadrado en términos de a y b.

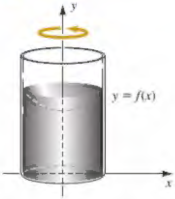
37 Encuentre la ecuación estándar de la circunferencia que tiene centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y pasa por el origen.

38 **Longitud focal y velocidad angular** Un recipiente cilíndrico, parcialmente lleno de mercurio, se hace girar alrededor de su eje de modo que la velocidad angular de cada sección transversal sea ω radianes/segundo. Según la física, la función f, cuya gráfica genera la superficie interior del mercurio (vea la figura), está dada por

$$f(x) = \frac{1}{64}\omega^2 x^2 + k,$$

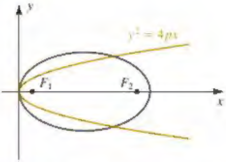
donde k es una constante. Determine la velocidad angular ω que resultará en una longitud focal de 2 pies.

EJERCICIO 38



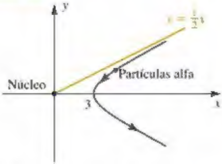
39 Una elipse tiene un vértice en el origen y focos $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$, como se ve en la figura. Si el foco en F_1 es fijo y (x, y) está sobre la elipse, demuestre que y^2 se aproxima a $4px$ cuando $c \to \infty$. (Así, cuando $c \to \infty$, la elipse toma la forma de una parábola.)

EJERCICIO 39



40 **Partículas alfa** En 1911, el físico Ernest Rutherford (1871-1937) descubrió que, si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, finalmente son rechazadas del núcleo a lo largo de trayectorias hiperbólicas. La figura ilustra la trayectoria de una partícula que arranca hacia el origen a lo largo de la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a estar a no más de tres unidades del núcleo. Encuentre una ecuación de la trayectoria.

EJERCICIO 40



Ejer. 41–45: Encuentre una ecuación con x y y cuya gráfica contiene los puntos en la curva C. Trace la gráfica de C e indique la orientación.

41 $x = 3 + 4t, \quad y = t - 1; \quad -2 \le t \le 2$

42 $x = \sqrt{-t}, \quad y = t^2 - 4; \quad t \le 0$

43 $x = \cos^2 t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 1; \quad 0 \le t \le 2\pi$

44 $x = \sqrt{t}, \quad y = 2^{-t}; \quad t \ge 0$

45 $x = \dfrac{1}{t} + 1, \quad y = \dfrac{2}{t} - t; \quad 0 < t \le 4$

46 Las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 están dadas paramétricamente para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas y explique sus semejanzas y diferencias.

C_1: $x = t, \quad y = \sqrt{16 - t^2}$
C_2: $x = -\sqrt{16 - t}, \quad y = -\sqrt{t}$
C_3: $x = 4\cos t, \quad y = 4\operatorname{sen} t$
C_4: $x = e^t, \quad y = -\sqrt{16 - e^{2t}}$

47 Consulte las ecuaciones en 1) del ejemplo 6 de la sección 10.4. Encuentre el alcance y máxima altitud para $s = 1024$, $\alpha = 30°$ y $h = 5120$.

48 Mencione dos puntos de coordenadas polares que representen el mismo punto que $(2, \pi/4)$.

49 Cambie $(5, 7\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

50 Cambie $(2\sqrt{2}, -2)$ a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

Ejer. 51–54: Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación con x y y.

51 $y^2 = 4x$

52 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

53 $2x - 3y = 8$

54 $x^2 + y^2 = 2xy$

Ejer. 55–60: Encuentre una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar.

55 $r^2 = \tan\theta$

56 $r = 2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta$

57 $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

58 $\theta = \sqrt{3}$

59 $r = 5\sec\theta + 3r\sec\theta$

60 $r^2\operatorname{sen}\theta = 6\csc\theta + r\cot\theta$

Ejer. 61–72: Trace la gráfica de la ecuación polar.

61 $r = -4\operatorname{sen}\theta$

62 $r = 8\sec\theta$

63 $r = 3\operatorname{sen} 5\theta$

64 $r = 6 - 3\cos\theta$

65 $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$

66 $r = 2 + 4\cos\theta$

67 $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$

68 $2r = \theta$

69 $r = \dfrac{8}{1 - 3\operatorname{sen}\theta}$

70 $r = 6 - r\cos\theta$

71 $r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\theta}$

72 $r = \dfrac{-6\csc\theta}{1 - 2\csc\theta}$

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 En una parábola, el segmento de recta que pasa por el foco, perpendicular al eje e intersecado por la parábola, recibe el nombre de *cuerda focal* o *lado recto*. La longitud de la cuerda focal se conoce como *ancho focal*. Encuentre una fórmula para el ancho focal w en términos de la longitud focal $|p|$.

2 En la gráfica de una hipérbola con centro en el origen O, trace una circunferencia con centro en el origen y radio $r = d(O, F)$, donde F denota un foco de la hipérbola. ¿Qué relación se observa?

3 Un punto $P(x, y)$ está sobre una elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

Si $b^2 = a^2 - c^2$, deduzca la ecuación general de una elipse; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4 Un punto $P(x, y)$ está sobre una hipérbola si y sólo si

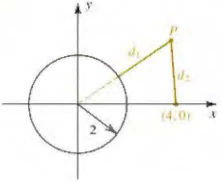
$$|d(P, F) + d(P, F')| = 2a$$

Si $c^2 = a^2 + b^2$, deduzca la ecuación general de una hipérbola; es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

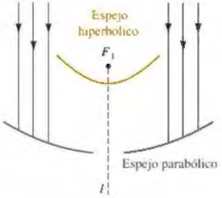
5 Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia de $(4, 0)$ que de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, como se ve en la figura. Demuestre que el conjunto de todos esos puntos forma una rama de una hipérbola y trace su gráfica.

EJERCICIO 5



6 **Diseño de un telescopio** Consulte el ejercicio 78 de la sección 10.3. Suponga que la rama superior de la hipérbola (mostrada) tiene ecuación $y = \frac{a}{b}\sqrt{x^2 + b^2}$ y una ecuación de la parábola es $y = dx^2$. Encuentre d en términos de a y b.

EJERCICIO 6



7 **Maximización del alcance de un proyectil** Al igual que en el ejemplo 6 de la sección 10.4, suponga que un proyectil se disparará a una velocidad de 1,024 pies/s desde una altura de 2,304 pies. Calcule el ángulo que maximice el alcance.

8 **Generalizaciones de la trayectoria de un proyectil** Si $h = 0$, las ecuaciones en 1) del ejemplo 6 de la sección 10.4 se convierten en

$$x(t) = (s \cos \alpha)t, \quad y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (s \operatorname{sen} \alpha)t; \quad t \geq 0.$$

Demuestre que cada uno de los enunciados es verdadero.

a) El proyectil cae al suelo cuando
$$t = \frac{2s \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

b) El alcance r del proyectil es
$$r = \frac{s^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

c) El ángulo que maximiza el alcance r es de 45°.

d) La trayectoria del proyectil en coordenadas rectangulares es
$$y = -\frac{g}{2s^2 \cos^2 \alpha}x^2 + (\tan \alpha)x.$$

e) El tiempo en el que se alcanza la máxima altura es
$$t = \frac{s \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

f) La máxima altura alcanzada es
$$y = \frac{s^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

9 **Investigación de una figura de Lissajous** Encuentre una ecuación con x y y para la curva del ejemplo 7 en la sección 10.4 dada por

$$x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

10 Trace las gráficas de las ecuaciones $r = f(\theta) = 2 + 4 \cos \theta$, $r = f(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$ para $\alpha = \pi/4$. Intente con tantos valores de α como sea necesario para generalizar resultados respecto a las gráficas de $r = f(\theta - \alpha)$ y $r = f(\theta + \alpha)$, donde $\alpha > 0$.

11 **Rosas generalizadas** Examine la gráfica de $r = \operatorname{sen} n\theta$ para valores impares y pares de n. Deduzca una expresión para el *ángulo de hoja* (el número de grados entre valores consecutivos de polo). ¿Qué otras generalizaciones se observan? ¿Cómo cambian las gráficas si sen se sustituye con cos?

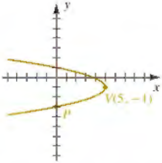
12 La figura 17 de la sección 10.5 muestra las circunferencias $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 4 \cos \theta$. Encuentre soluciones para (r, θ) de este sistema de ecuaciones. Ahora encuentre ecuaciones con x y y que tengan las mismas gráficas que las ecuaciones polares. Encuentre soluciones (x, y) con este sistema, conviértalas en soluciones (r, θ) y explique por qué su respuesta al primer sistema no deja ver la solución en el polo.

CAPÍTULO 10 EXAMEN

1 Trace la gráfica de la parábola $(x + 3)^2 = -6(y - 2)$. Señale sus vértices, focos y directriz.

2 Determine una ecuación para la parábola que se muestra en la figura.

EJERCICIO 2



3 Determine una ecuación para la parábola que tiene vértice $V(-2, 1)$ y el eje x es su directriz.

4 Determine la ecuación para la mitad inferior de la parábola $(y - 4)^2 = x + 2$.

5 Determine una ecuación para la parábola que tiene un eje horizontal y pasa por los puntos $P(4, 1)$, $Q(5, 2)$ y $R(8, -1)$.

6 El haz de luz de un reflector tiene la forma de un paraboloide con la fuente luminosa en el origen. Si el reflector tiene 40 pulgadas de ancho y 7 de profundidad, ¿dónde está localizado el foco?

7 Trace la gráfica de la elipse $\dfrac{(x - 1)^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Señale sus vértices, focos y puntos extremos de su eje menor.

8 Determine la ecuación para la elipse que tiene su centro en el origen, vértices $V(\pm 9, 0)$ y foco $F(\pm 3, 0)$.

9 Una elipse tiene vértices $V(\pm 7, 0)$ y eje menor con longitud 8. Determine su excentricidad.

10 Determine la ecuación para el conjunto de puntos en un plano xy tales que la suma de las distancias desde $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ es $k = 20$.

11 Determine la ecuación para la mitad izquierda de la elipse $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

12 Un arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 40 pies de ancho y la parte más alta del arco es de 12 pies por encima de la calzada horizontal. Aproxime la altura, con un lugar decimal, del arco a 8 pies desde el centro de la base.

13 Trace la gráfica de la hipérbola $9y^2 - 4x^2 = 36$. Señale sus vértices, foco y asíntotas.

14 Dado que una hipérbola tiene vértices $V(\pm 4, 0)$ y foco $F(\pm 9, 0)$, determine las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola.

15 Determine una ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, foco $F(\pm 7, 0)$ y eje conjugado de longitud 6.

16 Determine la ecuación para la rama izquierda de la hipérbola $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{49} = 1$.

17 Determine la ecuación con x y y cuya gráfica contiene los puntos de la curva de C, donde C tiene la parametrización $x = 2\cos t + 3$, $y = 5 \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$. Describa la gráfica de C, incluida su orientación.

18 Determine la ecuación con x y y cuya gráfica contiene los puntos de la curva de C, donde C tiene la parametrización $x = 9t^2 + 3$, $y = 3t + 5$; t en $\mathbb{R}$. Dibuje la gráfica de C, incluida su orientación.

19 Escriba una parametrización para la rama inferior de $y^2 - x^2 = 4$.

20 Describa la gráfica (y orientación para incrementar los valores de t) de una curva C que tiene la parametrización $x = 4 + 3 \operatorname{sen} t$, $y = -1 + 3\cos t$; $0 \leq t \leq \pi/2$.

21 Suponga que se lanza un proyectil a una velocidad de 544 pies/s a un ángulo de 30° respecto a la horizontal desde una altura de 960 pies. Determine el alcance del proyectil.

22 Cambie las coordenadas rectangulares $(2\sqrt{3}, -2)$ a coordenadas polares con $r < 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

23 Determine una ecuación polar que tenga la misma gráfica que $x^2 - y^2 = 7$.

24 Determine una ecuación con x y y que tenga la misma gráfica que $r - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$.

25 Trace la gráfica de $r = \sqrt{3} - 2\cos\theta$.

26 Trace la gráfica de $r = 5 \operatorname{sen} 2\theta$.

27 Determine la excentricidad de $r = \dfrac{8}{4 - 6\cos\theta}$. Clasifique la cónica, trace su gráfica y señale los vértices.

28 Determine una ecuación con x y y para $r = \dfrac{8}{4 - 6\cos\theta}$.

29 Determine la ecuación polar de la cónica con foco en el polo que tiene excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz $r = 4\sec\theta$.

Apéndices

I GRÁFICAS COMUNES Y SUS ECUACIONES

II RESUMEN DE TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

III GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS

IV VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES EN UNA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

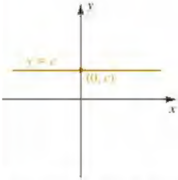
V RESPUESTAS DE EJERCICIOS SELECCIONADOS

VI FÓRMULAS E IDENTIDADES FUNDAMENTALES

APÉNDICE I

Gráficas comunes y sus ecuaciones

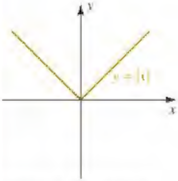
(Las gráficas cónicas aparecen al final del libro.)



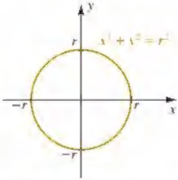
Recta horizontal; función constante

Recta vertical

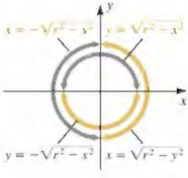
Función identidad



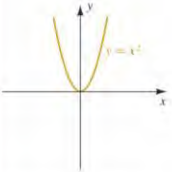
Función de valor absoluto



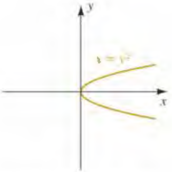
Circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r



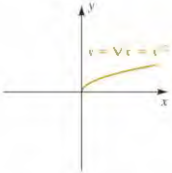
Semicircunferencias



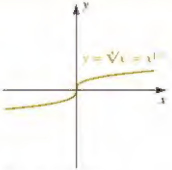
Parábola con eje vertical; función cuadrática



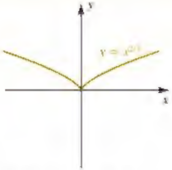
Parábola con eje horizontal



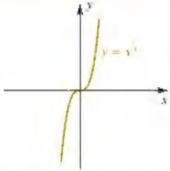
Función raíz cuadrada



Función raíz cúbica



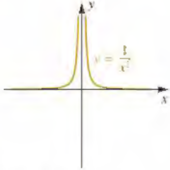
Gráfica con una cúspide en el origen



Función cúbica

Función entero máximo

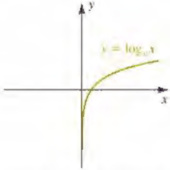
Función recíproca



Función racional

Función de crecimiento exponencial (incluye función exponencial natural)

Función de decaimiento exponencial



Función logarítmica (incluye funciones logarítmicas común y natural)

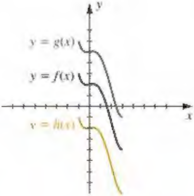
APÉNDICE II

Resumen de transformaciones de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ aparece en color negro en todas las figuras. El dominio de f es $[-1, 3]$ y su rango $[-4, 3]$.

$y = g(x) = f(x) + 3$

La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia arriba 3 unidades.
Dominio de g:$[-1, 3]$ Rango de g:$[-1, 6]$

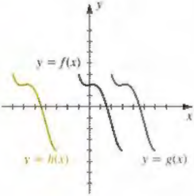


$y = h(x) = f(x) - 4$

La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo 4 unidades.
Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $[-8, -1]$

$y = g(x) = f(x - 3)$

La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la derecha 3 unidades.
Dominio de g: $[2, 6]$ Rango de g:$[-4,3]$

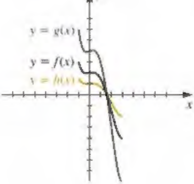


$y = h(x) = f(x + 6)$

La gráfica de f se desplaza horizontalmente a la izquierda 6 unidades.
Dominio de h: $[-7, -3]$ Rango de h: $[-4, 3]$

$y = g(x) = 2f(x)$ $[2 > 1]$

La gráfica de f se prolonga verticalmente un factor de 2.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-8, 6]$



$y = h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ $[\frac{1}{2} < 1]$

La gráfica de f se comprime horizontalmente un factor de 2.
Dominio de h: $[-1, 3]$ Rango de h: $[-2, \frac{3}{2}]$

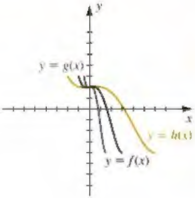
$$y = g(x) = f(2x) \;[2 > 1]$$

La gráfica de f se comprime horizontalmente un factor de 2.

Dominio de g: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ Rango de g: $[-4, 3]$

$$y = h(x) = f\tfrac{1}{2}(x) \;\left[\tfrac{1}{2} < 1\right]$$

La gráfica de f se expande horizontalmente un factor de 2.
Dominio de h: $[-2.6]$ Rango de h: $[-4, 3]$

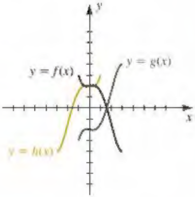


$$y = g(x) = f(x)$$

La gráfica de f se refleja pasando por el eje x.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[-3, 4]$

$$y = g(x) = -f(x)$$

La gráfica de f se refleja pasando por el eje y.
Dominio de h: $[-3, 1]$ Rango de h: $[-4,3]$

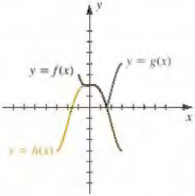


$$y = g(x) = |f(x)|$$

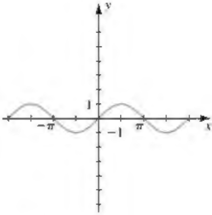
Refleja los puntos en f con valores y negativos pasando por el eje x.
Dominio de g: $[-1, 3]$ Rango de g: $[0, 4]$

$$y = h(x) = f(|x|)$$

Refleja los puntos en f con valores x positivos pasando por el eje y.
Dominio de h: $[-3, 3]$ Rango de h: $[-4, 3]$ como máximo. En este caso, el rango es un subconjunto de $[-4, 3]$.



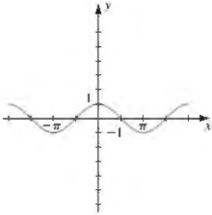
Gráficas de funciones trigonométricas y sus inversas



$y = \operatorname{sen} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

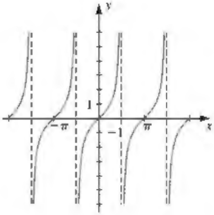
Rango: $[-1, 1]$



$y = \cos x$

Dominio: $\mathbb{R}$

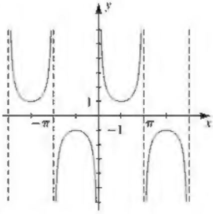
Rango: $[-1, 1]$



$y = \tan x$

Dominio: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

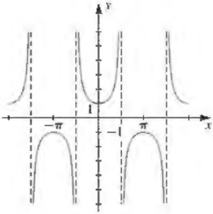
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \csc x$

Dominio: $x \neq \pi n$

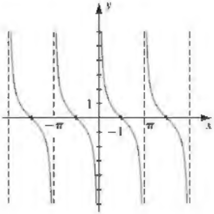
Rango: $(-\infty, -1 \cup [1, \infty)$



$y = \sec x$

Dominio: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

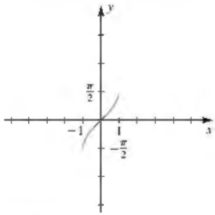
Rango: $(-\infty, -1 \cup [1, \infty)$



$y = \cot x$

Dominio: $x \neq \pi n$

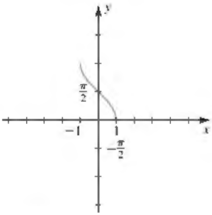
Rango: $\mathbb{R}$



$y = \operatorname{sen}^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

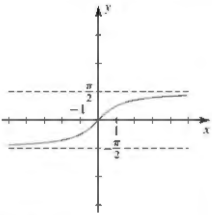
Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \cos^{-1} x$

Dominio: $[-1, 1]$

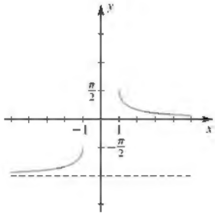
Rango: $[0, \pi]$



$y = \tan^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

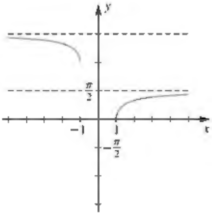
Rango: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$y = \csc^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1 \cup [1, \infty)$

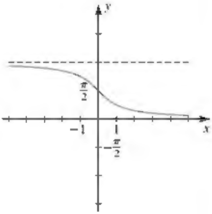
Rango: $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$



$y = \sec^{-1} x$

Dominio: $(-\infty, -1 \cup [1, \infty)$

Rango: $\left[0, \frac{\pi}{2} \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\right.$



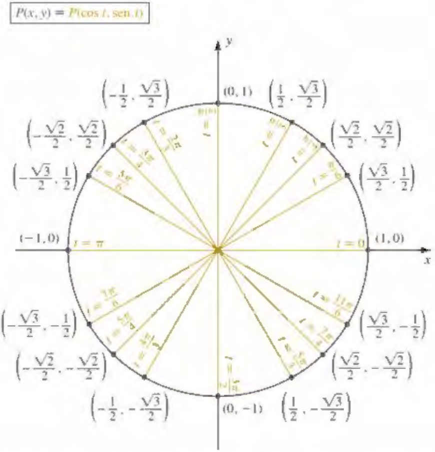
$y = \cot^{-1} x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $(0, \pi)$

APÉNDICE IV

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos especiales en una circunferencia unitaria



Para encontrar los valores del resto de las funciones trigonométricas, utilice las siguientes definiciones:

$$\tan t = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

$$\sec t = \frac{1}{x} \text{ (si } x \neq 0) \qquad \csc t = \frac{1}{y} \text{ (si } y \neq 0)$$

Apéndice V

Respuestas de ejercicios seleccionados

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1

1 **a)** Negativo **b)** Positivo **c)** Negativo **d)** Positivo

3 **a)** $<$ **b)** $>$ **c)** $=$

5 **a)** $>$ **b)** $>$ **c)** $>$

7 **a)** $x < 0$ **b)** $y \geq 0$ **c)** $q \leq \pi$ **d)** $2 < d < 4$ **e)** $t \geq 5$ **f)** $-z \leq 3$ **g)** $\frac{p}{q} \leq 7$ **h)** $\frac{1}{w} \geq 9$ **i)** $|x| > 7$

9 **a)** 7 **b)** 3 **c)** 11

11 **a)** -15 **b)** -3 **c)** 11

13 **a)** $4 - \pi$ **b)** $4 - \pi$ **c)** $1.5 - \sqrt{2}$

15 **a)** 4 **b)** 12 **c)** 12 **d)** 8

17 **a)** 10 **b)** 9 **c)** 9 **d)** 19

19 $|7 - x| < 2$ **21** $|-3 - x| \geq 8$

23 $|x - 4| \leq 3$ **25** $-x - 3$ **27** $2 - x$

29 $b - a$ **31** $x^2 + 4$ **33** $\neq$ **35** $=$

37 $\neq$ **39** $=$ **41** **a)** 8.1736 **b)** 14.1428

43 **a)** 6.557×10^{-1} **b)** 6.708×10^{1}

45 Construir un triángulo rectángulo con longitudes de lado $\sqrt{2}$ y 1. La hipotenusa medirá $\sqrt{3}$. Después construya un triángulo rectángulo con lados de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$. La hipotenusa medirá $\sqrt{5}$.

47 El rectángulo grande tiene un área de $a(b + c)$. La suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños es $ab + ac$.

49 **a)** 4.27×10^{5} **b)** 9.3×10^{-8} **c)** 8.1×10^{8}

51 **a)** 830,000 **b)** 0.000 000 000 002 9 **c)** 564,000,000

53 1.7×10^{-24} **55** 5.87×10^{12}

57 1.678×10^{-24}g **59** 4.1472×10^{6} cuadros

61 **a)** 201.6 lb **b)** 32.256 ton

EJERCICIOS 1.2

1 $\frac{16}{81}$ **3** $\frac{9}{8}$ **5** $\frac{-47}{3}$ **7** $\frac{243}{1}$ **9** $\frac{1}{25}$

11 $8x^{9}$ **13** $\frac{6}{x}$ **15** $-2a^{14}$ **17** $\frac{9}{2}$

19 $\frac{12u^{11}}{v^2}$ **21** $\frac{4}{xy}$ **23** $\frac{9y^6}{x^8}$ **25** $\frac{81}{64}y^{6}$

27 $\frac{s^6}{4r^8}$ **29** $\frac{20y}{x^3}$ **31** $9x^{10}y^{14}$ **33** $-10a^2$

35 $24x^{3/2}$ **37** $\frac{1}{9a^4}$ **39** $\frac{8}{x^{1/2}}$ **41** $4x^2y^4$

43 $\frac{4}{x^3y^2}$ **45** 1 **47** $(x^4 + y)^{1/4}$ **49** $(a + b)^{2/3}$

51 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ **53** **a)** $4x\sqrt{x}$ **b)** $8x\sqrt{x}$

55 **a)** $8 - \sqrt[3]{y}$ **b)** $\sqrt[3]{8 - y}$ **57** 9

59 $-2\sqrt[3]{2}$ **61** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **63** $\frac{3y^3}{x^2}$ **65** $\frac{2a^2}{b}$

67 $\frac{1}{2y^2}\sqrt{6xy}$ **69** $\frac{xy}{3}\sqrt[3]{6y}$ **71** $\frac{x}{3}\sqrt[4]{15x^2y^3}$

73 $\frac{1}{2}\sqrt[4]{20x^4y^2}$ **75** $\frac{5x^5}{y^2}$ **77** $\frac{2x}{y^2}\sqrt[3]{x^2y^4}$

79 $-3tv^2$ **81** $|x^3|y^2$ **83** $x^2|y - 3|^3$

85 $\neq$; $(a^r)^2 = a^{2r} \neq a^{(r^2)}$

87 $\neq$; $(ab)^{xy} = a^{xy}b^{xy} \neq a^x b^y$

89 $=$; $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/n} = \frac{1^{1/n}}{c^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$

91 **a)** 1.5518 **b)** 13.3905

93 **a)** 2.0351 **b)** 4.0717 **95** \$232,825.78

97 2.82 m **99** El elevador de 120 kg.

101

Estatura	Peso	Estatura	Peso
64	137	72	168
65	141	73	172
66	145	74	176
67	148	75	180
68	152	76	184
69	156	77	188
70	160	78	192
71	164	79	196

EJERCICIOS 1.3

1 $6u^2 - 13u - 12$ **3** $4y^2 - 3x$ **5** $4x^2 - 49y^2$

7 $9x^2 + 12xy + 4y^2$ **9** $x - y$

11 $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ **13** $(8x + 7)(x - 3)$

15 Irreductible **17** $(6x - 5)^2$ **19** $x^2(x + 2)(x - 2)$

21 $(2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$

23 $(7x + y^3)(49x^2 - 7xy^3 + y^6)$

25 $3(x + 3)(x - 3)(x + 1)$

27 $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

29 $(x + 2 + 3y)(x + 2 - 3y)$

31 $\frac{y + 5}{y^2 + 5y + 25}$ **33** $\frac{x}{x - 1}$ **35** $\frac{12s - 7}{(3s + 1)^2}$

37 $\frac{5x^2 + 2}{x^4}$ **39** $\frac{4(2t + 5)}{t + 2}$ **41** $\frac{2(2x + 3)}{3x - 4}$

43 $\dfrac{2x-1}{x}$ **45** $\dfrac{11u^2+18u+5}{u(3u+1)}$ **47** $-\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

49 $a+b$ **51** $x+y$ **53** $\dfrac{rs}{r^2-s^2}$ **55** $2x+h-3$

57 $-\dfrac{5}{(x-1)(a-1)}$ **59** $-\dfrac{3x^2+3xh+h^2}{x^3(x+h)^3}$

61 $\dfrac{t+10\sqrt{t}+25}{t-25}$ **63** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$

65 $\dfrac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$ **67** $\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}$

69 $3x^{4/3}-x^{1/3}+7x^{-2/3}$ **71** $x^{-1}+4x^{-3}+4x^{-5}$

73 $\dfrac{1+x^5}{x^3}$ **75** $\dfrac{1-x^2}{x^{1/2}}$ **77** $(3x+2)^3(36x^2-37x+6)$

79 $\dfrac{(2x+1)^2(8x^2+x-24)}{(x^2-4)^{1/2}}$ **81** $\dfrac{(3x+1)^5(39x-89)}{(2x-5)^{1/2}}$

83 $\dfrac{27x^2-24x+2}{(6x+1)^4}$ **85** $\dfrac{4x(1-x^2)}{(x^2+2)^4}$

87 $\dfrac{x^2+12}{(x^2+4)^{4/3}}$ **89** $\dfrac{6(3-2x)}{(4x^2+9)^{3/2}}$

91

x	Y_1	Y_2
1	−0.6923	−0.6923
2	−26.12	−26.12
3	8.0392	8.0392
4	5.8794	5.8794
5	5.3268	5.3268

Puede ser igual

93 El área de I es $(x-y)x$, el área de II es $(x-y)y$ y

$$A = x^2 - y^2 = (x-y)x + (x-y)y$$
$$= (x-y)(x+y).$$

95 **a)** 1525.7; 1454.7

b) A medida que las personas envejecen, requieren menos calorías. Los coeficientes de w y h son positivos porque las personas corpulentas requieren más calorías.

EJERCICIOS 1.4

1 1 **3** $-\dfrac{24}{29}$ **5** $-\dfrac{3}{61}$

7 Todos son números reales, con excepción de ± 2 **9** Sin solución

11 $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}$ **13** $-\dfrac{2}{3}$ **15** $\pm\dfrac{3}{5}$ **17** $3 \pm \sqrt{17}$

19 $-3 \pm \sqrt{6}$ **21** $(x+6)(x-5)$

23 $(2x-3)(6x+1)$ **25** $-\dfrac{2}{3}, 2$ **27** Sin solución

29 $\pm\dfrac{2}{3}, 2$ **31** 0, 25 **33** $-\dfrac{57}{5}$ **35** 9

37 $\pm\dfrac{1}{10}\sqrt{70 \pm 10\sqrt{19}}$ **39** $\pm 2, \pm 3$ **41** $\dfrac{8}{27}, -8$

43 **a)** 8 **b)** ± 8 **c)** Sin solución real **d)** 625 **e)** Sin solución real

45 **a)** $x = \dfrac{y \pm \sqrt{2y^2-1}}{2}$

b) $y = -2x \pm \sqrt{8x^2+1}$

47 **a)** 0; −4,500,000 **b)** 2.13×10^{-7}

49 $K = \dfrac{D-L}{E+T}$ **51** $Q = \dfrac{1}{N-1}$ **53** $r = \dfrac{A-P}{Pt}$

55 $q = \dfrac{p(1-S)}{S(1-p)}$ **57** $q = \dfrac{fp}{p-f}$ **59** $v = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$

61 $r = \dfrac{-\pi h + \sqrt{\pi^2 h^2 + 2\pi A}}{2\pi}$ **63** $C = 2\sqrt{R^2 - d^2}$

65 120 meses (o 10 años)

67 **a)** Después de 64 segundos **b)** 96 m y 128 m, respectivamente.

69 1237.5 pies **71** 7 pies

73 **a)** 40.96 °F **b)** 6909 pies **75** 37 °F

77 **a)** 206.25 pies **b)** 40 millas/hora

79 **a)** $d = 100\sqrt{20t^2+4t+1}$ **b)** 3:30 P.M.

81 \$175 **83** **a)** 1 cm **b)** $\dfrac{\pi}{8}$ cm^3

85 $h \approx 97\%$ de L

87 Existen dos rutas posibles que corresponden a $x \approx 0.6743$ millas y $x \approx 2.2887$ millas

89 (4) **91** **a)** (2) **b)** 860 min

EJERCICIOS 1.5

1 $2+4i$ **3** $12-5i$ **5** $41-11i$

7 $29+22i$ **9** $21-20i$ **11** $-24-7i$

13 25 **15** **a)** $-i$ **b)** 1 **17** **a)** i **b)** -1

19 $\dfrac{3}{10}-\dfrac{3}{5}i$ **21** $\dfrac{1}{2}-i$ **23** $\dfrac{34}{53}+\dfrac{40}{53}i$

25 $\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{7}i$ **27** $-142-65i$ **29** $-2-14i$

31 $-\dfrac{19}{13}+\dfrac{30}{13}i$ **33** $\dfrac{21}{2}i$ **35** $x=4, y=-1$

37 $x=3, y=-4$ **39** $3 \pm 2i$ **41** $-6 \pm i$

43 $\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{55}\,i$ **45** $-\dfrac{1}{8} \pm \dfrac{1}{8}\sqrt{47}\,i$

47 $-4, 2 \pm 2\sqrt{3}\,i$ **49** $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{25}{26} \pm \dfrac{15}{26}\sqrt{3}\,i$

51 $\pm 5, \pm 5i$ **53** $\pm 2i, \pm\dfrac{3}{2}i$

55 $0, -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{7}\,i$

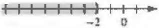
57
$$\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$$
$$= \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$$
$$= (a-bi)+(c-di) = \bar{z}+\bar{w}$$

59
$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)}$$
$$= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$
$$= (ac-bd)-(ad+bc)i$$
$$= ac - adi - bd - bci$$
$$= a(c-di) - bi(c-di)$$
$$= (a-bi)\cdot(c-di) = \bar{z}\cdot\bar{w}$$

61 Si $\bar{z} = z$, entonces $a - bi = a + bi$ y por ello $-bi = bi$, o $2bi = 0$. Por lo tanto, $b = 0$ y $z = a$ es real. Por el contrario, si z es real, entonces $b = 0$, y por ello, $\bar{z} = \overline{a+0i} = a - 0i = a + 0i = z$.

EJERCICIOS 1.6

1 $(-\infty, -2)$



3 $[-2, 5)$

5 $-5 < x \le 4$ 7 $(12, \infty)$ 9 $[12, 22)$

11 $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$ 13 $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

15 Todos son números reales, con excepción de 1.

17 $(-3.01, -2.99)$ 19 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup [4, \infty)$

21 $(-\infty, \infty)$ 23 $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ 25 $(-4, 4)$

27 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 29 $(-2, 3)$ 31 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup [1, \infty)$

33 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 35 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$

37 $(-2, 0) \cup (0, 1]$ 39 $(-2, 2] \cup (5, \infty)$

41 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ 43 $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$

45 $(-\infty, -1) \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$ 47 $\left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2, 5]$

49 $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

51 a) $-8, -2$ b) $-8 < x < -2$
c) $(-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$

53 $|w - 141| \le 2$ 55 $4 \le p < 6$ 57 $6\frac{2}{3}$ años

59 $\frac{1}{2}$ s 61 $0 \le v < 30$

63 a) 5 pies 8 pulgadas b) $65.52 \le h \le 66.48$

65 $[-2, -1) \cup (1, 2) \cup (3, 3.5]$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

1 $-x - 3$ 2 $-(x - 2)(x - 3)$ 3 $\frac{b^3}{a^2}$

4 $-\frac{p^8}{2q}$ 5 $\frac{x^3z}{y^{10}}$ 6 $\frac{16x^2}{z^4y^6}$ 7 $\frac{b^6}{a^2}$ 8 $\frac{y - x^2}{x^2y}$

9 $3xyz\sqrt[3]{x^2z}$ 10 $2ab\sqrt{ac}$ 11 $\frac{1 - \sqrt{t}}{t}$ 12 c^2d^3

13 $\frac{2x}{y^3}$ 14 $\frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{9 - x}$ 15 $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

16 $-x^2 + 20x - 3$ 17 $12a^2 + ab - 35b^2$

18 $16r^4 - 24r^2s + 9s^2$ 19 $169a^4 - 25b^2$

20 $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

21 $81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4$

22 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

23 $10w(6x + 5)$ 24 $(4a^2 + 3b^2)^2$

25 $8(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

26 $u^3v(v - u)(v^2 + uv + u^2)$

27 $(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$ 28 $x^2(x - 6)^2$

29 $(x - 7 + 7y)(x - 7 - 7y)$

30 $(x - 2)(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)$

31 $\frac{81}{(4x - 5)(10x + 1)}$ 32 $\frac{5x^2 - 6x - 20}{x(x + 2)^2}$

33 $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ 34 $\frac{ab}{a + b}$ 35 $\frac{1}{x + 3}$

36 $\frac{2(5x^2 + x + 4)}{(6x + 1)^{2/3}(4 - x^2)^2}$ 37 $-\frac{5}{6}$ 38 $-5, \frac{3}{2}$

39 $-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}$ 40 $\pm\frac{5}{2}, \pm\sqrt{3}$

41 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{11}, -\frac{2}{5}$ 42 $-\frac{3}{2}, 2$ 43 $-4, 3$

44 $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ 45 2 46 5 47 $\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$

48 $\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ 49 $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$ 50 $\left(-7, \frac{7}{2}\right)$

51 $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ 52 $\left(-\infty, \frac{11}{3}\right] \cup [7, \infty)$

53 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ 54 $[-3, 6]$

55 $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$ 56 $(-3, -1) \cup (-1, 2]$

57 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9)$ 58 $(-\infty, -5) \cup [-2, 5)$

59 $(1, \infty)$ 60 $(0, 1) \cup (2, 3)$

61 $C = \frac{2}{P + N - 1}$ 62 $D = \frac{CB^3}{(A + E)^3}$

63 $R = \sqrt[4]{\frac{8FVL}{\pi P}}$

64 $r = \frac{-\pi hR + \sqrt{12\pi hV - 3\pi^2h^2R^2}}{2\pi h}$

65 $-39 + 80i$ 66 $\frac{9}{85} + \frac{2}{85}i$ 67 $-\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$

68 $-2 - 6i$ 69 11.055% 70 60.3 g

71 6 onzas de verduras y 4 onzas de carne

72 80 galones de solución al 20% y 40 galones de solución al 50%

73 260 kg 74 1 hora 40 minutos

75 a) $d = \sqrt{2900t^2 - 200t + 4}$
b) $t = \frac{5 + 2\sqrt{19{,}603}}{145} \approx 1.97$, o aproximadamente 11:58 A.M.

76 Existen dos arreglos: 40 pies $\times$ 25 pies y 50 pies $\times$ 20 pies

77 a) $2\sqrt{2}$ pies b) 2 pies 78 $4 \le p \le 8$

79 Más de \$100,000 80 $T > 279.57$ K

81 De 36 a 38 árboles por acre 82 \$990 a \$1040 83 (3)

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 0.1%

2 Puede ser $a = 0$ o $b = 0$

3 Sumar y restar $10x$; $x + 5 \pm \sqrt{10x}$ son los factores.

4 La primera expresión se puede evaluar en $x = 1$.

5 Se acercan a la razón de los coeficientes principales a medida que x es mayor.

7 Si x es la edad y y la estatura, muestra que el valor final es $100x + y$.

8 $V_{\text{fuera}} = \frac{1}{3}V_{\text{dentro}}$ **9** No **10** $\frac{-b}{2a}$

11 **a)** $\frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$ **b)** Sí

c) a y b no pueden ser 0 las dos.

13 $a > 0, D \le 0$: $x \in \mathbb{R}$;
$a > 0, D > 0$: $(-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$;
$a < 0, D < 0$: $\{\ \}$;
$a < 0, D = 0$: $x = \frac{-b}{2a}$;
$a < 0, D > 0$: $[x_1, x_2]$

14 **a)** 11,006 pies

b) $h = \frac{1}{6}(2497D - 497G - 64{,}000)$

16 $1/10^{1000}$; $cx - 2/c$ no debe ser negativo

17 **a)** 109–45 **b)** 1.88

18 1 galón $\approx$ 0.13368 pies^3; 586.85 pies^2

EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

1 Positivo **2** $\frac{x}{y} \le 5$ **3** $x^2 + 3$ **4** 492 segundos

5 $\frac{x^2yz}{9}$ **6** $\sqrt[12]{x}$ **7** $\frac{xy}{\sqrt[3]{3xy^2}}$

8 $x^3 - x^2 - x + 10$ **9** $32x^6$ **10** $(2x-3)(x+5)$

11 $3x(x+3)(x-3)$ **12** $(4x+1)(16x^2-4x+1)$

13 $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}\right)$

14 $(2x-3y)(x+2)$ **15** $(x^{31}-1)(x^{62}+x^{31}+1)$

16 $\frac{3x+11}{x}$ **17** $x - y$ **18** $2x + h + 7$

19 $6h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)$ **20** $(x+2)^2(x-3)^3(7x-1)$

21 $\frac{2x\left(-3-x^2\right)}{\left(x^2-3\right)^3}$ **22** $x = -\frac{22}{5}$ **23** $B = \frac{5A}{2A-3}$

24 \$2000 **25** $x = \frac{-\sqrt{15y}}{3}$ **26** $x = y - z \pm 3$

27 Después de 9 y 11 segundos **28** $a = 0, b = -1$

29 $4, -2 \pm 2\sqrt{3}i$ **30** $x = \pm\frac{1}{B}\sqrt{A^2 - B^2r^2}$

31 $0, -2, 5, \pm 8$ **32** 7.7% **33** 440 meses

34 $\left[-\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right]$ **35** $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, \infty)$

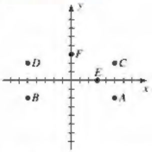
36 $\{-1\} \cup (4, 7) \cup (7, \infty)$ **37** $(-1, 3)$

38 $5 \le \text{ancho} \le 9$

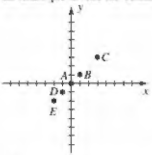
CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

1



3 La línea que divide los cuadrantes I y III



5 $A(3, 3), B(-3, 3), C(-3, -3), D(3, -3), E(1, 0), F(0, 3)$

7 **a)** La línea paralela al eje y que interseca al eje x en $(-2, 0)$

b) La línea paralela al eje x que interseca al eje y en 0, 5)

c) Todos los puntos a la derecha y sobre el eje y

d) Todos los puntos en los cuadrantes I y III

e) Todos los puntos por debajo del eje x

f) Todos los puntos sobre el eje y

9 **a)** $\sqrt{29}$ **b)** $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

11 **a)** $\sqrt{41}$ **b)** $\left(-\frac{9}{2}, -2\right)$

13 **a)** 4 **b)** $(5, -3)$

15 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$; área = 20

17 $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$ y
$d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$

19 $(13, -28)$ **21** $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{58}$

23 $5x + 2y = 3$

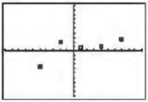
25 $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$; un círculo de 5 de radio con centro en el origen

27 $\left(0, 3 + \sqrt{11}\right), \left(0, 3 - \sqrt{11}\right)$ **29** $(-2, -1)$

31 $a < \frac{2}{5}$ o $a > 4$

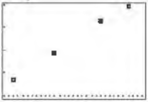
33 Sea M el punto medio de la hipotenusa. Muestra que
$d(A, M) = d(B, M) = d(O, M) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

35



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

37 a)



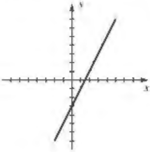
$[1982, 2012]$ por
$[80 \times 10^3, 120 \times 10^3, 10 \times 10^3]$

b) El número aumenta.

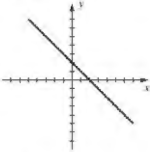
EJERCICIOS 2.2

Ejercicios 1-20: La(s) intersección(es) de x se lista seguida de la(s) intersección(es) de y.

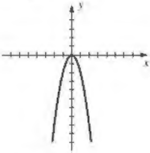
1 $1.5;\ -3$



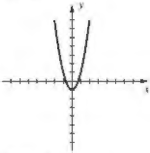
3 $2;\ 2$



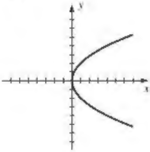
5 $0;\ 0$



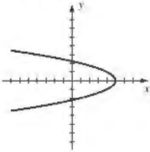
7 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -1$



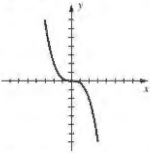
9 $0;\ 0$



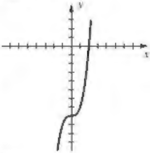
11 $5;\ \pm\sqrt{5}$



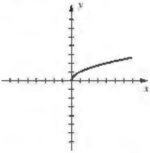
13 $0;\ 0$



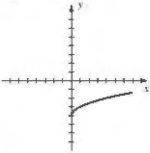
15 $2;\ -8$



17 $0;\ 0$



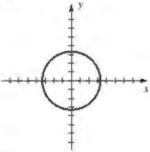
19 $16;\ -4$



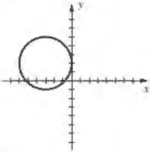
21 **a)** $5, 7$ **b)** $9, 11$ **c)** 13

23 **a)** 2 **b)** 1 **c)** 4 **d)** ∞ **e)** $-\infty$

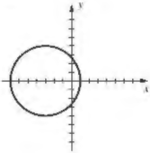
25



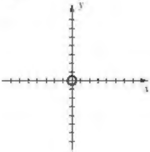
27

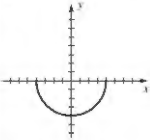


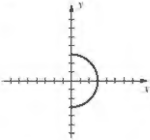
29



31



33


35


37 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 39 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=5$

41 $(x+4)^2+(y-6)^2=74$

43 $(x+3)^2+(y-6)^2=9$

45 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

47 $(x-1)^2+(y-2)^2=34$ 49 $C(2,-3);\ r=7$

51 $C(0,-2); r=\sqrt{11}$ 53 $C(3,-1); r=\frac{1}{2}\sqrt{70}$

55 $C(-2,1);\ r=0$ (un punto)

57 No es un círculo, debido a que r^2 no puede ser igual a -4

59 $y=\sqrt{25-x^2};\ y=-\sqrt{25-x^2};\ x=\sqrt{25-y^2};$
$x=-\sqrt{25-y^2}$

61 $y=-1+\sqrt{49-(x-2)^2};$
$y=-1-\sqrt{49-(x-2)^2};$
$x=2+\sqrt{49-(y+1)^2};\ x=2-\sqrt{49-(y+1)^2}$

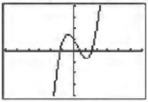
63 $(x+3)^2+(y-2)^2=4^2$ 65 $y=-\sqrt{4^2-x^2}$

67 **a)** Dentro **b)** Sobre **c)** Fuera

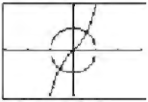
69 **a)** 2 **b)** $3\pm\sqrt{5}$

71 $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ 73 $\sqrt{5}$

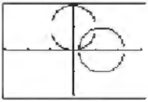
75 $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$ 77 $(-1,0)\cup(0,1)$ 79 (2)

81

$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

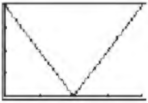
$-1.2, 0.5, 1.6$

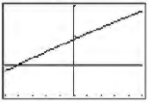
83

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$(0.6, 0.8), (-0.6, -0.8)$

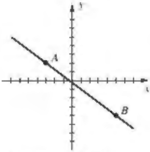
85

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

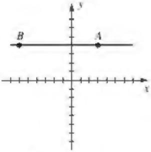
$(0.999, 0.968),$
$(0.251, 0.032)$

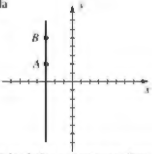
87

$[0, 4]$ por $[0, 4]$

89 **a)** 1126 pies/s **b)** $-42\,°C$

$[-50, 50, 10]$ por $[900, 1200, 100]$

EJERCICIOS 2.3

1 $m=-\frac{3}{4}$


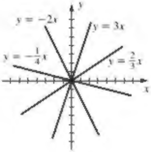
3 $m=0$


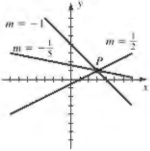
5 m no está definida


7 Las pendientes de los lados opuestos son iguales.

9 Las pendientes de los lados opuestos son iguales, y las pendientes de los dos lados adyacentes son recíprocos negativos.

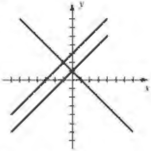
11 $(-12, 0)$

13


15


17 $y + 3 = \pm\frac{5}{4}(x - 2)$

19



21 a) $x = 3$ **b)** $y = -1$ **23** $4x + y = 17$

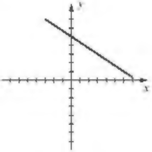
25 $x + 3y = 7$ **27** $11x + 7y = 9$

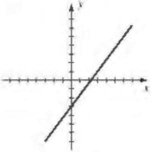
29 $5x - 2y = 17$ **31** $5x + 2y = 29$

33 $y = \frac{3}{4}x - 3$ **35** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

37 $5x - 7y = -15$ **39** $y = -x$

41 $m = -\frac{2}{3}, b = 5$ **43** $m = \frac{4}{3}, b = -3$





45 a) $y = 3$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x$ **c)** $y = -\frac{3}{2}x + 1$

d) $y + 2 = -(x - 3)$

47 $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$ **49** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$

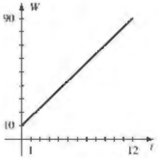
51 Aproximadamente 23 semanas

53 a) 25.2 toneladas **b)** Tanto como 3.4 toneladas

55 a) $y = \frac{5}{14}x$ **b)** 58

57 a) $W = \frac{20}{3}t + 10$ **b)** 50 libras **c)** 9 años

d)



59 $H = -\frac{8}{3}T + \frac{7520}{3}$

61 a) $T = 0.032t + 13.5$ **b)** 16.86°C

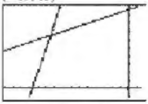
63 a) $E = 0.55R + 3600$ **b)** $P = 0.45R - 3600$

c) $8000

65 a) Sí, la creada en $x = 3$ **b)** No

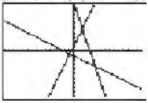
67 34.95 millas/hora **69** $a = 0.321$; $b = -0.9425$

71 $(-19, 13)$



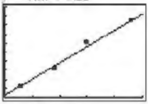
$[-30, 3, 2]$por$[-2, 20, 2]$

73 $(-0.8, -0.6)$, $(4.8, -3.4)$, $(2, 5)$; triángulo rectángulo isósceles



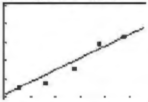
$[-15, 15]$por$[-10, 10]$

75 $y = 1.8x + 0.22$



$[0, 5]$por$[0, 10]$

77 b) $D = 0.033Y - 47.545$



$[1900, 2010, 20]$por$[15, 20]$

c) 17.96 m

d) La distancia récord se ha incrementado aproximadamente 0.033 metro/año.

EJERCICIOS 2.4

1 $-6, -4, -24$ **3** $10, 20, 36$

5 a) $5a - 2$ **b)** $-5a - 2$ **c)** $-5a + 2$

d) $5a + 5h - 2$ **e)** $5a + 5h - 4$ **f)** 5

7 a) $-a^2 + 3$ **b)** $-a^2 + 3$ **c)** $a^2 - 3$

d) $-a^2 - 2ah - h^2 + 3$ **e)** $-a^2 - h^2 + 6$

f) $-2a - h$

9 a) $a^2 - a + 3$ **b)** $a^2 + a + 3$ **c)** $-a^2 + a - 3$

d) $a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 3$

e) $a^2 + h^2 - a - h + 6$ **f)** $2a + h - 1$

11 a) $\frac{4}{a^2}$ **b)** $\frac{1}{4a^2}$ **c)** $4a$ **d)** $2a$

13 a) $\frac{2a}{a^2 + 1}$ **b)** $\frac{a^2 + 1}{2a}$ **c)** $\frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$

d) $\frac{\sqrt{2a^3 + 2a}}{a^2 + 1}$

15 La gráfica corresponde a una función porque pasa la prueba de la línea vertical.

17 $D = [-4, 1] \cup [2, 4)$; $R = [-3, 3)$

19 **a)** $[-3, 4]$ **b)** $[-2, 2]$ **c)** 0 **d)** $-1, \frac{1}{2}, 2$

e) $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 4]$

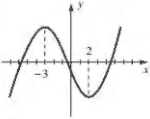
21 $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ **23** $[-4, 4]$

25 Todos los números son reales, con excepción de $-3, 0$ y 3

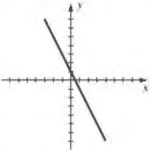
27 $\left[\frac{5}{2}, 4\right) \cup (4, \infty)$ **29** $(2, \infty)$ **31** $[-3, 3]$

33 **a)** $D = [-5, -3) \cup (-1, 1] \cup (2, 4]$;
$R = \{-3\} \cup [-1, 4]$
b) Ascendente en $[-4, -3) \cup [3, 4]$;
descendentes en $[-5, -4] \cup (2, 3]$;
constante en $(-1, 1]$

35

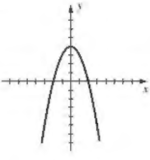


37 **a)**



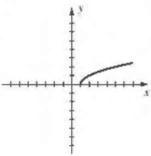
b) $D = (-\infty, \infty)$,
$R = (-\infty, \infty)$
c) Descendentes en $(-\infty, \infty)$

39 **a)**



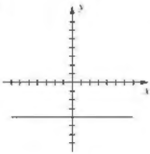
b) $D = (-\infty, \infty)$,
$R = (-\infty, 4]$
c) Ascendente en $(-\infty, 0]$,
descendente en $[0, \infty)$

41 **a)**



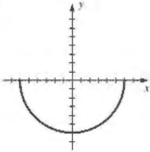
b) $D = [1, \infty)$,
$R = [0, \infty)$
c) Descendente en $[1, \infty)$

43 **a)**



b) $D = (-\infty, \infty)$,
$R = \{-4\}$
c) Constante en $(-\infty, \infty)$

45 **a)**



b) $D = [-6, 6]$,
$R = [-6, 0]$
c) Descendente en $[-6, 0]$,
ascendente en $[0, 6]$

47 $h - 2$

49 $2x + h$ **51** $\dfrac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{a-3}}$

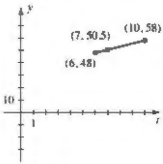
53 $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ **55** Sí **57** No **59** Sí

61 No **63** No **65** $V(x) = 4x(15 - x)(10 - x)$

67 **a)** $y(x) = \dfrac{500}{x}$ **b)** $C(x) = 300x + \dfrac{100{,}000}{x} - 600$

69 $S(h) = 6h - 50$

71 **a)** $y(t) = 2.5t + 33$
b)



Incremento anual en estatura

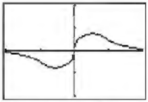
c) 58 pulgadas

73 $d(t) = 2\sqrt{t^2 + 2500}$

75 **a)** $y(h) = \sqrt{h^2 + 2hr}$ **b)** 1280.6 millas

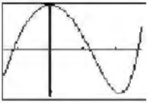
77 $d(x) = \sqrt{90{,}400 + x^2}$

79 **a)**



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

b) $[-0.75, 0.75]$
c) Descendente en $[-2, -0.55]$ y en $[0.55, 2]$,
ascendente en $[-0.55, 0.55]$

81 **a)** 

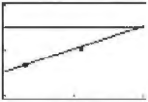
$[-0.7, 1.4, 0.5]$por$[-1.1, 1]$

b) $[-1.03, 1]$
c) Ascendente en $[-0.7, 0]$ y en $[1.06, 1.4]$, descendente en $[0, 1.06]$

83 **a)** 8 **b)** ± 8 **c)** Sin soluciones reales **d)** 625 **e)** Sin soluciones reales

85 **a)** 5985 **b)** A lo sumo 95

87 **a)** $f(x) = \dfrac{3485}{7}x - \dfrac{6{,}827{,}508}{7}$



$[1990, 2010, 10]$por$[10{,}000, 30{,}000, 10{,}000]$

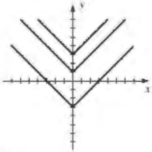
b) El incremento promedio anual en el precio pagado por un automóvil nuevo
c) 2009

EJERCICIOS 2.5

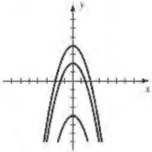
1 $f(-2) = 7, g(-2) = 6$

3 Impar **5** Par **7** Ninguno **9** Par **11** Impar

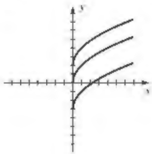
13



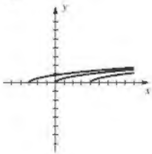
15



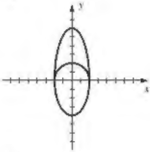
17



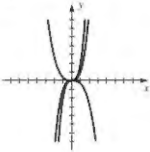
19



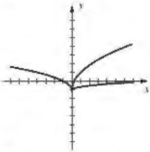
21



23



25



27 $(-2, 4)$ **29** $(7, -3)$ **31** $(8, 2)$

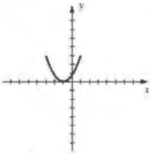
33 La gráfica de f se desplaza 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

35 La gráfica de f se refleja sobre el eje y y se desplaza 4 unidades hacia abajo.

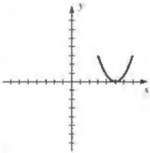
37 La gráfica de f se contrae de forma vertical un factor de 2 y se refleja sobre el eje x.

39 La gráfica de f se expande de forma horizontal un factor de 3, se expende de forma vertical un factor de 2 y se refleja sobre el eje x.

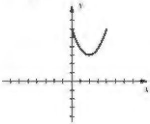
41 **a)**



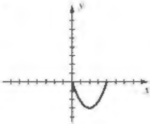
b)



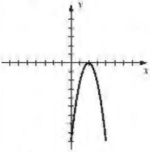
c)



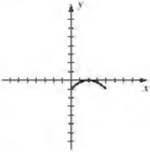
d)



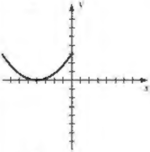
e)



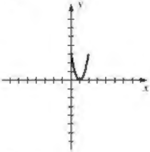
f)



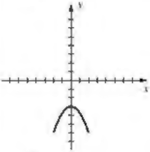
g)



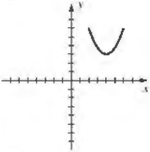
h)



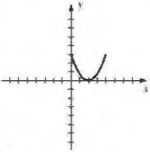
i)



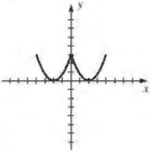
j)



k)



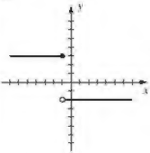
l)



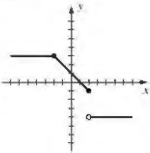
43 **a)** $y = f(x + 9) + 1$ **b)** $y = -f(x)$
c) $y = -f(x + 7) - 1$

45 **a)** $y = f(x + 4)$ **b)** $y = f(x) + 1$ **c)** $y = f(-x)$

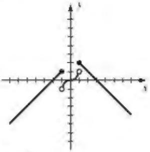
47



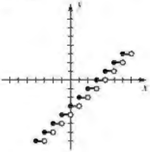
49



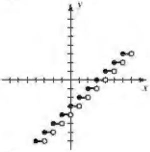
51



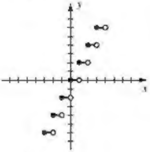
53 **a)**



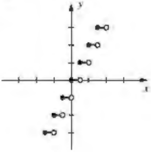
b)



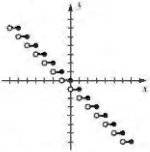
c)



d)



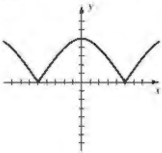
e)



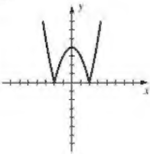
55 **a)** 0 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 4 **e)** $-\infty$

57 Si $x > 0$, dos puntos diferentes sobre la gráfica tendrán coordenada x sobre x.

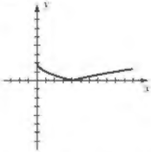
59



61



63



65 **a)** $D = [-2, 6]$, $R = [-16, 8]$
b) $D = [-4, 12]$, $R = [-4, 8]$
c) $D = [1, 9]$, $R = [-3, 9]$
d) $D = [-4, 4]$, $R = [-7, 5]$
e) $D = [-6, 2]$, $R = [-4, 8]$
f) $D = [-2, 6]$, $R = [-8, 4]$
g) $D = [-6, 6]$, $R = [-4, 8]$
h) $D = [-2, 6]$, $R = [0, 8]$

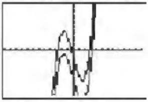
67 $T(x) = \begin{cases} 0.15x & \text{si } 0 \leq x \leq 20{,}000 \\ 0.20x - 1000 & \text{si } x > 20{,}000 \end{cases}$

69 $R(x) = \begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \leq x \leq 10{,}000 \\ 1.50x - 3000 & \text{si} 10{,}000 < x \leq 15{,}000 \\ 1.80x - 7500 & \text{si } x > 15{,}000 \end{cases}$

71 $(-3.12, 22)$

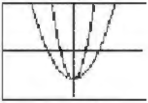
73 $(-\infty, -3) \cup (-3, 1.87) \cup (4.13, \infty)$

75



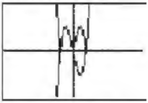
$[-12, 12]$por$[-8, 8]$

77



$[-12, 12]$por$[-8, 8]$

79



$[-12, 12]$por$[-8, 8]$

81 **a)** \$300, \$360

b) $C_1(x) = \begin{cases} 180 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ 180 + 0.40(x - 200) & \text{si } x > 200 \end{cases}$

$C_2(x) = 235 + 0.25x$ para $x \geq 0$

c)

x	Y_1	Y_2
100	180	260
200	180	285
300	220	310
400	260	335
500	300	360
600	340	385
700	380	410
800	420	435
900	460	460
1000	500	485
1100	540	510
1200	580	535

d) I si $x \in [0, 900)$, II si $x > 900$

EJERCICIOS 2.6

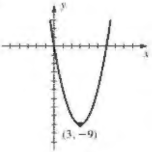
1 $y = a(x + 3)^2 + 1$ **3** $y = ax^2 - 2$

5 $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$ **7** $f(x) = 2(x - 4)^2 + 3$

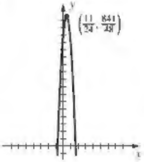
9 $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$

11 $f(x) = -\dfrac{3}{4}(x - 6)^2 - 7$

13 **a)** 0, 6
b) Mín: $f(3) = -9$
c)



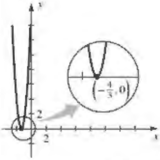
15 **a)** $-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}$
b) Máx: $f\left(\dfrac{11}{24}\right) = \dfrac{841}{48}$
c)



17 **a)** $-\frac{4}{3}$

b) Mín: $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$

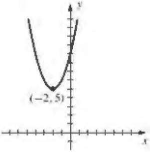
c)



19 **a)** Ninguno

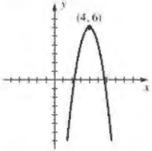
b) Mín: $f(-2) = 5$

c)



21 **a)** $4 \pm \sqrt{3} \approx 5.73, 2.27$ **b)** Máx: $f(4) = 6$

c)



23 $y = \frac{1}{8}(x - 4)^2 - 1$ **25** $y = -\frac{5}{16}(x + 2)^2 + 5$

27 $y = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)$

29 $y = 3(x - 0)^2 - 2$ **31** $y = -\frac{1}{9}(x - 3)^2 + 1$

33 $y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 4$ **35** 6.125 **37** 24.72 km

39 10.5 libras **41** **a)** 424 pies **b)** 100 pies **43** 20 y 20

45 **a)** $y(x) = 250 - \frac{3}{4}x$ **b)** $A(x) = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right)$

c) $166\frac{2}{3}$ pies por 125 pies

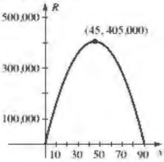
47 $y = -\frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 3$

49 **a)** $y = \frac{1}{500}x^2 + 10$ **b)** 282 pies **51** 2 pies

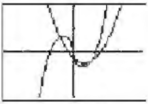
53 500 pares

55 **a)** $R(x) = 200x(90 - x)$

b) \$45



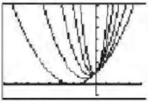
57



(−0.57, 0.64), (0.02, −0.27), (0.81, −0.41)

[−3, 3]por[−2, 2]

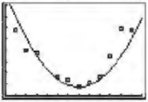
59



Los valores más pequeños de a generan una parábola más ancha, mientras que los valores más grandes generan una parábola más estrecha.

[−8, 4]por[−1, 7]

61 **b)** $f(x) = 0.17(x - 7)^2 + 0.77$

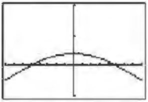


[0, 13]por[0, 8]

c) 2.3 pulgadas

63 **a)** $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{25}x + 80 & \text{si } -800 \le x < -500 \\ -\frac{1}{6250}x^2 + 40 & \text{si } -500 \le x \le 500 \\ -\frac{4}{25}x + 80 & \text{si } 500 < x \le 800 \end{cases}$

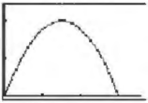
b)



[−800, 800, 100]por[−100, 200, 100]

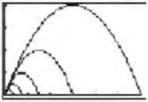
65 **a)** $f(x) = -\frac{4}{225}x^2 + \frac{8}{3}x$

b)



$[0, 180, 50]$ por $[0, 120, 50]$

c)



$[0, 600, 50]$ por $[0, 400, 50]$

El valor de k afecta tanto la altura como la distancia, desplazado un factor de $\frac{1}{k}$.

EJERCICIOS 2.7

1 **a)** 15 **b)** -3 **c)** 54 **d)** $\frac{2}{3}$

3 **a)** $3x^2 + 1$; $3 - x^2$; $2x^4 + 3x^2 - 2$; $\frac{x^2 + 2}{2x^2 - 1}$

b) $\mathbb{R}$ **c)** Todos son números reales, con excepción de $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 **a)** $2\sqrt{x + 5}$; 0; $x + 5$; 1 **(b)** $[-5, \infty)$ **(c)** $(-5, \infty)$

7 **a)** $\frac{3x^2 + 6x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{x^2 + 14x}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2x^2}{(x - 4)(x + 5)}$; $\frac{2(x + 5)}{x - 4}$

b) Todos son números reales, con excepción de -5 y 4

c) Todos son números reales, con excepción de -5, 0 y 4

9 **a)** $-2x^2 - 1$ **b)** $-4x^2 + 4x - 1$ **c)** $4x - 3$ **d)** $-x^4$

11 **a)** $6x + 3$ **b)** $6x - 11$ **c)** -9 **d)** 7

13 **a)** $75x^2 + 4$ **b)** $15x^2 + 20$ **c)** 304 **d)** 155

15 **a)** $8x^2 - 2x - 5$ **b)** $4x^2 + 6x - 9$ **c)** 31 **d)** 45

17 **a)** $8x^3 - 20x$ **b)** $128x^3 - 20x$ **c)** -24 **d)** 3396

19 **a)** 7 **b)** -7 **c)** 7 **d)** -7

21 **a)** $x + 2 - 3\sqrt{x + 2}$; $[-2, \infty)$

b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

23 **a)** $3x - 4$; $[0, \infty)$

b) $\sqrt{3x^2 - 12}$; $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

25 **a)** $\sqrt{\sqrt{x + 5} - 2}$; $[-1, \infty)$

b) $\sqrt{\sqrt{x - 2} + 5}$; $[2, \infty)$

27 **a)** $\sqrt{3 - \sqrt{x^2 - 16}}$; $[-5, -4] \cup [4, 5]$

b) $\sqrt{-x - 13}$; $(-\infty, -13]$

29 **a)** x; $\mathbb{R}$ **b)** x; $\mathbb{R}$

31 **a)** $\frac{1}{x^6}$; todos los números diferentes de cero son reales

b) $\frac{1}{x^6}$; todos los números diferentes de cero son reales

33 **a)** $\frac{1}{5 - x}$; todos son números reales, con excepción de 4 y 5

b) $\frac{-2x + 5}{-3x + 7}$; todos son números reales, con excepción de 2 y $\frac{7}{3}$

35 $-3 \pm \sqrt{2}$

37 **a)** 5 **b)** 6 **c)** 6 **d)** 5 **e)** No es posible

39 $20\sqrt{x^2 + 1}$ **41** Impar **43** 40.16

45 $A(t) = 25\pi t^2$ **47** $r(t) = 9\sqrt[3]{t}$

49 $h(t) = 5\sqrt{t^2 + 8t}$

51 $d(t) = \sqrt{90{,}400 + (500 + 150t)^2}$

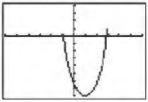
Ejercicios 53-60: Las respuestas no son únicas.

53 $u = x^2 + 5x$, $y = u^{1/3}$ **55** $u = x - 3$, $y = u^{-4}$

57 $u = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = u^5$

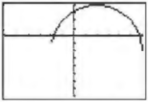
59 $u = \sqrt{x + 4}$, $y = \frac{u - 2}{u + 2}$ **61** 5×10^{-11}

63 **a)** $Y_1 = x$, gráfica $Y_3 = -2Y_2$



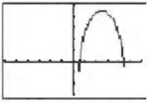
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

b) $Y_1 = 0.5x$, gráfica Y_2



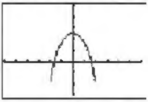
$[-12, 12, 2]$ por $[-16, 8, 2]$

c) $Y_1 = x - 3$, gráfica $Y_3 = Y_2 + 1$



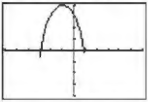
$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

d) $Y_1 = x + 2$, gráfica $Y_3 = Y_2 - 3$



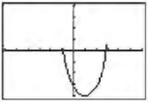
$[-12, 12, 2]$ por $[-6, 10, 2]$

e) $Y_1 = -x$, gráfica Y_2



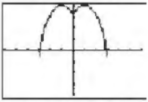
$[-12, 12, 2]$por$[-8, 8, 2]$

f) $Y_1 = x$, gráfica $Y_2 = -Y_2$



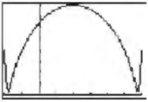
$[-12, 12, 2]$por$[-8, 8, 2]$

g) $Y_1 = $ abs x, gráfica Y_2



$[-12, 12, 2]$por$[-8, 8, 2]$

h) $Y_1 = x$, gráfica $Y_2 = $ abs Y_2



$[-2, 6]$por$[0, 8]$

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

1 Los puntos en los cuadrantes *II* y *IV*

2 $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$; área $= 10$

3 **a)** $\sqrt{265}$ **b)** $\left(-\frac{13}{2}, 1\right)$ **c)** $(-11, -23)$

4 $(0, 3), (0, 13)$ **5** $-2 < a < 1$

6 $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 162$

7 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 169$

8 $x = -2 - \sqrt{7 - y^2}$ **9** $-\frac{13}{17}$

10 La pendiente de AD y BC es $\frac{2}{3}$.

11 **a)** $18x + 6y = 7$ **b)** $2x - 6y = 3$

12 $y = -\frac{8}{3}x + 5$ **13** $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 81$

14 $x + y = -3$ **15** $4x - y = 19$

16 $2x - 3y = 5$ **17** $C(0, 6)$; $r = \sqrt{5}$

18 $C(-3, 2)$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{11}$

19 **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c)** 0 **d)** $-\frac{x}{\sqrt{3 - x}}$

e) $-\frac{x}{\sqrt{x + 3}}$ **f)** $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$ **g)** $\frac{x^2}{x + 3}$

20 Positivo **21** Negativo

22 **a)** $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$; $[0, \infty)$

b) Todos son números reales, con excepción de -4; $(0, \infty)$

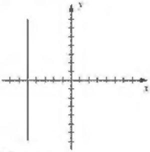
23 $-2a - h + 1$ **24** $-\frac{1}{(a + h + 4)(a + 4)}$

25 $f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

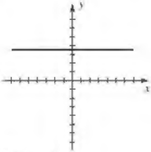
26 **a)** Impar **b)** Ninguno **c)** Par

Ejercicios 27-40. Se lista(n) la(s) intersección(es) de x seguida(s) de la(s) intersección(es) de y.

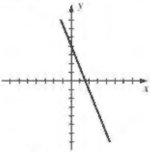
27 -5; ninguno



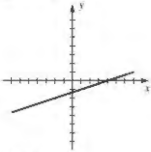
28 Ninguno; 3.5



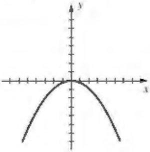
29 1.6; 4



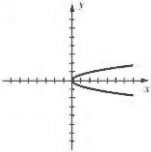
30 4; $-\frac{4}{3}$



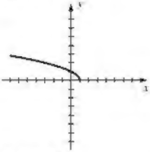
31 0; 0



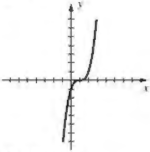
32 0; 0



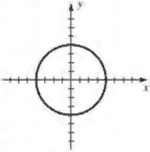
33 1; 1



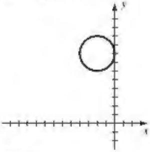
34 1; -1



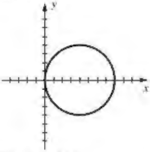
35 ± 4; ± 4



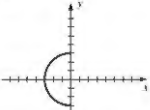
36 Ninguno; 8



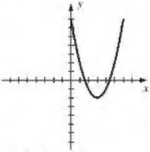
37 0, 8; 0



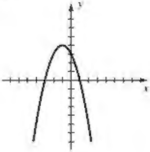
38 -3; ± 3



39 $3 \pm \sqrt{2}$; 7



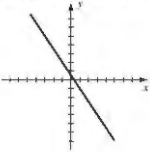
40 $-3, 1$; 3



41 $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

42 La gráfica de $y = -f(x - 2)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha 2 unidades y reflejada sobre el eje x.

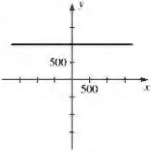
43 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = \mathbb{R}$

c) Descendente en $(-\infty, \infty)$

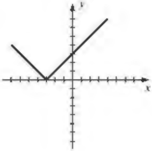
44 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{1000\}$

c) Constante en $(-\infty, \infty)$

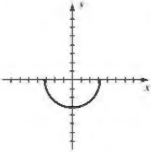
45 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$

c) Descendente en $(-\infty, -3]$, ascendente en $[-3, \infty)$

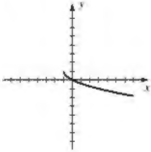
46 **a)**



b) $D = \left(-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right)$; $R = \left(-\sqrt{10}, 0\right)$

c) Descendente en $\left[-\sqrt{10}, 0\right]$, ascendente en $\left[0, \sqrt{10}\right]$

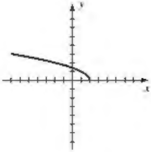
47 **a)**



b) $D = [-1, \infty)$; $R = (-\infty, 1]$

c) Descendente en $[-1, \infty)$

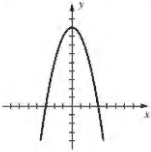
48 **a)**



b) $D = (-\infty, 2]$; $R = [0, \infty)$

c) Descendente en $(-\infty, 2]$

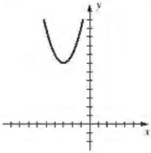
49 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = (-\infty, 9]$

c) Ascendente en $(-\infty, 0]$, descendente en $[0, \infty)$

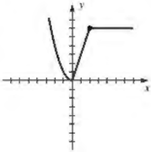
50 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = [7, \infty)$

c) Descendente en $(-\infty, -3]$. Ascendente en $[-3, \infty)$

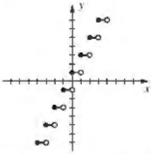
51 **a)**



b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$

c) Descendente en $(-\infty, 0]$. Ascendente en $[0, 2]$, constante en $[2, \infty)$

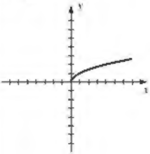
52 **a)**



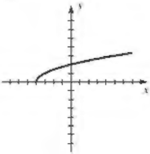
b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

c) Constante en $[n, n + 1)$, donde n es cualquier entero

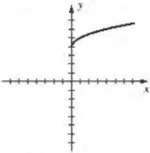
53 **a)**



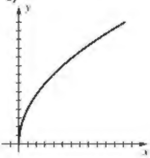
b)



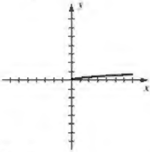
c)



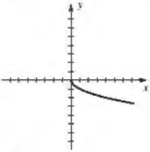
d)



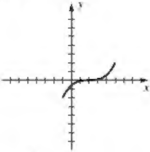
e)



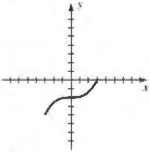
f)



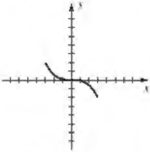
54 **a)**



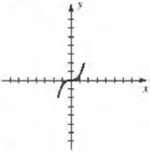
b)



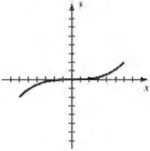
c)



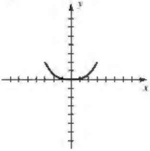
d)



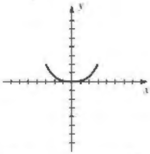
e)



f)



g)



55 $2x - 5y = 10$ **56** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

57 $y = \frac{3}{2}(x - 2)^2 - 4$ **58** $y = -|x - 2| - 1$

59 Min: $f(4) = -2$ **60** Max: $f(-3) = 6$

61 Max: $f(-4) = 20$ **62** Min: $f(4) = -108$

63 $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$ **64** $y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2 - 2$

65 **a)** $[0, 3]$ **b)** $(0, 3]$ **66** **a)** -3 **b)** $\sqrt{11}$

67 **a)** $18x^2 + 9x - 1$ **b)** $6x^2 - 15x + 5$

68 **a)** $\sqrt{\dfrac{3 + 2x^2}{x^2}}$ **b)** $\dfrac{1}{3x + 2}$

69 **a)** $\sqrt{28 - x}$; $[3, 28]$

b) $\sqrt{\sqrt{25 - x^2} - 3}$; $[-4, 4]$

70 **a)** $\dfrac{1}{x + 3}$; todos los números son reales, con excepción de -3 y 0

b) $\dfrac{6x + 4}{x}$; todos los números son reales, con excepción de $-\frac{2}{3}$ y 0

71 $u = x^2 - 5x$, $y = \sqrt[3]{u}$

72 Entre 36.1 pies y 60.1 pies

73 **a)** 253.42 pies **b)** 2028

74 **a)** $V = 6000t + 179{,}000$ **(b)** $2\frac{1}{3}$

75 **a)** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **b)** 1.8 °F

76 **a)** $C_1(x) = \frac{3}{20}x$ **b)** $C_2(x) = \frac{3}{22}x + 120$ **c)** 8800

77 **a)** $y(x) = \frac{3}{2}x$ **b)** $C(x) = 180x$

78 $d(t) = \sqrt{10^2 + (20 + 22t)^2}$

79 **a)** $y(x) = -\frac{4}{5}x + 20$ **b)** $V(x) = 4x\left(-\frac{4}{5}x + 20\right)$

80 $C(r) = \dfrac{3\pi(r^3 + 16)}{10r}$

81 **a)** $V = 10t$

b) $V = 200h^2$ para $0 \le h \le 6$;
$V = 7200 + 3200(h - 6)$ para $6 < h \le 9$

c) $h = \sqrt{\dfrac{t}{20}}$ para $0 \le t \le 720$; $h = 6 + \dfrac{t - 720}{320}$ para $720 < t \le 1680$

82 **a)** $r = \frac{1}{2}x$ **b)** $y = \frac{5}{4\pi} - \frac{1}{48}x^3$

83 **a)** $y(h) = \dfrac{bh}{a - b}$ **b)** $V(h) = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

c) $\dfrac{200}{7\pi} \approx 9.1$ pies

84 $B(x) = \begin{cases} 0.00361x & \text{si } 0 \le x \le 5000 \\ 0.00417x - 2.8 & \text{si } x > 5000 \end{cases}$

85 $y = -\dfrac{1}{4.475^2}(x - 4.475)^2 + 1$

86 **a)** $y = 12 - x$ **b)** $A = x(12 - x)$

87 $\frac{18}{13}$ horas después de la 1:00 P.M., o alrededor de las 2:23 P.M.

88 El radio del semicírculo es $1/8\pi$ milla. La longitud del rectángulo es 1/8 milla.

89 **a)** 1 segundo **b)** 4 pies

c) Sobre la Luna, 6 segundos y 24 pies

90 **a)** $(87.5, 17.5)$ **b)** 30.625 unidades

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

2 **(a)** $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ **(b)** $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$

(c) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ **(d)** $g(x) = -\frac{1}{2}x$

4 $2ax + ah + b$

5 m_{PQ}; la pendiente de la línea tangente a P

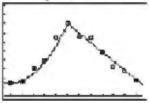
6 $R(x_3, y_3) = \left(\left(1 - \frac{m}{n}\right)x_1 + \frac{m}{n}x_2, \left(1 - \frac{m}{n}\right)y_1 + \frac{m}{n}y_2\right)$

7 $h = -ad^2$ **8** $f(x) = 40 - 20[\![-x/15]\!]$

9 $x = \dfrac{0.4996 + \sqrt{(-0.4996)^2 - 4(0.0833)(3.5491 - D)}}{2(0.0833)}$

10 **b)** $f(x) = \begin{cases} 0.132(x - 1)^2 + 0.7 & \text{si } 1 \le x \le 6 \\ -0.517x + 7.102 & \text{si } 6 < x \le 12 \end{cases}$

c)



[0.5, 12.5, 0.5] por [0, 5]

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

1 $x = 37, y = -16$ **2** $a < 0$ o $a > 6$

3 $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 41$

4 intersección de y: 10; intersección de x: 8

5 $y = -\frac{4}{5}x$ **6** $y = -\frac{7}{2}x + 14$

7 $T(x) = 0.88x + 9.9$ **8** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0]$

9 $2a + h + 5$; $2a + h - 7$

10 $S(V) = V + 8\sqrt{V/2}$, o $V + 4\sqrt{2V}$ **11** $(6, 3)$

12 $C(x) = \begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \le x \le 1000 \\ 1.80x - 600 & \text{si } x > 1000 \end{cases}$

13 $y = a(x + 2)^2 + 1$; $a > 0$ **14** -27

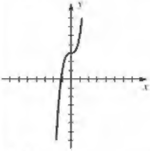
15 $-\frac{81}{8}$ **16** 250; 100 **17** $[3, \infty)$

18 $C(y(t)) = 25t^2 - 10t + 10$; $9000

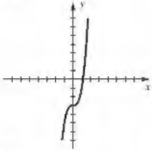
CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1

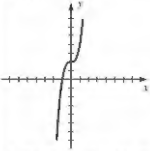
1 **a)**



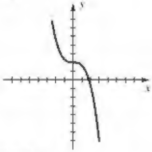
b)



3 **a)**



b)



5 $f(3) = -2 < 0$, $f(4) = 10 > 0$

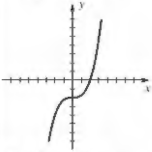
7 $f(2) = 5 > 0$, $f(3) = -5 < 0$

9 $f(-2) = -33 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$

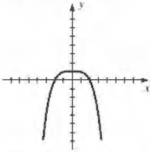
11 **a)** C **b)** D **c)** B **d)** A

13 **a)** A medida que $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. A medida que $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$.
b) A medida que $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$. A medida que $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$.
c) A medida que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$.
d) A medida que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to -\infty$.

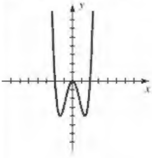
15 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < 2$



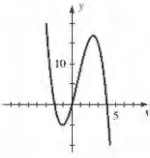
17 $f(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f(x) < 0$ si $|x| > 2$



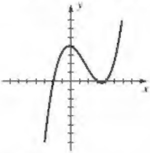
19 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $0 < |x| < 2$



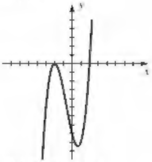
21 $f(x) > 0$ si $x < -2$ o $0 < x < 4$, $f(x) < 0$ si $-2 < x < 0$ o $x > 4$



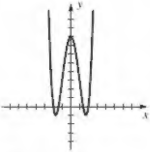
23 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 3$ o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $3 < x < 4$



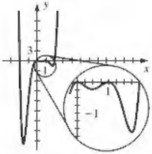
25 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $|x| < 2$



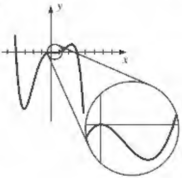
27 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$ o $|x| < \sqrt{2}$, $f(x) < 0$ si $\sqrt{2} < |x| < 2$



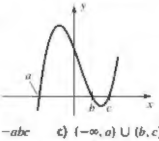
29 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $|x| < 2$, $x \neq 0, x \neq 1$



31



33 **a)**

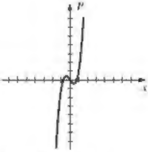


b) $-abc$ **c)** $(-\infty, a) \cup (b, c)$ **d)** $[a, b] \cup [c, \infty)$

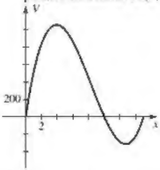
35 Si n es par, entonces $(-x)^n = x^n$, y por ello $f(-x) = f(x)$. Por lo tanto, f es una función par.

37 $-\dfrac{4}{3}$ **39** ± 4

41 $P(x) > 0$ en $\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{5}\sqrt{15}, \infty\right)$;
$P(x) < 0$ en $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$

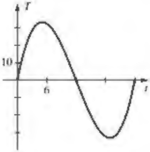


43 b) $V(x) > 0$ en $(0, 10)$ y $(15, \infty)$;
los valores disponibles para x se encuentran en $(0, 10)$.



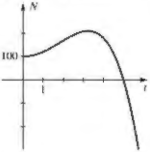
45 a) $T > 0$ para $0 < t < 12$;
$T < 0$ para $12 < t < 24$

b)



c) $T(6) = 32.4 > 32$,
$T(7) = 29.75 < 32$

47 a) $N(t) > 0$ para $0 < t < 5$



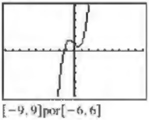
b) La población se extingue después de 5 años.

49 a)

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$
−60	25,920,000	25,902,001	25,937,999	26,135,880
−40	5,120,000	5,112,001	5,127,999	5,183,920
−20	320,000	318,001	321,999	327,960
20	320,000	318,001	321,999	312,040
40	5,120,000	5,112,001	5,127,999	5,056,080
60	25,920,000	25,902,001	25,937,999	25,704,120

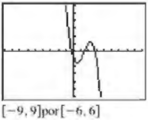
b) Se vuelven similares. **c)** $2x^4$

51 a) 1)



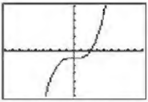
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

2)



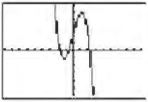
$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

3)



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

4)



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

b) 1) A medida que x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a ∞; a medida que x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$.

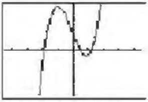
2) A medida que x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; a medida que x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a ∞.

3) A medida que x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a ∞; a medida que x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$.

4) A medida que x se aproxima a ∞, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$; a medida que x se aproxima a $-\infty$, $f(x)$ se aproxima a ∞.

c) Para la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a > 0$, $f(x)$ se aproxima a ∞ a medida que x se aproxima a $-\infty$. Con $a < 0$, $f(x)$ se aproxima a $-\infty$ a medida que x se aproxima a ∞ y $f(x)$ se aproxima a ∞ a medida que x se aproxima $a - \infty$.

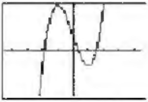
53



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

$-1.89, 0.49, 1.20$

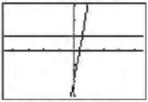
55



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

$-1.88, 0.35, 1.53$

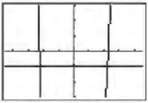
57



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

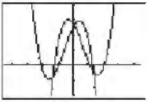
$(0.56, \infty)$

59



$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

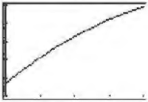
$(-\infty, -2.24) \cup (2.24, \infty)$

61 

$[-4.5, 4.5]$ por $[-2, 4]$

$(-1.29, -0.77)$, $(0.085, 2.66)$, $(1.36, -0.42)$

63 **a)** Ha aumentado



$[1970, 2010, 10]$ por $[20, 45, 5]$

b) $y = 0.59x + 23.5$; lineal

EJERCICIOS 3.2

1 $2x^2 - x + 3$; $4x - 3$ **3** $\frac{3}{2}x$; $\frac{1}{2}x - 4$

5 0; $7x + 2$ **7** 5; 29 **9** 16 **11** 7

13 $f(-3) = 0$ **15** $f(-2) = 0$ **17** $f(3) = 0$

19 $x^3 - 3x^2 - 10x$ **21** $x^3 - x^2 - 9x + 9$

23 $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ **25** $2x^2 + x + 6$; 7

27 $x^2 - 3x + 1$; -8

29 $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 36$; -65

31 $4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$; 0 **33** 73

35 -0.0824 **37** $\frac{4}{3}$ **39** $8 + 7\sqrt{3}$ **41** $f(-2) = 0$

43 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **45** $3, 5$ **47** $f(c) > 0$ **49** -14

51 Si $f(x) = x^n - y^n$ y n es par, entonces $f(-y) = 0$.

53 **a)** $V = \pi x^2(6 - x)$

b) $\left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{45}), \frac{1}{2}(7 - \sqrt{45})\right)$

55 **a)** $A = 8x - 2x^3$ **b)** $\sqrt{13} - 1 \approx 2.61$

57 -9.55

59 $-0.75, 1.96$

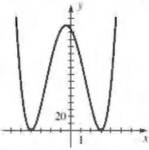
EJERCICIOS 3.3

1 $-4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$ **3** $3x^3 + 3x^2 - 36x$

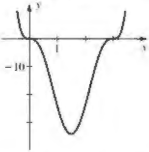
5 $-2x^3 + 6x^2 - 8x + 24$

7 $3x^3 + 3x$

9 $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$



11 $3x^6 - 27x^5 + 81x^4 - 81x^3$



13 $f(x) = \frac{7}{9}(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 3)$

15 $f(x) = -1(x - 1)^2(x - 3)$

17 $-\frac{2}{3}$ (multiplicidad 1); 0 (multiplicidad 2); $\frac{5}{2}$ (multiplicidad 3)

19 $-\frac{3}{2}$ (multiplicidad 2); 0 (multiplicidad 3)

21 $\pm\sqrt{3}$ (cada uno de multiplicidad 3)

23 -4 (multiplicidad 3); -3 (multiplicidad 2); 3 (multiplicidad 5)

25 $\pm 4i$, ± 3 (cada uno de multiplicidad 1)

27 $f(x) = (x + 3)^2(x + 2)(x - 1)$

29 $f(x) = (x + 2)^3(x - 1)$

31 $f(x) = (x - 1)^5(x + 1)$

Ejercicios 33-40: Los tipos de soluciones posibles se listan en el orden de positivo, negativo y complejidad no real.

33 3,0,0 o 1,0,2 **35** 0,1,2

37 2,2,0;2,0,2;0,2,2;0,0,4

39 2,3,0;2,1;0,3,2;0,1,4

41 Superior, 5; inferior, -2 **43** Superior, 2; inferior, -2

45 Superior, 3; inferior, -3

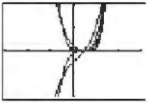
47 $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2(x - 1)(x - 2)^3$

49 **a)** $f(x) = a(x + 3)^3(x + 1)(x - 2)^2$ **b)** 108

51 $f(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1.5)^2(x - 3)$

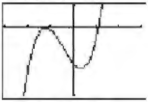
53 No **55** Sí: $1.5(x - 2)(x - 5.2)(x - 10.1)$

57 $f(t) = \frac{5}{3528}t(t - 5)(t - 19)(t - 24)$

59 

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

A medida que incrementa la multiplicidad, la gráfica se vuelve más horizontal en $(0.5, 0)$.

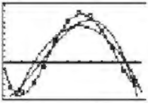
61 

$[-3, 3]$ por $[-3, 1]$

-1.2 (multiplicidad de 2); 1.1 (multiplicidad de 1)

63 2023 (cuando $t \approx 43.2$)

65 **a)** 3)



$[0.5, 12.5]$por$[-30, 50, 5]$

b) $4 \le x \le 5$ y $10 \le x \le 11$ **c)** 4.02, 10.53

67 7.64 cm **69** 12 cm

EJERCICIOS 3.4

1 $x^2 - 6x + 13$ **3** $(x - 2)(x^2 + 4x + 29)$

5 $x(x + 1)(x^2 - 6x + 10)$

7 $(x^2 - 8x + 25)(x^2 + 4x + 5)$

9 $x(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

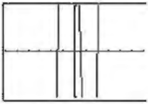
Ejercicios: 11-16; Muestran que ninguna de las raíces racionales posibles listadas satisface la ecuación.

11 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **13** $\pm 1, \pm\frac{1}{5}, \pm 5$

15 $\pm 1, \pm 2$

17 **a)** $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 6$

b)



$[-6, 6]$por$[-1, 1]$

c) $\frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2}$

19 $-2, -1, 4$ **21** $-3, 2, \frac{5}{2}$

23 $-7, \pm\sqrt{2}, 4$ **25** 1 (multiplicidad de 2), $-\frac{1}{2}$, 3

27 $-3, -\frac{2}{3}$, 0 (multiplicidad de 2), $\frac{1}{2}$

29 $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{7}\,i$

31 $f(x) = (3x + 2)(2x - 1)(x - 1)^2(x - 2)$

33 $f(x) = 2(x + 0.9)(x - 1.1)(x - 12.5)$

35 No. Si i es una raíz, entonces $-i$ también lo es. Por ello, el polinomio tendrá factores $x - 1$, $x + 1$, $x - i$, $x + i$ y, por lo tanto, será de grado superior a 3.

37 Dado que n es impar y los ceros complejos no reales se presentan en pares conjugados para los polinomios con coeficientes reales, debe existir por lo menos un cero real.

39 **a)** Los dos cuadros corresponden a $x = 5$ y $x = 5(2 - \sqrt{2})$.

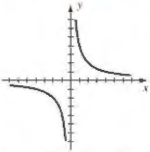
b) El cuadro corresponde a $x = 5$

41 **c)** En pies: 5, 12, y 13 **43** **b)** 4 pies

45 Ninguno **47** $-1.2, 0.8, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **49** 10,200 m

EJERCICIOS 3.5

1 **a)**



b) D = todos los números diferentes a cero son reales; $R = D$

c) Descendente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$

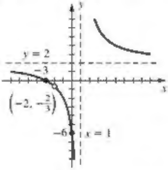
3 **a)** -2 **b)** -2 **c)** ∞ **d)** $-\infty$ **e)** 0

5 **a)** A medida que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$.

b) A medida que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 2$.

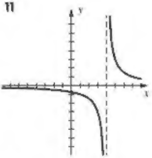
7 VA: $x = 3$; HA: $y = -2$; brecha: $\left(6, -\frac{22}{3}\right)$

9

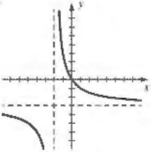


$f(x) = \dfrac{2(x + 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)}$

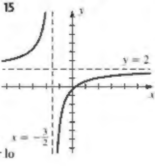
11



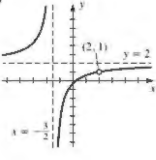
13

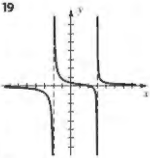


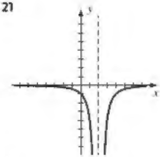
15

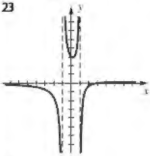


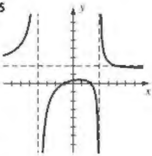
17

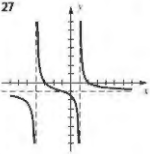


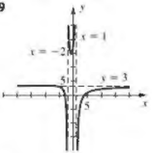
19


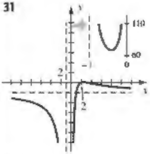
21


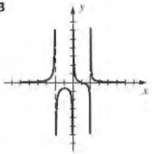
23


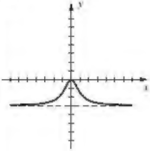
25


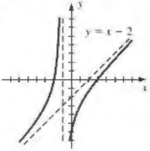
27


29


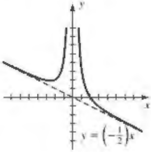
31


33


35


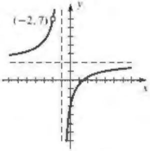
37 $y = x - 2$


39 $y = -\frac{1}{2}x$

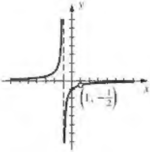


41 $y = x^2 + 1$

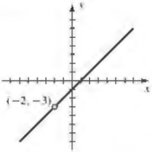
43 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ para $x \neq -2$



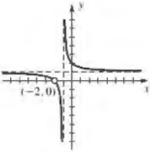
45 $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ para $x \neq 1$



47 $f(x) = x - 1$ para $x \neq -2$



49 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ para $x \neq -2$



51 $f(x) = \dfrac{2-x}{x-5}$ 53 $f(x) = \dfrac{6x^2-6x-12}{x^3-7x+6}$

55 a) $h = \dfrac{16}{(r+0.5)^2} - 1$ (b) $V(r) = \pi r^2 h$

c) Excluye $r \leq 0$ y $r \geq 3.5$.

57 a) $V(t) = 50 + 5t$, $A(t) = 0.5t$ b) $\dfrac{t}{10t + 100}$

c) A medida que $t \to \infty$, $c(t) \to 0.1$ lb de sal por galón

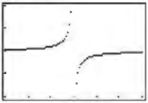
59 a) $0 < S < 4000$ b) 4500 c) 2000

d) Un 125% que aumenta en S produce sólo 12.5% que aumenta en R.

61 Ninguno

$[-9, 3]$por$[-9, 3]$

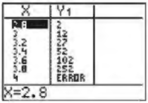
63 $x = 0.999$



$[0.7, 1.3, 0.1]$por$[0.8, 1.2, 0.1]$

65 **a)** La gráfica de g es la línea horizontal $y = 1$ con brechas en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
b) La gráfica de h es la gráfica de p con brechas en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

67 **a)** $y = \dfrac{132 - 48x}{x - 4}$ **b)**



X	Y1
2.8	2
3	12
3.2	27
3.4	52
3.6	102
3.8	252
4	ERROR

X=2.8

c)

$[2, 4]$ por $[0, 1000, 100]$

d) $x = 4$

e) No se puede alcanzar un GPA acumulado de 4.0 sin importar el número de créditos adicionales obtenidos en 4.0.

EJERCICIOS 3.6

1 $u = kv; k = \frac{2}{5}$ **3** $V = kr^3, k = \frac{4}{3}\pi$

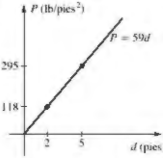
5 $r = k\frac{s}{t}; k = -14$ **7** $y = k\frac{x^2}{z^3}; k = 27$

9 $z = kx^2y^3; k = -\frac{2}{49}$ **11** $z = k\frac{xy}{\sqrt[3]{w}}; k = 2$

13 $q = \frac{k}{x + y}; k = 1.68$ **15** $y = k\frac{\sqrt{x}}{z^3}; k = \frac{40}{3}$

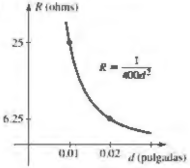
17 **a)** $P = kd$ **b)** 59 **c)** 295 lb/pies^2

d)



19 **a)** $R = k\frac{l}{d^2}$ **b)** $\frac{1}{40{,}000}$

c)



d) $\frac{50}{9}$ ohms

21 **a)** $P = k\sqrt{l}$ **b)** $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ **c)** $\frac{3}{4}\sqrt{10}$ s

23 **a)** $T = kd^{3/2}$ **b)** $\frac{365}{(93)^{3/2}}$ **c)** 223.2 días

25 **a)** $V = k\sqrt{L}$ **b)** $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ **c)** 63 mi/hr

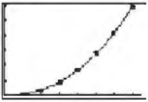
27 **a)** $W = kh^3$ **b)** $\frac{25}{27}$ **c)** 154 lb

29 **a)** $F = kPr^4$ **b)** Alrededor de 2.05 veces más

31 Incrementa 250% **33** d se multiplica por 9.

35 $y = 1.2x$ **37** $y = -\frac{10.1}{x^2}$

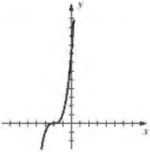
39 **a)** $k \approx 0.034$ **b)**



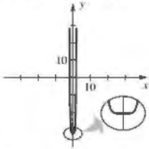
$[0, 75, 10]$ por $[0, 600, 100]$

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

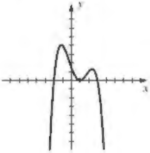
1 $f(x) > 0$ si $x > -2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$



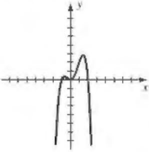
2 $f(x) > 0$ si $x < -\sqrt[4]{32}$ o $x > \sqrt[4]{32}$, $f(x) < 0$ si $-\sqrt[4]{32} < x < \sqrt[4]{32}$



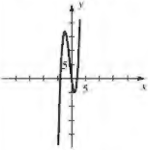
3 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 1$ o $1 < x < 3$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $x > 3$



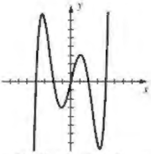
4 $f(x) > 0$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x < 2$, $f(x) < 0$ si $x < -1$ o $x > 2$



5 $f(x) > 0$ si $-4 < x < 0$ o $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -4$ o $0 < x < 2$



6 $f(x) > 0$ si $-4 < x < -2$, $0 < x < 2$, o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -4$, $-2 < x < 0$, o $2 < x < 4$



7 $f(0) = -9 < 100$ y $f(10) = 561 > 100$. Con base en el teorema del valor intermedio para las funciones polinómicas, f toma todos los valores entre -9 y 561. Por ello, existe por lo menos un número real a en $[0,10]$ de forma que $f(a) = 100$.

8 Sea $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -4 < 0$. Con base en el teorema del valor intermedio para las funciones polinómicas, f toma todos los valores entre -4 y 1. Por ello, existe por lo menos un número real a en $[0,1]$ de modo que $f(a) = 0$.

9 $3x^2 + 2$; $-21x^2 + 5x - 9$ **10** $4x - 1$; $2x - 1$

11 -32 **12** $f(3) = 0$

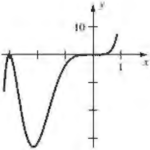
13 $6x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 52x + 104$; -200

14 $2x^2 + 11x + 31$; 94

15 $\frac{2}{41}(x^2 + 6x + 34)(x + 1)$

16 $\frac{1}{4}x(x^2 - 2x + 2)(x - 3)$

17 $x^7 + 6x^6 + 9x^5$



18 $(x - 2)^3(x + 3)(x - 1)$

19 1 (multiplicidad de 5); -3 (multiplicidad de 1)

20 0, $\pm i$ (todos con multiplicidad de 2)

21 **a)** 3 positivo o negativo o 1 positivo, 1 negativo y 2 complejo no real.

b) Límite superior, 3; límite inferior, -1

22 **a)** 2 positivo y 3 negativos; 2 positivo, 1 negativo y 2 complejo no real; o 1 negativo y 4 complejo no real.

b) Límite superior, 2; límite inferior, -3

23 Como sólo existen potencias pares, $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$ para cada número real de x.

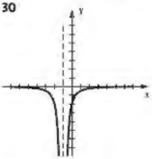
24 $-3, -2, -2 \pm i$ **25** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ **26** $-3, 2, \pm 1$

27 $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 2)^3(x - 1)^2(x - 3)$

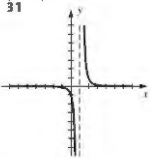
28 $f(x) = \frac{1}{16}(x + 3)^2x^2(x - 3)^2$

29 VA: $x = 5$; HA: $y = \frac{4}{3}$; intersección de x: 1 intersección de y $\frac{4}{15}$; brecha: $\left(-2, \frac{4}{7}\right)$

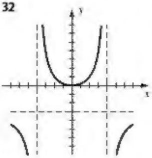
30



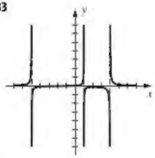
31



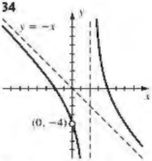
32



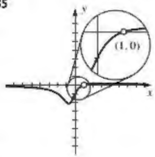
33



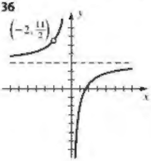
34



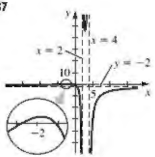
35



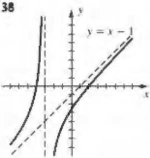
36



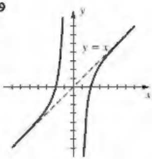
37



38

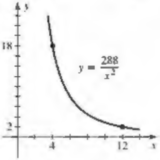


39



40 $f(x) = \dfrac{3(x-5)(x-2)}{2(x+3)(x-2)}$ o $f(x) = \dfrac{3x^2 - 21x + 30}{2x^2 + 2x - 12}$

41 27 **42**



43 **a)** $\dfrac{1}{15{,}000}$

b) $y \approx 0.9754 < 1$ si $x = 6.1$, y $y \approx 1.0006 > 1$ si $x = 6.2$

44 **a)** $V = \dfrac{1}{4\pi}x(l^2 - x^2)$

b) Si $x > 0$, $V > 0$ cuando $0 < x < l$.

45 $t = 4$ (10:00 A.M.) y $t = 16 - 4\sqrt{6} \approx 6.2020$ (12:12 P.M.)

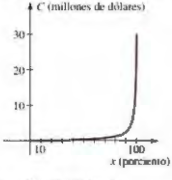
46 $\sqrt{5} < t < 4$

47 **a)** $R = k$

b) k es la tasa máxima a la que el hígado puede eliminar el alcohol del torrente sanguíneo.

48 **a)** $C(100) = \$30$ millones y $C(90) \approx \$2.5$ millones

b)



49 375 **50** 10,125 watts

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

2 Sí **4** No **5** $n + 1$ **7** $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2+1)(x-2)}$

8 **a)** No

b) Sí, cuando $x = \dfrac{cd - af}{ae - bd}$, suponiendo que el denominador no es cero.

9 **a)** \$1476

b) No es válido para valores de confianza altos.

10 El segundo entero

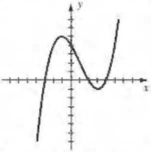
11 **a)** $R(I) = \dfrac{P + SI}{I}$ **b)** R se aproxima a S.

c) Las personas pagan más impuestos conforme incrementa su ingreso, pero los importes fijos de impuestos juegan un papel menor para determinar su tasa impositiva general.

12 **a)** 121.1 **b)** 47 **c)** 36 yardas

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3

1



intersección de $y = 4$

2 $f(x) = x^3(x-1)^2(x-2)$

3 $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 13 > 0$, por lo que existe un número c de forma que $0 < c < 2$ y $f(c) = 0$.

4 $(a, b) \cup (b, c)$

5 Después de siete años

6 Las gráficas de f y g se verían casi idénticas.

7 $f(2) = 0$ **8** $a = b/6$ **9** $-2, 3$

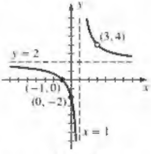
10 $f(x) = 3(x-3)(x+1)^2$ **11** 9

12 Sí: $f(x) = x(x-1)(x-i)$

13 5 es un factor de 6545 y 2 es un factor de 702.

14 $-1, \dfrac{6}{5}, \dfrac{5}{2}$ **15** $(2, 3)$ **16** $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{4}\right)$

17



18 $f(x) = \dfrac{-3(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$ **19** 4

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

1 a) 4 **b)** No es posible

3 a) Sí **b)** No **c)** No es una función

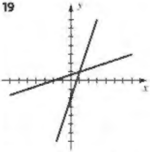
5 Sí **7** No **9** Sí **11** No **13** No

15 Sí

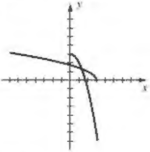
17 a) -1 **b)** -2 **c)** -2 **d)** $-\infty$ **e)** ∞

Ejercicios 19-22: Muestran que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

19



21



23 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

25 $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$

27 $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$ **29** $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{2x}$

31 $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{2x-3}$ **33** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{3}}$

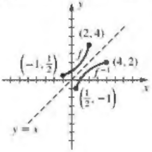
35 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+5}{2}}$ **37** $f^{-1}(x) = 3 - x^2, x \geq 0$

39 $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ **41** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}+6}$

43 $f^{-1}(x) = x$ **45** $f^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2}, -3 \leq x \leq 0$

47 $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+9}$ **49 a)** 3 **b)** -1 **c)** 5

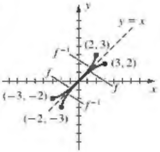
51 a)



b) $D = [-1, 2]$; $R = \left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$

c) $D_1 = \left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$; $R_1 = [-1, 2]$

53 a)



b) $D = [-3, 3]$; $R = [-2, 2]$

c) $D_1 = [-2, 2]$; $R_1 = [-3, 3]$

55 a) Como f es uno a uno, existe un inverso;

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

b) No; no es uno a uno

57 c) La gráfica de f es simétrica sobre la línea $y = x$. Por lo tanto, $f(x) = f^{-1}(x)$.

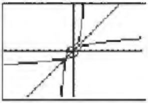
59 Sí

61

$[-1, 2]$ por $[-1, 4]$

a) $[-0.27, 1.22]$ **b)** $[-0.20, 3.31]$; $[-0.27, 1.22]$

63



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

$f^{-1}(x) = x^3 + 1$

65 a) 805 pies^3/min

b) $V^{-1}(x) = \dfrac{1}{35}x$. Dada una circulación de aire de x pies cúbicos por minuto, $V^{-1}(x)$ calcula el número máximo de personas que deben estar en un restaurante al mismo tiempo.

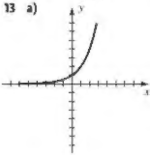
c) 67

EJERCICIOS 4.2

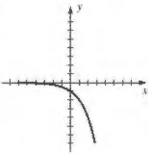
1 5 **3** $-1, 3$ **5** $-\dfrac{4}{99}$ **7** $\dfrac{18}{5}$ **9** 3

11 a) ∞ **(b)** c

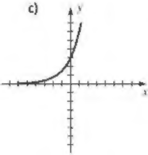
13 a)



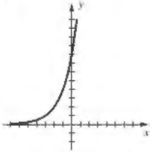
b)



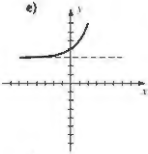
c)



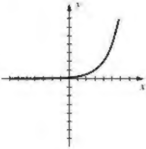
d)



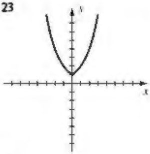
e)



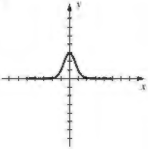
f)



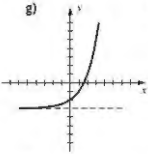
23



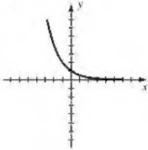
25



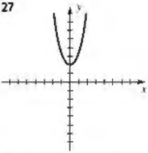
g)



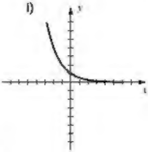
h)



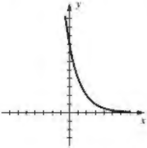
27



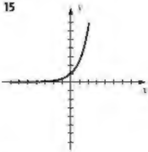
i)



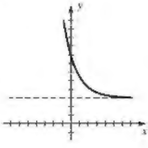
j)



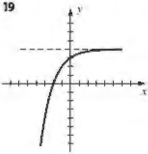
15



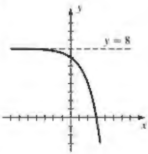
17



19



21



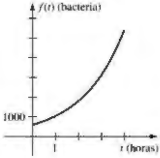
29 $f(x) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^x$ **31** $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$

33 $f(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **35** $f(x) = 180(1.5)^{-x} + 32$

37 **a)** 59 **b)** 10%

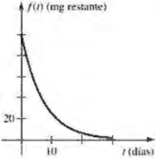
39 **a)** 1039; 3118; 5400

b)



41 **a)** 50 mg; 25 mg; $\frac{25}{2}\sqrt{2} \approx 17.7$ mg

b)



43 $-\frac{1}{1600}$

45 **a)** \$1005.83 **b)** \$1035.51 **c)** \$1072.29 **d)** \$4038.74

47 **a)** \$19,500 **b)** \$11,975 **c)** \$7354

49 \$231,089,639,204.11

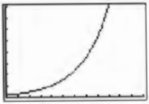
51 **a)** Examine el patrón formado por el valor y en el año n.

b) Resolver $s = (1 - a)^T y_0$ para a.

53 **a)** \$1834.41 **b)** \$410,387.60

55 \$15,495.62

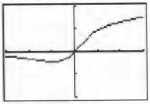
57 **a)** 180.1206 **b)** 7.3639

59 

[0, 60, 5]por[0, 40, 5]

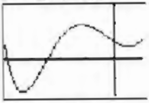
a) 26.13 **b)** 8.50

61 −1.02, 2.14, 3.62

63 

[−3, 3]por[−2, 2]

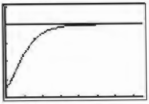
a) No es uno a uno
b) 0

65 

[−4, 1]por[−2, 3]

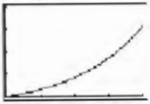
a) Ascendente: [−3.37, −1.19] ∪ [0.52, 1];
descendente: [−4, −3.37] ∪ [−1.19, 0.52]
b) [−1.79, 1.94]

67 6.58 años

69 

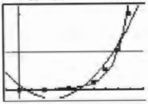
[0, 7.5]por[0, 5]

La cifra máxima de ventas se aproxima a k.

71 

[0, 40, 10]por[0, 200,000, 50,000]

Después de aproximadamente 32.8 años

73 **a)** 

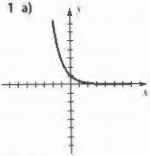
[−10, 100, 10]por[−200, 2200, 1000]

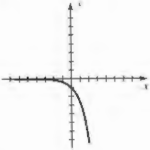
b) Función f exponencial **c)** 1989

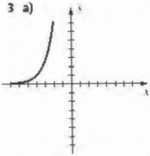
75 $y = 0.04(1.0481)^t$; 74¢

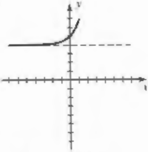
77 **a)** \$746,648.43; \$1,192,971 **b)** 12.44%
c) exponencial; polinómica

EJERCICIOS 4.3

1 **a)** 

b) 

3 **a)** 

b) 

5 \$1300.18 **7** \$54,226.53 **9** 7% **11** 3, 4

13 $1/e$ **15** −1 **17** $-\frac{3}{4}, 0$ **19** $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

21 27.43 g **23** 348.8 millones

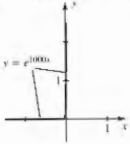
25 **a)** 25% **b)** 13.2 horas **27** 13.5% **29** 41

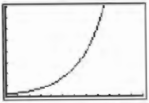
31 **a)** 10.46 pulgadas **(b)** 7.44 pulgadas

33 75.77 cm; 15.98 cm/año

35 \$18.54 por hora **37** **a)** 7.19% **b)** 7.25%

39 **a)** 5.09% **b)** 5.13%

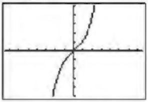
41 

43 

[0, 60, 5]por[0, 40, 5]

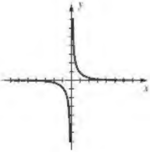
a) 29.96 **b)** 8.15

45 a)

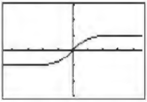


$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

b)

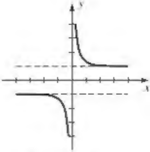


47 a)

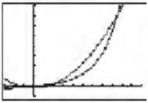


$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

b)



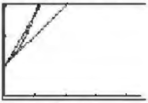
49



$[-3, 11]$ por $[-10, 80, 10]$

$-1.04, 2.11, 8.51$

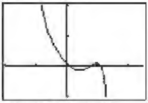
51



$[0, 4.5]$ por $[0, 3]$

$f(x)$ está más cerca de e^x si $x \approx 0$.
$g(x)$ está más cerca de e^x si $x \approx 1$.

53



$[-2, 2.5]$ por $[-1, 2]$

$0.11, 0.79, 1.13$

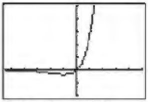
55

$[0, 200, 50]$ por $[0, 8]$

$y \approx 2.71 \approx e$

57 0.567

59

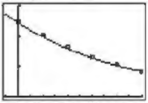


$[-5.5, 5]$ por $[-2, 5]$

Ascendente en $[-1, \infty)$; descendente en $(-\infty, -1]$

61 a) A medida que aumenta h, disminuye C
b) A medida que aumenta y, disminuye C

63 a) $f(x) = 1.225e^{-0.0001085x}$



$[-1000, 10{,}000, 1000]$ por $[0, 1.5, 0.5]$

b) 0.885, 0.461

EJERCICIOS 4.4

1 a) $\log_4 64 = 3$ b) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$
c) $\log_t s = r$ d) $\log_3 (4 - t) = x$
e) $\log_5 \frac{a + b}{a} = 7t$ f) $\log_{0.7} (5.3) = t$

3 a) $2^5 = 32$ b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$ c) $t^p = r$
d) $3^5 = (x + 2)$ e) $2^{3x+4} = m$ f) $b^{3/2} = 512$

5 $t = 3 \log_a \frac{5}{2}$ **7** $t = \log_a\left(\frac{H - K}{C}\right)$

9 $t = \frac{1}{C} \log_a \left(\frac{A - D}{B}\right)$

11 a) $\log 100{,}000 = 5$ b) $\log 0.001 = -3$
c) $\log (y - 3) = x$ d) $\ln p = 7$
e) $\ln (3 - x) = 2t$

13 a) $10^{50} = x$ b) $10^{20t} = x$ c) $e^{0.1} = x$
d) $e^{4+3x} = w$ e) $e^{1/6} = z - 2$

15 a) 0 b) 1 c) No es posible d) 2 e) 8
f) 3 g) -2

17 a) 3 b) 5 c) 2 d) -4 (e) 30

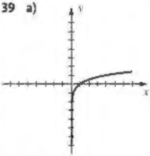
19 a) 2 b) -3 c) $3e^2$

21 -1 **23** Sin solución **25** $-1, -2$ **27** 13

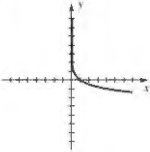
29 $\frac{1}{27}$ **31** $\pm\frac{1}{e}$ **33** 3 **35** 3

37 a) 0 b) 1 c) ∞ d) $-\infty$

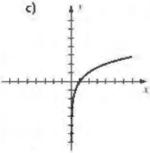
39 **a)**



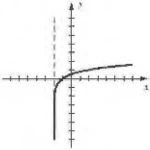
b)



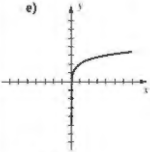
c)



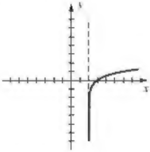
d)



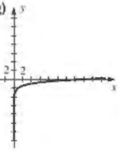
e)



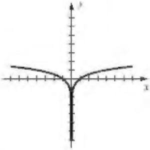
f)



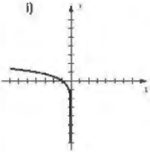
g)



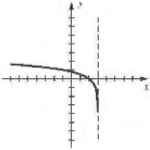
h)



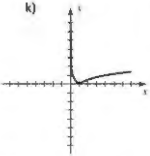
i)



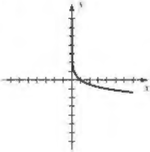
j)



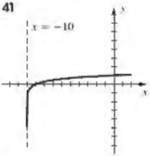
k)



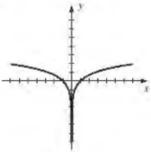
l)



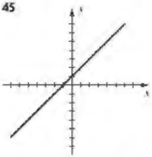
41



43



45



47 $f(x) = \log_3 x$

49 $f(x) = -F(x)$ **51** $f(x) = F(x - 2)$

53 $f(x) = F(x) + 1$

55 **a)** 4240 **b)** 8.85 **c)** 0.0251 **d)** 9.97
e) 1.05 **f)** 0.202

57 $f(x) = 1000e^{x \ln 1.05}$; 4.88% **59** $f(x) = 20e^{x \ln 0.97}$; -3.05%

61 $t = -1600 \log_2 \left(\dfrac{q}{q_0}\right)$ **63** $t = -\dfrac{L}{R} \ln \left(\dfrac{I}{20}\right)$

65 **a)** 2 **b)** 4 **c)** 5

67 **a)** 10 **b)** 30 **c)** 40 **69** En el año 2047

71 **a)** $W = 2.4e^{1.84h}$ **b)** 37.92 kg

73 **a)** 10,007 pies **b)** 18,004 pies

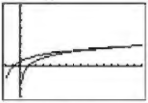
75 **a)** 305.9 kg **b)** (1) 20 años (2) 19.8 años

77 10.1 millas **79** $2^{1/8} \approx 1.09$

81 **a)** Los peatones caminan a velocidades promedio más altas en ciudades más grandes.
b) 570,000

83 **a)** 8.4877 **b)** -0.0601

85 1.763 **87** $(0, 14.90]$



$[-2, 16]$ por $[-4, 8]$

89 **a)** 30% **b)** 3.85

EJERCICIOS 4.5

1 **a)** $\log_4 x + \log_4 z$ **b)** $\log_4 y - \log_4 x$
c) $\frac{1}{3}\log_4 z$

3 $3\log_a x + \log_a w - 2\log_a y - 4\log_a z$

5 $\frac{1}{3}\log z - \log x - \frac{1}{2}\log y$

7 $\frac{7}{4}\ln x - \frac{5}{4}\ln y - \frac{1}{4}\ln z$

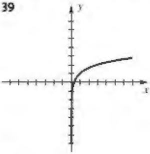
9 **a)** $\log_3(5xy)$ **b)** $\log_3\frac{2z}{x}$ **c)** $\log_3\sqrt[5]{y}$

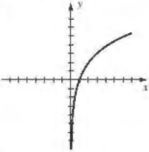
11 $\log_a\frac{x^2}{\sqrt[3]{x-2}\,(2x+3)^5}$ **13** $\log\frac{y^{13/3}}{x^2}$

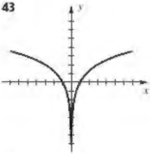
15 $\ln x^3$ **17** $\frac{11}{2}$ **19** $5\sqrt{5}$ **21** Sin solución

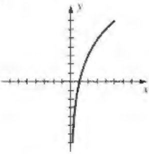
23 -7 **25** 1 **27** -2 **29** -2 **31** $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$

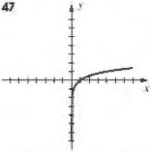
33 $\frac{250}{49}$ **35** $-1+\sqrt{1+e}$ **37** $3+\sqrt{10}$

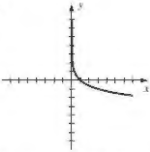
39


41


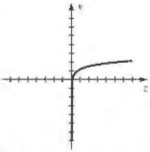
43


45


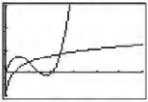
47


49


51 $f(x) = \log_2 x^2$ **53** $f(x) = \log_2(8x)$ **55** Alrededor $+7$

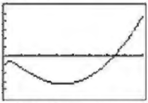
57 $y = \frac{b}{x^n}$ **59**


61 **a)** 0 **b)** $R(2x) = R(x) + a\log 2$ **63** 0.29 cm

65

$(0, 1.02] \cup [2.40, \infty)$

$[0, 6]$ por $[-1, 3]$

67 1.41, 6.59

69

a) Ascendente en $[0.2, 0.63]$ y $[6.87, 16]$; descendente en $[0.63, 6.87]$
b) 4.61; -3.31

$[0.2, 16, 2]$ por $[-4.77, 5.77]$

71 6.94 **73** 115 m

EJERCICIOS 4.6

1 $\frac{\log 3}{\log 5} \approx 0.68$ **3** $4 - \frac{\log 5}{\log 3} \approx 2.54$ **5** 1.5440

7 -0.0480 **9** 2 **11** -3 **13** Sin solución

15 $\frac{\log(2/81)}{\log 24} \approx -1.16$ **17** $\frac{\log(8/25)}{\log(4/5)} \approx 5.11$

19 5 **21** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{101}{11}} \approx 2.02$ **23** 2, 5 **25** 1, 2

27 $\frac{\log(4+\sqrt{19})}{\log 4} \approx 1.53$ **29** 1 o 100 **31** 10^{100}

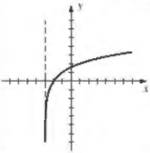
33 10,000 **35** $\ln 3$ **37** 7

39 $x = \log\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$

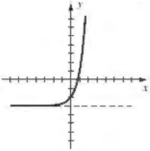
41 $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ **43** $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

45 $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

47 intersección de $y = \log_2 3 \approx 1.5850$



49 intersección de $y = \log_4 3 \approx 0.7925$

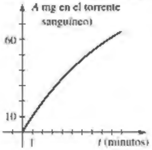


51 **a)** 2.2 **b)** 5 **c)** 8.3

53 Base si pH > 7, ácido si pH < 7

55 11.58 años ≈ 11 años 7 meses **57** 86.4 m

59 **a)**



b) 6.58 min

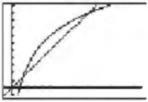
61 **a)** $t = \dfrac{\log (F/F_0)}{\log (1 - m)}$ **b)** Después de 13,863 generaciones

63 **a)** 4.28 pies **b)** 24.8 años **65** $\dfrac{\ln (25/6)}{\ln (200/35)} \approx 0.82$

67 La sospecha es correcta.

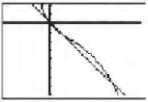
69 La sospecha es incorrecta. **71** -0.5764 **73** Ninguno

75 1.37, 9.94



$[-1, 17]$ por $[-1, 11]$

77



$[-5, 10]$ por $[-8, 2]$

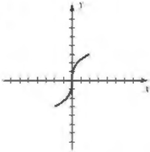
$(-\infty, -0.32) \cup (1.52, 6.84)$

79 (4)

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

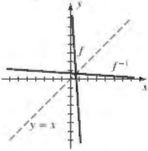
1 Sí

2



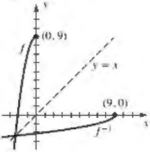
3 **a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{10 - x}{15}$

b)



4 **a)** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{9 - x}{2}}$

b)

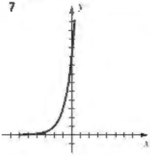


5 **a)** 2 **b)** 4 **c)** 2 **d)** 2 **e)** $x > 2$

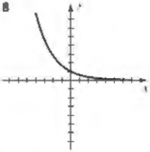
6 **a)** 5 **b)** 7 **c)** 4

d) No se da suficiente información.

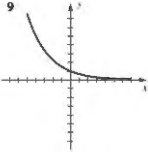
7



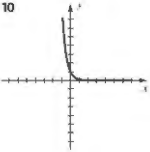
8



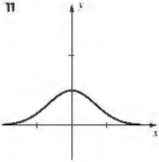
9



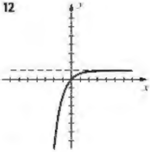
10



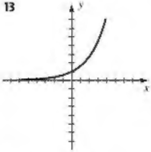
11



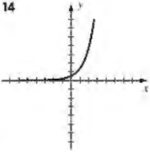
12



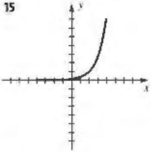
13



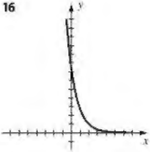
14



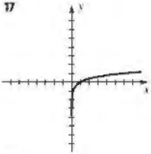
15



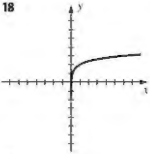
16



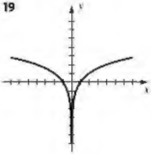
17



18

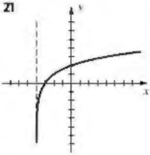


19

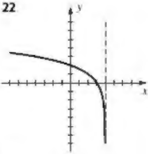


20

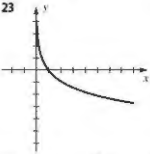
21



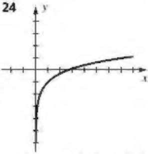
22



23



24



25 a) -4 b) 0 c) 1 d) 4 e) 6 f) 8 g) $\frac{1}{2}$

26 a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 1 d) 5 e) 1 f) 25 g) $\frac{1}{3}$

27 0 **28** $-\frac{6}{5}$ **29** 9 **30** -2 **31** $\frac{33}{47}$ **32** 1

33 $-1 + \sqrt{3}$ **34** 103 **35** $5 - \frac{\log 6}{\log 2}$

36 $\pm \sqrt{\frac{\log 7}{\log 3}}$ **37** $\frac{\log (3/8)}{\log (32/9)}$ **38** 1 **39** $\frac{1}{4}, 1, 4$

40 Sin solución **41** $\sqrt{5}$ **42** 2 **43** $0, \pm 1$

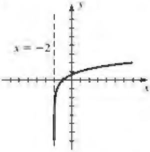
44 $\ln 2$ **45** a) $-3, 2$ b) 2

46 a) 8 b) ± 4

47 $4 \log x + \frac{2}{3} \log y - \frac{1}{3} \log z$

48 $-\log (xy^2)$ **49** $f(x) = 6\left(\frac{4}{3}\right)^x$

50



51 $x = \log \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$

52 Si $y < 0$, entonces $x = \log \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$.

Si $y > 0$, entonces $x = \log\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$.

53 **a)** 1.89 **b)** 78.3 **c)** 0.472 **d)** 1.72

54 **a)** 0.924 **b)** 0.00375 **(c)** 6.05 **d)** −0.223

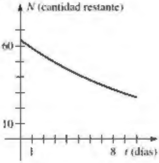
55 **a)** $D = (-1, \infty), R = \mathbb{R}$
b) $y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, R = (-1, \infty)$

56 **a)** $D = \mathbb{R}, R = (-2, \infty)$
b) $y = 3 - \log_2(x + 2), D = (-2, \infty), R = \mathbb{R}$

57 **a)** 2000
b) $2000(3^{1/6}) \approx 2401$; $2000(3^{1/2}) = 3464$; 6000

58 \$1032.90

59 **a)**



b) 8 días

60 $N = 1000\left(\dfrac{3}{5}\right)^{t/3}$

61 **a)** Después 19.3 años **b)** 14.6 años **62** 3.16%

63 $t = (\ln 100)\dfrac{L}{R} \approx 4.6\dfrac{L}{R}$

64 **a)** $I = I_0 10^{\alpha/10}$
b) Examinar $I(\alpha + 1)$, donde $I(\alpha)$ es la intensidad que corresponde a α decibeles.

65 $t = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{a - L}{ab}\right)$ **66** $A = 10^{(R+5.1)/2.3} - 3000$

67 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{10^{(R+5.1)/2.3} - 3000}{10^{(R+7.5)/2.3} - 34{,}000}$ **68** 26,615.9 mi²

69 $h = \dfrac{\ln(29/p)}{0.000034}$ **70** $v = a\ln\left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

71 **a)** $n = 10^{7.7 - 0.9R}$ **b)** 12,589; 1585; 200

72 **a)** $E = 10^{11.4 + 1.5R}$ **b)** 7.9×10^{24} ergs **73** 110 días

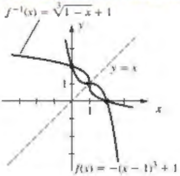
74 86.8 cm; 9.715 cm/año **75** $t = -\dfrac{L}{R}\ln\left(\dfrac{V - RI}{V}\right)$

76 **a)** 26,749 años **b)** 30% **77** 31.5 años

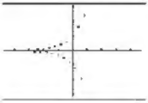
78 3196 años

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 **a)**



2



La base a debe ser positiva para que la función $f(x) = a^x$ esté definida por todos los valores de x.

3 **a)** La gráfica se aplana.
b) $y = \dfrac{101}{2}(e^{x/101} + e^{-x/101}) - 71$

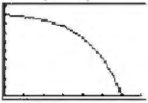
4 7.16 años

5 **a)** *Pista:* Primero obtenga de ambos lados el logaritmo natural.
b) 2.50 y 2.97
c) Observe que $f(e) = \dfrac{1}{e}$. Cualquier línea horizontal $y = k$, con $0 < k < \dfrac{1}{e}$, intersecará las gráficas en los puntos $\left(x_1, \dfrac{\ln x_1}{x_1}\right)$ y $\left(x_2, \dfrac{\ln x_2}{x_2}\right)$, donde $1 < x_1 < e$ y $x_2 > e$.

6 **a)** La diferencia se encuentra en el compuesto.
b) Más cerca de la gráfica de la segunda función.
c) 29 y 8.2; 29.61 y 8.18

7 *Pista:* Revise las restricciones para las leyes de logaritmos.

8 **a)** $U = P\left(1 + \dfrac{r}{12}\right)^{12t} - \dfrac{12M[(1 + r/12)^{12t} - 1]}{r}$
b)



[0, 35, 5] por [0, 100,000, 10,000]

c) \$84,076.50; 24.425 años

9 (−0.999 901 1, 0.009 990 01), (−0.0001, 0.01), (100, 0.011 051 11) y (36,102.844, 4.6928×10^{13}).
Los valores de las funciones exponenciales (con base > 1) son superiores a los valores de las funciones polinómicas (con términos positivos principales) para valores muy grandes de x.

10 (x, x) con $x \approx 0.442\,394\,43, 4.177\,077\,4$ y 5503.6647. Los valores de y para $y = x$ serán más grandes que los valores de y para $y = (\ln x)^n$.

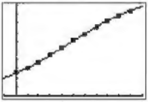
11 8.447177%; $1,025,156.25

12 **a)** 3.5 terremotos = 1 bomba, 425 bombas = 1 erupción
b) 9.22; sí

13 15 de enero de 2011; alrededor del 7.6%

14 $y \approx 68.2(1.000353)^x$

15 **a)**



$[-10, 110, 10]$ por $[0, 10^{10}, 10^9]$

b) Logística

c) $y \approx \dfrac{1.1542 \times 10^{10}}{1 + 3.6372e^{-0.0278x}}$; vea la gráfica en el inciso a).

d) 1.1542×10^{10}

16 e^b, con $b = \dfrac{11 \ln 5 \cdot \ln 7}{\ln 35}$

17 $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{81 - x^2}}$. Las asíntotas verticales son $x = \pm 9$. Las asíntotas horizontales de f son $y = \pm 9$.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4

1 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 4}{1 - x}$; $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

2 $f^{-1}(x) = -\sqrt{7 - x}$; $(-\infty, 7]$; $(-\infty, 0]$ **3** 16

4 intersección de x: 2; intersección de y: $-\dfrac{5}{9}$

5 $f(x) = 280(2)^{-x} + 70$

6 $-\dfrac{1}{300}$ **7** **a)** $1796.32 **b)** $376,675.20

8 $y = 2(1.0551)^t$ **9** 495,303 **10** $67,032.00

11 47% **12** 3 **13** $x > \dfrac{3}{2}$ **14** $t = E \log_a \dfrac{C + F}{D}$

15 Cerca de 46.2 años **16** -2 **17** $1 + \sqrt{26}$

18 23.78 años **19** $\ln 2, \log_4 3$ **20** 10^{10}

21 2.3219 **22** 22.11 años

CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1

Ejercicios 1-4: Las respuestas no son únicas.

1 **a)** 480°, 840°, −240°, −600°
b) 495°, 855°, −225°, −585°
c) 330°, 690°, −390°, −750°

3 **a)** 260°, 980°, −100°, −460°
b) $\dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{29\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{19\pi}{6}$
c) $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}, -\dfrac{9\pi}{4}, -\dfrac{17\pi}{4}$

5 **a)** 77°22′36″ **b)** 46.13°

7 **a)** 54°43′33″ **b)** 121.93°

9 **a)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $-\dfrac{\pi}{3}$ **c)** $\dfrac{5\pi}{4}$

11 **a)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **b)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **c)** $\dfrac{5\pi}{9}$

13 **a)** 120° **b)** 330° **c)** 135°

15 **a)** −630° **b)** 1260° **c)** 20°

17 89°57′16″ **19** 360°57′48″ **21** 120.2667°

23 262.2586° **25** 63°10′8″ **27** 310°37′17″

29 2.5 cm

31 **a)** $2\pi \approx 6.28$ cm **b)** $8\pi \approx 25.13$ cm²

33 **a)** 1.75; $\dfrac{315}{\pi} \approx 100.27°$ **b)** 14 cm²

35 **a)** $\dfrac{20\pi}{9} \approx 6.98$ m **b)** $\dfrac{80\pi}{9} \approx 27.93$ m²

37 $A = 32/\theta$

39 En millas: **a)** 4189 **b)** 3142 **c)** 2094
d) 698 **e)** 70

41 $\dfrac{1}{8}$ radián $\approx 7°10'$ **43** 37.1%

45 7.29×10^{-5} rad/s

47 **a)** 80π rad/min **b)** $\dfrac{100\pi}{3} \approx 104.72$ pies/min

49 **a)** 400π rad/min **b)** 38π cm/s **c)** 380 rpm
d) $S(r) = \dfrac{1140}{r}$; inverso

51 **a)** $\dfrac{21\pi}{8} \approx 8.25$ pies **b)** $\dfrac{2}{3}d$

53 Grande **55** 192.08 rev/min

EJERCICIOS 5.2

1 **a)** B **b)** D **c)** A **d)** C **e)** E

Nota: Las respuestas se presentan en el orden de sen, cos, tan, cot, sec, csc para cualquier ejercicio que requiera los valores de las seis funciones trigonométricas.

3 $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{4}$

5 $\dfrac{2}{5}, \dfrac{\sqrt{21}}{5}, \dfrac{2}{\sqrt{21}}, \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5}{\sqrt{21}}, \dfrac{5}{2}$

7 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}, \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

9 $\dfrac{b}{c}, \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}, \dfrac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b}, \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \dfrac{c}{b}$

11 $x = 8$; $y = 4\sqrt{3}$ **13** $x = 7\sqrt{2}$; $y = 7$

15 $x = 4\sqrt{3}$; $y = 4$

17 $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{3}$ **19** $\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{12}, \dfrac{13}{5}$

21 $\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{5}, \frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{6}{5}, \frac{6}{\sqrt{11}}$

23 $200\sqrt{3} \approx 346.4$ pies **25** 192 pies **27** 1.02 m

29 **a)** 0.9563 **b)** 0.4848 **c)** 1.0353 **d)** -1.2208

31 **a)** 4.0572 **b)** 1.0323 **c)** -0.6335 **d)** -3.1852

33 **a)** 0.5 **b)** -0.9880 **c)** 0.9985 **d)** -1

35 **a)** -1 **b)** -4 **37** **a)** 5 **b)** 5

39 $1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$ **41** $\frac{3 + \tan\theta}{2 - \tan\theta}$ **43** $\operatorname{sen}\theta$

45 $\cot\theta = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$ **47** $\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$

49 $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$

Ejercicios 51-74: Se presentan las verificaciones usuales.

51 $\cos\theta\sec\theta = \cos\theta\,(1/\cos\theta) = 1$

53 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \operatorname{sen}\theta\,(1/\cos\theta) = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

55 $\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \frac{1/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$

57 $(1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = 1 - \cos^2 2\theta = \operatorname{sen}^2 2\theta$

59 $\cos^2\theta\,(\sec^2\theta - 1) = \cos^2\theta\,(\tan^2\theta)$

$$= \cos^2\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \operatorname{sen}^2\theta$$

61 $\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{1/\operatorname{sen}(\theta/2)} + \frac{\cos(\theta/2)}{1/\cos(\theta/2)}$

$$= \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1$$

63 $(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$$= \frac{1}{\sec^2\theta}$$

65 $\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$$

67 $\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1 + \cot\theta$

69 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$= \cot\theta\tan\theta - \cot\theta\operatorname{sen}\theta + \csc\theta\tan\theta$
$\quad - \csc\theta\operatorname{sen}\theta$

$$= \frac{1}{\tan\theta}\tan\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$= 1 - \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} - 1 = -\cos\theta + \sec\theta$$

$$= \sec\theta - \cos\theta$$

71 $\sec^2 3\theta\csc^2 3\theta = (1 + \tan^2 3\theta)(1 + \cot^2 3\theta)$

$$= 1 + \tan^2 3\theta + \cot^2 3\theta + 1$$

$$= \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$$

73 $\log\csc\theta = \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \log 1 - \log\operatorname{sen}\theta$

$$= 0 - \log\operatorname{sen}\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$$

75 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$

77 $-\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$

79 $\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -3, -\frac{1}{3}, -\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{3}$

81 $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}$

83 $-\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{\sqrt{53}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{7}$

Nota: U significa *no definido* (en inglés, *undefined*).

85 **a)** 1, 0, U, 0, U, 1 **b)** 0, 1, 0, U, 1, U
c) -1, 0, U, 0, U, -1 **d)** 0, -1, 0, U, -1, U

87 **a)** IV **b)** III **c)** II **d)** III

89 $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{3}$

91 $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}, \frac{13}{12}, -\frac{13}{5}$

93 $-\frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt{8}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -3, -\frac{3}{\sqrt{8}}$

95 $\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, \sqrt{15}, \frac{1}{\sqrt{15}}, 4, \frac{4}{\sqrt{15}}$

97 $-\tan\theta$ **99** $\sec\theta$ **101** $-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

EJERCICIOS 5.3

1 $\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}, -\frac{8}{15}, -\frac{15}{8}, -\frac{17}{15}, \frac{17}{8}$

3 $-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, -\frac{7}{24}, -\frac{24}{7}, \frac{25}{24}, -\frac{25}{7}$

5 **a)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **b)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
c) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **d)** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

7 **a)** $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ **b)** $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
c) $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ **d)** $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Nota: U significa *no definido* (en inglés, *undefined*).

9 **a)** (1, 0); 0, 1, 0, U, 1, U
b) $(-1, 0)$; 0, -1, 0, U, -1, U

11 **a)** $(0, -1)$; -1, 0, U, 0, U, -1
b) (0, 1); 1, 0, U, 0, U, 1

13 **a)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$
b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

15 **a)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

17 **a)** -1 **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** 1

19 **a)** 1 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 1

Ejercicios 21-26: Se presentan las verificaciones usuales.

21 $\operatorname{sen}(-x)\sec(-x) = (-\operatorname{sen} x)\sec x$
$= (-\operatorname{sen} x)(1/\cos x)$
$= -\tan x$

23 $\dfrac{\cot(-x)}{\csc(-x)} = \dfrac{-\cot x}{-\csc x} = \dfrac{\cos x/\operatorname{sen} x}{1/\operatorname{sen} x} = \cos x$

25 $\dfrac{1}{\cos(-x)} - \tan(-x)\operatorname{sen}(-x)$

$= \dfrac{1}{\cos x} - (-\tan x)(-\operatorname{sen} x)$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\operatorname{sen} x$

$= \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$

27 **a)** 0 **b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** 0

31 **a)** 0 **b)** $-\infty$ **33** **a)** $\sqrt{3}$ **b)** ∞

35 **a)** ∞ **b)** 1 **37** **a)** $-\infty$ **b)** $\sqrt{2}$

39 $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ **41** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ **43** $0, 2\pi, 4\pi$

45 $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ **47** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **49** $0, \pi$

51 **a)** $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

b) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

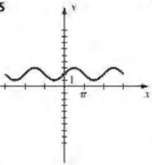
c) $-2\pi \le x < -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$, y $\frac{5\pi}{6} < x \le 2\pi$

53 **a)** $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

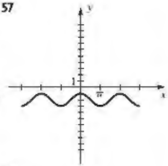
b) $-2\pi \le x < -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, y $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$

c) $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$

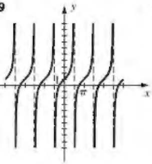
55



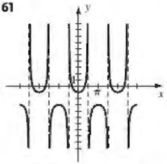
57



59



61



63 **a)** $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

65 **a)** La función tangente incrementa en todos los intervalos sobre los que se define. Entre -2π y 2π, estos intervalos son $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

b) La función tangente nunca disminuye en ningún intervalo para los que está definido.

69 **a)** -0.8 **b)** -0.9 **c)** $0.5, 2.6$

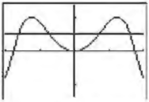
71 **a)** -0.7 **b)** 0.4 **c)** $2.2, 4.1$

73 **a)**

Tiempo	*T*	*H*	Tiempo	*T*	*H*
12 A.M.	60	60	12 P.M.	60	60
3 A.M.	52	74	3 P.M.	68	46
6 A.M.	48	80	6 P.M.	72	40
9 A.M.	52	74	9 P.M.	68	46

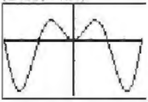
b) Max: 72 °F a las 6:00 P.M., 80% a las 6:00 A.M.; Min: 48 °F a las 6:00 A.M., 40% a las 6:00 P.M.

75 $\pm 0.72, \pm 1.62$



$[-2, 2]$ por $[-1.33, 1.33]$

77 $(\pm 2.03, 1.82)$; $(\pm 4.91, -4.81)$



$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-5.19, 3.19]$

79 0 **81** 1 **83** 1

EJERCICIOS 5.4

1 **a)** 50° **(b)** 80° **c)** 55° **d)** 60°

3 **a)** $\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$ **d)** $\frac{\pi}{4}$

5 **a)** $\pi - 3 \approx 8.1°$ **b)** $\pi - 2 \approx 65.4°$
c) $2\pi - 5.5 \approx 44.9°$ **d)** $32\pi - 100 \approx 30.4°$

7 **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **9** **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$

11 **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $-\sqrt{3}$ **13** **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\sqrt{3}$

15 **a)** -2 **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **17** **a)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** 2

19 **a)** 0.412 **b)** 0.778 **21** **a)** 3.305 **b)** 0.472

23 **a)** 2.650 **b)** 3.179 **25** **a)** 24.83° **b)** 24°50′

27 **a)** 30.46° **b)** 30°27′

29 **a)** 74.88° **b)** 74°53′

31 **a)** 14.04° **b)** 14°2′

33 **a)** 76.38° **b)** 76°23′

35 **a)** 23.18° **b)** 23°11′

37 **a)** 0.9899 **b)** −0.1097 **c)** −0.1425
d) 0.7907 **e)** −11.2493 **f)** 1.3677

39 **a)** 214.3°, 325.7° **b)** 41.5°, 318.5°
c) 70.3°, 250.3° **d)** 133.8°, 313.8°
e) 153.6°, 206.4° **f)** 42.3°, 137.7°

41 **a)** 0.43, 2.71 **b)** 1.69, 4.59 **c)** 1.87, 5.01
d) 0.36, 3.50 **e)** 0.96, 5.32 **f)** 3.35, 6.07

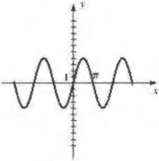
43 0.28 cm

45 **a)** El máximo ocurre cuando el sol sale en el este.
b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 35\%$

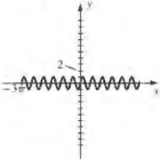
47 $(9, 9\sqrt{3})$

EJERCICIOS 5.5

1 **a)** $4, 2\pi$

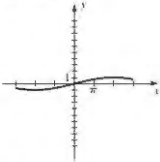


b) $1, \frac{\pi}{2}$

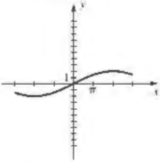


c) $\frac{1}{4}, 2\pi$

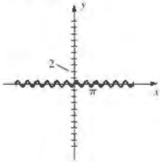
d) $1, 8\pi$



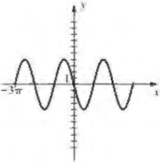
e) $2, 8\pi$



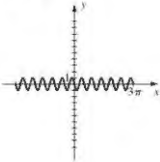
f) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$



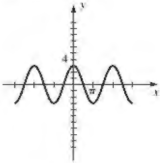
g) $4, 2\pi$



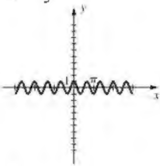
h) $1, \frac{\pi}{2}$



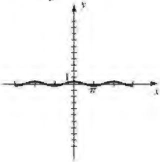
3 **a)** $3, 2\pi$



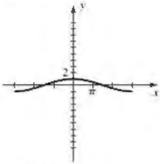
b) $1, \frac{2\pi}{3}$



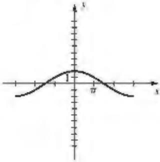
c) $\frac{1}{3}, 2\pi$



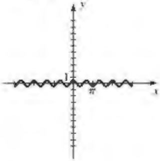
d) $1, 6\pi$



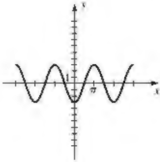
e) $2, 6\pi$



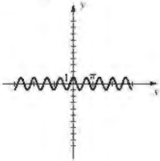
f) $\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}$



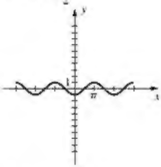
g) $3, 2\pi$



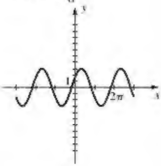
h) $1, \frac{2\pi}{3}$



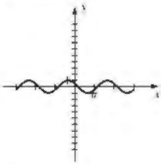
5 $1, 2\pi, \frac{\pi}{2}$



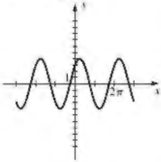
7 $3, 2\pi, -\frac{\pi}{6}$



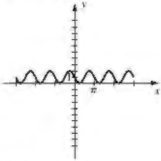
9 $1, 2\pi, -\frac{\pi}{3}$



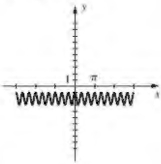
11 $4, 2\pi, \frac{\pi}{4}$



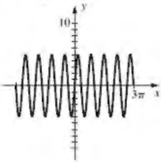
13 $1, \pi, \frac{\pi}{2}$



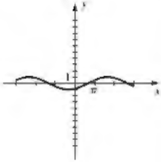
15 $1, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$



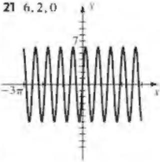
17 $5, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$



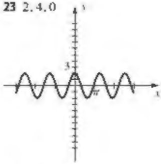
19 $1, 4\pi, \frac{2\pi}{3}$



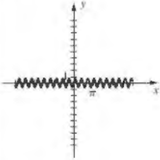
21 $6, 2, 0$



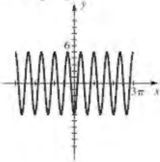
23 $2, 4, 0$



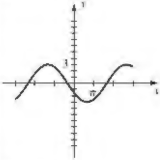
25 $\frac{3}{4}, 1, 0$



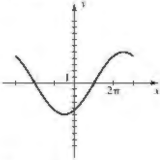
27 $5, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$



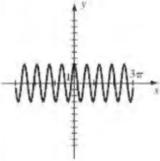
29 $3, 4\pi, \frac{2\pi}{3}$



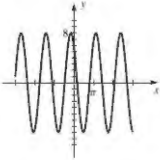
31 $5, 6\pi, -\frac{\pi}{2}$



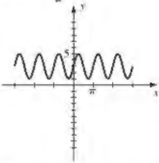
33 $3, 2, -4$



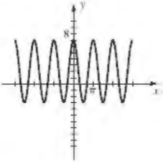
35 $8, 4, \frac{1}{2}$



37 $2, \pi, \frac{\pi}{2}$



39 $5, \pi, -\pi$

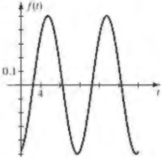


41 a) $4, 2\pi, -\pi$ b) $y = 4\,\text{sen}(x + \pi)$

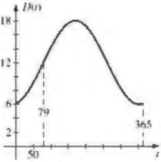
43 a) $2, 4, -3$ b) $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

45 4π **47** $a = 8, b = 4\pi$

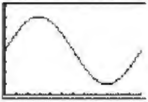
49



51



53 La temperatura es 20 °F a las 9:00 A.M. ($t = 0$). Incrementa a un máximo de 35 °F a las 3:00 P.M. ($t = 6$) y después disminuye a 20 °F a las 9:00 P.M. ($t = 12$). Continúa descendiendo a un mínimo de 5 °F a las 3:00 A.M. ($t = 18$). Posteriormente aumenta a las 20 °F a las 9:00 A.M. ($t = 24$).

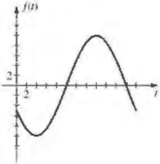


[0, 24, 2]por[0, 40, 5]

55 a) $f(t) = 10\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] + 0$, con $a = 10$,

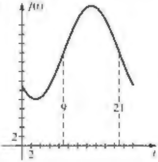
$b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{5\pi}{6}, d = 0$

b)

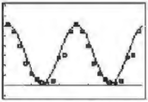


57 **a)** $f(t) = 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right] + 20$, con $a = 10$, $b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{3\pi}{4}$, $d = 20$

b)



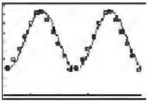
59 **a)**



[0.5, 24.5, 5]por[−1, 8]

b) $P(t) = 2.95 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3.15$

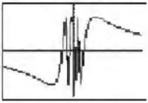
61 **a)**



[0.5, 24.5, 5]por[0, 20, 2]

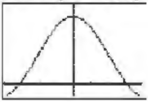
b) $D(t) = 6.42 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right) + 12.3$

63 A medida que $x \to 0^-$, o que $x \to 0^+$, y oscila entre -1 y 1 y no se aproxima a un valor único.



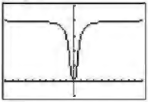
[−2, 2, 0.5]por[−1.33, 1.33, 0.5]

65 A medida que $x \to 0^-$, o que $x \to 0^+$, y parece aproximarse a 2.



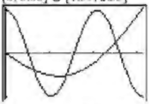
[−2, 2, 0.5]por[−0.33, 2.33, 0.33]

67 $y = 4$



[−20, 20, 2]por[−1, 5]

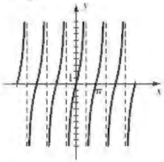
69 $[0, 0.66] \cup [1.39, 2.53]$



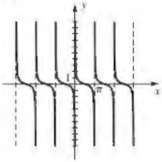
[0, π]por[−1.05, 1.05]

EJERCICIOS 5.6

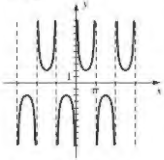
1 π



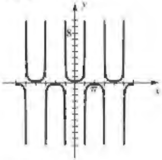
3 π



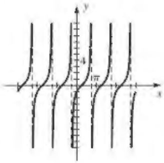
5 2π



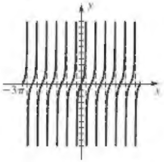
7 2π



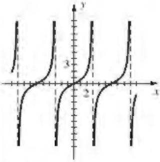
9 π



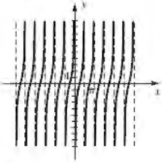
11 $\frac{\pi}{2}$



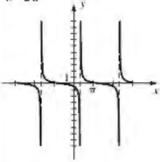
13 6



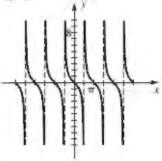
15 $\frac{\pi}{2}$



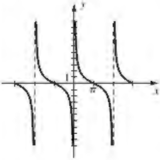
17 2π



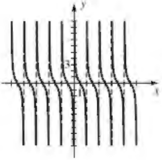
19 π



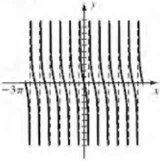
21 2π



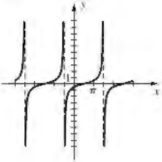
23 2



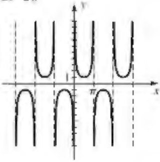
25 $\frac{\pi}{2}$



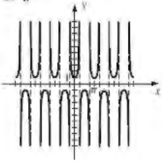
27 2π



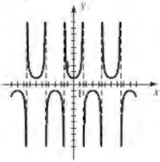
29 2π



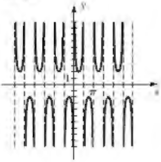
31 π



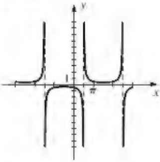
33 6



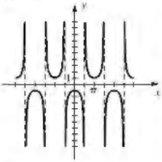
35 π



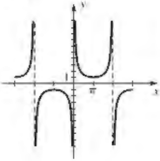
37 4π



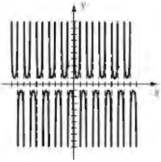
39 2π



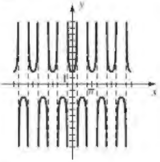
41 4π



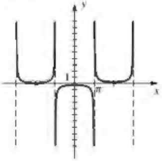
43 2



45 π



47 4π



49 $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ (otras respuestas son posibles)

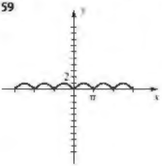
51 $\frac{3}{4}$ (otras respuestas son posibles)

53 $(2\pi, 3)$ (otras respuestas son posibles)

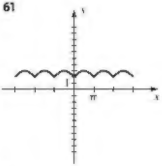
55 $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

57 $y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

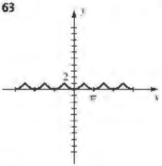
59



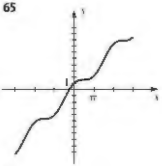
61



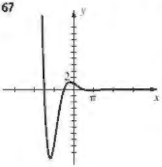
63



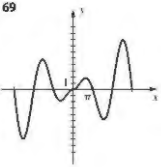
65



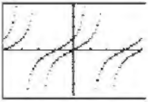
67



69

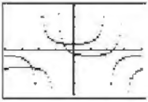


71



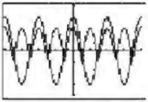
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

73



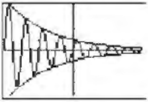
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

75



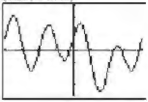
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4, 4]$

77 $e^{-x/4}$



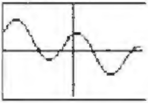
$[-2\pi, 2\pi, \pi/2]$ por $[-4.19, 4.19]$

79 $(-2.76, 3.09)$; $(1.23, -3.68)$



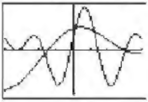
$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-4, 4]$

81 $[-0.70, 0.12]$



$[-2, 2]$ por $[-1.33, 1.33]$

83 $[-\pi, -1.31] \cup [0.11, 0.95] \cup [2.39, \pi]$



$[-\pi, \pi, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

85 **a)** I_0 **b)** $0.044I_0$ **c)** $0.603I_0$

87 **a)** $A_0e^{-\alpha z}$ **b)** $\frac{\alpha}{k}z_0$ **c)** $\frac{\ln 2}{\alpha}$

EJERCICIOS 5.7

1 $\beta = 60°, a = \frac{20}{3}\sqrt{3}, c = \frac{40}{3}\sqrt{3}$

3 $\alpha = 45°, a = b = 15\sqrt{2}$

5 $\alpha = \beta = 45°, c = 5\sqrt{2}$

7 $\alpha = 60°, \beta = 30°, a = 15$

9 $\beta = 53°, a \approx 18, c \approx 30$

11 $\alpha = 18°9', a \approx 78.7, c \approx 252.6$

13 $\alpha \approx 29°, \beta \approx 61°, c \approx 51$

15 $\alpha \approx 69°, \beta \approx 21°, a \approx 5.4$ **17** $b = c\cos\alpha$

19 $a = b\cot\beta$ **21** $c = a\csc\alpha$

23 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

25 $250\sqrt{3} + 4 \approx 437$ pies **27** 28,800 pies **29** 160 m

31 9659 pies **33** **a)** 58 pies **b)** 27 pies **35** $51°20'$

37 $16.3°$ **39** 2063 pies **41** 1,459,379 pies^2

43 $21.8°$ **45** 20.2 m **47** 29.7 km **49** 3944 millas

51 126 mi/hr

53 a) 45%

b) Cada satélite tiene un rango de señal superior a 120°.

55 $h = d\,\text{sen}\,\alpha + c$ 57 $h = \dfrac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$

59 $h = d(\tan\beta - \tan\alpha)$

61 N70°E; N40°O; S15°O; S25°E

63 a) 55 millas b) S63°E 65 324 millas

67 Amplitud, 10 cm; periodo, $\frac{1}{3}$; frecuencia, 3 oscilaciones/s.

El punto se encuentra en el origen en $t = 0$. Se mueve de forma ascendente con velocidad decreciente, alcanzando el punto con coordenadas 10 en $t = \frac{1}{12}$. Después revierte su dirección y se mueve hacia abajo, ganando velocidad hasta alcanzar el origen en $t = \frac{1}{6}$. Continúa avanzando hacia abajo con velocidad decreciente y alcanza el punto de coordenadas -10 en $t = \frac{1}{4}$. Posteriormente reviere su dirección y se mueve hacia arriba con velocidad creciente y regresa al origen en $t = \frac{1}{3}$.

69 Amplitud, 4 cm; periodo, $\frac{4}{3}$ s; frecuencia, $\frac{3}{4}$ oscilación/s.

El movimiento es similar al del ejercicio 67. Sin embargo, el punto comienza 4 unidades por debajo del origen y se mueve hacia abajo alcanzando el origen en $t = \frac{1}{3}$ y el punto con coordenadas -4 en $t = \frac{2}{3}$. Después revierte su dirección y se mueve hacia arriba para alcanzar el origen en $t = 1$ y su punto inicial en $t = \frac{4}{3}$.

71 $d = 5\cos\dfrac{2\pi}{3}t$

73 a) $y = 25\cos\dfrac{\pi}{15}t$

b) 324,000 pies

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO

1 $\dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{4}, -\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{\pi}{5}$

2 810°, −120°, 315°, 900°, 36°

3 a) 0.1 b) 0.2 m^2

4 a) $\dfrac{35\pi}{12}$ cm b) $\dfrac{175\pi}{16}$ cm^2

5 $\dfrac{200\pi}{3}, 90\pi$ 6 $\dfrac{100\pi}{3}, \dfrac{105\pi}{4}$

7 $x = 6\sqrt{3}; y = 3\sqrt{3}$ 8 $x = \dfrac{7}{2}\sqrt{2}; y = \dfrac{7}{2}\sqrt{2}$

9 $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$ 10 $\cot\theta = \sqrt{\csc^2\theta - 1}$

Ejercicios 11-20. Se presentan las comprobaciones usuales.

11 $$\begin{aligned}\text{sen}\,\theta(\csc\theta - \text{sen}\,\theta) &= \text{sen}\,\theta\csc\theta - \text{sen}^2\theta\\ &= 1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta\end{aligned}$$

12 $$\begin{aligned}\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) &= \cos\theta\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\\ &= \text{sen}\,\theta + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\\ &= \frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\\ &= \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \csc\theta\end{aligned}$$

13 $$\begin{aligned}(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) &= (\cos^2\theta - 1)(\sec^2\theta)\\ &= \cos^2\theta\sec^2\theta - \sec^2\theta\\ &= 1 - \sec^2\theta\end{aligned}$$

14 $$\begin{aligned}\frac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} &= \frac{\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta}{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}\\ &= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\end{aligned}$$

15 $$\frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta} + \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

16 $$\begin{aligned}\frac{\sec\theta + \csc\theta}{\sec\theta - \csc\theta} &= \frac{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}}{\dfrac{\text{sen}\,\theta - \cos\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}}\\ &= \frac{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{\text{sen}\,\theta - \cos\theta}\end{aligned}$$

17 $$\begin{aligned}\frac{\cot\theta - 1}{1 - \tan\theta} &= \frac{\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} - 1}{1 - \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\dfrac{\cos\theta - \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}\\ &= \frac{(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\cos\theta}{(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cot\theta\end{aligned}$$

18 $$\begin{aligned}\frac{1 + \sec\theta}{\tan\theta + \text{sen}\,\theta} &= \frac{1 + \dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{\cos\theta + 1}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\,\theta(1 + \cos\theta)}{\cos\theta}}\\ &= \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \csc\theta\end{aligned}$$

19 $$\begin{aligned}\frac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan\theta} &= \frac{-\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta} = -\frac{\tan\theta}{\tan\theta} - \frac{\cot\theta}{\tan\theta}\\ &= -1 - \cot^2\theta = -(1 + \cot^2\theta)\\ &= -\csc^2\theta\end{aligned}$$

20 $-\dfrac{1}{\csc(-\theta)} - \dfrac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = -\dfrac{1}{-\csc\theta} - \dfrac{-\cot\theta}{\sec\theta}$

$$= \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\theta/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta}$$

$$= \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$$

21 $\dfrac{\sqrt{33}}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{\sqrt{33}}{4}, \dfrac{4}{\sqrt{33}}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{7}{\sqrt{33}}$

22 **a)** $-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{13}}{3}, \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

c) $-1, 0, \mathrm{U}, 0, \mathrm{U}, -1$

23 **a)** II **b)** III **c)** IV

24 **a)** $-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{13}}{3}, \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

25 $(-1, 0); (0, -1); (0, 1); \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); (1, 0); \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

26 $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right); \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right); \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right); \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

27 **a)** $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{8}$ **b)** $65°, 43°, 8°$

28 **a)** $1, 0, \mathrm{U}, 0, \mathrm{U}, 1$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

c) $0, 1, 0, \mathrm{U}, 1, \mathrm{U}$

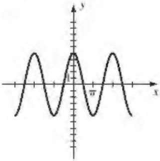
d) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, -2$

29 **a)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $-\dfrac{1}{2}$ **d)** -2

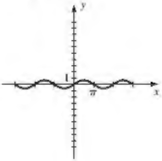
e) -1 **f)** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

30 $310.5°$ **31** $1.2206; 4.3622$ **32** $52.44°; 307.56°$

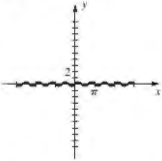
33 $5, 2\pi$



34 $\dfrac{2}{3}, 2\pi$

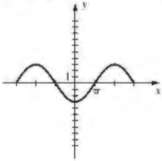


35 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$

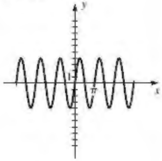


36 $\dfrac{1}{2}, 6\pi$

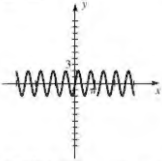
37 $3, 4\pi$



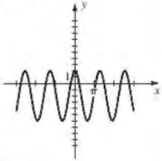
38 $4, \pi$



39 $2, 2$



40 $4, 4$



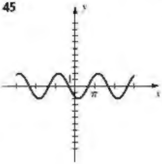
41 **a)** $1.43, 2$ **b)** $y = 1.43 \operatorname{sen} \pi x$

42 **a)** $3.27, 3\pi$ **b)** $y = -3.27 \operatorname{sen} \dfrac{2}{3} x$

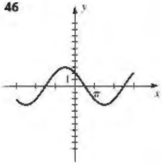
43 **a)** $3, \dfrac{4\pi}{3}$ **b)** $y = -3 \cos \dfrac{3}{2} x$

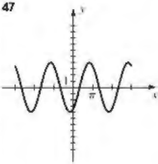
44 **a)** $2, 4$ **b)** $y = 2 \cos \dfrac{\pi}{2} x$

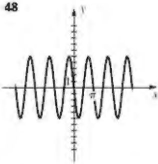
45

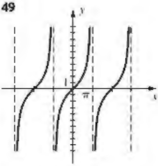


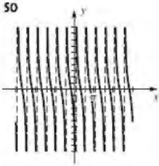
46

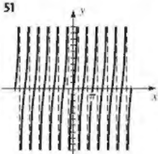


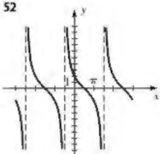
47


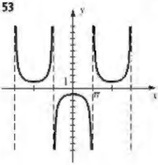
48


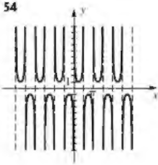
49


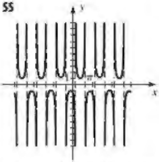
50


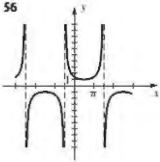
51


52


53


54


55


56


57 $\alpha = 30°$, $a \approx 23$, $c \approx 46$

58 $\beta = 35°20'$, $a \approx 310$, $c \approx 380$

59 $\alpha \approx 68°$, $\beta \approx 22°$, $c \approx 67$

60 $\alpha \approx 13°$, $\beta \approx 77°$, $b \approx 40$

61 **a)** $\frac{109\pi}{6}$ **b)** 440.2 **62** 1048 pies

63 0.093 millas/s **64** 52°

65 Aproximadamente 67 900 000 millas

66 762.1 pies

67 **a)** 6.76 pies **b)** 0.61 pies

68 $\frac{6\pi}{5}$ radianes = 216° **69** 250 pies

70 **a)** 231.0 pies **(b)** 434.5 **71** **b)** 2 millas

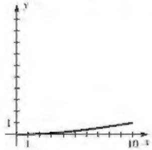
72 **a)** $T = h + d(\cos\alpha\tan\theta - \operatorname{sen}\alpha)$ **b)** 22.54 pies

73 **a)** $\frac{25}{3}\sqrt{3} \approx 14.43$ pies por vela **b)** 37.47°

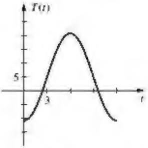
74 **b)** 4.69 **75** **a)** 74.05 pulgadas **b)** 24.75 pulgadas

76 **a)** $S = 4a^2 \operatorname{sen}\theta$ **b)** $V = \frac{4}{3}a^3 \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$

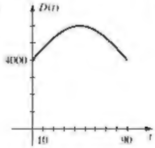
77 **a)** $h = R\sec\frac{s}{R} - R$ **b)** $h \approx 1650$ pies

78


79 $y = 98.6 + (0.3)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right)$

80 **a)**


b) 20.8 °C el 1 de julio

81 **a)**


b) 45 días en el verano

82 **a)** El corcho se encuentra en movimiento libre y armónico.
b) $1 \le t \le 2$

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

3 Ninguno

5 Los valores de y_1, y_2 y y_3 están muy próximos entre sí cerca de $x = 0$.

6 **a)** $x \approx -0.4161$, $y \approx 0.9093$
b) $x \approx -0.8838$, $y \approx -0.4678$

7 **a)** $x \approx 1.8415$, $y \approx -0.5403$
b) $x \approx -1.2624$, $y \approx 0.9650$

8 **a)** $\dfrac{500\pi}{3}$ rad/s **b)** $D(t) = 5\cos\left(\dfrac{500\pi}{3}t\right) + 18$
c) 10 revoluciones

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5

1 22.92 centímetros **2** 18.03 pulgadas cuadradas

3 6 pies cuadrados **4** 128°55′

5 **a)** 2400 π rad/min **b)** 1300 π pie/min

6 $\dfrac{5}{8}, \dfrac{\sqrt{39}}{8}, \dfrac{5}{\sqrt{39}}, \dfrac{\sqrt{39}}{5}, \dfrac{8}{\sqrt{39}}, \dfrac{8}{5}$

7 $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$

8 $\left(\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta}\right)\left(\dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta}\right) = \dfrac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} = 1 - \dfrac{1}{\csc^2\theta} =$
$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

9 $-\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{12}, -\dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{12}, -\dfrac{13}{5}$

10 $-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{3}$

11 $-\cos\theta$ **12** $\left(\dfrac{15}{17}, \dfrac{8}{17}\right)$

13 $\operatorname{sen}(-x)\sec^2(-x) = -\operatorname{sen}x\sec^2 x =$
$-\operatorname{sen}x\dfrac{1}{\cos^2 x} = -\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\dfrac{1}{\cos x} = -\tan x\sec x$

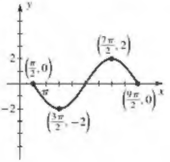
14 $\pi \le x < \dfrac{7\pi}{6}$ y $\dfrac{11\pi}{6} < x \le 2\pi$

15 $60 - 19\pi \approx 17.7°$ **16** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

17 50.5°; 309.5° **18** 2.07; 5.21 **19** 75 ciclos

20 Cualquier punto de la forma $(a, 2)$, donde $a = \frac{\pi}{2} + 6\pi n$ y n es un entero

21



22 $y = 3\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x + 2$ (otras respuestas son posibles)

23 $x = \dfrac{1}{3}\left(7 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $x = \dfrac{1}{3}\left(7 + \dfrac{\pi}{2}\right)$
(otras respuestas son posibles)

24 2π (otras respuestas son posibles)

25 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$ (otras respuestas son posibles)

26 $(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$ **27** $y = \left|\csc\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right|$

28 $\alpha = 45°, a = b = 10\sqrt{2}$

29 $\alpha = 16°46'; a \approx 247.4, c \approx 857.5$ **30** $a = b\tan\alpha$

31 105.8 pulgadas **32** 74.1 metros

CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1

Ejercicios 1-50: Se presentan las comprobaciones usuales para los ejercicios 1,5,9,…,49.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
$= \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \cot\theta\cos\theta$

5 $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \dfrac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta} = \dfrac{1/\operatorname{sen}^2\theta}{1/\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$
$= \left(\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 = \cot^2\theta$

9 $\dfrac{1}{1 - \cos\gamma} + \dfrac{1}{1 + \cos\gamma} = \dfrac{1 + \cos\gamma + 1 - \cos\gamma}{1 - \cos^2\gamma}$
$= \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\gamma} = 2\csc^2\gamma$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = (\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t)$
$= (\csc^2 t + \cot^2 t)(1)$
$= \csc^2 t + \cot^2 t$

17 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \dfrac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x + 1}$
$= \sec x - 1 = \dfrac{1}{\cos x} - 1 = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

21 $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r)$
$= (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(1)$
$= \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

25 $(\sec t + \tan t)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{\operatorname{sen}t}{\cos t}\right)^2 = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}t}{\cos t}\right)^2$
$= \dfrac{(1 + \operatorname{sen}t)^2}{\cos^2 t} = \dfrac{(1 + \operatorname{sen}t)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 t}$
$= \dfrac{(1 + \operatorname{sen}t)^2}{(1 + \operatorname{sen}t)(1 - \operatorname{sen}t)} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}t}{1 - \operatorname{sen}t}$

29 $\dfrac{1 + \csc\beta}{\cot\beta + \cos\beta} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \cos\beta} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta + 1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta}}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\beta + 1}{\cos\beta(1 + \operatorname{sen}\beta)} = \frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta$$

33 $$\text{RS} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$
$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$
$$= \text{LS}$$

37 $$\frac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} + \dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta\operatorname{sen}\beta}}$$
$$= \operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

41 $$\text{RS} = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi = (\sec^2\phi)^2 - 4\tan^2\phi$$
$$= (1 + \tan^2\phi)^2 - 4\tan^2\phi$$
$$= 1 + 2\tan^2\phi + \tan^4\phi - 4\tan^2\phi$$
$$= 1 - 2\tan^2\phi + \tan^4\phi$$
$$= (1 - \tan^2\phi)^2 = \text{LS}$$

45 $\log 10^{\tan t} = \log_{10} 10^{\tan t} = \tan t$, dado que $\log_a a^x = x$.

49 $$\ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln\left|\frac{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}\right|$$
$$= \ln|1| - \ln|\sec\theta - \tan\theta|$$
$$= -\ln|\sec\theta - \tan\theta|$$

Ejercicios 51-60: Se proporciona el valor típico de t o θ y su no igualdad resultante.

51 $\pi, -1 \neq 1$ **53** $\dfrac{3\pi}{2}, 1 \neq -1$ **55** $\dfrac{\pi}{4}, 2 \neq 1$

57 $\pi, -1 \neq 1$ **59** $\dfrac{\pi}{4}, \cos\sqrt{2} \neq 1$

61 No es una identidad **63** Identidad

65 $\tan^2\theta$ **67** $\dfrac{1}{a}\cot\theta\csc\theta$ **69** $\operatorname{sen}^4\theta$

71 $a\operatorname{sen}\theta\tan\theta$ **73** $a^2\operatorname{sen}^2\theta\tan^2\theta$ **75** $\operatorname{sen}\theta$

77 La gráfica de f parece ser igual a $y = g(x) = -1$.
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x)\cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{-\tan^2 x\cos^4 x}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{-(\operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x)\cos^4 x}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{-\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = -1$$

79 La gráfica de f parece ser igual a $y = g(x) = \cos x$.
$$\sec x(\operatorname{sen}x\cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen}x$$
$$= \sec x\cos x(\operatorname{sen}x + \cos x) - \operatorname{sen}x$$
$$= (\operatorname{sen}x + \cos x) - \operatorname{sen}x = \cos x$$

EJERCICIOS 6.2

Ejercicios 1-42: n se refiere a cualquier entero.

1 $\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n, \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n$ **3** $\dfrac{\pi}{3} + \pi n$

5 $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n$

7 Sin solución, dado que $\dfrac{\pi}{2} > 1$.

9 Todos los θ, con excepción de $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$

11 $\dfrac{\pi}{12} + \pi n, \dfrac{11\pi}{12} + \pi n$ **13** $\dfrac{\pi}{2} + 3\pi n$

15 $-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n, \dfrac{7\pi}{12} + 2\pi n$

17 $\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \dfrac{7\pi}{12} + \pi n$ **19** $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n$

21 $\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n$ **23** πn

25 $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n$ **27** $\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \dfrac{2\pi}{3} + \pi n$

29 $\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \dfrac{5\pi}{6} + \pi n$ **31** $\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n, \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n$

33 $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$

35 $\dfrac{\pi}{12} + \pi n, \dfrac{5\pi}{12} + \pi n$ **37** $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$

39 $e^{\pi/2 + \pi n}$ **41** $2\pi n$ **43** $\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}$

45 $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ **47** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

49 $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **51** $0, \pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

53 $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ **55** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ **57** Sin solución

59 $\dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$ **61** $0, \dfrac{\pi}{2}$ **63** $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

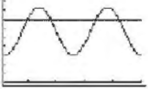
65 Todos los α en $[0, 2\pi)$, con excepción de $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$, y $\dfrac{3\pi}{2}$

67 $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ **69** $\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

71 15°30', 164°30' **73** 135°, 315°, 116°30', 296°30'

75 41°50', 138°10', 194°30', 345°30' **77** 10

79 **a)**

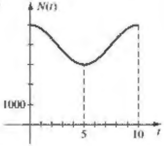


[1, 25, 5] por [0, 100, 10]

b) Julio: 83 °F; Oct.: 56.5 °F **c)** De mayo a septiembre

81 $t \approx 3.50$ y $t \approx 8.50$ **83** **a)** 3.29 **b)** 4

85 **a)**

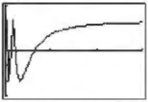


b) $0 \leq t < \frac{5}{3}$ y $\frac{25}{3} < t \leq 10$

87 $A\left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), B\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$
$C\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), D\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

89 $\frac{7}{360}$ **91** $[0, 1.27] \cup [5.02, 2\pi]$ **93** $(0.31, 3.45)$

95



$[0, 3]$ por $[-1.5, 1.5, 0.5]$

a) 0.6366 **b)** Se aproxima a $y = 1$

c) Una cantidad infinita de ceros

97 5.400 **99** 3.619 **101** $-1.48, 1.08$ **103** ± 1.00

105 $\pm 0.64, \pm 2.42$ **107** **a)** $37.6°$ **b)** $52.5°$

EJERCICIOS 6.3

1 **a)** $\cos 74°40'$ **b)** $\operatorname{sen} 16°48'$ **c)** $\cot \frac{\pi}{3}$
d) $\csc 72.72°$

3 **a)** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}$ **b)** $\cos\left(\frac{2\pi - 1}{4}\right)$ **c)** $\cot\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$

d) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - 0.53\right)$

5 **a)** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7 **a)** $\sqrt{3} + 1$ **b)** $-2 - \sqrt{3}$

9 **a)** $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

11 $\cos 17°$ **13** $\operatorname{sen} 21°$ **15** $\operatorname{sen}(-5)$

17 $\frac{12\sqrt{3} - 5}{26}$ **19** $\frac{\sqrt{2} - 4}{6}$ **21** $\sqrt{3}$

23 **a)** $\frac{77}{85}$ **b)** $\frac{36}{85}$ **c)** I

25 **a)** $-\frac{24}{25}$ **b)** $-\frac{24}{7}$ **c)** IV

27 **a)** $\frac{3\sqrt{21} - 8}{25} \approx 0.23$ **b)** $\frac{4\sqrt{21} + 6}{25} \approx 0.97$
c) I

29 $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = \operatorname{sen}\theta \cos\pi + \cos\theta \operatorname{sen}\pi$
$= \operatorname{sen}\theta(-1) + \cos\theta(0) = -\operatorname{sen}\theta$

31 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cos\frac{5\pi}{2} - \cos x \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}$
$= -\cos x$

33 $\cos(\theta - \pi) = \cos\theta\cos\pi + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\pi = -\cos\theta$

35 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$
$= \operatorname{sen} x$

37
$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{2} - \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos x \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$$

39 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$
$= \cot(-\theta) = -\cot\theta$

41
$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$$

43
$$\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan u + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan u \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$$

45 $\cos(u + v) + \cos(u - v)$
$= (\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) +$
$(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)$
$= 2\cos u \cos v$

47 $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v)$
$= (\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v) \cdot$
$(\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v)$
$= \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v - \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u(1 - \operatorname{sen}^2 v) - (1 - \operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v - \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

49
$$\frac{1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} = \frac{1}{\frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\beta \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

51 $\text{sen}\,u \cos v \cos w + \cos u\, \text{sen}\,v \cos w + \cos u \cos v\, \text{sen}\,w - \text{sen}\,u\, \text{sen}\,v\, \text{sen}\,w$

53 $$\begin{aligned}\cot(u+v) &= \frac{\cos(u+v)}{\text{sen}(u+v)}\\ &= \frac{(\cos u \cos v - \text{sen}\,u\,\text{sen}\,v)(1/\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v)}{(\text{sen}\,u \cos v + \cos u\,\text{sen}\,v)(1/\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v)}\\ &= \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u}\end{aligned}$$

55 $$\begin{aligned}\text{sen}(u-v) &= \text{sen}[u + (-v)]\\ &= \text{sen}\,u \cos(-v) + \cos u\,\text{sen}(-v)\\ &= \text{sen}\,u \cos v - \cos u\,\text{sen}\,v\end{aligned}$$

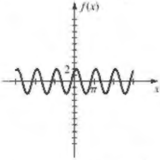
57 $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}\\ &= \frac{\cos x \cos h - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,h - \cos x}{h}\\ &= \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,h}{h}\\ &= \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \text{sen}\,x\left(\frac{\text{sen}\,h}{h}\right)\end{aligned}$$

59 **a)** Cada lado ≈ 0.0523 **b)** $\alpha = 60°$
c) $\alpha = 60°, \beta = 3°$

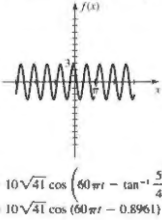
61 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ **63** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

65 $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{4}$ es extraño

67 **a)** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $2, \pi, \frac{\pi}{12}$
c)



69 **a)** $f(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{12}$
c)



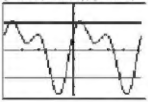
71 $$\begin{aligned}y &= 10\sqrt{41}\cos\left(60\pi t - \tan^{-1}\frac{5}{4}\right)\\ &\approx 10\sqrt{41}\cos(60\pi t - 0.8961)\end{aligned}$$

73 **a)** $y = \sqrt{13}\cos(t - C)$ con $\tan C = \frac{3}{2}$; $\sqrt{13}, 2\pi$
b) $t = C + \frac{\pi}{2} + \pi n \approx 2.55 + \pi n$ para cada entero no negativo n

75 **a)** $$\begin{aligned}p(t) &= A\,\text{sen}\,\omega t + B\,\text{sen}(\omega t + \tau)\\ &= A\,\text{sen}\,\omega t + B(\text{sen}\,\omega t \cos\tau + \cos\omega t\,\text{sen}\,\tau)\\ &= (B\,\text{sen}\,\tau)\cos\omega t + (A + B\cos\tau)\,\text{sen}\,\omega t\\ &= a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t\end{aligned}$$
con $a = B\,\text{sen}\,\tau$ y $b = A + B\cos\tau$
b) $$\begin{aligned}C^2 &= (B\,\text{sen}\,\tau)^2 + (A + B\cos\tau)^2\\ &= B^2\,\text{sen}^2\tau + A^2 + 2AB\cos\tau + B^2\cos^2\tau\\ &= A^2 + B^2(\text{sen}^2\tau + \cos^2\tau) + 2AB\cos\tau\\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\tau\end{aligned}$$

77 **a)** $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\tau \le A^2 + B^2 + 2AB$, entonces $\cos\tau \le 1$ y $A > 0$ $B > 0$. Así, $C^2 \le (A+B)^2$, y por lo tanto $C \le A + B$.
b) $0, 2\pi$ **c)** $\cos\tau > -B/(2A)$

79 $(-2.97, -2.69), (-1.00, -0.37), (0.17, 0.46), (2.14, 2.77)$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-5, 5]$

EJERCICIOS 6.4

1 $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ **3** $-\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, -\frac{120}{119}$ **5** $\frac{3}{5}$

7 $\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3}$ **9** $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{2}$

11 $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2} - 1$ **13** $-\frac{4}{5}$

15 **a)** $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt{2} + 1$

17 $\text{sen}\,10\theta = \text{sen}(2 \cdot 5\theta) = 2\,\text{sen}\,5\theta\cos 5\theta$

19 $$\begin{aligned}4\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \cdot 2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} &= 2\,\text{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)\\ &= 2\,\text{sen}\,x\end{aligned}$$

21 $$\begin{aligned}\text{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2(1+\cos x)}\\ &= \frac{1-\cos^2 x}{2(1+\cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{2(1+\cos x)}\end{aligned}$$

23 $$\begin{aligned}(\text{sen}\,t + \cos t)^2 &= \text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\,t\cos t + \cos^2 t\\ &= 1 + \text{sen}\,2t\end{aligned}$$

25 $$\begin{aligned}\text{sen}\,3u &= \text{sen}(2u + u)\\ &= \text{sen}\,2u\cos u + \cos 2u\,\text{sen}\,u\\ &= (2\,\text{sen}\,u\cos u)\cos u + (1 - 2\,\text{sen}^2 u)\,\text{sen}\,u\\ &= 2\,\text{sen}\,u\cos^2 u + \text{sen}\,u - 2\,\text{sen}^3 u\\ &= 2\,\text{sen}\,u(1 - \text{sen}^2 u) + \text{sen}\,u - 2\,\text{sen}^3 u\\ &= 2\,\text{sen}\,u - 2\,\text{sen}^3 u + \text{sen}\,u - 2\,\text{sen}^3 u\\ &= 3\,\text{sen}\,u - 4\,\text{sen}^3 u = \text{sen}\,u(3 - 4\,\text{sen}^2 u)\end{aligned}$$

27 $\cos 4\theta = \cos(2 \cdot 2\theta) = 2\cos^2 2\theta - 1$
$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$
$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$
$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

29 $$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 t = (\operatorname{sen}^2 t)^2 &= \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4t\\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\end{aligned}$$

31 $$\begin{aligned}\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta - 1} &= \frac{1}{2\left(\dfrac{1}{\sec^2\theta}\right) - 1}\\ &= \frac{1}{\dfrac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}} = \frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}\end{aligned}$$

33 $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 2\operatorname{sen}^2 2t + \cos(2 \cdot 2t)$
$= 2\operatorname{sen}^2 2t + (1 - 2\operatorname{sen}^2 2t) = 1$

35 $$\begin{aligned}\tan 3u = \tan(2u+u) &= \frac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}\\ &= \frac{\dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u} + \tan u}{1 - \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}\cdot \tan u}\\ &= \frac{\dfrac{2\tan u + \tan u - \tan^3 u}{1-\tan^2 u}}{\dfrac{1-\tan^2 u - 2\tan^2 u}{1-\tan^2 u}}\\ &= \frac{3\tan u - \tan^3 u}{1 - 3\tan^2 u} = \frac{\tan u(3-\tan^2 u)}{1-3\tan^2 u}\end{aligned}$$

37 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

39 $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{8}\cos 2\theta$

41 $\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 4x + \dfrac{1}{8}\cos 8x$ **43** $0, \pi, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$

45 $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, \pi$ **47** $0, \pi$ **49** $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

51 $0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

55 **a)** 1.20, 5.09

b) $P\left(\dfrac{2\pi}{3}, -1.5\right), Q(\pi, -1), R\left(\dfrac{4\pi}{3}, -1.5\right)$

57 **a)** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ **b)** $0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

59 **b)** Sí, el punto B se encuentra a 25 millas de A.

61 **a)** $V = \dfrac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$ **b)** 53.13° **63** **b)** 12.43 mm

65 La gráfica de f parece ser igual a $y = g(x) = \tan x$.
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\cos 2x + \cos x + 1} &= \frac{2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen} x}{(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos x + 1)}{\cos x(2\cos x + 1)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

67 $-3.55, 5.22$

69 $-2.03, -0.72, 0.58, 2.62$ **71** -2.59

EJERCICIOS 6.5

1 $\dfrac{1}{2}\cos 6t - \dfrac{1}{2}\cos 8t$ **3** $\dfrac{1}{2}\cos 2u + \dfrac{1}{2}\cos 10u$

5 $\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ **7** $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 3x + \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} x$

9 $2\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta$ **11** $-2\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen} x$

13 $-2\cos 6t\operatorname{sen} 3t$ **15** $2\cos\dfrac{3}{2}x\cos\dfrac{1}{2}x$

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \dfrac{2\operatorname{sen} 5t\cos t}{2\operatorname{sen} 5t\operatorname{sen} t} = \cot t$

19 $$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}\\ &= \tan\frac{1}{2}(u+v)\end{aligned}$$

21 $$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v} &= \frac{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-v)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}\\ &= \cot\frac{1}{2}(u+v)\tan\frac{1}{2}(u-v)\\ &= \frac{\tan\frac{1}{2}(u-v)}{\tan\frac{1}{2}(u+v)}\end{aligned}$$

23 $4\cos x\cos 2x\operatorname{sen} 3x = 2\cos 2x\,(2\operatorname{sen} 3x\cos x)$
$= 2\cos 2x\,(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$
$= (2\cos 2x\operatorname{sen} 4x) + (2\cos 2x\operatorname{sen} 2x)$
$= [\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen}(-2x)] + (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 0)$
$= \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$

25 $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}[(a+b)x] + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}[(a-b)x]$ **27** $\dfrac{\pi}{4}n$

29 $\dfrac{\pi}{2}n$ **31** $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n, \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n$

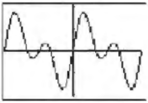
33 $\dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2\pi}{7}n, \dfrac{2\pi}{3}n$ **35** $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$

37 $0, \pi, 2\pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

39 $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{l}(x + kt) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi n}{l}(x - kt)$

41 **a)** $0, \pm 1.05, \pm 1.57, \pm 2.09, \pm 3.14$

b) $0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi$



$[-3.14, 3.14, \pi/4]$ por $[-2.09, 2.09]$

43 La gráfica de f parece ser igual a $y = g(x) = \tan 2x$.

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\operatorname{sen} 2x + (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)}{\cos 2x + (\cos 3x + \cos x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{\cos 2x + 2 \cos 2x \cos x}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x(1 + 2\cos x)}{\cos 2x(1 + 2\cos x)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

EJERCICIOS 6.6

1 **a)** $-\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{2\pi}{3}$ **c)** $-\frac{\pi}{3}$

3 **a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$

5 **a)** No está definido **b)** No está definido **c)** $\frac{\pi}{4}$

7 **a)** $-\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 14

9 **a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{5\pi}{6}$ **c)** $-\frac{\pi}{6}$

11 **a)** $-\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $-\frac{\pi}{4}$

13 **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** No está definido

15 **a)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{34}}{5}$ **c)** $\frac{4}{\sqrt{15}}$

17 **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** 0 **c)** $-\frac{77}{36}$

19 **a)** $-\frac{336}{625}$ **b)** $-\frac{161}{289}$ **c)** $\frac{24}{7}$

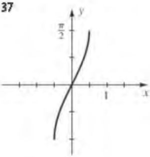
21 **a)** $-\frac{1}{10}\sqrt{2}$ **b)** $\frac{4}{17}\sqrt{17}$ **c)** $\frac{1}{2}$

23 $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **25** $\frac{x}{3}$ **27** $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

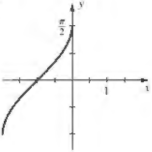
29 $2x\sqrt{1-x^2}$ **31** $\frac{2\sqrt{x^2-1}}{2-x^2}$ **33** $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

35 **a)** $-\frac{\pi}{2}$ **b)** 0 **c)** $\frac{\pi}{2}$

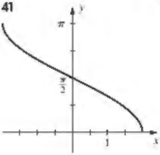
37



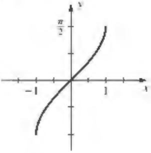
39



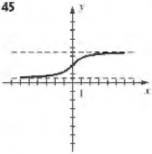
41



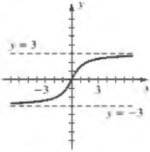
43



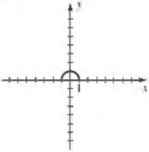
45



47



49



51 **a)** $2 \le x \le 4$

b) $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

c) $x = \operatorname{sen} 2y + 3$

53 **a)** $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ **b)** $0 \le y \le 4\pi$

c) $x = \frac{3}{2}\cos\frac{1}{4}y$

55 $x = \operatorname{sen}^{-1}(-y-3)$ **57** $x = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(15-y)\right]$

59 $x = x_R$ o $x = \pi - x_R$, donde $x_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} y\right)$

61 $\cos^{-1}\left(-1+\sqrt{2}\right) \approx 1.1437$,
$2\pi - \cos^{-1}\left(-1+\sqrt{2}\right) \approx 5.1395$

63 $\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9+\sqrt{57}) \approx -0.3478$,

$\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9-\sqrt{57}) \approx -1.3337$

65 $\cos^{-1}\frac{1}{5}\sqrt{15} \approx 0.6847$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}\right) \approx 2.4569$,

$\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.9553$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 2.1863$

67 $\operatorname{sen}^{-1}\left(\pm\frac{1}{6}\sqrt{30}\right) \approx \pm 1.1503$

69 $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 2.2143$, $\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 1.2310$,

$2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 4.0689$, $2\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 5.0522$

71 $\cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 0.8411$, $2\pi - \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 5.4421$,

$\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$, $\frac{5\pi}{3} \approx 5.2360$

73 **a)** 1.65 m **b)** 0.92 m **c)** 0.43 m **75** 3.07°

77 **a)** $\alpha = \theta - \operatorname{sen}^{-1}\frac{d}{k}$ **b)** 40°

79 Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $\beta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ con

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Así, $\operatorname{sen}\alpha = x$

y $\operatorname{sen}\beta = x$. Como la función de seno es uno a uno en

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos $\alpha = \beta$.

81 Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}(-x)$ y $\beta = \operatorname{arcsen} x$ con

$-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ Por lo tanto,

$\operatorname{sen}\alpha = -x$ and $\operatorname{sen}\beta = x$. Por lo tanto,
$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta = \sin(-\beta)$. Como la función seno

es uno a uno en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que $\alpha = -\beta$.

83 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan(1/x)$. Entonces $x > 0$,

tenemos $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; por lo tanto,

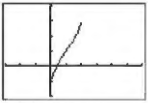
$0 < \alpha + \beta < \pi$. Así,

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + (1/x)}{1 - x\cdot(1/x)} =$

$\frac{x+(1/x)}{0}$. Como el denominador es 0, $\tan(\alpha+\beta)$ está

indefinida y por ello $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

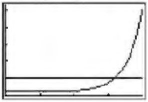
85 Dominio: $[0, 2]$; rango: $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



$[-3, 6]$ por $[-2, 4]$

87 0.29

89 $\theta \approx 1.25 \approx 72°$



$[0, 1.57, \pi/8]$ por $[0, 1.05, 0.2]$

91 $\tan^{-1} 1 = 45°$ **93** $\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 26.6°$

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = (\csc^2 x)(\operatorname{sen}^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\tan\theta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

3 $\frac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{(\tan^2\theta)\cot\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

$= \frac{\tan\theta}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta}{1/\cos\theta}$

$= \operatorname{sen}\theta$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2$

$= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}\right)^2$

$= \frac{1}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x\csc^2 x$

5 $\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t} = \frac{1-\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$

$= \frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos t}$

$= \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\cdot\sec t$

$= (\sec t - \tan t)\sec t$

6 $\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}$

$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u} = \dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\cot u}}{1-\dfrac{1}{\cot^2 u}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cot u}}{\dfrac{\cot^2 u - 1}{\cot^2 u}}$

$= \dfrac{2\cot u}{\cot^2 u - 1} = \dfrac{2\cot u}{(\csc^2 u - 1) - 1} = \dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$

8 $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1+\cos v}{2} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sec v}}{2} = \dfrac{\dfrac{\sec v + 1}{\sec v}}{2}$

$= \dfrac{1+\sec v}{2\sec v}$

9 $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi}$

$= \dfrac{(\tan\phi - \cot\phi)(\tan^2\phi + \tan\phi\cot\phi + \cot^2\phi)}{[\tan^2\phi + (1+\cot^2\phi)]}$

$= \tan\phi - \cot\phi$

10 $\text{LS} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} u} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} v}} = \dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\dfrac{\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\text{RS} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \csc u \csc v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}}$

$= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

Dado que LS y RS son iguales a la misma expresión y los pasos son reversibles, se corrobora la identidad.

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3 \left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{\tan^{12} x}\right)\left(\dfrac{\csc^6 x}{\cot^{12} x}\right) = \dfrac{(\operatorname{sen} x \csc x)^6}{(\tan x \cot x)^{12}}$

$= \dfrac{(1)^6}{(1)^{12}} = 1$

12 $\dfrac{\cos\gamma}{1-\tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1-\cot\gamma} = \dfrac{\cos\gamma}{\dfrac{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\dfrac{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}}$

$= \dfrac{\cos^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}$

$= \dfrac{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$

$= \dfrac{(\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma)(\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma)}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$

$= \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = \dfrac{\cos t}{\sec t - \tan t} = \dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}$

$= \dfrac{\cos t}{\dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{\cos t}} = \dfrac{\cos^2 t}{1 - \operatorname{sen} t} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{1 - \operatorname{sen} t}$

$= \dfrac{(1 - \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen} t)}{1 - \operatorname{sen} t} = 1 + \operatorname{sen} t$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{-\cot t - \csc t}{-\operatorname{sen} t} = \dfrac{\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}}{\operatorname{sen} t}$

$= \dfrac{\cos t + 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{\cos t + 1}{1 - \cos^2 t}$

$= \dfrac{\cos t + 1}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \dfrac{1}{1 - \cos t}$

15 $\sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)}{(1+\cos t)}\cdot\dfrac{(1-\cos t)}{(1-\cos t)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)^2}{1-\cos^2 t}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\cos t)^2}{\operatorname{sen}^2 t}} = \dfrac{|1-\cos t|}{|\operatorname{sen} t|} = \dfrac{1-\cos t}{|\operatorname{sen} t|},$

dado que $(1 - \cos t) \geq 0$.

16 $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)}\cdot\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}}$

$= \dfrac{|\cos\theta|}{|1+\operatorname{sen}\theta|} = \dfrac{|\cos\theta|}{1+\operatorname{sen}\theta},$

dado que $(1 + \operatorname{sen}\theta) \geq 0$.

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \cos x\cos\dfrac{5\pi}{2} + \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2} = \operatorname{sen} x$

18 $\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x + \tan\dfrac{3\pi}{4}}{1 - \tan x\tan\dfrac{3\pi}{4}} = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\beta = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2\cdot 2\beta) = \dfrac{1}{4}(2\operatorname{sen} 2\beta\cos 2\beta)$

$= \dfrac{1}{2}(2\operatorname{sen}\beta\cos\beta)(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)$

$= \operatorname{sen}\beta\cos^3\beta - \cos\beta\operatorname{sen}^3\beta$

20 $\tan\dfrac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 2\operatorname{sen} 4\theta\cos 4\theta$

$= 2(2\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta)(1 - 2\sin^2 2\theta)$

$= 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)[1 - 2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2]$

$= 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta)$

22 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$. Debido a que $-1 < x < 1$, $-\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. Entonces, $\tan\alpha = x$ y $\tan\beta = \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$. Como la función tangente es uno a uno en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos que $\beta = 2\alpha$ o, lo que es equivalente, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

23 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **24** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **25** $0, \pi$

26 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **27** $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

28 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **29** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

30 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$ **31** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

32 Todas las x en $[0, 2\pi)$, con excepción de $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

33 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **34** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

35 $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \frac{23}{4}$ **36** $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

37 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **38** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

39 $0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

40 $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ **41** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

42 $-2 - \sqrt{3}$ **43** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **44** $\frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

45 $\frac{84}{85}$ **46** $-\frac{13}{85}$ **47** $-\frac{84}{13}$ **48** $-\frac{36}{77}$

49 $\frac{36}{85}$ **50** $-\frac{36}{85}$ **51** $\frac{77}{85}$ **52** $\frac{77}{85}$ **53** $\frac{240}{289}$

54 $-\frac{161}{289}$ **55** $\frac{24}{7}$ **56** $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ **57** $\frac{1}{3}$ **58** $\frac{5}{34}\sqrt{34}$

59 **a)** $\frac{1}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos 11t$

b) $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{12}u + \frac{1}{2}\cos\frac{5}{12}u$

c) $3 \operatorname{sen} 8x - 3 \operatorname{sen} 2x$ **d)** $2 \operatorname{sen} 10\theta - 2 \operatorname{sen} 4\theta$

60 **a)** $2 \operatorname{sen} 5u \cos 3u$ **b)** $2 \operatorname{sen}\frac{11}{2}\theta \operatorname{sen}\frac{5}{2}\theta$

c) $2\cos\frac{9}{40}t \operatorname{sen}\frac{1}{40}t$ **d)** $6 \cos 4x \cos 2x$

61 $\frac{\pi}{6}$ **62** $\frac{\pi}{4}$ **63** $\frac{\pi}{3}$ **64** π **65** $-\frac{\pi}{4}$

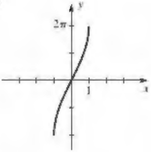
66 $\frac{3\pi}{4}$ **67** $\frac{1}{2}$ **68** 2 **69** No está definido

70 No está definido **71** No está definido **72** $\frac{\pi}{2}$

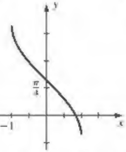
73 $\frac{240}{289}$ **74** $-\frac{7}{25}$ **75** $\frac{7}{25}$ **76** $\frac{1}{2}$

77

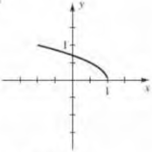
78



79



80



81
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos[(\alpha + \beta) + \gamma] \\ &= \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\gamma \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\cos\gamma - \\ &\quad (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\gamma \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \\ &\quad \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}$$

82 **b)** $t = 0, \pm\frac{\pi}{4b}$ **c)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}A$

83 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

84 **a)** $x = 2d \tan\frac{1}{2}\theta$ **b)** $d \le 1000$ pies

85 **a)** $d = r\left(\sec\frac{1}{2}\theta - 1\right)$ **b)** 43°

86 **a)** 78.7° **(b)** 61.4°

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 *Pista:* El factor $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$ como la diferencia de los cubos.

2 $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \begin{cases} a\cos\theta & \text{si } 0 \le \theta \le \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 \le \theta < 2\pi \\ -a\cos\theta & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

3 45; aproximadamente 6.164

4 El cociente diferencial para la función seno parece ser la función coseno.

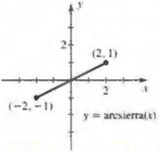
5 *Pista:* Escriba la ecuación en la forma $\frac{\pi}{4} + \alpha = 4\theta$ y obtenga la tangente de ambos lados.

6 **a)** La función inversa de diente de sierra, con notación sierra^{-1}, se define por $y = \text{sierra}^{-1}$ si $x = \text{sierra}$ y para $-2 \le x \le 2$ y $-1 \le y \le 1$.

b) 0.85; −0.4

c) $\text{sierra}\,(\text{sierra}^{-1}\,x) = x$ si $-2 \le x \le 2$;
$\text{sierra}^{-1}\,(\text{sierra}\,y) = y$ si $-1 \le y \le 1$

d)



CAPÍTULO 6 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 $\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)^{-1} = (\csc x - \cot x)^{-1} = \dfrac{1}{\csc x - \cot x}$

$= \dfrac{1}{\csc x - \cot x} \cdot \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} = \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$

$= \dfrac{\csc x + \cot x}{1} = \csc x + \cot x$

2 $\dfrac{\tan x}{1 + \sec x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 + \dfrac{1}{\cos x}} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$= \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x + 1}{\cos x}} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x} = \dfrac{2 + 2\cos x}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x}$

$= \dfrac{2(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)\operatorname{sen} x} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x$

3 $x = \dfrac{3\pi}{4}, -1 \ne 1$ **4** $\dfrac{1}{a^3}\cot\theta\csc\theta$

5 $3 + 8n$ o $5 + 8n$, donde n es un entero

6 $\dfrac{1}{4}(2\pi n - 3)$, donde n es un entero

7 $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ o πn, donde n es un entero

8 $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n$ **9** $\dfrac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

10 $\dfrac{1}{26}(5 - 12\sqrt{3})$ **11** $\dfrac{84}{13}$

12 $\cos\left(x + \dfrac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos\dfrac{5\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2}$

$= (\cos x)(0) - (\operatorname{sen} x)(1) = -\operatorname{sen} x$

13 1, 5, 9 **14** $-\dfrac{120}{169}, \dfrac{119}{169}, -\dfrac{120}{119}$

15 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2}$

16 $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x$

$= (2\operatorname{sen} x \cos x)\cos x + (2\cos^2 x - 1)\operatorname{sen} x$

$= \operatorname{sen} x\,[2\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)]$

$= \operatorname{sen} x\,(4\cos^2 x - 1)$

17 $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \pi$ **18** $2\cos 8x + 2\cos 6x$

19 $2\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x$

20 $\dfrac{\cos 8x + \cos 4x}{\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 4x} = \dfrac{2\cos\dfrac{8x + 4x}{2}\cos\dfrac{8x - 4x}{2}}{2\cos\dfrac{8x + 4x}{2}\operatorname{sen}\dfrac{8x - 4x}{2}}$

$= \dfrac{\cos\dfrac{4x}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{4x}{2}} = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \cot 2x$

21 $x = \dfrac{\pi}{4}n$ o $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}n$ **22** $-\dfrac{\pi}{6}$

23 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ **24** $-\dfrac{527}{625}$ **25** $2\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 - 1$

26 $\dfrac{\pi}{6}$ **27** $x = \dfrac{5}{2}\cos\dfrac{1}{3}y$

28 $\cos^{-1}(-2 + \sqrt{3}) \approx 1.84$,
$2\pi - \cos^{-1}(-2 + \sqrt{3}) \approx 4.44$

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1

1 $\beta = 63°, b \approx 26.8, c \approx 27.3$
3 $\gamma = 100°10', b \approx 55.1, c \approx 68.7$
5 $\beta = 76°30', a \approx 13.6, c \approx 17.8$
7 No existe ningún triángulo.
9 $\alpha \approx 77°30', \beta \approx 49°10', b \approx 108$;
$\alpha \approx 102°30', \beta \approx 24°10', b \approx 59$
11 $\alpha \approx 82.54°, \beta \approx 49.72°, b \approx 100.85$;
$\alpha \approx 97.46°, \beta \approx 34.80°, b \approx 75.45$
13 $\beta \approx 41°30', \gamma \approx 91°10', c \approx 117.3$
15 $\alpha \approx 25.993°, \gamma \approx 32.383°, a \approx 0.146$ **17** 219 yardas
19 **a)** 1.6 millas **b)** 0.6 millas **21** 2.7 millas **23** 628 m
25 3.7 millas de A y 5.4 millas de B **27** 350 pies
29 **a)** 18.7 **b)** 814 **31** (3949.9, 2994.2)

EJERCICIOS 7.2

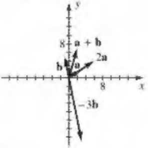
1 **a)** B **b)** F **c)** D **d)** E **e)** A **f)** C
3 **a)** α, ley de senos **b)** a, ley de cosenos
c) Cualquier ángulo, ley de cosenos
d) No se proporciona suficiente información
e) $\gamma, \alpha + \beta + \gamma = 180°$
f) c, ley de senos; o $\alpha, \alpha + \beta + \gamma = 180°$
5 $a \approx 26, \beta \approx 41°, \gamma \approx 79°$
7 $b \approx 180, \alpha \approx 25°, \gamma \approx 5°$
9 $c \approx 2.75, \alpha \approx 21°10', \beta \approx 43°40'$
11 No existe ningún triángulo.
13 $\alpha \approx 29°, \beta \approx 47°, \gamma \approx 104°$
15 $\alpha \approx 12°30', \beta \approx 136°30', \gamma \approx 31°00'$

17 $\alpha = \beta \approx 89°00'$, $\gamma \approx 2°00'$ **19** 196 pies
21 24 millas **23** 39 millas **25** 2.3 millas **27** N55°31'E
29 63.7 pies desde la primera y tercera base; 66.8 pies desde la segunda base.
31 37,039 pies $\approx$ 7 millas
33 *Pista:* Uso de la fórmula $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.
35 **a)** 72°, 108°, 36° **b)** 0.62 **c)** 0.59, 0.36

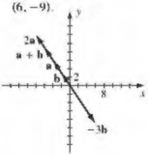
Ejercicios 37-44: Las respuestas se presentan en unidades al cuadrado.
37 260 **39** 11.21 **41** 13.1 **43** 517.0
45 40.0 acres **47** 123.4 pies²

EJERCICIOS 7.3

1 $\langle -3, -4\rangle, \langle 7, -2\rangle, \langle -17, -17\rangle, \langle 33, -7\rangle, \sqrt{13}$
3 $\langle -7, -4\rangle, \langle -7, 8\rangle, \langle -28, -22\rangle, \langle -28, 38\rangle, \sqrt{53}$
5 $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, 19\mathbf{i} - 17\mathbf{j}, -11\mathbf{i} + 33\mathbf{j}, \sqrt{5}$
7 Los puntos terminales son $(3, 2), (-1, 5), (2, 7), (6, 4), (3, -15)$.



9 Los puntos terminales son $(-4, 6), (-2, 3), (-6, 9), (-8, 12), (6, -9)$.



11 $-\mathbf{b}$ **13** $\mathbf{f}$ **15** $-\frac{1}{2}\mathbf{e}$

17
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (\langle b_1, b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle) + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}\end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (-\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle -a_1, -a_2\rangle\\ &= \langle a_1 - a_1, a_2 - a_2\rangle\\ &= \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}\end{aligned}$$

21
$$\begin{aligned}(mn)\mathbf{a} &= (mn)\langle a_1, a_2\rangle\\ &= \langle (mn)a_1, (mn)a_2\rangle\\ &= \langle mna_1, mna_2\rangle\\ &= m\langle na_1, na_2\rangle \quad \text{o} \quad n\langle ma_1, ma_2\rangle\\ &= m(n\langle a_1, a_2\rangle) \quad \text{o} \quad n(m\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= m(n\mathbf{a}) \quad \text{o} \quad n(m\mathbf{a})\end{aligned}$$

23 $0\mathbf{a} = 0\langle a_1, a_2\rangle = \langle 0a_1, 0a_2\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.
También, $m\mathbf{0} = m\langle 0, 0\rangle = \langle m0, m0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.

25
$$\begin{aligned}-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= -(\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle)\\ &= -\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle\\ &= \langle -(a_1 + b_1), -(a_2 + b_2)\rangle\\ &= \langle -a_1 - b_1, -a_2 - b_2\rangle\\ &= \langle -a_1, -a_2\rangle + \langle -b_1, -b_2\rangle\\ &= -\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}\end{aligned}$$

27
$$\begin{aligned}\|2\mathbf{v}\| &= \|2\langle a, b\rangle\| = \|\langle 2a, 2b\rangle\| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}\\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\|\langle a, b\rangle\|\\ &= 2\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

29 $5; \frac{3\pi}{2}$ **31** $3\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}$ **33** $\sqrt{41}; \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi$

35 $\sqrt{61}; \tan^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right) + 2\pi$ **37** 102 libras **39** 7.2 libras
41 89 libras; S66°W **43** 5.8 libras; 129°
45 40.96; 28.68 **47** −6.18; 19.02
49 **a)** $-\frac{8}{17}\mathbf{i} + \frac{15}{17}\mathbf{j}$ **b)** $\frac{8}{17}\mathbf{i} - \frac{15}{17}\mathbf{j}$

51 **a)** $\left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle$ **b)** $\left\langle -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right\rangle$

53 **a)** $\langle -16, 4\rangle$ **b)** $\langle -4, 1\rangle$

55 $-\frac{24}{\sqrt{65}}\mathbf{i} + \frac{42}{\sqrt{65}}\mathbf{j}$
57 **a)** $\mathbf{F} = \langle 7, 2\rangle$ **b)** $\mathbf{G} = -\mathbf{F} = \langle -7, -2\rangle$
59 **a)** $\mathbf{F} \approx \langle -5.86, 1.13\rangle$
b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F} \approx \langle 5.86, -1.13\rangle$
61 $\operatorname{sen}^{-1}(0.4) \approx 23.6°$ **63** 56°; 232 millas/h
65 420 millas/h; 244° **67** N22°W
69 $\mathbf{v}_1 \approx 4.1\mathbf{i} - 7.10\mathbf{j}$; $\mathbf{v}_2 \approx 0.98\mathbf{i} - 3.67\mathbf{j}$
71 **a)** $\langle 24.51, 20.57\rangle$ **b)** $\langle -24.57, 18.10\rangle$
73 28.2 libras/persona

EJERCICIOS 7.4

1 **a)** 24 **b)** $\cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right) \approx 48°22'$

3 **a)** −14 **b)** $\cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right) \approx 160°21'$

5 **a)** 45 **b)** $\cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{81}\sqrt{41}}\right) \approx 38°40'$

7 **a)** −30 **b)** $\cos^{-1}\left(\frac{-30}{\sqrt{90}\sqrt{10}}\right) = 180°$

9 $\langle 4, -1\rangle \cdot \langle 2, 8\rangle = 0$ **11** $(-4\mathbf{j}) \cdot (-7\mathbf{i}) = 0$
13 Opuesto **15** Igual **17** $\frac{6}{5}$ **19** $\pm\frac{3}{8}$
21 **a)** −23 **b)** −23 **23** −13
25 $17/\sqrt{26} \approx 3.33$ **27** 2.2 **29** 7
31 28 **33** 12

35
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = a_1^2 + a_2^2\\ &= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 = \|\mathbf{a}\|^2\end{aligned}$$

37
$$\begin{aligned}(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (m\langle a_1, a_2\rangle) \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= \langle ma_1, ma_2\rangle \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= ma_1b_1 + ma_2b_2\\ &= m(a_1b_1 + a_2b_2) = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\end{aligned}$$

39
$$\begin{aligned}\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} &= \langle 0, 0\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = 0(a_1) + 0(a_2)\\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

41 $1000\sqrt{3} \approx 1732$ pies-libras

43 a) $\mathbf{v} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} + (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$;
$\mathbf{w} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} - (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$
b) $0.53°$

45 $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$ **47** 2.6 **49** 24.33

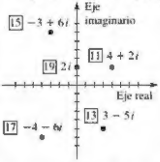
51 $16\sqrt{3} \approx 27.7$ caballos de fuerza

EJERCICIOS 7.5

1 5 **3** $\sqrt{85}$ **5** 0 **7** 8 **9** 1

Nota: El punto P es el punto que corresponde a la representación geométrica.

11 $P(4, 2)$ **13** $P(3, -5)$ **15** $P(-3, 6)$
17 $P(-4, -6)$ **19** $P(0, 2)$



21 $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ **23** $8\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$ **25** $4\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

27 $4\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$ **29** $20\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$ **31** $12\operatorname{cis} 0$

33 $7\operatorname{cis}\pi$ **35** $6\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ **37** $10\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

39 $\sqrt{29}\operatorname{cis}\left(\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)$

41 $\sqrt{10}\operatorname{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi\right]$

43 $\sqrt{34}\operatorname{cis}\left(\tan^{-1}\frac{3}{5} + \pi\right)$

45 $5\operatorname{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi\right]$

47 $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ **49** $-3 + 3\sqrt{3}i$ **51** -5
53 $5 + 3i$ **55** $2 - i$ **57** $-4 + 7i$
59 $-7 - 3i$ **61** $-2, i$

63 $10\sqrt{3} - 10i, -\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}i$ **65** $40, \frac{5}{2}$

67 $8 - 4i, \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$ **69** $-15 + 10i, -\frac{15}{13} - \frac{10}{13}i$

73 $17.21 + 24.57i$ **75** $11.01 + 9.24i$
77 $\sqrt{365}$ ohms **79** 70.43 volts

EJERCICIOS 7.6

1 $-972 - 972i$ **3** $-32i$ **5** -8

7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ **9** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

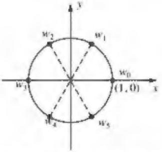
11 $-64\sqrt{3} - 64i$ **13** $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$

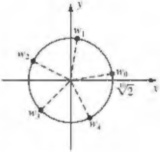
15 $\pm\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i\right), \pm\left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i\right)$

17 $3i, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

19 $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i,$
$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

21 $\sqrt[10]{2}\operatorname{cis}\theta$ con $\theta = 9°$, $81°, 153°, 225°, 297°$

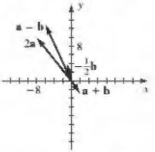




23 $\pm 2, \pm 2i$ **25** $\pm 2i, \sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i$
27 $2i, \pm\sqrt{3} - i$
29 $3\operatorname{cis}\theta$ con $\theta = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$
31 $2\operatorname{cis}\theta$ con $\theta = 15°, 105°, 195°, 285°$
33 $[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = [r(e^{i\theta})]^n$
$= r^n(e^{i\theta})^n$
$= r^n e^{i(n\theta)}$
$= r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 $a = \sqrt{43}, \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{43}\sqrt{43}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{86}\sqrt{43}\right)$
2 $\alpha = 60°, \beta = 90°, b = 4$; $\alpha = 120°, \beta = 30°, b = 2$
3 $\gamma = 75°, a = 50\sqrt{6}, c = 50(1 + \sqrt{3})$
4 $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$
5 $\alpha = 38°, a \approx 8.0, c \approx 13$
6 $\gamma \approx 19°10', \beta \approx 137°20', b \approx 258$
7 $\alpha \approx 24°, \gamma \approx 41°, b \approx 10.1$
8 $\alpha \approx 42°, \beta \approx 87°, \gamma \approx 51°$ **9** 290 **10** 14.5
11 Los puntos terminales son $(-2, -3), (-6, 13), (-8, 10), (-1, 4)$.



12 a) $12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$ b) $-8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ c) $\sqrt{40} \approx 6.32$
d) $\sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.26$

13 $(14 \cos 40°, -14 \operatorname{sen} 40°)$ **14** 109 libras; S78°E

15 $-10\mathbf{i} - 14\mathbf{j}$

16 $\left\langle -\dfrac{12}{\sqrt{58}}, \dfrac{28}{\sqrt{58}} \right\rangle$

17 Círculo con centro (a_1, a_2) y radio c

18 Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ forman un triángulo con el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ opuesto al ángulo θ. La conclusión es una aplicación directa de la ley de cosenos con lados $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

19 183°; 70 millas/h

20 **a)** 10 **b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right) \approx 47°44'$ **c)** $\dfrac{10}{\sqrt{13}}$

21 **a)** 134 **b)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{134}{\sqrt{40}\sqrt{13}}\right) \approx 32°28'$ **c)** $\dfrac{11}{\sqrt{10}}$

22 56

23 $10\sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{4}$ **24** $4 \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{3}$ **25** $17 \operatorname{cis} \pi$

26 $12 \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{2}$ **27** $10 \operatorname{cis} \dfrac{7\pi}{6}$

28 $\sqrt{41} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \dfrac{5}{4}\right)$

29 $\sqrt{29} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\dfrac{5}{2}\right) + \pi\right]$

30 $17 \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\dfrac{15}{8}\right) + 2\pi\right]$

31 $10\sqrt{3} - 10i$ **32** $12 + 5i$ **33** $-12 - 12\sqrt{3}i, -\dfrac{3}{2}$

34 $-4\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}$ **35** $-512i$ **36** i

37 $-972 + 972i$ **38** $-2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}i$

39 $-3, \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3}{2}\sqrt{3}i$

40 **a)** 2^{24} **b)** $\sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 100°, 220°, 340°$

41 $2 \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 54°, 126°, 198°, 270°, 342°$

42 47.6° **43** 197.4 yardas **44** 235.8 millas

45 53,000,000 millas

46 **a)** 449 pies **b)** 434 pies

47 **a)** 33 millas, 41 millas **b)** 30 millas **48** 204

49 1 hora y 16 minutos **50 c)** 158°

51 **a)** 47° **b)** 20

52 **a)** 72° **b)** 181.6 pies² **c)** 37.6 pies

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

4 **b)** *Pista:* Ley de cosenos

5 **a)** $(\|\mathbf{b}\| \cos \alpha + \|\mathbf{a}\| \cos \beta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \alpha - \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen} \beta)\mathbf{j}$

6 **a)** 1 **b)** πi; $\dfrac{\pi}{2}i$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $e^{-\pi/2} \approx 0.2079$

7 La declaración es verdadera.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7

1 **a)** 2 **b)** 0 **c)** 1 **2** 2.15 millas **3** 5.39 millas

4 Cualquier ángulo, ley de los cosenos **5** 337 pies **6** 75.5°

7 390 pies² **8** $\sqrt{85}$ **9** 25 libras

10 $\dfrac{21}{\sqrt{73}}\mathbf{i} - \dfrac{56}{\sqrt{73}}\mathbf{j}$ **11** 463 millas/h; 242°

12 57.53° **13** $\pm\dfrac{5}{6}$ **14** -172 **15** $\dfrac{47}{\sqrt{73}} \approx 5.5$

16 3564 pies-libra **17** 13

18 $\sqrt{13} \operatorname{cis} \left[\tan^{-1}\left(-\dfrac{2}{3}\right) + \pi\right]$ **19** $7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

20 $28\sqrt{3} - 28i, -\dfrac{4}{7}\sqrt{3} + \dfrac{4}{7}i$

21 $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **22** $4i, \pm 2\sqrt{3} - 2i$

23 $\sqrt[5]{7} \operatorname{cis} \theta$ con $\theta = 18°, 90°, 162°, 234°, 306°$

CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1

1 $(3, 5), (-1, -3)$ **3** $(1, 0), (-3, 2)$

5 $(0, 0), \left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{128}\right)$ **7** $(3, -2)$ **9** Sin solución

11 $(-4, -2), (2, 4)$ **13** $(-4, 3), (5, 0)$ **15** $(-2, 2)$

17 $\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{10}\sqrt{86}, \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{10}\sqrt{86}\right)$,
$\left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10}\sqrt{86}, \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{10}\sqrt{86}\right)$ **19** Sin solución

21 $(0, 1), (4, -3)$ **23** $(-6, -1), (-1, 4)$

25 $(\pm 2, 5), (\pm\sqrt{5}, 4)$

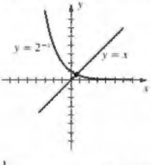
27 $(\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$ **29** Sin solución

31 $(2\sqrt{2}, \pm 2), (-2\sqrt{2}, \pm 2)$ **33** $(3, -1, 2)$

35 $(1, -1, 2), (-1, 3, -2)$

37 **a)** $b = 4$; tangente
b) $b < 4$; intersección dos veces
c) $b > 4$; sin intersección

39 Sí, ocurre una solución entre 0 y 1.



41 $\dfrac{1}{4}$; tangente **43** $f(x) = 2(3)^x + 1$ **45** 12 y 4

47 12×8 pulgadas

49 **a)** $a = 120{,}000$, $b = 40{,}000$ **b)** 77,143

51 (0,0), (0,100), (50,0); la cuarta solución (−100,150) no es significativa.

53 Sí; 1 pie × 1 pie × 2 pies o

$$\frac{\sqrt{13}-1}{2}\text{ pies}\times\frac{\sqrt{13}-1}{2}\text{ pies}\times\frac{8}{(\sqrt{13}-1)^2}\text{ pies}$$
$$\approx 1.30\text{ pie}\times 1.30\text{ pie}\times 1.18\text{ pie}$$

55 Los puntos se encuentran sobre la parábola **a)** $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ y **b)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

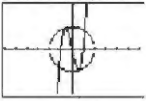
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

57 a) (31.25, −50)

b) $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{11}, -\frac{1}{2}\right) \approx (-4.975, -0.5)$

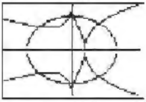
59 $(\mp 0.82, \pm 1.82)$; $\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

61 $(\mp 0.56, \pm 1.92)$, $(\mp 0.63, \pm 1.90)$, $(\pm 1.14, \pm 1.65)$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

63 $(-1.44, \pm 1.04)$, $(-0.12, \pm 1.50)$, $(0.10, \pm 1.50)$, $(1.22, \pm 1.19)$



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

65 $a \approx 1.2012, b \approx 0.4004$ **67** $a \approx 2.8019, b \approx 0.9002$

EJERCICIOS 8.2

1 (4, −2) **3** (−75, 90) **5** $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ **7** $\left(\frac{76}{53}, \frac{28}{53}\right)$

9 $\left(\frac{51}{13}, \frac{96}{13}\right)$ **11** $\left(\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}\sqrt{6}\right)$ **13** $\left(\frac{220}{13}, \frac{137}{13}\right)$

15 Sin solución

17 Todos son pares ordenados (m, n) de forma que $3m - 4n = 2$

19 (0, 0) **21** $\left(-\frac{22}{7}, -\frac{11}{5}\right)$ **23** (2, −1)

25 (0, 2) **27** 313 estudiantes, 137 no estudiantes

29 $x = \frac{30}{\pi} - 4 \approx 5.55$ cm, $y = 12 - \frac{30}{\pi} \approx 2.45$ cm

31 $l = 10$ pies, $w = \frac{20}{\pi}$ pies **33** 2400 adultos, 3600 gatitos

35 40 gramos de aleación al 35%, 60 gramos de aleación al 60%

37 540 millas/hora, 60 millas/hora **39** $v_0 = 10, a = 3$

41 20 sofás, 30 reclinables

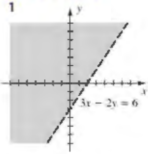
43 a) $\left(c, \frac{4}{5}c\right)$ para un $c > 0$ arbitrario **b)** \$28 por hora

45 1928; 15.5°C **47** LP: 4 horas; SLP: 2 horas

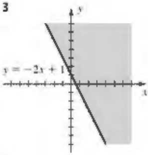
49 $a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{6}e^{6x}$ **51** $a = \cos x - \sec x, b = \sin x$

EJERCICIOS 8.3

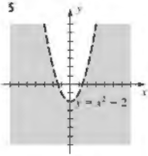
1



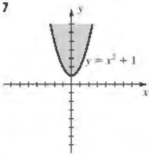
3



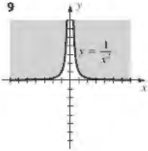
5



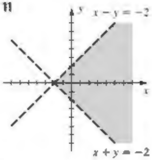
7



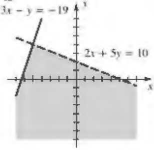
9



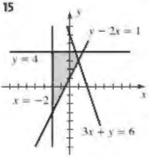
11



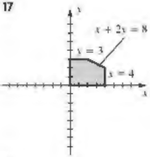
13



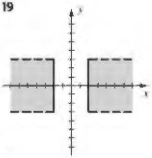
15



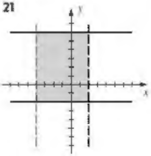
17



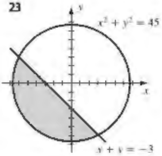
19



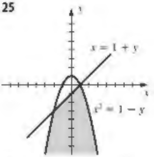
21



23



25



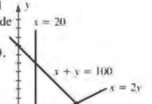
27 $0 \leq x < 3,\ y < -x + 4,\ y \geq x - 4$

29 $x^2 + y^2 \leq 9,\ y > -2x + 4$

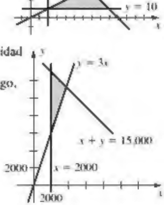
31 $y < x,\ y \leq -x + 4,\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$

33 $y > \frac{1}{8}x + \frac{1}{2},\ y \leq x + 4,\ y \leq -\frac{3}{4}x + 4$

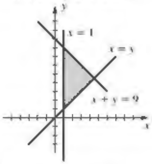
35 Si x y y se refieren a la cantidad de conjuntos de la marca A y de la marca B, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 20$, $y \geq 10$, $x \geq 2y$, $x + y \leq 100$.



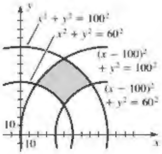
37 Si x y y se refieren a la cantidad colocada en inversiones de alto riesgo y de bajo riesgo, respectivamente, entonces un sistema es $x \geq 2000$, $y \geq 3x$, $x + y \leq 15{,}000$.



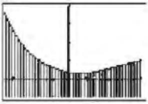
39 $x + y \leq 9,\ y \geq x,\ x \geq 1$



41 Si la planta se ubica en (x, y), entonces un sistema es $60^2 \leq x^2 + y^2 \leq 100^2$, $60^2 \leq (x - 100)^2 + y^2 \leq 100^2$, $y \geq 0$.

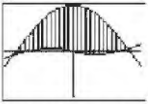


43



$[-3.5, 4]$ por $[-1, 4]$

45



$[-1.5, 1.5]$ por $[-1, 1]$

47 No existe solución.

$[-4.5, 4.5]$ por $[-3, 3]$

49 a) Sí

b)

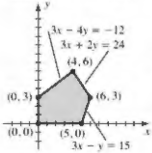
$[33, 80, 5]$ por $[0, 50, 5]$

c) La región por encima de la línea.

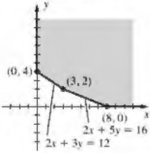
EJERCICIOS 8.4

1 Máximo de 27 en (6,2); mínimo de 9 en (0,2)

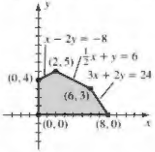
3 Máximo de 21 en $(6, 3)$



5 Mínimo de 21 en $(3, 2)$



7 C tiene un valor máximo de 24 para cualquier punto en el segmento de línea de $(2, 5)$ a $(6, 3)$.



9 $(8, 0)$
11 Cualquier punto entre $(2, 7)$ y $(6, 3)$, inclusive.
13 Un ejemplo es $P = 500x + 600y$.
15 50 estándar y 30 sobredimensionados.
17 3.5 libras de S y 1 libra de T
19 Enviar 25 desde W_1 hacia A y 0 de W_1 a B. Enviar 10 desde W_2 hacia A y 60 de W_2 a B.
21 Nada de alfalfa y 60 acres de maíz.
23 Costo mínimo: 16 onzas X, 4 onzas de Y, 0 onzas de Z; costo máximo: 0 onzas de X, 8 onzas de Y, 12 onzas de Z
25 2 camionetas y 4 autobuses **27** 3000 truchas y 2000 róbalos
29 60 unidades pequeñas y 60 unidades de lujo

EJERCICIOS 8.5

1 $(2, 3, -1)$ **3** $(-2, 4, 5)$ **5** Sin solución

7 $\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21}\right)$ **9** $(0, 0, 0)$

Ejercicios 11-18: Existen otras formas para responder; c es cualquier número real.

11 $(2c, -c, c)$ **13** $(0, -c, c)$

15 $(33c - 54, -8c + 13, c)$

17 $\left(\frac{7}{10}c + \frac{1}{2}, \frac{19}{10}c - \frac{3}{2}, c\right)$ **19** $\left(\frac{1}{11}, \frac{31}{11}, \frac{3}{11}\right)$

21 $(-2, -3)$ **23** Sin solución

25 17 de 10%, 11 de 30%, 22 de 50%

27 4 horas para A, 2 horas para B, 5 horas para C

29 380 libras de G_1, 60 libras de G_2, 160 libras de G_3

31 a) $I_1 = 0, I_2 = 2, I_3 = 2$ **b)** $I_1 = \frac{3}{4}, I_2 = 3, I_3 = \frac{9}{4}$

33 $\frac{3}{8}$ libra de Colombia, $\frac{1}{8}$ libra de Costa Rica, $\frac{1}{2}$ libra de Kenia.

35 a) A: $x_1 + x_4 = 75$, B: $x_1 + x_2 = 150$, C: $x_2 + x_3 = 225$, D: $x_3 + x_4 = 150$
b) $x_1 = 25, x_2 = 125, x_4 = 50$
c) $x_1 = 150 - x_2 \leq 150$; $x_3 = 225 - x_2 = 225 - (150 - x_1) = 75 + x_1 \geq 75$

37 2134 **39** $y = 3x^2 - x + 5$
41 $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$
43 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 6$
45 $a = -\frac{4}{9}, b = \frac{11}{9}, c = \frac{17}{18}, d = \frac{23}{18}$

EJERCICIOS 8.6

1 $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$

5 $[11 \;\; -3 \;\; -3], [-3 \;\; -3 \;\; 7]$, $[8 \;\; -6 \;\; 4], [-21 \;\; 0 \;\; 15]$

7 No es posible, no es posible,
$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ **11** $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 20 & -16 \end{bmatrix}$

13 -18 **15** $\begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} -3 & 10 & 2 \\ -11 & 19 & 11 \\ 18 & 16 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 38 & 9 & -10 \\ 3 & 24 & 3 & 6 \\ -2 & 20 & 5 & -8 \\ 12 & 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

25 $[15], \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, no es posible **29** $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{bmatrix}$ **41** $\begin{bmatrix} 135 & -109 & 91 \\ -39 & 92 & -33 \\ 45 & 3 & 95 \end{bmatrix}$

43 $\begin{bmatrix} 76 & -38 & 102 \\ -5 & 61 & -13 \\ 41 & 0 & 19 \end{bmatrix}$

45 **a)** $A = \begin{bmatrix} 400 & 550 & 500 \\ 400 & 450 & 500 \\ 300 & 500 & 600 \\ 250 & 200 & 300 \\ 100 & 100 & 200 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \$8.99 \\ \$10.99 \\ \$12.99 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \$16{,}135.50 \\ \$15{,}036.50 \\ \$15{,}986.00 \\ \$\ 8342.50 \\ \$\ 4596.00 \end{bmatrix}$

c) Los $4,596.00 representan la cantidad que la tienda recibiría si se venden todas las torres amarillas.

EJERCICIOS 8.7

1 Muestra que $AB = I_2$ y $BA = I_2$.

3 $\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **5** No existe

7 $\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **9** $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **13** No existe **15** No existe

17 $ab \neq 0$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

21 **a)** $\left(\dfrac{13}{10}, -\dfrac{1}{10}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

23 **a)** $\left(-\dfrac{25}{3}, -\dfrac{34}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{16}{3}, \dfrac{16}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

25 $\begin{bmatrix} 0.111 & 0.259 & -0.630 \\ -0.037 & 0.025 & 0.321 \\ 0.074 & -0.049 & 0.358 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} -0.223 & 0.129 & 0.065 & 0.378 \\ -1.178 & 0.095 & 0.559 & 0.292 \\ -0.372 & 0.002 & 0.141 & 0.374 \\ 0.160 & -0.042 & 0.072 & -0.210 \end{bmatrix}$

29 **a)** $\begin{bmatrix} 4.0 & 7.1 \\ 2.2 & -4.9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 2.9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0.1391 & 0.2016 \\ 0.0625 & -0.1136 \end{bmatrix}$ **(c)** $x \approx 1.4472, y \approx 0.0579$

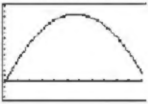
31 **a)** $\begin{bmatrix} 3.1 & 6.7 & -8.7 \\ 4.1 & -5.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.1 & -7.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 3.9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0.1474 & 0.1572 & -0.1691 \\ 0.1197 & -0.0696 & -0.1426 \\ 0.0297 & 0.0024 & -0.1700 \end{bmatrix}$

c) $x \approx -0.1081, y \approx -0.5227, z \approx -0.6135$

33 **a)** $a \approx -1.9630, b \approx 26.2963, c \approx -25.7407$

b)



[1, 12]por[−15, 70, 5]

c) Junio: 61 °F; octubre: 41 °F

EJERCICIOS 8.8

1 $M_{11} = 0 = A_{11}$; $M_{12} = 5$; $A_{12} = -5$;
$M_{21} = -1$; $A_{21} = 1$; $M_{22} = 7 = A_{22}$

3 $M_{11} = -14 = A_{11}$; $M_{12} = 10$; $A_{12} = -10$;
$M_{13} = 15 = A_{13}$; $M_{21} = 7$; $A_{21} = -7$;
$M_{22} = -5 = A_{22}$; $M_{23} = 34$; $A_{23} = -34$;
$M_{31} = 11 = A_{31}$; $M_{32} = 4$; $A_{32} = -4$;
$M_{33} = 6 = A_{33}$

5 5 **7** −83 **9** 2 **11** 0 **13** −125 **15** 48

17 −216 **19** $abcd$ **21** e^{5x} **23** −1

35 **a)** $x^2 - 3x - 4$ **b)** −1, 4

37 **a)** $x^2 - 8x - 5$ **b)** $4 \pm \sqrt{21}$

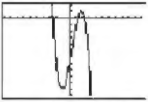
39 **a)** $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** −2, −1, 1

41 **a)** $-x^3 + 4x^2 + 4x - 16$ **b)** −2, 2, 4

43 $-31i - 20j + 7k$ **45** $-6i - 8j + 18k$

47 −255 **49** −359,284

51 **a)** $-x^3 + x^2 + 6x - 7$ **b)** −2.51, 1.22, 2.29



[−10, 11]por[−12, 2]

EJERCICIOS 8.9

1 $R_2 \leftrightarrow R_3$ **3** $C_2 \leftrightarrow C_3$ o $R_2 \leftrightarrow R_3$

5 $-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

7 2 es un factor común de R_1 y R_3.

9 R_1 y R_3 son idénticos.

11 −1 es un factor común de R_2.

13 Cada número en C_2 es 0. **15** $2C_1 + C_3 \rightarrow C_3$
17 55 **19** -10 **21** -142 **23** -183 **25** 44
27 359 **37** $(4, -2)$ **39** $(8, 0)$
41 $|D| = 0$, por lo que no se puede utilizar la regla de Cramer.
43 $(2, 3, -1)$ **45** $(-2, 4, 5)$
47 $x = \dfrac{cgi - dfi + bfj}{cei - afi + bfh}$

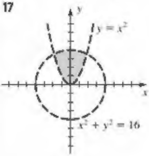
EJERCICIOS 8.10

1 $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{5}{x+3}$ **3** $\dfrac{5}{x-6} - \dfrac{4}{x+2}$
5 $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$ **7** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{1}{x+1}$
9 $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{(x-1)^2}$ **11** $-\dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{40}{3x-5}$
13 $\dfrac{24/25}{x+2} + \dfrac{2/5}{(x+2)^2} - \dfrac{23/25}{2x-1}$
15 $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^3}$ **17** $-\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3x+4}{x^2+1}$
19 $\dfrac{4}{x} + \dfrac{5x-3}{x^2+2}$ **21** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2x-3}{x^2+3}$
23 $\dfrac{4x-1}{x^2+1} + \dfrac{3}{(x^2+1)^2}$ **25** $2x + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3x}{x^2+1}$
27 $3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{8}{x-4}$ **29** $2x + 3 + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{2x+1}$

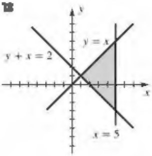
CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO

1 $\left(\dfrac{19}{23}, -\dfrac{18}{23}\right)$ **2** Sin solución **3** $(-3, 5), (1, -3)$
4 $(4, -3), (3, -4)$ **5** $(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$
6 $(-1, \pm 1, -1), \left(0, \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$ **7** $\left(\dfrac{14}{17}, \dfrac{14}{27}\right)$
8 $\left(\log_2\dfrac{25}{7}, \log_3\dfrac{15}{7}\right)$ **9** $\left(\dfrac{6}{11}, -\dfrac{7}{11}, 1\right)$
10 $\left(-\dfrac{6}{29}, \dfrac{2}{29}, -\dfrac{17}{29}\right)$
11 $(-2c, -3c, c)$ para cualquier número real c **12** $(0, 0, 0)$
13 $\left(5c - 1, -\dfrac{19}{2}c + \dfrac{5}{2}, c\right)$ para cualquier número real c
14 $(5, -4)$ **15** $\left(-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$ **16** $(3, -1, -2, 4)$

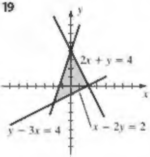
17



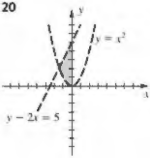
18



19



20



21 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 25 \\ |x| > 3 \\ |y| \leq 6 \end{cases}$ **22** $\begin{cases} x < y^2 \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

23 $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix} 26 \\ -6 \end{bmatrix}$ **25** $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 0 & -37 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$ **27** $\begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2a & 4a \end{bmatrix}$ **29** $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2b & 4b \end{bmatrix}$ **30** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$ **32** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **33** $-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

34 $\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ **35** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

36 $\dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} -4 & -20 & 15 \\ 3 & 15 & -2 \\ 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ **37** $(2, -5)$ **38** $(-1, 3, 2)$

39 $(-4, 3)$ **40** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right), (4, 16)$ **41** 9
42 48 **43** -86 **44** -84 **45** 0 **46** 120
47 -76 **48** -50 **49** $-1 \pm 2\sqrt{3}$ **50** $4, \pm\sqrt{7}$
51 2 es un factor común de R_1, 2 es un factor común de C_2 y 3 es un factor común de C_3.
52 Intercambie R_1 con R_2 y después R_2 con R_3 para obtener el determinante de la derecha. El efecto consiste en multiplicar por -1 dos veces.
53 $a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$ **55** $\left(\dfrac{76}{53}, \dfrac{28}{53}\right)$ **56** $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{31}{21}, \dfrac{1}{21}\right)$
57 $\dfrac{8}{x-1} - \dfrac{3}{x+5} - \dfrac{1}{x+3}$ **58** $2 + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$
59 $-\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{3x-1}{x^2+4}$ **60** $\dfrac{4}{x^2+2} + \dfrac{x-2}{x^2+5}$
61 $40\sqrt{5}$ pies × $20\sqrt{5}$ pies **62** $y = \pm 2\sqrt{2}\,x + 3$
63 Radio interno = 90 pies, radio externo = 100 pies
64 Impuesto = \$750,000; bono = \$125,000
65 2 millas/hora; 5 millas/hora
66 25 libras de cacahuates y 30 libras de pasas

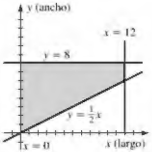
67 1325 millas/hora; 63 millas/hora

68 En pies^3/hora: A, 30; B, 20; C, 50

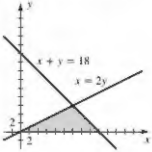
69 Occidental 95, oriental 55

70 Si x y y corresponden al largo y ancho, respectivamente, entonces un sistema es $x \le 12$, $y \le 8$, $y \ge 1/2x$

$y \ge \frac{1}{2}x$.



71 $x + y \le 18$, $x \ge 2y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$



72 80 podadoras y 30 segadoras de orillas

73 \$250,000 de alto riesgo; \$500,000 de bajo riesgo; bonos \$0

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 **a)** $b = 1.99$, $x = 204$, $y = -100$; $b = 1.999$, $x = 2004$, $y = -1000$

b) $x = \dfrac{4b - 10}{b - 2}$, $y = \dfrac{1}{b - 2}$

c) Se aproxima a $(4, 0)$.

2 **a)** $D = [12{,}000 \quad 9000 \quad 14{,}000]$;

$$E = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.00 & 0.80 & 0.20 \\ 0.05 & 0.00 & 0.95 \end{bmatrix}$$

b) Los elementos de $F = [11{,}500 \ 8400 \ 15{,}100]$ representan la población de las islas A, B y C respectivamente, después de un año.

c) La población se estabiliza con 10,000 nacimientos en A, 5,000 en B y 20,000 en C.

d) Las poblaciones tienden a la distribución descrita en el inciso c), sin importar la distribución inicial de 35,000 aves.

3 *Pista:* asigne un tamaño a A y examine la definición de un inverso

4 AD: 35%, DS: $33\frac{1}{3}$%, SP: $31\frac{2}{3}$%

5 $a = -15$, $b = 10$, $c = 24$; la cuarta raíz es -4

6 $y = 0.058\overline{3}x^3 - 0.11\overline{6}x^2 - 1.1x + 4.2$

8 **a)** No es posible **b)** $x^2 + y^2 - 1.8x - 4.2y + 0.8 = 0$

c) $f(x) = -\dfrac{5}{12}x^2 + \dfrac{7}{12}x + 4$

d) $f(x) = ax^3 + \left(-2a - \dfrac{5}{12}\right)x^2 + \left(-3a + \dfrac{7}{12}\right)x + 4$,

donde a es cualquier número real diferente de cero

e) No es posible

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8

1 $(-3, -2)$, $(2, 3)$ **2** $(\pm 7, -3)$, $(\pm 7, 3)$

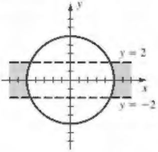
3 12 y 4 **4** $(\pm\sqrt{6}, 2)$ **5** $\left(\dfrac{104}{47}, -\dfrac{1}{47}\right)$

6 Sin solución

7 Todos son pares ordenados (x, y) de forma que $3x - y = -5$

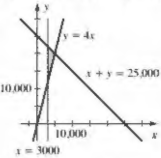
8 30 sofás, 45 reclinables

9

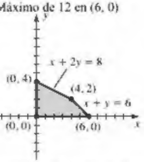


10 $\begin{cases} y > x + 2 \\ x^2 + y^2 \le 16 \end{cases}$

11 $x \ge 3000$, $y \ge 4x$, $x + y \le 25{,}000$



12 Máximo de 12 en $(6, 0)$



13 3 camionetas, 5 autobuses **14** $(4, -3, 7)$ **15** $(3c, -2c, c)$

16 $\frac{1}{4}$, 2 y 18 libras **17** $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 7$

18 $\begin{bmatrix} -6 & -14 & -1 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ **19** $\begin{bmatrix} -17 & 27 \\ -44 & -7 \end{bmatrix}$ **20** -19

21 Una posibilidad es

$$C = AB = \begin{bmatrix} 23 & 7 \\ 35 & 12 \\ 40 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 90 & 75 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2930 & 2365 & 830 \\ 4580 & 3700 & 1290 \\ 5710 & 4625 & 1580 \end{bmatrix}$$, donde los números de la diagonal principal representan el valor total de los conjuntos de hierro, los conjuntos de madera y los híbridos, \$2930, \$3700 y \$1580, respectivamente. El resto de los valores no son significativos.

22 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

24 No; una fila de cero significa $|A|=0$, por lo tanto, A no es reversible

25 23 **26** 6 **27** 134 **28** $-3, 5$

29 R_1 y R_3 son idénticos. **30** -177 **31** $(3, -4)$

32 $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+1}$ **33** $\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x+3}$

34 $\frac{2x-5}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2}$

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1

1 $9, 6, 3, 0; -12$ **3** $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{10}{17}; \frac{22}{65}$

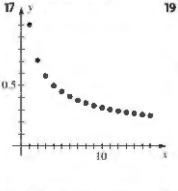
5 $9, 9, 9, 9; 9$

7 $1.9, 2.01, 1.999, 2.0001; 2.000\,000\,01$

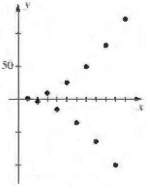
9 $4, -\frac{9}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{11}{8}; -\frac{15}{16}$ **11** $2, 0, 2, 0; 0$

13 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{8}{9}; \frac{128}{33}$ **15** $1, 2, 3, 4; 8$

17



19



21 $2, 1, -2, -11, -38$ **23** $-3, 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16}$

25 $5, 5, 10, 30, 120$ **27** $2, 2, 4, 4^3, 4^{12}$

29 $7, 20, 61$ **31** $-8, 16, -128$

33 $\frac{7}{2}, \frac{15}{2}, 12, 17$

35 $-1, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

37 -5 **39** 10 **41** 25 **43** $-\frac{17}{15}$ **45** 61

47 10,000 **49** $\frac{319}{3}$ **51** $\frac{7}{2}k^2$

53
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (-b_1 - b_2 - \cdots - b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

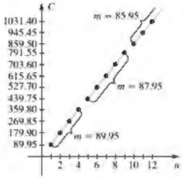
55 A medida que aumenta k, los términos se aproximan a 1.

57 0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8

59 **a)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
b) 1, 2, 1.5, $1.\overline{6}$, 1.6, 1.625, 1.6153846, 1.6190476, 1.6176471, 1.6181818

61 **a)** $a_n = 0.8a_{n-1}$ **b)** El cuarto día

63 $C(n) = \begin{cases} 89.95n & \text{si } 1 \le n \le 4 \\ 87.95n & \text{si } 5 \le n \le 9 \\ 85.95n & \text{si } n \ge 10 \end{cases}$

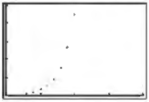


65 2.236068 **67** 2.4493

69 **a)** $f(1) = -1 < 0, f(2) \approx 0.30 > 0$ **b)** 1.76

71 a_n se aproxima a e **73** a_n se aproxima a 1

75 10



[0, 20, 5]por[0, 125, 25]

77 19

[0, 20, 5]por[0, 300, 50]

79 **a)** Disminuye de 250 insectos a 0
b) Se estabiliza en 333 insectos
c) Se estabiliza en 636 insectos

EJERCICIOS 9.2

1 Muestra que $a_{k+1} - a_k = 4$. **3** $4n - 2$; 18; 38
5 $-3n + 19$; 4; -11 **7** $3.3 - 0.3n$; 1.8; 0.3
9 $3.1n - 10.1$; 5.4; 20.9
11 $-10x + 15 + n(2x - 3)$; 0; $10x - 15$
13 $\ln 3^n$; $\ln 3^5$; $\ln 3^{10}$ **15** -8 **17** -8.5
19 -9.8 **21** $\frac{551}{17}$ **23** 3015 **25** -105 **27** 30
29 25 **31** 530 **33** $\frac{423}{2}$ **35** $934j + 838,265$
37 $\sum_{n=1}^{5} (7n - 3)$ or $\sum_{n=0}^{4} (4 + 7n)$
39 $\sum_{n=1}^{67} (7n - 3)$ or $\sum_{n=0}^{66} (4 + 7n)$
41 $\sum_{n=1}^{6} \frac{3n}{4n + 3}$ or $\sum_{n=0}^{5} \frac{3 + 3n}{7 + 4n}$
43 $\sum_{n=1}^{1528} (11n - 3) = 12,845,132$ **45** 28 **47** 24
49 12 o 18 **51** $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \frac{22}{3}, \frac{26}{3}$ **53** 25, -2, -29
55 a) 60 b) 12,780 **57** 255 **59** 154π pies
61 \$1200 **63** $16n^2$
65 Muestra que el primer término de $(n + 1)$ es mayor en 1 que el n-ésimo término.
67 a) $\frac{8}{36}, \frac{7}{36}, \frac{6}{36}, \ldots, \frac{1}{36}$ b) $d = -\frac{1}{36}$; 1
c) \$722.22

EJERCICIOS 9.3

1 Muestra que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4}$. **3** $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$
5 $300(-0.1)^{n-1}$; 0.03; -0.00003 **7** 5^n; 3125; 390,625
9 $4(-1.5)^{n-1}$; 20.25; -68.34375
11 $(-1)^{n-1}x^{2n-2}$; x^8; $-x^{14}$ **13** $2^{(n-1)(x+1)}$; 2^{4x+4}; 2^{7x+7}
15 2 **17** $\pm\sqrt{3}$ **19** $\frac{243}{8}$ **21** $\frac{4}{27}$ **23** 36
25 $-\frac{1}{16}$ **27** $\frac{1533}{16}$ **29** 1093 **31** 88,572
33 $-\frac{341}{1024}$ **35** $8188 + 55j$ **37** $\sum_{n=1}^{7} 2^n$
39 $\sum_{n=1}^{4} (-1)^{n+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ **41** $\frac{2}{3}$ **43** $\frac{50}{33}$
45 Como $|r| = \sqrt{2} > 1$, la suma no existe.
47 1024 **49** $\frac{x}{3 - x}$ **51** $\frac{23}{99}$ **53** $\frac{2393}{990}$
55 $\frac{5141}{999}$ **57** $\frac{16,123}{9999}$ **59** 24
61 4, 20, 100, 500 **63** $\frac{25}{256}\% \approx 0.1\%$
65 a) $N(t) = 10,000(1.2)^t$ b) 61,917 **67** 300 pies
69 \$3,000,000 **71** b) 375 mg
73 a) $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}a_k$
b) $a_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}a_1$, $A_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}A_1$,
$P_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}P_1$ c) $\frac{16a_1}{4 - \sqrt{10}}$
75 a) $a_k = 3^{k-1}$ b) 4,782,969
c) $b_k = \frac{3^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ d) $\frac{729}{16,384} \approx 4.45\%$
77 \$38,929.00 **79** \$7396.67
81 a) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \frac{54}{625}, \frac{162}{3125}$
b) $r = \frac{3}{5}$; $\frac{2882}{3125} = 0.92224$ c) \$16,000

EJERCICIOS 9.4

Ejercicios 1-34: Se presenta una demostración común para los ejercicios 1, 5, 11, 15, 19, 23, 27 y 31.

1 1) P_1 es verdadero, dado que $2(1) = 1(1 + 1) = 2$.
2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:
$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$. Por ello,
$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)(k + 1 + 1). \end{aligned}$$
Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

5 1) P_1 es verdadero, dado que $5(1) - 3 = \frac{1}{2}(1)[5(1) - 1] = 2$.
2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:
$2 + 7 + 12 + \cdots + (5k - 3) = \frac{1}{2}k(5k - 1)$.
Por ello,
$$\begin{aligned} 2 + 7 + 12 + \cdots + (5k - 3) + 5(k + 1) - 3 &= \frac{1}{2}k(5k - 1) + 5(k + 1) - 3 \\ &= \frac{5}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 2 \\ &= \frac{1}{2}(5k^2 + 9k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(5k + 4) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)[5(k + 1) - 1]. \end{aligned}$$
Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

11 1) P_1 es verdadero, dado que $(1)^2 = \frac{1(1 + 1)[2(1) + 1]}{6} = 1$.
2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$.
Por ello,
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1)\left[\frac{k(2k + 1)}{6} + \frac{6(k + 1)}{6}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

15 1) P_1 es verdadero, dado que $3^1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3}{2}(3^k - 1). \text{ Por ello,}$$
$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1}$$
$$= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 3^{k+1}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot 3^k - \frac{3}{2} + 3\cdot 3^k$$
$$= \frac{9}{2}\cdot 3^k - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{3}{2}(3\cdot 3^k - 1)$$
$$= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1).$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

19 1) P_1 es verdadero, dado que $1 < \frac{1}{8}[2(1)+1]^2 = \frac{9}{8}$.

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k < \frac{1}{8}(2k+1)^2. \text{ Por ello,}$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$$
$$< \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1)$$
$$= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8}$$
$$= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9)$$
$$= \frac{1}{8}(2k+3)^2$$
$$= \frac{1}{8}[2(k+1)+1]^2.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

23 1) Para $n = 1$, $5^1 - 1 = 4$ y 4 es un factor de 4.

2) Suponiendo que 4 es un factor de $5^k - 1$. El primer término de $(k+1)$ es $5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1$

$= 5\cdot 5^k - 5 + 4$

$= 5(5^k - 1) + 4.$

Por la hipótesis de inducción, 4 es un factor de $5^k - 1$ y 4 es un factor de 4, por lo que 4 es un factor del primer término de $(k+1)$. Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

27 1) Para $n=1$, $a-b$ es un factor de $a^1 - b^1$.

2) Suponiendo que $a-b$ es un factor de $a^k - b^k$, siguiendo la pista para el primer término de $(k+1)$,

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k a - b^k b - a^k b + b^k \ldots$$
$$= a^k(a-b) + (a^k - b^k)b.$$

Dado que $(a-b)$ es un factor de $a^k(a-b)$, y dado que por la hipótesis de inducción $a-b$ es un factor de $(a^k - b^k)$, lo que sigue es que $a-b$ es un factor del primer término de $(k+1)$.

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la prueba está completa.

31 1) P_8 es verdadero, dado que $5 + \log_2 8 \le 8$.

2) Bajo el supuesto de P_k es verdadero: $5 + \log_2 k \le k$. Por ello,

$$5 + \log_2(k+1) < 5 + \log_2(k+k)$$
$$= 5 + \log_2 2k$$
$$= 5 + \log_2 2 + \log_2 k$$
$$= (5 + \log_2 k) + 1$$
$$\le k + 1.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la prueba está completa.

35 $\dfrac{n^2+5n}{2}$ **37** $\dfrac{n^3+6n^2+20n}{3}$ **39** $n^4 + 2n^3 + 2n^2$

41 **a)** $a + b + c = 1$, $8a + 4b + 2c = 5$, $27a + 9b + 3c = 14$; $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$

b) El método que se utiliza en el inciso a) muestra que la fórmula es verdadera sólo para $n = 1, 2, 3$.

43 1) Para $n = 1$,

$$\operatorname{sen}(\theta + 1\,\pi) = \operatorname{sen}\theta\cos\pi + \cos\theta\operatorname{sen}\pi$$
$$= -\operatorname{sen}\theta = (-1)^1\operatorname{sen}\theta.$$

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero: $\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen}\theta$.

$$\operatorname{sen}[\theta + (k+1)\pi]$$
$$= \operatorname{sen}[(\theta + k\pi) + \pi]$$
$$= \operatorname{sen}(\theta + k\pi)\cos\pi + \cos(\theta + k\pi)\operatorname{sen}\pi$$
$$= [(-1)^k\operatorname{sen}\theta]\cdot(-1) + \cos(\theta + k\pi)\cdot(0)$$
$$= (-1)^{k+1}\operatorname{sen}\theta.$$

45 1) Para $n = 1$,

$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^1 = r^1[\cos(1\theta) + i\operatorname{sen}(1\theta)]$.

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:

$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta)$.

Por ello,

$$[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^{k+1}$$
$$= [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^k[r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]$$
$$= r^k[\cos k\theta + i\operatorname{sen}k\theta][r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]$$
$$= r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta - \operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta) + i(\operatorname{sen}k\theta\cos\theta + \cos k\theta\operatorname{sen}\theta)]$$
$$= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta].$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

EJERCICIOS 9.5

1 720 **3** 720 **5** 336 **7** 1 **9** 21

11 2,598,960 **13** $n(n-1)$ **15** $(2n+2)(2n+1)$

17 $(n+1)^2$ **19** $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

21 $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

23 $x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$

25 $81t^4 - 540t^3s + 1350t^2s^2 - 1500ts^3 + 625s^4$

27 $\frac{1}{243}x^5 + \frac{5}{81}x^4y^2 + \frac{10}{27}x^3y^4 + \frac{10}{9}x^2y^6 + \frac{5}{3}xy^8 + y^{10}$

29 $x^{-12} + 18x^{-9} + 135x^{-6} + 540x^{-3} + 1215 + 1458x^3 + 729x^6$

31 $x^{5/2} - 5x^{3/2} + 10x^{1/2} - 10x^{-1/2} + 5x^{-3/2} - x^{-5/2}$

33 $x^{20} - 16x^{19}$

35 $3^{25}c^{10} + 25\cdot 3^{24}c^{52/5} + 300\cdot 3^{23}c^{54/5}$

37 $-1680 \cdot 3^{13}z^{11} + 60 \cdot 3^{14}z^{11} - 3^{15}z^{15}$ **39** $\frac{189}{1024}c^8$

41 $\frac{114{,}688}{9}u^2v^6$ **43** $70x^2y^2$ **45** $448y^3x^{10}$

47 $-216y^9x^2$ **49** $-\frac{135}{16}$ **51** 4.8, 6.19

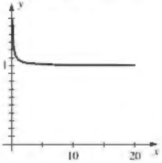
53 $4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$

55 $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$ and

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!\,(n-1)!} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

EJERCICIOS 9.6

1 17 **3** 60,480 **5** 120 **7** 720 **9** 311,875,200
11 1 **13** $n!$ **15 a)** 60 **b)** 125 **17** 64
19 $P(8, 3) = 336$ **21** 24
23 a) 2,340,000 **b)** 2,160,000
25 a) 151,200 **b)** 5760 **27** 1024
29 $P(8, 8) = 40{,}320$ **31** $P(6, 3) = 120$
33 a) 27,600 **b)** 35,152 **35** 9,000,000,000
37 $P(4, 4) = 24$ **39** 456 horas **41** $3! \cdot 2^3 = 48$
43 $(2^{16} - 1) \cdot 17$
45 a) 900
b) Si n es par, $9 \cdot 10^{(n/2)-1}$; si n es impar, $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$.
47

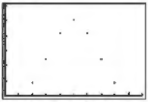


a) $y = 1$

b) $n! \approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

EJERCICIOS 9.7

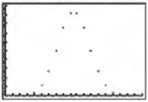
1 17 **3** 84 **5** 1 **7** 6 **9** 2,598,960
11 1 **13** n **15** $\frac{12!}{5!\,3!\,2!\,2!} = 166{,}320$
17 $\frac{10!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151{,}200$ **19** $C(10, 5) = 252$
21 $C(8, 2) = 28$ **23** $(5! \cdot 4! \cdot 8!) \cdot 3! = 696{,}729{,}600$
25 $3 \cdot C(10, 2) \cdot C(8, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(6, 2) \cdot 3 \cdot 4 = 4{,}082{,}400$
27 $C(12, 3) \cdot C(8, 2) = 6160$ **29** $C(8, 3) = 56$
31 a) $C(49, 6) = 13{,}983{,}816$ **b)** $C(24, 6) = 134{,}596$
33 $C(n, 2) = 45$ y por ello $n = 10$ **35** $C(6, 3) = 20$
37 Al encontrar $C(31, 3) = 4495$
39 a) $C(1000, 30) \approx 2.43 \times 10^{57}$
b) $P(1000, 30) \approx 6.44 \times 10^{89}$
41 $C(4, 3) \cdot C(48, 2) = 4512$
43 a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512
b) $S_n = 2^{n-1}$
45 a)



[0, 10] por [0, 300, 50]

b) 252; 5

47 a)



[0, 19] por [0, 10^5, 10^4]

b) 92,378; 9, 10

49 La suma de los dos números adyacentes es igual al número debajo y entre ellos.

EJERCICIOS 9.8

1 a) $\frac{4}{52}$; 1 a 12 **b)** $\frac{8}{52}$; 2 a 11 **c)** $\frac{12}{52}$; 3 a 10
3 a) $\frac{1}{6}$; 1 a 5 **b)** $\frac{1}{6}$; 1 a 5 **c)** $\frac{2}{6}$; 1 a 2
5 a) $\frac{5}{15}$; 1 a 2 **b)** $\frac{6}{15}$; 2 a 3 **c)** $\frac{9}{15}$; 3 a 2
7 a) $\frac{2}{36}$; 1 a 17 **b)** $\frac{5}{36}$; 5 a 31 **c)** $\frac{7}{36}$; 7 a 29
9 $\frac{6}{216}$ **11** $\frac{3}{8}$ **13** 5 to 2; 2 a 5 **15** 5 a 9; $\frac{9}{14}$
17 1.93 a 1 **19** $\frac{48 \cdot 13}{C(52, 5)} \approx 0.00024$
21 $\frac{C(13, 4) \cdot C(13, 1)}{C(52, 5)} \approx 0.00358$
23 $\frac{C(13, 5) \cdot 4}{C(52, 5)} \approx 0.00198$ **25** $\frac{4}{6}$
27 $(0.674)^4 \approx 0.2064$
29 a) 0.45 **b)** 0.10 **c)** 0.70 **d)** 0.95
31 a) $\frac{C(20, 5) \cdot C(40, 0)}{C(60, 5)} \approx 0.0028$
b) $1 - \frac{C(30, 0) \cdot C(30, 5)}{C(60, 5)} \approx 0.9739$
c) $\frac{C(10, 0) \cdot C(50, 5)}{C(60, 5)} + \frac{C(10, 1) \cdot C(50, 4)}{C(60, 5)} \approx 0.8096$
33 a) $\frac{C(8, 8)}{2^8} \approx 0.00391$ **b)** $\frac{C(8, 7)}{2^8} = 0.03125$
c) $\frac{C(8, 6)}{2^8} = 0.109375$
d) $\frac{C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)}{2^8} \approx 0.14453$
35 $1 - \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.34116$

37 **a)** Un resultado representativo es (nueve de los clubes, 3); 312
b) 20; 292; $\frac{20}{312}$ **c)** No; sí; $\frac{72}{312}, \frac{156}{312}, \frac{36}{312}, \frac{192}{312}$
d) Sí; no; 0; $\frac{92}{312}$

39 $1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$ **41** **a)** $\frac{1}{32}$ **b)** $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

43 **a)** $\frac{C(4,4)}{4!} = \frac{1}{24}$ **b)** $\frac{C(4,2)}{4!} = \frac{1}{4}$

45 **a)** 0 **b)** $\frac{1}{9}$

47 **a)** $\frac{304{,}366}{442{,}398} \approx 0.688$ **b)** $\frac{344{,}391}{442{,}398} \approx 0.778$

49 12.5% **51** **a)** $\frac{1}{16}$ **b)** $\frac{C(4,2)}{2^4} = \frac{6}{16}$

53 $\frac{2}{25{,}827{,}165}$ (alrededor de una oportunidad en 13 millones)

55 $\frac{1970}{39{,}800} \approx 0.0495$

57 **a)** $\frac{8}{36}$ **b)** $\frac{1}{36}$ **c)** $\frac{244}{495} \approx 0.4929$ **59** 183

61 10 **63** **a)** 0.9639 **b)** 0.95 **65** **b)** 0.76

67 \$0.99 **69** \$0.20

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE REPASO

1 $5, -2, -1, -\frac{20}{29}; -\frac{7}{19}$

2 0.9, −1.01, 0.999, −1.0001; 0.999 999 9

3 $2, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}; \frac{65}{64}$ **4** $\frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{8}{105}; \frac{8}{45}$

5 $10, \frac{11}{10}, \frac{21}{11}, \frac{32}{21}, \frac{53}{32}$ **6** 2, 2, 2, 2, 2

7 $9, 3, \sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}$ **8** $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

9 75 **10** $-\frac{37}{10}$ **11** 940 **12** −10 **13** $204x^2$

14 $\frac{101}{2}\pi - 101\sqrt{2}$ **15** $\sum_{n=1}^{5} 3n$ **16** $\sum_{n=1}^{6} 2^{3-n}$

17 $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$ **18** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

19 $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{3n-1}$ **20** $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{5n-1}$

21 $\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n+1}(105 - 5n)$ **22** $\sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

23 $\sum_{n=0}^{25} a_n x^{4n}$ **24** $\sum_{n=0}^{20} a_n x^{3n}$ **25** $1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$

26 $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ **27** 14, 33

28 $-5 - 8\sqrt{3}; -5 - 35\sqrt{3}$ **29** 52 **30** −31; 50

31 12 **32** 20, 14, 8, 2, −4, −10 **33** 64

34 −0.00003 **35** 1562.5 o −1562.5 **36** $4\sqrt{2}$

37 $-\frac{12{,}800}{2187}$ **38** 259, 9583 **39** 17; 3

40 $\frac{1}{81}; \frac{211}{1296}$ **41** 570 **42** 32.5 **43** 2041

44 −506 **45** $\frac{5}{7}$ **46** $\frac{6268}{999}$

47 1) P_1 es verdadero, dado que $3(1) - 1 = \frac{1[3(1) + 1]}{2} = 2$.

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) = \frac{k(3k + 1)}{2}.$$

Por ello,

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k - 1) + 3(k + 1) - 1 &= \frac{k(3k+1)}{2} + 3(k + 1) - 1 \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la prueba está completa.

48 1) P_1 es verdadero dado que

$$[2(1)]^2 = \frac{[2(1)][2(1) + 1][1 + 1]}{3} = 4.$$

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3}.$$

Por ello,

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 + [2(k + 1)]^2 &= \frac{(2k)(2k + 1)(k + 1)}{3} + [2(k + 1)]^2 \\ &= (k + 1)\left(\frac{4k^2 + 2k}{3} + \frac{12(k + 1)}{3}\right) \\ &= \frac{(k + 1)(4k^2 + 14k + 12)}{3} \\ &= \frac{2(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la prueba está completa.

49 1) P_1 es verdadero, dado que

$$\frac{1}{[2(1) - 1][2(1) + 1]} = \frac{1}{2(1) + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{k}{2k + 1}.$$

Por ello,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 3)} &= \frac{k}{2k + 1} + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 3)} \\ &= \frac{k(2k + 3) + 1}{(2k + 1)(2k + 3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k + 1)(2k + 3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la prueba está completa.

50 1) P_1 es verdadero, dado que $1(1+1) = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3} = 2.$

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Por ello,
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$
$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración prueba está completa.

51 1) Para $n = 1$, $n^3 + 2n = 3$ y 3 es un factor de 3.

2) Suponiendo que 3 es un factor de $k^3 + 2k$. El primer término de $(k + 1)$ es
$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 5k + 3$$
$$= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$$
$$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1).$$

Por la hipótesis de la inducción, 3 es un factor de $k^3 + 2k$ y de $3(k^2 + k + 1)$, por lo que es un factor del primer término de $(k + 1)$.

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

52 1) P_5 es verdadero, dado que $5^2 + 3 < 2^5$.

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero: $k^2 + 3 < 2^k$.

Por ello, $(k+1)^2 + 3 = k^2 + 2k + 4$
$$= (k^2 + 3) + (k + 1)$$
$$< 2^k + (k + 1)$$
$$< 2^k + 2^k$$
$$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

53 1) P_4 es verdadero, dado que $2^4 \leq 4!$

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero: $2^k \leq k!$ Por ello,
$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

54 1) P_{10} es verdero, dado que $10^{10} \leq 10^{10}$.

2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero $10^k \leq k^k$. Por ello,
$$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \leq 10 \cdot k^k < (k+1) \cdot k^k$$
$$< (k+1) \cdot (k+1)^k = (k+1)^{k+1}.$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

55 $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$

56 $16x^4 + 32x^3y^3 + 24x^2y^6 + 8xy^9 + y^{12}$

57 $x^8 + 40x^7 + 760x^6$ **58** $-\frac{63}{16}y^{12}c^{-10}$

59 $21{,}504x^{10}y^3$ **60** 52,500,000

61 **a)** $d = 1 - \frac{1}{2}a_1$ **b)** En pies: $1\frac{1}{4}, 2, 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}$

62 24 pies **63** $\frac{2}{1-f}$ **64** $P(10, 10) = 3{,}628{,}800$

65 **a)** $P(52, 13) \approx 3.954 \times 10^{21}$

b) $P(13, 5) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 2) \approx 7.094 \times 10^{13}$

66 **a)** $P(6, 4) = 360$ **b)** $6^4 = 1296$

67 **a)** $C(12, 8) = 495$ **b)** $C(9, 5) = 126$

68 $\frac{17!}{6!\,5!\,4!\,2!} = 85{,}765{,}680$ **69** 5 a 8; $\frac{8}{13}$

70 **a)** $\frac{2}{4}$ **b)** $\frac{2}{8}$

71 **a)** $\frac{P(26, 4) \cdot 2}{P(52, 4)} = 0.1104$ **b)** $\frac{26^2 \cdot 25^2}{P(52, 4)} \approx 0.0650$

72 **a)** $\frac{1}{1000}$ **b)** $\frac{10}{1000}$ **c)** $\frac{50}{1000}$

73 $\frac{C(4, 1)}{2^4} = \frac{4}{16}$; 1 a 3

74 **a)** $\frac{C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6)}{2^6} = \frac{22}{64}$

b) $1 - \frac{22}{64} = \frac{42}{64}$

75 **a)** $\frac{1}{312}$ **b)** $\frac{57}{312}$ **76** 0.44 **77** $\frac{8}{36}$

78 71 **79** 5.8125 **80** $\frac{1}{221}$

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 $a_n = 2n + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-10)$

(La respuesta no es la única.)

2 $\geq$; $j = 94$

3 **a)** $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

b) Utilizar la inducción matemática.

4 **a)** $2n^4 + 4n^3 + 2n^2$

b) Utilizar la inducción matemática.

5 Examinar la cantidad de dígitos en el exponente del valor en notación científica.

6 El primer coeficiente de $(k + 1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ de la expansión de $(a + b)^n$, llamada $\binom{n}{k}$, es igual al número de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos.

7 4.61 **8** \$5.33

9 Cantidad de centavos:

\$237.37 \$215.63 \$195.89 \$177.95 \$161.65
\$146.85 \$133.40 \$121.18 \$110.08 \$100.00

Cantidad de diez dólares reales:

\$240.00 \$220.00 \$200.00 \$180.00 \$160.00
\$140.00 \$130.00 \$120.00 \$110.00 \$100.00

10 Hay 11 cubiertas disponibles.

11 **a)** $\frac{1}{146{,}107{,}962}$ **b)** $\frac{3{,}991{,}302}{146{,}107{,}962}$ (alrededor de 1 en 36.61)

c) $\frac{28{,}800{,}030}{146{,}107{,}962} \approx 0.20$ **d)** \$117,307,932

12 0.43 **13** $0^v = 1$ **14** La suma es igual a π.

15 **a)** $\tan 5x = \dfrac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$

b) $\cos 5x = 1\cos^5 x - 1 + \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x$;

$\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 1\operatorname{sen}^5 x$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9

1 $6\frac{3}{8}$ **2** $-10, -46$ **3** 48 **4** $18j - 63$

5 $a_n = -7n + 32$ **6** 5173

7 $\sum_{n=1}^{2315} (11n - 5)$; 29,476,895 **8** 6110, 7003, 7896

9 2.87 y 3.33 pulgadas **10** $a_n = 36\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

11 -8192 **12** 1230 **13** 1328.125 **14** $\frac{146}{99}$

15 100

16 $a_n = (1.08)^{n-1}$; después de cuatro años de 8% de crecimiento, cualquier cantidad invertida valdrá alrededor de 2.94 veces su importe original.

17 1) P_1 es verdadero, dado que $6(1) - 4 = 2$ y $3(1)^2 - 1 = 2$.
2) Bajo el supuesto de que P_k es verdadero:
$2 + 8 + 14 + \cdots + (6k - 4) = 3k^2 - k$. Por ello,

$$\begin{aligned} 2 + 8 + 14 + \cdots + (6k - 4) + [6(k + 1) - 4] &= 3k^2 - k + [6(k + 1) - 4] \\ &= 3k^2 - k + 6k + 2 \\ &= 3k^2 + 6k + 3 - (k + 1) \\ &= 3(k^2 + 2k + 1) - (k + 1) \\ &= 3(k + 1)^2 - (k + 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_{k+1} es verdadero y la demostración está completa.

18 $8x^3 - 60x^2y^2 + 150xy^4 - 125y^6$ **19** $-274{,}176x^{-3}$

20 $x^{48} - 36x^{42}$ **21** $P(150, 50)$ es 50! veces $C(150, 50)$.

22 700 millones **23** 65,000 **24** 4.3×10^{22}

25 256 **26** $13! \times 39! \approx 1.27 \times 10^{56}$ **27** 0.3483

28 $C(5000, 5) \approx 2.6 \times 10^{16}$ **29** 11.7% **30** $\frac{32}{52}$

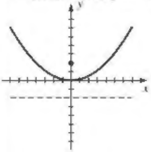
31 3 a 8 **32** 1.70 a 1 **33** $\frac{625}{1296}$ **34** 13

35 \$0.1125

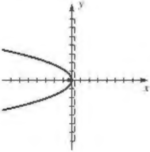
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1

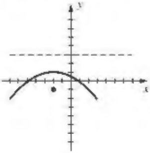
1 $V(0, 0)$; $F(0, 2)$; $y = -2$



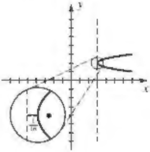
3 $V(0, 0)$; $F\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$; $x = \frac{3}{8}$



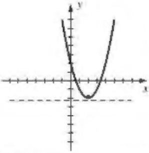
5 $V(-2, 1)$; $F(-2, -1)$; $y = 3$



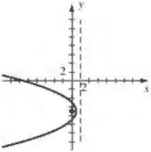
7 $V(3, 2)$; $F\left(\frac{49}{16}, 2\right)$; $x = \frac{47}{16}$



9 $V(2, -2)$; $F\left(2, -\frac{7}{4}\right)$; $y = -\frac{9}{4}$



11 $V(1, -7)$; $F(0, -7)$; $x = 2$



13 $y^2 = 20(x - 1)$ **15** $(x + 2)^2 = -16(y - 3)$

17 $(x - 3)^2 = 6\left(y - \frac{1}{2}\right)$ **19** $(y + 3)^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

21 $y^2 = 8x$ **23** $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$

25 $(y + 5)^2 = 4(x - 3)$ **27** $(x + 2)^2 = -8(y - 3)$

29 $y^2 = -12(x + 1)$ **31** $(x - 1)^2 = 8(y + 2)$

33 $3x^2 = -4y$ **35** $(y - 5)^2 = 2(x + 3)$

37 $x^2 = 16(y - 1)$ **39** $(y - 3)^2 = -8(x + 4)$

41 $y = -\sqrt{x + 3} - 1$ **43** $x = \sqrt{y - 4} - 1$

45 $y = \sqrt{x + 2} + 5$ **47** $x = -\sqrt{y + 1} + 2$

49 La mitad superior de $(y + 2)^2 = x - 6$

51 La mitad superior izquierda de $(x + 3)^2 = y + 7$

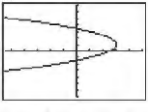
53 $y = -x^2 + 2x + 5$ **55** $x = y^2 - 3y + 1$

57 4 pulgadas **59** $\frac{9}{16}$ pies del centro del paraboloide

61 $2\sqrt{480} \approx 43.82$ pulgadas

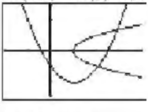
63 **a)** $p = \frac{r^2}{4h}$ **b)** $10\sqrt{2}$ pies **65** 57,000 pies^2

67



$[-11, 10, 2]$ por $[-7, 7]$

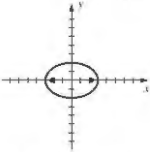
69 $(2.08, -1.04), (2.92, 1.38)$



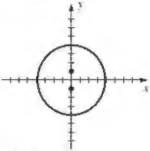
$[-2, 4]$ por $[-3, 3]$

EJERCICIOS 10.2

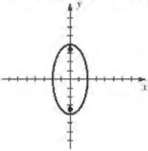
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$



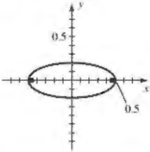
3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 1)$



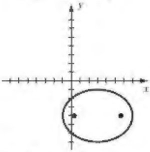
5 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



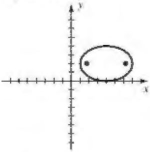
7 $V\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{21}, 0\right)$



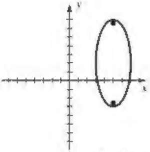
9 $V(3 \pm 4, -4)$; $F(3 \pm \sqrt{7}, -4)$



11 $V(4 \pm 3, 2)$; $F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$



13 $V(5, 2 \pm 5)$; $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$



15 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ **17** $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

19 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$ **21** $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

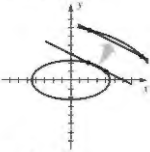
23 $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ **25** $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

27 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$ **29** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

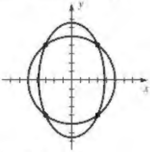
31 $\frac{x^2}{13} + \frac{4y^2}{39} = 1$ **33** $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$

35 $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{25} = 1$

37 $(2, 2)$, $(4, 1)$

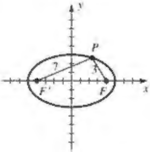


39 4 puntos: $(\pm 3, \pm 4)$



41 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **43** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{289} = 1$

45 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



47 $x = -\frac{6}{5}\sqrt{25 - y^2}$ **49** $y = \sqrt{\frac{17 - x^2}{3}}$

51 Mitad superior de $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$

53 Mitad izquierda de $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

55 Mitad derecha de $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

57 Mitad inferior de $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

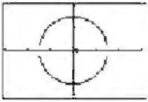
59 $\sqrt{84} \approx 9.2$ pies **61** 94,581,000; 91,419,000

63 **a)** $d = h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$; $d' = h + \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$

b) 16 cm; 2 cm de V

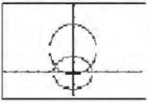
65 5 pies

67



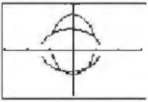
$[-300, 300, 100]$ por $[-200, 200, 100]$

69 $(\pm 1.540, 0.618)$



$[-6, 6]$ por $[-2, 6]$

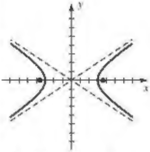
71 $(-0.88, 0.76)$, $(-0.48, -0.91)$, $(0.58, -0.81)$, $(0.92, 0.59)$



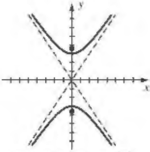
$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

EJERCICIOS 10.3

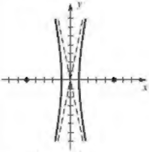
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



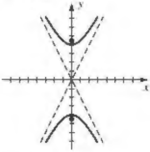
3 $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$



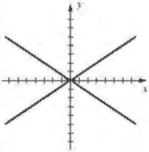
5 $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm 5, 0)$; $y = \pm\sqrt{24}x$



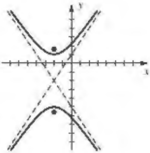
7 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$; $y = \pm 2x$



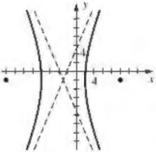
9 $V\left(\pm\frac{1}{4}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{12}\sqrt{13}, 0\right)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



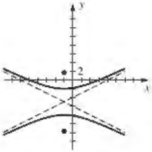
11 $V(-2, -2 \pm 3)$; $F(-2, -2 \pm \sqrt{13})$; $(y + 2) = \pm\frac{3}{2}(x + 2)$



13 $V(-3 \pm 5, -2)$; $F(-3 \pm 13, -2)$; $(y + 2) = \pm\frac{12}{5}(x + 3)$



15 $V(-2, -5 \pm 3)$; $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$; $(y + 5) = \pm\frac{1}{2}(x + 2)$



17 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **19** $(y + 3)^2 - \frac{(x + 2)^2}{3} = 1$

21 $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$ **23** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **25** $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$

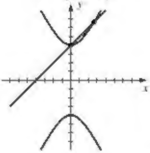
27 $\frac{x^2}{16} - \frac{3y^2}{4} = 1$ **29** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ **31** $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{90} = 1$

33 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$ **35** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

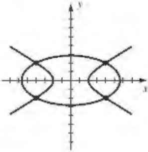
37 Parábola con eje horizontal **39** Hipérbola

41 Círculo **43** Elipse **45** Parábola con eje vertical

47 $(0, 4)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$

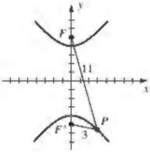


49 4 puntos: $(\pm 4, \pm 2)$



51 $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ **53** $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

55 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$



57 $y = -\frac{5}{6}\sqrt{x^2 + 36}$ **59** $x = -\frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 16}$

61 $x = \frac{9}{2}\sqrt{y^2 - 4}$ **63** $y = 2\sqrt{x^2 - 9}$

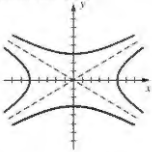
65 Ramificación derecha de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

67 Ramificación superior de $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$

69 Mitades inferiores de las ramificaciones de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{81} = 1$

71 Mitades izquierdas de las ramificaciones de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$

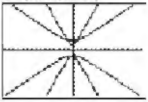
73 Las gráficas tienen las mismas asíntotas.



75 60.97 metros

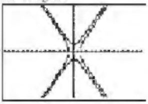
77 Si se introduce un sistema de coordenadas similar al del ejemplo 6, entonces las coordenadas del barco serían: $\left(\frac{80}{3}\sqrt{34}, 100\right) \approx (155.5, 100)$.

79 (0.741, 2.206)



$[-15, 15]$por$[-10, 10]$

81 Ninguno

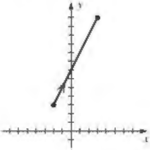


$[-15, 15]$por$[-10, 10]$

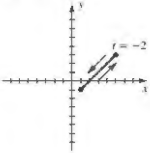
83 **a)** $(6.63 \times 10^7, 0)$ **b)** $v > 103\,600$ m/s

EJERCICIOS 10.4

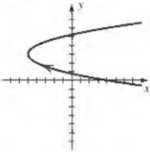
1 $y = 2x + 7$



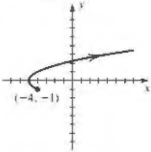
3 $y = x - 2$



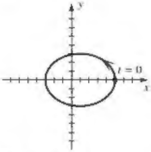
5 $(y - 3)^2 = x + 5$



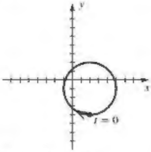
7 $x = y^2 - 5$



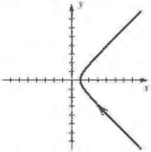
9 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$



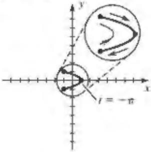
11 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$



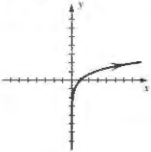
13 $x^2 - y^2 = 1$



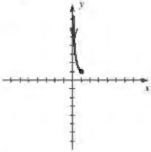
15 $x = 1 - 2y^2$



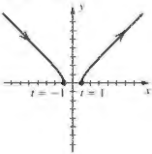
17 $y = \ln x$



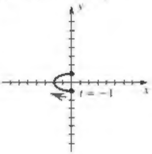
19 $y = 1/x$



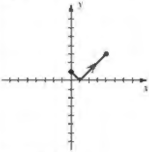
21 $y = \sqrt{x^2 - 1}$



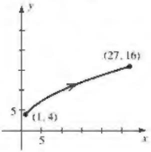
23 $x = -2\sqrt{1 - y^2}$



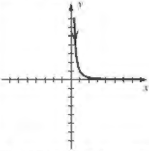
25 $y = |x - 1|$



27 $y = (x^{1/3} + 1)^2$



29 $y = 1/x^2$

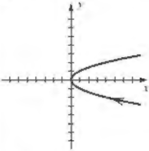


31 **a)** La gráfica es un círculo con centro en $(3, -2)$ y radio de 2. Se orienta en el sentido de las manecillas del reloj y comienza y termina en el punto $(3, 0)$.

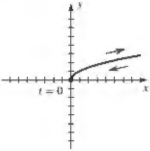
b) La orientación cambia en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

c) El punto inicial y final cambia a $(3, -4)$.

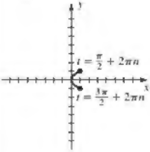
33 C_1



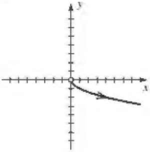
C_2



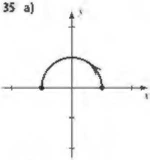
C_3



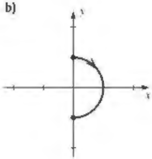
C_4



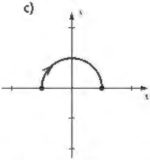
35 **a)**



b)



c)



39 Las respuestas no son las únicas.

a)

1)	$x = t$,	$y = t^2$;	$t \in \mathbb{R}$
2)	$x = \tan t$,	$y = \tan^2 t$;	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
3)	$x = t^3$,	$y = t^6$;	$t \in \mathbb{R}$

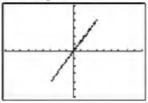
b)

1)	$x = e^t$,	$y = e^{2t}$;	$t \in \mathbb{R}$ (sólo da $x > 0$)
2)	$x = \operatorname{sen} t$,	$y = \operatorname{sen}^2 t$;	$t \in \mathbb{R}$ (sólo da $-1 \le x \le 1$)
3)	$x = \tan^{-1} t$,	$y = (\tan^{-1} t)^2$;	$t \in \mathbb{R}$ $\left(\text{sólo da } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

41 $3200\sqrt{3}$; 2704 **43** 15,488; 3872

45 **a)** La figura es una elipse con centro en $(0, 0)$ y ejes de $2a$ y $2b$ de longitud.

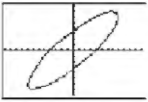
47 **a)**



$[-9, 9]$por$[-6, 6]$

b) 0°

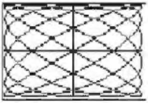
49 **a)**



$[-120, 120, 10]$por$[-80, 80, 10]$

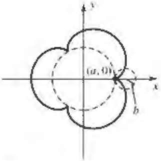
b) 30°

51

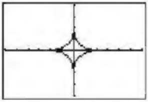


$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

55 $x = 4b \cos t - b \cos 4t$,
$y = 4b \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} 4t$

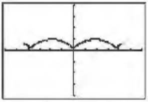


57



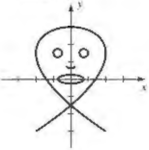
$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

59

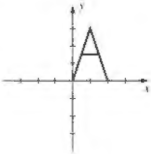


$[-30, 30, 5]$ por $[-20, 20, 5]$

61 Una máscara con boca, nariz y ojos



63 La letra A



EJERCICIOS 10.5

1 a), c), e)

3 **a)** $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

5 **a)** $(-4, -4\sqrt{3})$ **b)** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

7 $\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$ **9** **a)** $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **b)** $\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$

11 **a)** $\left(14, \frac{5\pi}{3}\right)$ **b)** $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

13 $r = -3 \sec \theta$ **15** $r = -4 \csc \theta$ **17** $r = 4$

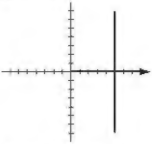
19 $r = 6 \cot \theta \csc \theta$ **21** $r = 5 \tan \theta \sec \theta$

23 $r = \dfrac{3}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$ **25** $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

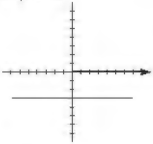
27 $r^2 = -4 \sec 2\theta$ **29** $r^2 = -6 \csc 2\theta$ **31** $r = 2 \cos \theta$

33 $r = -6 \operatorname{sen} \theta$ **35** $r = 6 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta$

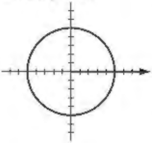
37 $x = 5$



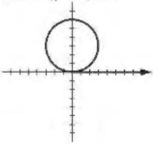
39 $y = -3$



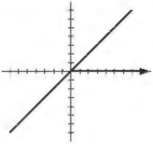
41 $x^2 + y^2 = 25$



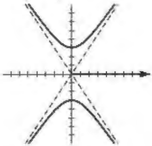
43 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$



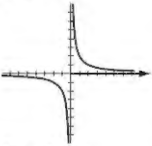
45 $y = x$



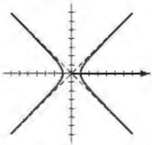
47 $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$



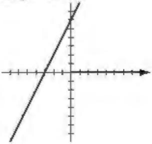
49 $xy = 2$



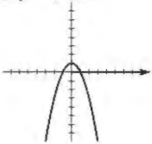
51 $x^2 - y^2 = 1$



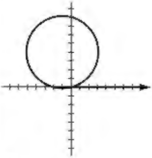
53 $y - 2x = 6$

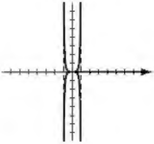


55 $y = -x^2 + 1$

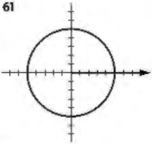


57 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$ **59** $y^2 = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$

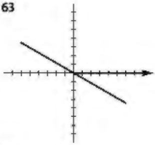




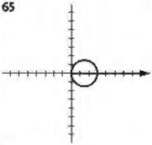
61



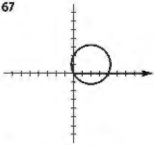
63



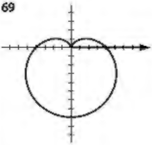
65



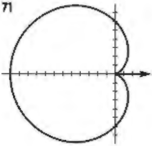
67



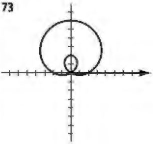
69



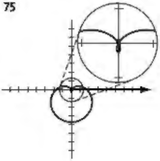
71



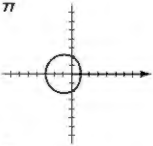
73



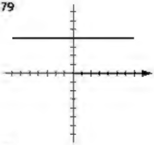
75



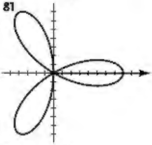
77



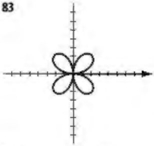
79



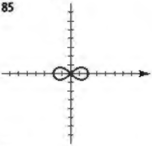
81



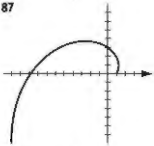
83



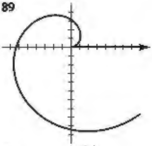
85



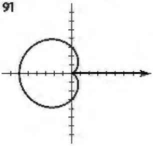
87



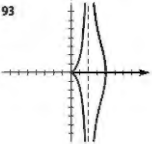
89



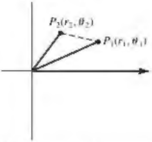
91



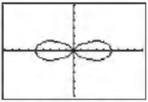
93



95 Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ los puntos en un avión $r\theta$.
Sea $a = r_1 b = r_2 c = d(P_1, P_2)$ y $\gamma = \theta_2 - \theta_1$.
Se obtiene la fórmula al sustituir con la ley de cosenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



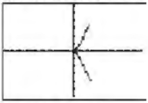
97 a)



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

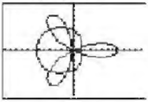
b) Max: dirección este-oeste; min: dirección norte-sur

99 Simétrico en relación con el eje polar



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

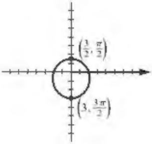
101 Las coordinadas polares aproximadas son $(1.75, \pm 0.45)$, $(4.49, \pm 1.77)$, y $(5.76, \pm 2.35)$.



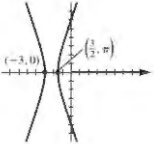
$[-12, 12]$ por $[-9, 9]$

EJERCICIOS 10.6

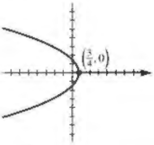
1 $\frac{1}{3}$, elipse



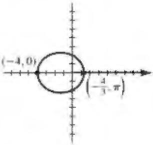
3 3, hipérbola



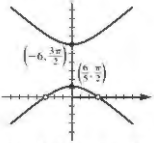
5 1, parábola



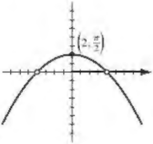
7 $\frac{1}{2}$, elipse



9 $\frac{3}{2}$, hipérbola



11 1, parábola



13 $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

15 $8x^2 - y^2 + 36x + 36 = 0$

17 $4y^2 + 12x - 9 = 0$ **19** $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

21 $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$; $x \neq \pm 3$

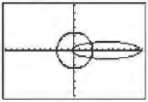
23 $x^2 + 8y - 16 = 0$; $x \neq \pm 4$ **25** $r = \dfrac{2}{3 + \cos\theta}$

27 $r = \dfrac{12}{3 - 4\cos\theta}$ **29** $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

31 $r = \dfrac{8}{5 + 2\operatorname{sen}\theta}$ **33** $r = \dfrac{8}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

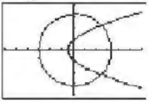
35 a) $\dfrac{3}{4}$ **b)** $r = \dfrac{7}{4 - 3\operatorname{sen}\theta}$

39 a) Elíptica
b)



$[-36, -36, 3]$ por $[-24, 24, 3]$

41 a) Hiperbólica
b)

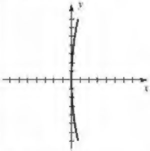


$[-18, 18, 3]$ por $[-12, 12, 3]$

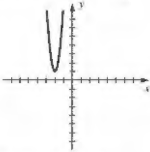
43 $e = \dfrac{r_{at} - r_{pe}}{r_{at} + r_{pe}}, a = \dfrac{r_{at} + r_{pe}}{2}$

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE REPASO

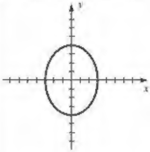
1 $V(0, 0)$; $F(16, 0)$



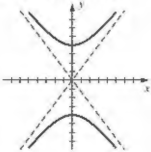
2 $V(-2, 1)$; $F\left(-2, \frac{33}{32}\right)$



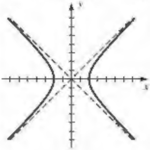
3 $V(0, \pm 4)$; $F\left(0, \pm\sqrt{7}\right)$



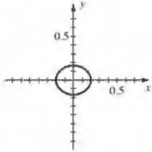
4 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 5)$



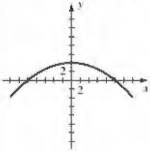
5 $V(\pm 2, 0)$; $F\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$



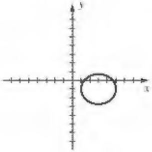
6 $V\left(\pm\frac{1}{5}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{30}\sqrt{11}, 0\right)$



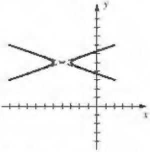
7 $V(0, 4)$; $F\left(0, -\frac{9}{4}\right)$



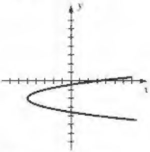
8 $V(3 \pm 2, -1)$; $F(3 \pm 1, -1)$



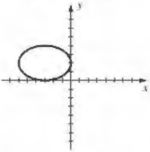
9 $V(-4 \pm 1, 5)$; $F\left(-4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}, 5\right)$



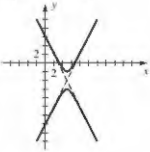
10 $V(-5, -2)$; $F\left(-\frac{39}{8}, -2\right)$



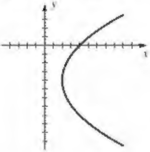
11 $V(-3 \pm 3, 2)$; $F\left(-3 \pm \sqrt{5}, 2\right)$



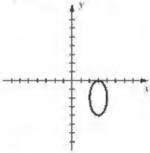
12 $V(5, -4 \pm 2)$; $F\left(5, -4 \pm \sqrt{5}\right)$



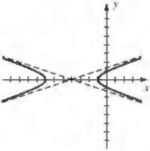
13 $V(2, -4)$; $F(4, -4)$



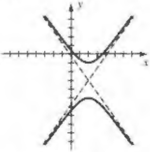
14 $V(3, -2 \pm 2)$; $F\left(3, -2 \pm \sqrt{3}\right)$



15 $V(-4 \pm 3, 0)$; $F\left(-4 \pm \sqrt{10}, 0\right)$



16 $V(2, -3 \pm 2)$; $F\left(2, -3 \pm \sqrt{6}\right)$



17 $y = 2(x + 7)^2 - 18$ **18** $y = -3(x + 4)^2 + 147$

19 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$ **20** $y^2 = -16x$ **21** $x^2 = -40y$

22 $x = 5y^2$ **23** $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$ **24** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

25 $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{\frac{4}{9}} = 1$ **26** $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **27** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{45} = 1$

28 $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{112} = 1$ **29** $x = 2 + 2\sqrt{y+3}$

30 $y = -3 - \frac{1}{2}\sqrt{x-5}$ **31** $x = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}$

32 $y = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ **33** $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2+16}$

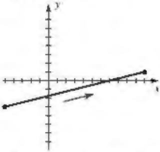
34 $y = -\frac{2}{5}\sqrt{100+x^2}$ **35** a) $-\frac{7}{2}$ b) Hipérbola

36 $A = \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ **37** $x^2 + (y-2)^2 = 4$

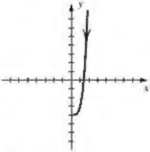
38 $2\sqrt{2}$ rad/s ≈ 0.45 rev/s

40 $x = \sqrt{9+4y^2}$

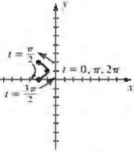
41 $x = 4y + 7$



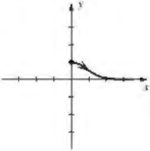
42 $y = x^4 - 4$



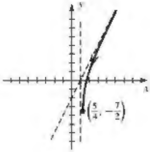
43 $(y-1)^2 = -(x+1)$



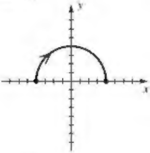
44 $y = 2^{-x^2}$



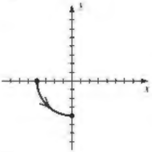
45 $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$



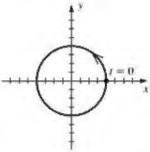
46 C_1



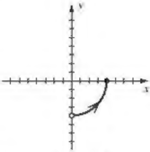
C_2



C_3



C_4



47 $20{,}480\sqrt{3}$; 9216 **48** $\left(-2, \dfrac{5\pi}{4}\right), \left(2, \dfrac{9\pi}{4}\right)$

49 $\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{2}, -\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ **50** $\left(4, \dfrac{11\pi}{6}\right)$

51 $r = 4 \cot\theta \csc\theta$ **52** $r = 3\cos\theta - 4\,\text{sen}\,\theta$

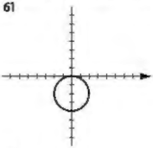
53 $r(2\cos\theta - 3\,\text{sen}\,\theta) = 8$ **54** $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

55 $x^3 + xy^2 = y$ **56** $x^2 + y^2 = 2x + 3y$

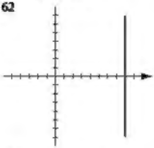
57 $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ **58** $y = \left(\tan\sqrt{3}\right)x$

59 $8x^2 + 9y^2 + 10x - 25 = 0$ **60** $y^2 = 6 + x$

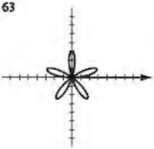
61



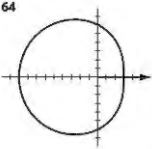
62



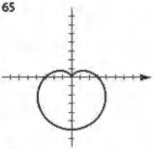
63



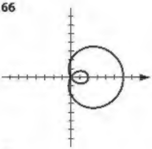
64



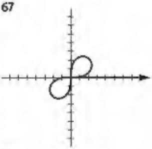
65



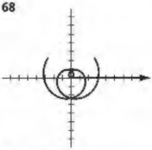
66



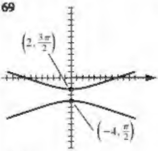
67



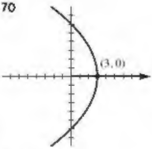
68



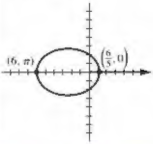
69



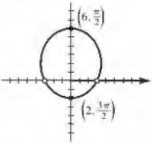
70



71 $\frac{2}{3}$, elipse



72 $\frac{1}{2}$, elipse



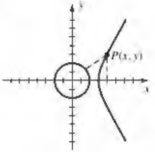
CAPÍTULO 10 EJERCICIOS PARA ANÁLISIS

1 $w = 4|p|$

2 El círculo atraviesa tanto el centro como los cuatro vértices del rectángulo auxiliar.

5 $\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1, x \geq 3.$

o $x = 2 + \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$



6 $d = \frac{1}{4\sqrt{a^2 + b^2}}$ 7 43.12°

9 $y = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}}$

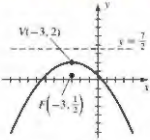
10 La gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj a través de un ángulo α, mientras que la gráfica de $r = f(\theta + \alpha)$ gira en el sentido de las manecillas del reloj.

11 $(180/n)°$

12 $y = 2 \pm \sqrt{4 - x^2}, y = \pm\sqrt{4 - (x - 2)^2}$

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10

1

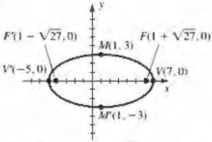


2 $(y + 1)^2 = -\frac{4}{5}(x - 5)$ 3 $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$

4 $y = -\sqrt{x + 2} + 4$ 5 $x = y^2 - 2y + 5$

6 $\frac{100}{7}$ pulgadas desde el centro del paraboloide.

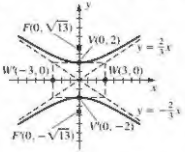
7



8 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$ 9 $\frac{\sqrt{33}}{7}$ 10 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$

11 $x = -2\sqrt{16 - y^2}$ 12 11.0 pies

13

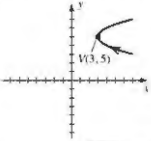


14 $y = \pm\frac{\sqrt{65}}{4}x$ 15 $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{9} = 1$

16 $x = -\frac{11}{7}\sqrt{49 + y^2}$

17 $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; esta es una elipse con centro en $(3, 0)$, eje horizontal menor de longitud $2(2) = 4$ y eje vertical mayor de longitud $2(5) = 10$. En la medida en la que t varía de 0 a 2π, (x, y) traza la elipse de $(5, 0)$ en dirección contraria a las manecillas del reloj de vuelta a $(5, 0)$.

18



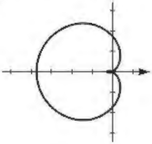
19 $x = t,\ y = -\sqrt{t^2 + 4}$; t en $\mathbb{R}$

20 C es la porción del círculo con centro en $(4, -1)$ y radio 3 que tiene una orientación en el sentido de las manecillas del reloj y comienza en $(4, 2)$ y termina en $(7, -1)$.

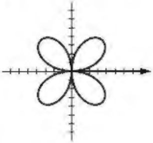
21 $5440\sqrt{3}$ pies **22** $\left(-4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **23** $r^2 = 7\ s\ 2\theta$

24 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

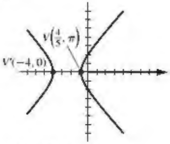
25



26



27 $\dfrac{3}{2}$; hipérbola



28 $16y^2 = 20x^2 + 96x + 64$

29 $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

Apéndice VI
Fórmulas e identidades fundamentales

Trigonometría

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

FÓRMULAS DE DOBLE ÁNGULO

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$$

$$= 2\cos^2 u - 1$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE COFUNCIONES

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

FÓRMULAS DE SUMA

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

IDENTIDADES DE MITAD DE ÁNGULO

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

FÓRMULAS DE PRODUCTOS A SUMA

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

FÓRMULAS DE RESTA

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE MITAD DE ÁNGULO

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u + v}{2}\right)\cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2\operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Álgebra

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS DE LOS PRODUCTOS NOTABLES

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIONES NOTABLES

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

EXPONENTES Y RADICALES

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

DESIGUALDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ si y sólo si

$$-d < x < d$$

$|x| > d$ si y sólo si

$$x > d \quad \text{o} \quad x < -d$$

MEDIAS

Media aritmética A de n números

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Media geométrica G de n números

$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n},\ a_k > 0$$

SUCESIONES

El n-ésimo término de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia constante d

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Suma S_n de los primeros n términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

o

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

El n-ésimo término de una sucesión geométrica con primer término a_1 y razón común r

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma S_n de los primeros n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

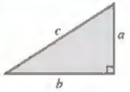
$y = \log_a x \quad$ significa $\quad a^y = x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$
$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

Fórmulas de geometría

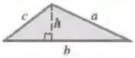
área A **perímetro** P **circunferencia** C **volumen** V **área de surperficie curva** S **altitud** h **radio** r

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}s \qquad A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$

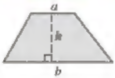
RECTÁNGULO

$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO

$A = bh$

TRAPECIO

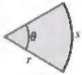


$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO

$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

SECTOR CIRCULAR



$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$

ANILLO CIRCULAR

$A = \pi(R^2 - r^2)$

PARALELEPÍPEDO

$V = lwh \qquad S = 2(hl + lw + hw)$

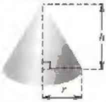
ESFERA

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO

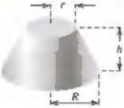
$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r h$

CONO RECTO



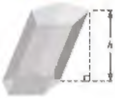
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

CONO TRUNCADO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

PRISMA



$V = Bh$ con B el área de la base

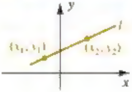
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

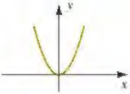
PENDIENTE m DE UNA RECTA



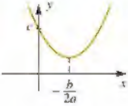
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

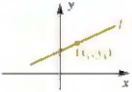
$y = ax^2, a > 0$



$y = ax^2 + bx + c, a > 0$



FORMA PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

CONSTANTES

$\pi \approx 3.14159$

$e \approx 2.71828$

CONVERSIONES

1 centímetro ≈ 0.3937 pulgada

1 metro ≈ 3.2808 pies

1 kilómetro ≈ 0.6214 milla

1 gramo ≈ 0.0353 onza

1 kilogramo ≈ 2.2046 libras

1 litro ≈ 0.2642 galón

1 mililitro ≈ 0.0381 onza fluida

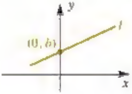
1 joule ≈ 0.7376 pies-libra

1 newton ≈ 0.2248 libra

1 lumen ≈ 0.0015 watt

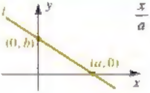
1 acre = 43,560 pies cuadrados

FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA



$$y = mx + b$$

FORMA DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

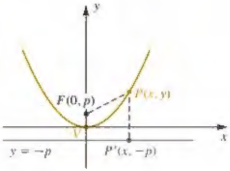


$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

Secciones cónicas

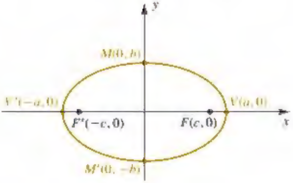
PARÁBOLA

$$x^2 = 4py$$



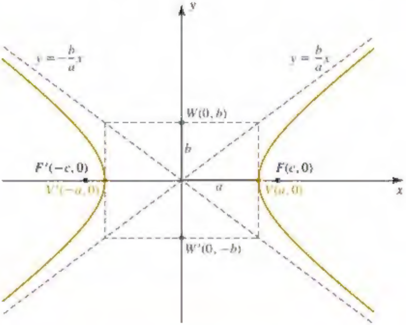
ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad a^2 = b^2 + c^2$$



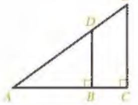
HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con} \quad c^2 = a^2 + b^2$$



Geometría plana

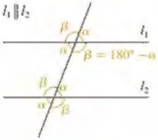
TRIÁNGULOS SEMEJANTES



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

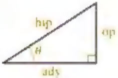
ÁNGULOS ALTERNOS INTERNOS CONGRUENTES



Trigonometría

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DE ÁNGULOS AGUDOS

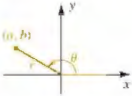


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

DE ÁNGULOS ARBITRARIOS

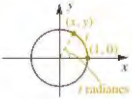


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

DE NÚMEROS REALES

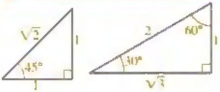


$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}$$

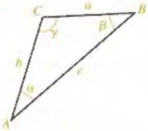
$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

TRIÁNGULOS RECTOS ESPECIALES



TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO



ÁREA

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (*Fórmula de Heron*)

LEY DE LOS COSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0	—	1

ALFABETO GRIEGO

Letra	Nombre	Letra	Nombre
A α	alfa	N ν	nu
B β	beta	Ξ ξ	xi
Γ γ	gamma	O o	ómicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ϵ	épsilon	P ρ	rho
Z ζ	zeta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	theta	Υ υ	upsilon
I ι	iota	Φ ϕ (φ)	phi
K κ	kappa	X χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mu	Ω ω	omega

Trigonometría

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

FÓRMULAS PARA NEGATIVOS

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\tan(-t) = -\tan t$$

$$\cot(-t) = -\cot t$$

$$\sec(-t) = \sec t$$

$$\csc(-t) = -\csc t$$

FÓRMULAS DE COFUNCIÓN

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

FÓRMULAS DE DOBLE ÁNGULO

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 u \\ &= 2\cos^2 u - 1 \end{aligned}$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$$

FÓRMULAS DE LA ADICIÓN

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

IDENTIDADES DE SEMIÁNGULOS

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

FÓRMULAS DE LA RESTA

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

FÓRMULAS DE SEMIÁNGULOS

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO

$$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cos\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

$$\cos u - \cos v = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right)$$

Álgebra

FÓRMULA CUADRÁTRICA

Si $a \neq 0$, la raíz de $ax^2 + bx + c = 0$ es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FÓRMULAS DE PRODUCTO ESPECIAL

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

EXPONENTES Y RADICALES

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

TEOREMA BINOMIAL

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + y^n,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

INEQUIDADES

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

VALOR ABSOLUTO $(d > 0)$

$|x| < d$ si y sólo si

$$-d < x < d$$

$|x| > d$ si y sólo si se cumple cualquiera de las dos condiciones

$$x > d \quad \text{o} \quad x < -d$$

MEDIAS

Media aritmética A de n números

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Media geométrica G de n números

$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n},\ a_k > 0$$

SECUENCIAS

El n-ésimo término de una secuencia aritmética, donde el primer término es a_1 y la diferencia común es d

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

La suma S_n de los primeros n términos de una secuencia aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

o

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

El n-ésimo término de una secuencia geométrica, donde el primer término es a_1 y la razón común es r

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma S_n de los primeros n términos de una secuencia geométrica

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

EXPONENTES Y LOGARITMOS

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$
$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

Índice analítico

A

Abscisa, 82
Agrupación, resolución de ecuaciones utilizando, 32
Alargamiento o contracción de gráficas, 140, 141, APP4-APP5
Algoritmo de división, 194
Amplitud
de un número complejo, 525
de una gráfica, 374
de movimiento armónico, 398
de una función trigonométrica, 374, 375, 376, 377
Ángulo central, 326, 329
Ángulo cuadrantal, 324, 344
Ángulo de inclinación, 326
Ángulo de referencia, 366, 367, 368
Ángulo negativo, 324
Ángulo obtuso, 325
Ángulo positivo, 324
Ángulo recto, 324
Ángulo recto, 325
Ángulo(s), 324-333
agudo, 325, 334
central, 326
complementario, 325, 326
coterminal, 324, 325
definición de 324
medición en grados de, 324
de depresión, 395, 396
de elevación, 395-396, 486
lado inicial de, 324
medición de, 325-328
negativo, 324
obtuso, 325
positivo, 324
cuadrante, 324, 344
medición en radianes, 324
referencia, 366, 367, 368
rectángulo, 325
posición estándar de, 324
recto, 324
subtendido, 325
complementario, 325
lado terminal de, 324
Aproximaciones, 13
Aproximaciones sucesivas, 186
Aproximadamente igual a (≈), 2
Arco circular, 329, 330
Arco de un círculo, 326
Área
de un sector circular, 329
de un triángulo, 84, 451, 495
Argumento
de un número complejo, 525, 527
de una función, 121
Arreglos sin repeticiones, 682
Asíntota
curvilínea, 232
horizontal, 223
de una hipérbola, 740
oblicua, 231-232
inclinada, 231
vertical, 222, 358, 360, 386, 387

B

Base, 12, 16
de una función exponencial, 261
para notación exponencial, 16
logarítmica, 283-285, 306
Binomios, 28, 672
multiplicación de, 30
Bisectriz perpendicular, 84, 85, 113

C

Calculadora. *Vea también* gráficas con calculadora
aproximación de valores de funciones, 337, 369, 370, 371, 428-429
forma científica y, 12
Calculadora graficadora, operaciones en
comprobación de ecuaciones, 47-48
comprobación de factorización, 32
combinaciones, 691
operaciones de números complejos, 60, 61, 526
conversión de radianes a grados, 328, 329
creación de una tabla, 35
estimación de puntos de intersección, 99-101
encontrar un determinante, 610
encontrar un producto punto, 514
encontrar raíces, 533
encontrar el mcm, 34
evaluación de expresiones, 4
evaluación de potencias de las funciones trigonométricas, 338
notación exponencial, 16
factoriales, 674
forma científica, 13
guardando valores, 4
resta, 6
sumando una secuencia, 641
términos de una secuencia de sumas parciales, 643, 646
pruebas de desigualdades, 8-9
generar una secuencia, 637, 638, 639
representación gráfica de una ecuación, 93
representación gráfica de una función, 130-131
representación gráfica de semielipses, 731-732
inversa de una matriz cuadrada, 604
funciones trigonométricas inversas, 470-471
recta de mejor ajuste, 114-116
enumerar y graficar una secuencia, 645-646
valor máximo (o mínimo), 156-157
multiplicación de matrices,
negativos, 6
modo paramétrico, 751-752, 753
permutaciones, 685
puntos de trazado, 86-87
conversión polar a rectangular, 765
raíz principal n-ésima, 20
exponentes racionales, 24
recíprocos, 6
conversión rectangular a polar, 766
secuencia definida de forma recursiva, 639, 646
forma escalonada reducida de la matriz, 585
representación de una desigualdad, 566-567
representación gráfica de una función definida por partes, 142-144
representación gráfica de ecuaciones polares, 768-770

inversa de una función, 257-258
valor absoluto, 10
suma de fracciones, 34
fórmulas de suma, 441
aproximación de soluciones de una ecuación trigonométrica, 429-430
vectores, 506
verificación de las identidades trigonométricas, 417
intersecciones de *x*, 93-94
intersecciones de *y*, 93
Cambio de la fórmula de base, 306
Cambio especial de fórmulas de base, 306
Cancelación de factores comunes, 33
Cantidad escalar, 500
Capital inicial, 43
Cardioide, 771
Caso ambiguo, 484, 492
Catenaria, 279
Centro
de un círculo, 97
de una elipse, 725
de una hipérbola, 738
Cero, el número, 5, 6, 7
Cero(s)
de una función, 124, 185, 189, 280
de un gráfico, 92
de multiplicidad *m*, 203
de un polinomio, 201-213
Ceros racionales de polinomios, 215, 216
Cerrado, definición de, 3
Ciclo, 355
Cicloide, 758, 759
Cifras significativas, 13
Círculo, 716
radio y centro del, 97
ecuación estándar del, 96
unitario, 96
Circunferencia unitaria, 96, 350, 424
longitud del arco, 461
valores de seno y coseno del, 753
Cociente, 244
de números complejos, 60, 527
diferencia, 127
en el proceso de división, 244
de factoriales, 673, 674
de funciones, 165
de números reales, 6, 7
Cocientes de diferencias, 127
Coeficiente, 16
binomial, 674
principal, 28
inicial, 28
matriz de, 579
Cofactor, 608-609
Cofunción, 438
Columna, de una matriz, 579
Combinación, 689
Combinación lineal
de **i** y **j**, 507
de filas, 590
Complemento, de un conjunto, 698
Completando cuadrados, 46, 97
Componente(s)
de *a* a lo largo de *b*, 517, 518
de un vector, 502
Comportamiento final, 90
Compresión horizontal de gráficas, 141
Compresión vertical de gráficas, 140
Común denominador, 34
Cóncava degenerada, 716, 726
Conclusión, 9
Cónicas. *Vea* secciones cónicas
Conjugado
de un número complejo, 59-60
de una expresión, 36
Conjunto(s), 27
complemento de, 698
correspondencia de, 120-121
intersección de, 67
subconjuntos de, 691
unión de, 67
Constante(s), 27
de proporcionalidad, 236
suma de, 643
de variación, 236
Contracción de gráficas, APP4-APP5
Convex limaçon, 772
Coordenada, 7
Coordenadas polares, 762-776
relación respecto a las rectangulares, 764, 765
Coordenadas rectangulares, 82-89
relación con las coordenadas polares, 764-766
Coordenada *x*, 82
Coordenada *y*, 82
Correspondencia uno a uno, 7, 502
entre conjuntos, 120-121
Crecimiento bacteriano, 265
Cuadrados, completando, 46
Cuadrante(s), 82, 324, 344-345
Curva, 749, 750
cerrada, 750
puntos finales de, 749
de menor desnivel, 759
orientación de, 751
ecuaciones paramétricas para, 750
parametrizada, 750, 751, 754
plana, 749
Cerrado simple, 750
Curva cerrada, 750
Curva cerrada simple, 750
Curva de crecimiento de Gompertz, 280
Curva de probabilidad normal, 265
Curva logística, 311
Cúspide, 131, 758

D
Decimal, 2
Decimal de repetición infinita, 661
Decrecimiento exponencial, 262
Definición
de conjugado de un número complejo, 59
de determinante de una matriz, 607, 609, 611
de distancia entre puntos en una recta de coordenadas, 11
de producto punto, 514
de excentricidad, 732
de elipse, 725
de igualdad y adición de matrices, 592
de evento, 695
del valor esperado, 703
de la función, 121, 130
de secuencia geométrica, 656
de la gráfica de una función, 124
de la asíntota horizontal, 223
de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, 342
de funciones trigonométricas de números reales, 349
de la asíntota vertical, 222
de trabajo, 520
de vector cero, 505
de función inversa, 252
de la inversa de una matriz, 602
de la función inversa sinusoidal, 461
de la función tangente inversa, 465
de la hipérbola, 738
de **i** y **j**, 506
de secuencia infinita, 636
de la función inversa del coseno, 463
de la secuencia aritmética, 649
de combinación, 689

del logaritmo común, 289
del componente de *a* a lo largo de *b*, 517
de la función compuesta, 166
de función lineal, 127
de logaritmo, 284
de magnitud de un vector, 501
de matriz, 579
de menores y cofactores, 608
Definición del límite de una función ε-δ
de medida de radianes, 326
de exponentes racionales, 23
del ángulo de referencia, 366
de múltiplo escalar de un vector, 504
del movimiento armónico simple, 398
Definición
de notación factorial (n), 673
de la función exponencial natural, 276
del logaritmo natural, 289
de negativo de un vector, 505
de la raíz n-ésima de un número, 19
de las probabilidades de un evento, 699
de una función de uno a uno, 250
de parábola, 716
de vectores paralelos y ortogonales, 515
de ecuaciones paramétricas, 750
de la función periódica, 354
de permutación, 683
de la curva plana, 749
de pendiente de una recta, 105
de sustracción de vectores, 504
de funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario, 351
de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, 334
de polinomio, 28
de probabilidad de un suceso, 695
de producto de un número real y una matriz, 594
de producto de dos matrices, 595
de la función cuadrática, 151
de valor absoluto, 10
del valor absoluto de un número complejo, 524
de adición de vectores, 503
alternativa, del límite de una función, 802
Definición recursiva, 639, 640
Delta, 105
Denominador, 6
común, 34
mínimo común, 34
racionalización, 22-23, 60
Descartes, René, 82
Descomposición fraccional parcial, 621, 622-626
Descomposición radiactiva, 265-266
Desigualdad continua, 9, 64, 66
Desigualdad cuadrática, 68-69
Desigualdades, 8, 64-73
continua, 9, 66
equivalente, 64
gráficos de, 64, 562-567
lineal, 563
no estricta, 9
propiedades de, 65, 73
cuadrática, 68-69
racional, 66
solución de, 64, 65-72, 189
estricta 8
sistemas de, 562-569
Desigualdad lineal, 563
Desigualdad racional, 66
Desigualdad trigonométrica, 381
Desigualdades estrictas, 8
Desigualdades no estrictas, 9
Desplazamiento, 501
Desplazamiento de fase, 377, 378, 387
Desplazamientos de gráficas, 138-139, APP4
Desplazamientos horizontales de las gráficas, 139
Desplazamientos verticales de las gráficas, 138, 377, 381
Determinantes, 607-613
propiedades de, 613-621
Diagrama de árbol, 680, 702
Diagrama de signos, 69, 70-72
Diferencia
común, 649
de números complejos, 59
de funciones, 165
de matrices, 594
de números reales, 6
de dos cubos, 31, 62
de dos cuadrados, 31
Diferente de ($\neq$), 2
Dígitos,
significativos, 13
Dina, 519
Dirección, 7, 397
negativa, 7
positiva, 7
Directrices
para encontrar la forma escalonada de una matriz, 582
para encontrar un elemento en una matriz de producto, 595
para encontrar funciones inversas, 253
para encontrar descomposiciones en fracciones parciales, 622
para el método de sustitución de dos ecuaciones en dos variables, 545
para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y, 562
para trazar la gráfica de una función racional, 225-226
Directriz
de una cónica, 776
de una parábola, 718
Discriminante, 47, 62
Distancia, en una recta de coordenadas, 11, 67
Distintas permutaciones, 687
División
larga, 194
de polinomios, 194
de números reales, 6
sintética, 196-198, 207
Divisor, 2
Dominio
de una expresión algebraica, 28
de una función compuesta, 253
de una función, 121
implícito, 122
de una función racional, 221
de una función trigonométrica, 360

E

Ecuación(es), 41-52
algebraicas, 41
en problemas aplicados, 43
de un círculo, 96
condicional, 41
deprimida, 210
de una elipse, 727
equivalente, 41
exponencial, 263, 305-308
gráficas de, 89-104
de una media elipse, 729-730
de una bisectriz perpendicular, 113
cuadrática, 45-49
tipo cuadrática, 52
raíz de, 92
solución de, 41
sistemas de, 544-553

teoría de, 201
trigonométrica, 422-435
en x, 41
en x y y, 90
sistema homogéneo de, 586
de una hipérbola, 740
como identidad, 41
lineal, 41, 110, 553-562
de rectas, 108-110
logarítmica, 282, 297-305, 308-313
sin soluciones, 42
de una parábola, 153-154, 718
Ecuación estándar
de una circunferencia, 96
de una elipse, 727
de una hipérbola, 740
de una parábola, 718
Ecuación lineal, 41, 110
en más de dos variables, 577-592
en dos variables, 553-562
Ecuación polar, 766-774
de cónicas, 776-782
Ecuaciones paramétricas, 750
para un cicloide, 758-759
para una recta, 755
Eje(s)
conjugados, 739
coordenados, 82
de una elipse, 726
de una hipérbola, 739
imaginario, 524
mayor, 726
menor, 726
de una parábola, 91, 716
polar, 762
transversal, 739
Elemento
de una matriz, 580
de un conjunto, 27
Elipse, 716, 725-738, 776
centro de, 725
excentricidad de, 732
focos de, 725
eje mayor de, 726
eje menor de, 726
ecuaciones polares de, 778-779
propiedad reflectante de, 734
ecuación estándar de, 727
vértices de, 726
Elipsoide, 734
Enteros, 2
no negativos, 2
positivos, 2
Equivalencia de desigualdades, 64
Erg, 519
Escala de Richter, 290
Escalar, 500
Espacio muestral, 694
Espiral de Arquímedes, 773
Estiramiento vertical de las gráficas, 140
Eventos, 695
independientes, 700
mutuamente excluyentes, 697
Excentricidad, 732, 776
Expansión binomial, 676-677
Expansión de un determinante, 611
Experimento, 694
Exponente(s), 12, 16-19
irracional, 24, 261
leyes de, 17-18
negativo, 17, 19
racional, 23, 24
cero, 17
Expresión fraccionaria, 33-38
Expresión trigonométrica, 416
Expresiones algebraicas, 28-38
Expresiones racionales, 33
simplificadas, 33
sumas y diferencias de, 34
Extrapolación, 115
Extremum, 185

F

Factor, 2, 30, 31
Factor de amortiguación, 391
Factores comunes, 616
cancelación de, 33
Factores no triviales, 30
Factorización, 30, 51
fórmulas para, 31
agrupando, 32
método de, 45-46
con fórmula cuadrática, 48
en la resolución de ecuaciones trigonométricas, 425, 426, 427
por ensayo y error, 31
Figura de Lissajous, 757-758
Fila, de una matriz, 579
Fila equivalente, 580
Foco, 738
de una cónica, 776
de una elipse, 725
de una hipérbola, 738
de una parábola, 716
de un paraboloide, 721
Forma científica, 12-13
Forma de intersección,
de una recta, 108
Forma de pendiente ordenada al origen, 109
Forma escalonada, de una matriz, 581-584, 614
reducida, 584, 585
Forma estándar, de una ecuación cuadrática, 45
Forma exponencial, 284, 525
Forma factorial para una permutación, 684
Forma general para la ecuación de una recta, 110
Forma logarítmica, 284
Forma polar del número complejo, 526
Forma punto-pendiente, 108
Forma trigonométrica de números complejos, 525, 526
Fórmula(s)
cambio de base, 306
cambio de base especial, 306
cuadrática, 46-48
de aproximación, 362
de Euler, 525
de Heron, 496-497
de la distancia, 82, 83, 84
de punto medio, 85
de adición, 436, 438, 439, 440
de ángulos múltiples, 446-455
de cofunción, 438
de doble ángulo, 446
de interés compuesto continuo, 275, 276 - 277
de medio ángulo, 449, 450
de producto, 30
de producto a suma, 455-456
de reducción, 441-442
de resta, 436, 437, 439
de suma a producto, 457-458
distancia, 82, 83, 84
factorización, 31
interés compuesto, 267, 274-275
interés compuesto continuo, 275, 276, 277
interés simple, 43
ley de crecimiento (o decremento), 277
para negativos, 355, 356
producto, 30
punto medio, 85
Fracciones, 6
suma, 34
complejas, 36
parciales, 621-626

Frecuencia, en movimiento armónico, 398
Fuerza, 519
constante, 519, 520
resultante, 502
Función
algebraica, 166
arcocoseno, 463
arcoseno, 461
arcotangente, 465
compuesta, 166-171
constante, 125
cosecante, 334, 359, 360, APP6
cotangente, 334, 357, 360, 440, APP6
de aumento, 251
de coseno hiperbólico, 279
decreciente, 125, 251
de crecimiento, 262
de crecimiento de Gompertz, 280
de cuadratura, 125
de cubicación, 125
de identidad, 126
de valor absoluto, 137
entero más grande, 145-146
Función coseno, 334, 357
fórmula de suma para, 438
gráfica de, APP6
fórmula de resta para, 436, 437
valores del círculo unitario, 753
Funciones circulares, 351
Funciones continuas, 184
límites de, 792
Funciones cuadráticas, 151-165
Funciones definidas por partes, 142-145
Funciones inversas, 252-258
Funciones logarítmicas, 283-297
Función(es) racional(es), 221-236
Funciones trigonométricas inversas, 369, 460-475, APP7

G

Galerías susurrantes, 734
Gauss, Carl Friedrich, 201
Geometría analítica, 715-787
Grados
como medida angular, 324
de un polinomio, 28
relación con el radián, 326, 327, 328
Gráfica(s)
agujero en una, 227, 261, 362
compresiones horizontales de, 141, APP5
de recta horizontal, APP2
desplazamientos horizontales, 139, APP4
tramos horizontales de, 141, APP5
de la función de identidad, APP2
de desigualdades, 64
de ecuaciones lineales, 110
de una figura de Lissajous, 757-758
de ecuaciones logarítmicas, 287-288
de las funciones logarítmicas, 286-288, APP3
de una parábola, APP2
de una curva parametrizada, 750-751, 754
de una curva plana, 749
definición de 90
de ecuaciones, 89-104
de funciones exponenciales, 262-266, 278, APP3
de funciones, 124-126, 128, 136-147
de la función del entero más grande, APP3
de funciones recíprocas, APP3
reflejo de, 140, 141
de semicírculos, APP2
de una secuencia, 637, 638
de un conjunto de pares ordenados, 90
de funciones trigonométricas, 353, 358, 360, 373-382, 386-393, 431-432, APP6-APP8
puntos de inflexión de, 185, 189
compresiones verticales de, 140, APP4-APP5
de una recta vertical, APP2
desplazamientos verticales de, 138, APP4
tramos verticales de, 140, APP4
intersecciones en x, 451, 458
de una función de valor absoluto, APP2
amplitud de, 374
de una función circular, APP2
comunes, y sus ecuaciones, APP2-APP3
de la función raíz cúbica, APP3
de la función de cubicación, APP3
de un conjunto de números reales, 64
de la función raíz cuadrada, APP2
resumen de las transformaciones de, APP4-APP5
simetrías de, 94-95
de un sistema de desigualdades, 564, 565-567
puntos de intersección de, 99-100
de una ecuación polar, 766, 768, 770-771, 772, 773
de funciones polinomiales, 186-188
de funciones racionales, 223, 225, 226-231, 232-233, APP3

H

Hemielipsoide, 734
Hipérbola, 224, 716, 738-749, 776
asíntotas para, 740
rectángulo auxiliar para, 740
ramas de, 740
centro de, 738
ejes conjugados de, 739
focos de, 738
ecuaciones polares de, 779
propiedad reflectante de, 745
ecuación estándar de, 740
eje transversal de, 739
vértices de, 739
Hipotenusa, 334
Hipótesis, 9
inducción, 667

I

Identidad(es)
aditiva, 3
cotangente, 338
de medio ángulo, 448-449
de diferencias, 436
de la cotangente, 338
ecuación como, 41
fundamentales, 338, 339, 345
multiplicativa, 43
pitagóricas, 338, 339
recíprocas, 335, 338
tangente, 338
trigonométrica, verificación, 341-342, 416, 418, 419, 422
Igual a (=), 2, 27
Igualdad, 41
de números complejos, 58
de funciones, 121
de matrices, 592
de polinomios, 29
propiedades de, 5
de números reales, 2
de secuencias, 637
de conjuntos, 27
de vectores, 501
Imagen, 121
Imagen espejo, 95

Índice
de un radical, 20, 24
de la sumatoria, 640
Inducción matemática, 666-672
Infinito (∞), 64
Integración, 455
Interés
compuesto, 266, 267
compuesto continuo, 275, 276
simple, 43
fórmulas para, 267
Interpolación, 115
Intersección (∩) de conjuntos, 67
Intersección, de una gráfica, 92
Intersección en x, 92, 93-94, 360, 451, 458, 795
Intersección en y, 92, 93-94
Intervalo(s)
abierto, 64
cerrado, 64
infinito, 64
semiabierto, 64
Inversamente proporcional, definición de, 237
Inverso
aditivo, 3, 593
de una matriz, 602-605
multiplicativo, 3, 60
Invertibilidad de la matriz, 612
i, unidad imaginaria, 57
i, vector, 506, 507

J
Joule, 519
j, vector, 506, 507

K
Kepler, Johannes, 733

L
Lado
adyacente, 334
inicial de un ángulo, 324
opuesto, 334
terminal de un ángulo, 324
Ley
de la tricotomía, 8, 68
del crecimiento exponencial, 262
del paralelogramo, 502
del triángulo, 501
de refrigeración de Newton, 291
de cosenos, 491, 492-493
de exponentes, 17-18
de crecimiento (o decrecimiento), 277
de logaritmos, 298-300
de radicales, 21
de signos, 9
de senos, 482, 483, 486
de tricotomía, 8, 68
Limaçon(es), 771, 772
Límite de una función
teorema en, APP9-APP11
teorema sobre el límite de una función raíz, APP11-APP12
teorema de la unicidad, APP9
Límite inferior, 207
Límites
para ceros, 207-209
superiores, 207
Línea horizontal, 108
Litotriptor, 734
Logaritmo(s)
base de, 284
cambio de base de, 306
común, 289
leyes de, 298-300
natural, 289
propiedades de, 297-305
cambios especiales de base de, 306
Logaritmos comunes, 289
Longitud
del arco, 461
de un arco circular, 329
de un segmento de recta, 11

M
Magnitud
de un vector, 501, 502-503
Mapas, 121
Más o menos (±), 20
Matrices equivalentes, 580
Matriz
aumentada, 579
cero, 593
cuadrada, 580
de coeficiente aumentada, 579
de columna, 597
de filas, 597
identidad, 601, 602
inversa, 604
suma de, 592-593
inverso aditivo de, 593
álgebra de, 592-601
coeficiente, 579
definición de 579
determinante de, 607, 609, 611
notación de subíndice doble para, 579
forma escalonada de, 581-584
elemento de, 580
transformaciones elementales de fila de, 580
de orden n, 580
producto de, 595
producto con un número real de, 594
forma escalonada reducida de, 584, 585
fila, 597
fila equivalente, 580
filas de, 579
tamaño de, 579
cuadrada, 580
resta de, 593-594
de un sistema de ecuaciones, 579
cero, 593
igualdad de, 592
equivalente, 580
identidad, 601
inverso de, 601-607
combinación lineal de filas de, 590
elementos diagonales principales de, 580
Máximo común divisor, 31, 38
Mayor o igual que (≥), 9
Mayor que (>), 8
Media
aritmética, 652
geométrica, 659
elipse, ecuaciones para, 729-730
parábola, gráfica de, 722
Menor, 608-609
Menor o igual que (≤), 9
Menor que (<), 8
Método
de completar cuadrados, 46, 97
de eliminación, 555, 558, 577
de factorización, 45-46
inverso, 605
de sustitución, 545-547
de prueba y error, 31
Mínimo común múltiplo (mcm), 34
Minutos, 325, 328
Modelo matemático, 114
Modo conectado, 242
Modo de punto, 233
Modo radián, 350
Módulo, de un número complejo, 525, 527
Monomio, 28
Movimiento
amortiguado, 398

armónico, 398, 399
armónico simple, 398
de un punto, 753
Multiplicación
de números complejos, 58, 59
de matrices, 594-599
propiedades de, 3
Multiplicación inversa
de un número complejo, 60
de un número real, 3
Multiplicidad de un cero, 203
Múltiplo constante, de una ecuación, 554
Múltiplo escalar de un vector, 502, 504, 505

N

n-ésima potencia, 16, 21
n-ésima raíz, 530-532
de una función, 813
principal, 19
propiedades de, 20
de la unidad, 63, 533
n-ésimo término
de una secuencia aritmética, 650
de una secuencia geométrica, 657
de una secuencia, 636
de una serie, 661
Negativo(s)
fórmulas para, 355
propiedades de, 5
de un número real, 3, 8
de un vector, 505
n factorial, 673
No polinomios, 29
Notación
de cuña, 502
de flecha, 90-91
de subíndice doble, 579
de sumatoria, 640
equivalente, para conjuntos, 27
exponencial, 12, 16, 23
factorial, 673-674
Numerador, 6
racionalización, 36
Número
e, 275
imaginario, 58
imaginario puro, 58
irracional, 2
primo, 2
racional, 2
real de la unidad, 63
complejo, 57-63
imaginario, 58
negativo real, 7, 8
complejo no real, 58
positivo real, 7
primo, 2
puro imaginario, 58
racional, 2
unidad real, 63
entero, 2
Número(s) complejo(s), 57-63
valor absoluto de, 524
adición de, 58
amplitud de, 525
argumento de, 525
conjugado de, 59-60
diferencia de, 59
igualdad de, 58
parte imaginaria de, 58
unidad imaginaria i, 57
módulo de, 525
multiplicación de, 58
multiplicación por un número real de, 59
inverso multiplicativo de, 60
raíz *n*-ésima de, 530-532
producto de, 527
cociente de, 60, 527
parte real de, 58

O

Onda coseno amortiguada, 391
Onda del coseno, 355
Onda senoidal amortiguada, 391
Onda sinusoidal, 355, 379
Ordenación, 8
Ordenado triple, 547
Ordenar, 82
Orden de una matriz, 580
Orientación, de una curva parametrizada, 751
Origen, 7, 82, 727, 740, 762
Oscilación, 399

P

Parábola(s), 91-92, 716-725, 776
eje de, 91, 716
directriz de, 716
foco de, 716
ecuación polar de, 779-780
propiedad reflectante de, 721
ecuación estándar de, 153-154, 718
vértice de, 91, 154, 155, 716
Paraboloide, 721
Paralelogramo, diagonales de, 493
Parametrización, 750
Parámetro, 750
Par ordenado, 82, 90
Pares de ceros conjugado de un polinomio, 213
Parte imaginaria de un número complejo, 57-58
Parte real de un número complejo, 58
Pasos
para resolver problemas aplicados, 43
para resolver un problema de programación lineal, 571
para resolver problemas de variación, 238
para división sintética, 196-197
Pendiente negativa, 105
Pendiente positiva, 107
Pendiente(s)
de una recta, 105-108
de rectas paralelas, 111
de rectas perpendiculares, 112
Periodo, 354, 360, 375, 376, 378, 387
de movimiento armónico, 398
Periodo de interés, 274
Permutaciones, 680-687
distinguible, 687
no distinguible, 687
Permutaciones indistinguibles, 687
Pi (π), 2
Plano complejo, 524
Plano de Argand, 524
Plano de coordenadas, 82
Plano $r\,\theta$, 763
Plano xy, 82
Polinomio
cero, 29
divisible, 194
irreductible, 31
primo, 31
como producto de factores lineales y cuadráticos, 216
ceros racionales de, 215, 216
cero real de, 201
término de un, 28
en x, 28, 29
cero, 29
ceros de, 201-213
suma y resta, 29
límites para ceros de, 207-208
ceros de pares conjugados, 213
constante, 29
término constante de, 205

cúbico, 184
grado de, 28
división, 194
Polo, 762
Posición estándar, de un ángulo, 324
Primer término de una sucesión, 636
Principio
de fundamental conteo, 681
de inducción matemática, 666
extendido de la inducción matemática, 670
Probabilidad, 694-708
Probabilidades, 699
Problema de programación lineal, 571
Problemas prácticos
pasos para resolver, 43-45, 49
trigonometría en, 393-405
Producto(s)
de números complejos, 58, 60, 527
de funciones, 165
con cero, 5
de matrices, 595, 596
de números reales, 3
escalar, 514
interior, 514
punto, 514-523
Programación lineal, 569-577
Promedio, 652
Propiedad(es)
distributiva, 3
asociativa, 3
conmutativa, 3
reflectante
de una elipse, 734
de una hipérbola, 745
de una parábola, 721
de valores absolutos, 68
de conjugados, 60
de igualdad, 5
de i, 57
de desigualdades, 65, 73
de logaritmos, 297-305
de negativos, 5
de *n*-ésimas raíces, 20
de cocientes, 7
de números reales, 3
Proporcionalidad
constante de, 236
directa, 237
inversa, 237
conjunta, 239
Proyección
de *u* en *b*, 517
Proyectil, camino de, 755-757
Prueba de recta horizontal, 250, 251
Prueba de recta vertical, 124
Pruebas de simetría, 774
Punto
de intersección de gráficas, 99-100
movimiento de, 753
en un círculo unitario correspondiente a un número real, 351
de prueba, 562
inicial de un vector, 501
medio, 85
Puntos de giro, 185, 189
Puntos de trazado, 82, 86-87
Puntos finales
de una curva, 749
de un intervalo, 64
Punto terminal de un vector, 501

R

r-upla ordenada, 682
Racionalización de denominadores, 22-23, 60
Racionalización de los numeradores, 36
Radián, 326-328
relación con grados, 327
Radical(es), 20-25, 51
combinando, 24-25
leyes de, 21
eliminación de factores de, 21-22
Radicando, 20
negativo, 61-62
Radio de un círculo, 97
Radioterapia, 279
Raíz
cuadrada, 2, 20, 61-62
cúbica, 20
de la unidad, 63, 533
de multiplicidad 2, 46
de multiplicidad *m*, 203
de una ecuación, 41, 92
doble, 46
existencia de, 21
extraña, 42
función, 812-813
función, teorema en el límite de, APP11-APP12
n-ésima, de números complejos, 530-532
n-ésima principal, 19-20
Raíz cuadrada, 2, 20, 61
de números negativos, 61-62
Raíz cuadrada principal, 20, 61
Raíz *n*-ésima principal, 19-20
Raíz cúbica, 20
de la unidad, 63, 533
Raíz extraña, 42
Ramas
de una hipérbola, 740
Rango de una función, 121, 253, 360
Rayos, 324
Razón común, 656
Recíproco, 4, 6
notación para, 5
de la coordenada y, 358
Rectángulo auxiliar, 740
Rectángulo de visualización, 86
Recta(s), 104-120
real, 7
de mejor ajuste (de tendencia), 114-116
coordenadas, 7
ecuación de, 110
forma general de, 110
horizontal, 108
forma de intersección de, 118
paralela, 111
ecuación paramétrica de, 755
perpendicular, 112
forma de punto pendiente de, 108
ecuación polar de, 766-767
pendiente de, 105-108
forma de pendiente ordenada al origen, 109
vertical, 108
Recta de coordenadas, 7
Recta de regresión lineal, 114
Recta vertical, 108
Rectas paralelas, 111
Rectas perpendiculares, 112
Recta tangente
a un círculo, 97
a una parábola, 721
Redondeo, 13
Reflexión de una gráfica, 95, 140, 141, 257, APP5
Regla
de 70, 292
de 72, 292
de Cramer, 617, 618-619
de signos de Descartes, 206-207
Regresión, 114
Representación geométrica, 524
Residuo, en el proceso de división, 194
Restricciones, de una función objetivo, 570
Resultado de un experimento, 694

S
Secciones cónicas, 716
Sector circular, 329, 330
Secuencia(s), 636
 aritmética, 649-656
 igualdad de, 637
 generación, 638, 639
 geométrica, 656-665
 gráfica de, 636, 638, 645
 infinita, 636
 n-ésimo término de, 636
 de sumas parciales, 642
 definidas recursivamente, 639
Segundo, 325, 328
Semicírculo, 97
Serie geométrica, 660
Serie infinita, 661
Serie infinita alternante, 661
Series, 660, 661
Signo(s)
 leyes de los, 9
 de un número real, 9
 resultante, 69
 de funciones trigonométricas, 344
 variación de, 205
Simetrías, de gráficas
 de ecuaciones en x y y, 94-95
 de funciones inversas, 257-258
 de ecuaciones polares, 774
 de ecuaciones trigonométricas, 360
Simplificación
 de una expresión exponencial, 18
 de un radical, 22
 de una expresión racional, 33, 36
Función sinusoidal, 334, 357, 422
 fórmulas de adición y sustracción para, 439
 gráfica de, APP6
 valores del círculo unitario, 753
Sistema
 consistente de ecuaciones, 555
 de coordenadas, 82
 de coordenadas cartesianas, 82-89
 de coordenadas polares, 763
 de coordenadas rectangulares, 82-89
 de ecuaciones inconsistente, 555
 de números complejos, 57
 dependiente y consistente, 555
 homogéneo de ecuaciones, 586
Sistemas de desigualdades, 562-569
Sistemas de ecuaciones, 544-553
 consistente, 555
 dependientes y consistentes, 555
 equivalente, 547, 554
 homogéneo, 586
 inconsistente, 555
 matriz de, 579
 en más de dos variables, 577-592
 solución de, 544, 547
 en dos variables, 553-562
 equivalentes, 547, 554
Solución
 de problemas aplicados, 43
 de una ecuación, 41
 de una desigualdad, 64
 de un sistema de ecuaciones, 544
 de un triángulo, 394
 de una variable, 42
Solución(es)
 límites para, 207, 208
 de una ecuación en x, 41
 de una ecuación en x y y, 90
 extrañas, 42
 factible, 570
 de una desigualdad, 64
 de una ecuación polar, 766
 de un sistema de ecuaciones, 544, 547
 de un sistema de desigualdades, 562, 564-565
 trivial, 586
Subconjunto de un conjunto, 27, 691
Subíndice de fila, 579
Subíndice de la columna, 579
Suma(s)
 de coordenadas y, 390
 de dos cubos, 31
 de funciones trigonométricas, 390, 438
 de números complejos, 58
 de números complejos, 58, 60
 de números reales, 3
 de matrices, 592-595
 de una secuencia aritmética, 651-652
 de una secuencia geométrica, 658-659
 de una serie, 661
 de una serie geométrica infinita, 660, 661
 de vectores, 501
 de vectores, 503, 505, 506
 parcial, 642, 658
 propiedades de, 3
 teorema de, 644
 de funciones, 165
 de matrices, 593
Sustitución posterior, 578
Sustitución trigonométrica, 420
Sustracción o resta
 de números complejos, 59
 de matrices, 593-594
 de números reales, 6

T
Teorema
 binomial, 672-680
 cambio de base, 306
 de De Moivre, 530-531
 de factorización completo para polinomios, 202
 del factor, 195, 196
 del factor cero, 5, 45, 70, 426-427
 del residuo, 195
 del valor intermedio, 185, 186
 de Pitágoras, 83, 335-336,467
 del sandwich, APP12-APP13
 en amplitudes, periodos y cambios de fases, 377
 en amplitudes y periodos, 375
 en ángulos de referencia, 368
 en ceros racionales de un polinomio, 215
 en cónicas, 777
 en ecuaciones polares de cónicas, 778
 en el coseno del ángulo entre vectores, 516
 en el límite de una función raíz, APP11-APP12
 en exponentes negativos, 19
 en funciones inversas, 252
 en funciones trigonométricas pares e impares, 357
 en la suma de una constante, 643
 en la suma de una secuencia, 644
 en la suma de una secuencia aritmética, 651
 en la suma de una secuencia geométrica, 658
 en las transformaciones de fila y columna de un determinante, 614
 en los límites, APP9-APP13
 en los límites de ceros reales de polinomios, 207, 208
 en pares conjugados de ceros de polinomios, 213
 en pendientes de rectas paralelas, 111
 en pendientes de rectas perpendiculares, 112
 en producto punto, 515
 en sistemas equivalentes, 554

en transformaciones de filas de matriz, 580
en una fila de ceros, 612
factor, 195, 196
factor cero, 45
factorización completa, para polinomios, 202
fundamental de álgebra, 201
fundamental de aritmética, 2
para situar el vértice de una parábola, 155
residuo, 195
sobre el número de combinaciones, 689
sobre el número de diferentes permutaciones, 683
sobre el número exacto de ceros de un polinomio, 204
sobre el número máximo de ceros de un polinomio, 202
sobre el valor máximo o mínimo de una función cuadrática, 156
sobre eventos mutuamente excluyentes, 697
sobre la expansión de los determinantes, 611
sobre la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos, 214
sobre la invertibilidad de la matriz, 612
sobre la naturaleza uno-a-uno de funciones crecientes o decrecientes, 251
sobre la naturaleza uno-a-uno de funciones exponenciales, 262
sobre la naturaleza uno-a-uno de funciones logarítmicas, 285
sobre la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de dos eventos, 698
sobre la suma de una serie geométrica infinita, 660
sobre las propiedades de la matriz, 593, 594
sobre las raíces *n*-ésimas, 532
sobre los valores de la función repetida para seno y coseno, 354
sobre permutaciones distinguibles, 688
sobre productos y cocientes de números complejos, 527
sobre vectores ortogonales, 517
teorema de la unicidad de los límites, APP9
Teoría de las ecuaciones, 201
Término
de un polinomio, 28
de una secuencia, 636, 637, 650, 657
de una serie, 661
Tiempo de duplicación, 291
Trabajo, 519, 520, 521
Tractrix, 309
Traducciones, 139, APP4
Tramos horizontales de gráficas, 141
Transformación
de determinantes, 614-615
de gráficas, 147, APP4-APP5
de sistemas de ecuaciones, 554
de fila de una matriz, 580, 615
Trazo de una gráfica, 64, 93, 225-226
Triangulo, 394-395
área de, 84, 495
isósceles, 336, 451
oblicuo, 482, 483, 491
rectángulo, 334, 394, 395
vértices de, 393
de Pascal, 677-679
Trinomios, 28
factorización de, 48

U

Unidad astronómica (UA), 733
Unidad imaginaria, 57
Unidad, raíces de, 63, 533
Unión (∪), de conjuntos, 67
Utilidad, 28
Utilidad, representación gráfica, 86.

V

Vacío, en una gráfica, 227, 261, 362
Valor absoluto, 10, 11, 21
ecuaciones que contienen, 50
gráfica de una ecuación que contiene, 146
gráfica de una desigualdad que contiene, 146-147
propiedades de, 68
de un número real, 524
sistema de desigualdades que contiene, 565
de una función trigonommétrica, 390
Valor
de una expresión, 28
de una función, 121
prueba, 69
de una función trigonométrica, 349, 366-373
Valor esperado, 703
Valor máximo de una función cuadrática, 153, 156 - 157, 158
Valor mínimo de una función cuadrática, 153, 156-157
Valores de polos, 771
Variable, 27
dependiente, 129
directamente proporcional, 237
independiente, 128
de entrada, 129
inversamente proporcional, 237
linealmente relacionados, 113
de salida, 129
solución para, 42
sumatoria, 640
Variables relacionadas de forma lineal, 113
Variación, 236-243
constante de, 236
directa, 237
inversa, 237
conjunta, 239
de signo, 205
Vector(es)
cero, 505
de fuerza, 501
de posición, 502
de velocidad, 501
adición de, 503, 505
ángulo entre, 516
componentes a lo largo, 517
componentes de, 502
producto punto de, 514
igual, 501
equivalente, 501
fuerza, 501
en la calculadora graficadora, 506
componente horizontal de, 507, 508
i, 506, 507
i, **j** forma para, 507
punto inicial de, 501
producto interior de, 514
j, 506, 507
combinación lineal de, 507, 508
magnitud de, 501, 502-503
negativo de, 505
sustracción de, 505, 506
suma de, 501
punto terminal de, 501
unitario, 507
velocidad, 501
componente vertical de, 507, 508

velocidad del viento como, 508
cero, 505
uno-a-uno correspondencia entre, 502
ortogonal, 515, 517
paralelo, 515, 516-517
posición, 502
proyección de, 518
resultante, 509
múltiplo escalar de, 504, 505
producto escalar de, 514
Velocidad
angular, 330
lineal, 330
Verificación de identidades trigonométricas, 341
Vértices
de un ángulo, 324
de una elipse, 726
de una hipérbola, 739
de una parábola, 91, 154, 155, 716
de un triángulo, 393
Vida media, 266

Precálculo: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica incluye más de 650 ejercicios, numerosos ejemplos y problemas de distintas clases y grados de dificultad. Todos estos recursos se han incorporado con la finalidad de fortalecer la precisión matemática que ha sido fundamental y característica de su extraordinario éxito.

Características relevantes

- **Se incluyen ejemplos y ejercicios con calculadora graficadora** Estos recursos presentan secuencias específicas de teclas y pantallas del modelo de calculadora TI-83/4 Plus. Su inclusión ha demostrado agregar valor a la obra, en particular para quienes trabajan por primera vez con este tipo de dispositivos.
- **Ejemplos y tablas** Las tablas ofrecen un acceso fácil a resúmenes de las propiedades, leyes, gráficas, relaciones y definiciones. Todos los ejemplos, titulados para facilitar su consulta, proporcionan soluciones detalladas de problemas similares a aquellos que aparecen en las series de ejercicios. Muchos de ellos incluyen gráficas o tablas para ayudarle a usted a entender los procedimientos y las soluciones.
- **Explicaciones paso a paso** Con la finalidad de ayudarle a seguirlas con mayor facilidad, varias de las soluciones de los ejemplos contienen explicaciones muy detalladas.
- **Ejercicios para análisis** Cada capítulo concluye con numerosos ejercicios adecuados para resolverse en equipos de trabajo y análisis, y varían en grado de dificultad, de sencillos a complejos, y de teóricos a orientados a la aplicación.
- **Ejercicios y aplicaciones** Para despertar el interés del estudiante y vincularlo con situaciones reales, los ejercicios se han titulado. Asimismo, numerosos docentes de distintas instituciones académicas han señalado que las aplicaciones constituyen en esta edición una de sus características más sólidas.
- **Exámenes por capítulo** Uno de los recursos más novedosos en esta edición es la incorporación de estos exámenes, los cuales incluyen preguntas de distintas clases.

ISBN-13: 978-607-526-546-9
ISBN-10: 607-526-546-5

9 786075 265469

CENGAGE Learning

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com