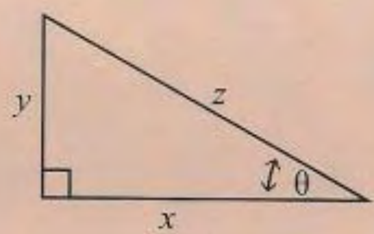
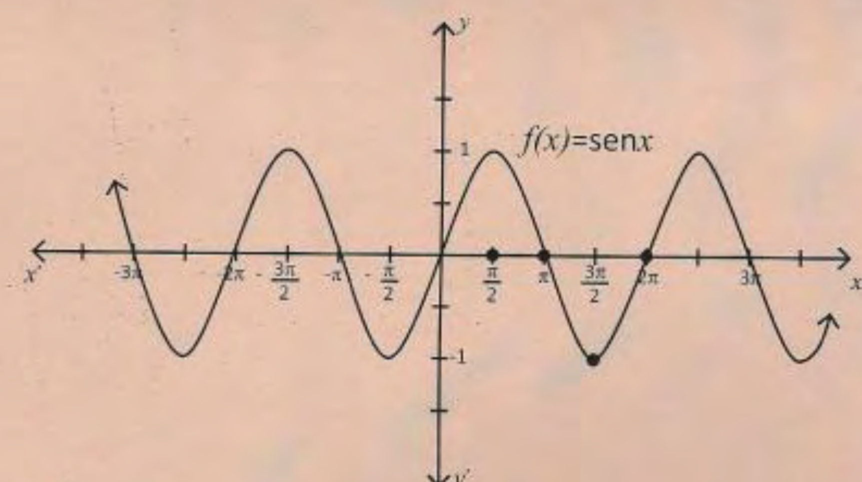
Gloria E. Montano

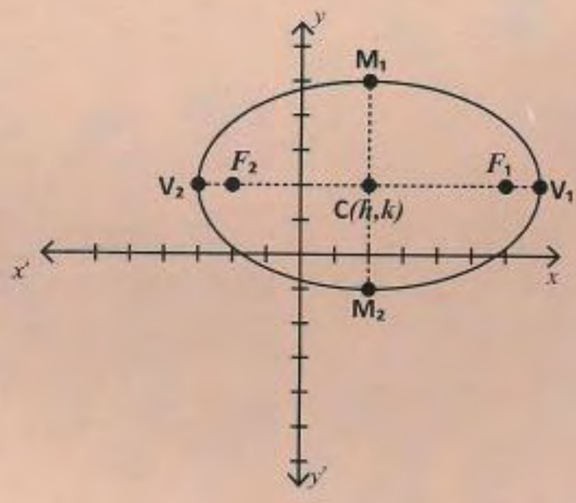
Trigonometría

con Geometría Analítica



$$\cos\theta = \frac{x}{z}$$





UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS
Libreria Universitaria
Jose Trinidad Reyes
RTN: QE2ZNO-E

Factura No. 000000000225081

1 TRIGONOMETRIA MONTANO	000000000000650	200.00	200.00

Sub Total:	200.00
ISV:	0.00
Total:	200.00
Pago Efectivo:	500.00
Cambio:	300.00

08/03/2013 11:30:08
Cajero:SPMM

LA FACTURA ES BENEFICIO DE TODOS. EXIJALA !

Trigonometría con Geometría Analítica

Trigonometría con Geometría Analítica

Licda. Gloria E. Montano

1a Edición

516.24 Montano, Gloria E.
M76 Trigonometría con Geometría Analítica / Gloria
C. H. E. Montano.— (Tegucigalpa): Guaymuras, 2011
362 p.: il

Bibliografía al final de la obra

ISBN: 978-99926-56-04-4

1.- TRIGONOMETRÍA 2.- GEOMETRÍA ANALÍTICA

Licda. en Matemática
Catedrática del Departamento
de Matemática de la Universidad Nacional
Autónoma de Honduras (UNAH),
Tegucigalpa, Honduras

ISBN: [redacted]

Primera edición: marzo de 2011

Diseño de interiores:
Gloria E. Montano

Diseño de portada:
Gloria E. Montano

Impreso por:
Editorial Guaymuras

Impreso y hecho en Honduras.

CONTENIDO

Página

CAPITULO VI LAS CONICAS

A mi esposo Fidel

A mi hija Beatriz Carolina

A mi hijo David Alejandro

RECONOCIMIENTOS

Por la revisión del mismo, a los Licenciados en Matemática:

Gilberto Gálvez

Fidel A. Ordóñez Guzmán

Juan Carlos Leonardo

Victoria Rosales

A la Ingeniera:

Aura Marina Juárez

Por su colaboración en la resolución de los ejercicios propuestos, a la estudiante de Ingeniería:

Gloria M. Fiallos Beltrand

Mi profundo agradecimiento.

INTRODUCCION

"El progreso y el perfeccionamiento de la matemática, están íntimamente ligados a la prosperidad del Estado".
Napoleón I

El presente documento trata temas, que se pretende sea de gran ayuda principalmente a estudiantes que continuarán con estudios de cálculo. Además se considera que el alumno debe tener algunos conocimientos de geometría plana y del espacio, así como del álgebra y análisis de funciones definidas de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}$.

En su primera edición el presente material, se inicia con el capitulo II; temas de trigonometría, aunque la idea futura, es presentar un sólo documento: Capítulo I (Geometría plana y del espacio) y capítulo II (Razones Trigonométricas).

En el presente material, **El capítulo II** trata sobre los ángulos (ángulos positivos y ángulos negativos). Además se habla de los ángulos coterminales, ángulos en posición normal o estándar y de las distintas unidades de medida que le corresponde a un ángulo (sexagesimal y radianes), convirtiendo de una unidad a la otra (de grados a radianes y viceversa) y de ángulos de referencia. Además se definen las seis razones trigonométricas para un ángulo especificado.

El capítulo III se refiere a las identidades trigonométricas, iniciando con las identidades básicas o fundamentales, se continúa con identidades de suma, diferencia, doble y ángulo medio. Además se determinan valores exactos para las seis razones trigonométricas; aplicando las identidades antes mencionadas. Finalmente se resuelven ecuaciones trigonométricas; nuevamente aplicando identidades trigonométricas, así como también con algunos métodos de factorización.

El capítulo IV se refiere a aplicaciones de la trigonometría, en éste se determinan las partes de un triángulo conociendo algunos elementos de los mismos. Los tipos de triángulos que se consideran son: triángulos rectángulos, triángulos obtusángulos y triángulos acutángulos. Además se presentan aplicaciones para cada caso.

El capítulo V se refiere a las funciones trigonométricas; haciendo un análisis de sus elementos y trazando la gráfica que le corresponde. También se consideran las funciones trigonométricas inversas, con un análisis similar a las funciones trigonométricas.

El capítulo VI trata generalidades de las cónicas. Se refiere a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola analizando sus respectivos elementos.

Este documento además pretende llevar a cabo las siguientes contribuciones:

Primero, el índice de reprobación y deserción en matemática es muy elevado, por tanto consideramos que este documento permitirá manejar o acceder a los aspectos conceptuales, así como a ejercicios resueltos y propuestos de distinto grado de complejidad.

Segundo, aunque se cuenta con algunos libro de texto que satisfacen las exigencias de algunos de los contenidos del programa de la asignatura Geometría y Trigonometría que se imparte en el Area Físico – Matemática de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), con este documento se pretende aproximarnos lo más posible a dichos contenidos de una forma más explícita.

Tercero, la situación económica del estudiantado que ingresa a la UNAH es cada día más crítica; aunque hay en el mercado libros que cubren más del material que se necesita, este documento es más accesible en términos de costos para los estudiantes que cursarán esta asignatura.

Cuarto, como un documento de consulta para aquellas personas que pretendan reforzar su formación matemática a nivel de trigonometría para poder acceder a estudios de nivel superior en matemática u otra disciplina que requiera de estos conocimientos.

Claro está, que este material estará sujeto a revisiones posteriores con el propósito de mejorarlo. Espero contar con la colaboración de los profesores del departamento de Matemática; principalmente los que imparten dicha asignatura a fin de hacer cualquier sugerencia para el mejoramiento del mismo ya que estamos en toda la disposición de escucharles y así corregir las siguientes ediciones.

A LOS ESTUDIANTES

En este documento, se presentan los conceptos necesarios para desarrollar cada tema, así como una serie de problemas resueltos más comunes y de distintos tipo. De igual manera una sección de ejercicios propuestos con sus respectivas respuestas, para que sean desarrollados por los estudiantes y así medirse el nivel de aprendizaje.

Para su uso adecuado se recomienda lo siguiente:

1) Leer los aspectos conceptuales presentados en cada sección antes de presentarse al aula de clase.

2) Escuche con atención la información proporcionada por el (la) profesor (a) en la clase y tome nota de las ideas y reafirme los conceptos fundamentales estudiados anteriormente.

3) El mismo día de la clase, lea nuevamente el tema que se ha desarrollado para reafirmar los conceptos y procedimientos necesarios. Si considera consulte otros libros que se refieran al tema.

4) Si no está seguro (a) de algún contenido consulte a su profesor (a) en la hora destinada para ello.

5) Haga de nuevo los ejercicios desarrollados en este material para confirmar si ha entendido la teoría y los procedimientos utilizados.

6) Resuelva los ejercicios propuestos en este documento que correspondan al contenido que el profesor está desarrollando y verifíquelos con la sección de respuestas que aparecen en el mismo.

7) Si no puede resolver alguno o algunos de ellos consulte con su profesor.

Este material ha sido preparado con todo cuidado y pensando fundamentalmente en ustedes con el objeto de que mejoren su aprendizaje y rendimiento. Agradeceríamos cualquier sugerencia y recomendación que puedan hacernos para mejorarlo a bedaglofi@gmail.com

SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS

(x, y)	par ordenado x, y
$\overline{\mathrm{AB}}$	rayo AB
$\angle \mathrm{ABC}$	ángulo ABC
Z^+	conjunto de los números enteros positivos
$\mathrm{k} \in Z^+$	k pertenece al conjunto de los enteros positivos
$\overline{\mathrm{AC}}$	segmento AC
$k \in Z$	k pertenece al conjunto de los números enteros
$\Delta\,\mathrm{ABC}$	triángulo ABC
$\mathrm{N}\,\alpha\,\mathrm{E}$	α grados nor – este
$\mathrm{N}\,\alpha\,\mathrm{W}$ ó $\mathrm{N}\,\alpha\,\mathrm{O}$	α grados nor – oeste
$\mathrm{S}\,\alpha\,\mathrm{E}$	α grados sur – este
$\mathrm{S}\,\alpha\,\mathrm{W}$ ó $\mathrm{S}\,\alpha\,\mathrm{O}$	α grados sur – oeste
$f(x)$	imagen de x mediante la función f
I_x	intercepto con el eje x
I_y	intercepto con el eje y
$\mathrm{D}f$	dominio de la función f
$\mathrm{R}f$	rango de la función f
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a
$[a,b]$	intervalo cerrado de a a b
$]a,b[$	intervalo abierto de a a b
$[a,b[$	intervalo semi cerrado o semi abierto de a a b
$+\infty$	más infinito
$-\infty$	menos infinito
arcsen ó sen^{-1}	seno inverso
arccos ó $\cos^{-1}$	coseno inverso
arctan ó $\tan^{-1}$	tangente inversa
arccot ó $\cot^{-1}$	cotangente inversa
arcsec ó $\sec^{-1}$	secante inversa
arccsc ó $\csc^{-1}$	cosecante inversa
l	recta l
$\mathrm{d(A,B)}$	distancia del punto A al punto B
$\mathrm{C}(h, k)$	centro h, k
$\mathrm{V}(h, k)$	vértice h, k; parábola con vértice en h, k
$F(h, k+p)$	foco de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo
$F(h+p, k)$	foco de una parábola que abre hacia la derecha o hacia la izquierda
$\overline{\mathrm{V_1V_2}}$	eje mayor en la elipse
$\mathrm{V_1V_2}$	longitud del eje mayor en la elipse

$\overline{M_1M_2}$	eje menor en la elipse
M_1M_2	longitud del eje menor en la elipse
$V_1(h+a, k)$	vértice derecho en una elipse horizontal
$V_2(h-a, k)$	vértice izquierdo en una elipse horizontal
$F_1(h+c, k)$	foco derecho de una elipse horizontal
$F(h-c, k)$	foco izquierdo de una elipse horizontal
$\overline{V_1V_2}$	eje transverso de una hipérbola
V_1V_2	longitud del eje transverso en una hipérbola
$\overline{W_1W_2}$	eje conjugado o eje imaginario de una hipérbola
W_1W_2	longitud del eje conjugado o imaginario de una hipérbola
$V_1(h+a, k)$	vértice derecho en una hipérbola horizontal
$V_2(h-a, k)$	vértice izquierdo en una hipérbola horizontal
$F_1(h+c, k)$	foco derecho de una hipérbola horizontal
$F(h-c, k)$	foco izquierdo de una hipérbola horizontal

Alfabeto griego (mayúsculas y minúsculas)

A	α	alfa	B	β	beta	Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta
E	ε	épsilon	Z	ζ	zeta	H	η	eta	Θ	θ	theta
I	ι	iota	K	κ	kappa	Λ	λ	lambda	M	μ	mu
N	ν	nu	Ξ	ξ	xi	O	o	omicrón	Π	π	pi
P	ρ	rho	Σ,	**s**, σ	sigma	T	τ	tau	Υ	υ	ipsilon
Φ	ϕ; φ	fi	X	χ	ji (ki)	Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega

CAPITULO II RAZONES TRIGONOMETRICAS

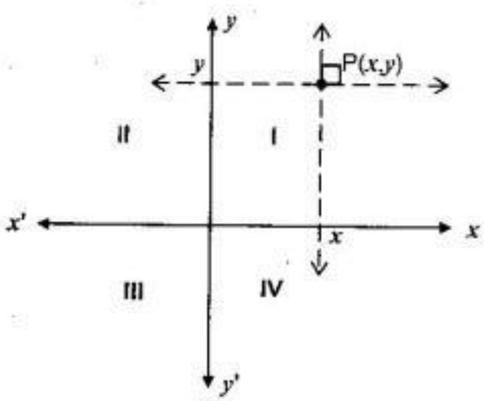
2.1 ANGULOS Y SUS MEDIDAS

Antes de hablar de ángulos, es necesario hacer referencia a lo que es el sistema de coordenadas rectangulares, ya que se utilizará en el desarrollo de la mayoría de los temas que se tratarán de aquí en adelante.

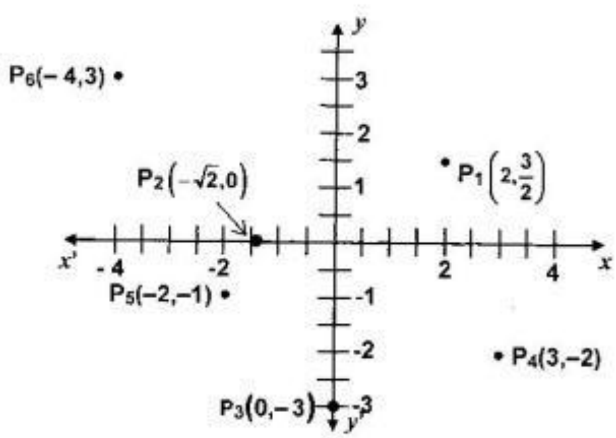
SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

En cursos de álgebra, se habla con detalle del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas. Aquí se hace referencia únicamente a algunos elementos sobre el mismo que ayudarán a entender o recordar lo que se estudiará en la trigonometría.

Así como se ha establecido una correspondencia uno a uno entre los puntos de una recta y los elementos del conjunto $\boldsymbol{R}$ para formar la recta real, se puede formar el plano real al establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano y los elementos de $\boldsymbol{R}^2$ (pares ordenados de números reales). Dicho **plano real, plano cartesiano, plano de coordenadas** xy **o sistema de coordenadas rectangulares**, se forma al tomar dos rectas reales perpendiculares (una horizontal y otra vertical) de coordenadas, llamados ejes coordenados o ejes de coordenadas que se intersecan en sus orígenes. La línea horizontal se llama **eje** x o **eje de las abscisas**, y a la línea vertical, **eje** y o **eje de las ordenadas**. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes que se llaman **primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante** y se representan con I, II, III y IV respectivamente (ver fig.1 a). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante, pues estos son puntos que cortan los ejes coordenados y se les llaman interceptos con los ejes. Para ubicar un punto (x, y) en el plano, se traza una recta vertical que corte al eje x, en el número real x, y otra horizontal que corte al eje y, en el número real y. El punto de intersección de dichas rectas será el punto (x, y) ver fig. 1 a). Otros ejemplos, véase la fig. 1 b).



a)



b)

fig. 1

Nótese que en el primer cuadrante, ambas coordenadas son positivas, que en el segundo la primera es negativa y la segunda positiva, que en el tercero ambas son negativas y que en el cuarto la primera es positiva y la segunda negativa. Ver fig. 1 b).

Téngase en cuenta que (x, y) es un par ordenado de números reales, y que a x se le llama **primera componente** del par ordenado, y a y **la segunda componente,** además $(x, y) \neq (y, x)$ a menos que $x = y$.

ANGULOS

En geometría plana se definió un ángulo como la unión de dos rayos ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) que se intersecan en su extremo común (punto A). También se hizo referencia a su medida la cual puede ser positiva o cero. El ángulo de mayor medida al que se hizo referencia fue el ángulo llano (su medida es de 180°) y el de menor medida, el nulo (su medida es 0°). Entre otros se hizo referencia a: ángulos agudos (su medida entre 0° y 90°), ángulos rectos (su medida es de 90°) y ángulos obtusos (su medida está entre 90° y 180°); obsérvese la fig. 2. Además, cuando se hizo mención de la abertura del ángulo, al arco mostrado en el interior del mismo se le dibuja flechas en ambos extremos, sin hacer referencia a la dirección u orientación de la abertura.

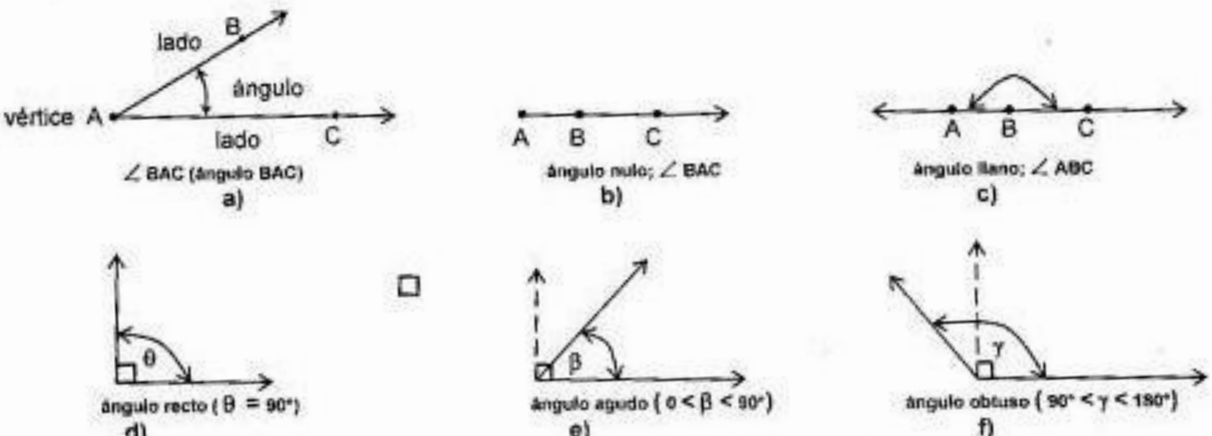


fig. 2

ANGULOS POSITIVOS Y ANGULOS NEGATIVOS

En trigonometría, se habla de los ángulos en función de su orientación o como una rotación de rayos; es decir tomando los dos rayos de tal manera que coincidan (uno sobre el otro, iniciando en los extremos; ver fig. 2 b)). Un lado permanece fijo y el otro gira para formar el ángulo. Aclarando lo dicho anteriormente, obsérvese la fig. 3 b), el rayo AC permanece fijo y el rayo AB, se hace girar alrededor de A, hasta una posición específica. Al lado fijo ($\overrightarrow{AC}$) se le llama **lado inicial** y al lado que gira ($\overrightarrow{AB}$) se le llama **lado final o lado terminal**.

Cuando el lado terminal **gira en dirección contraria a las manecillas del reloj** (como lo indica la flecha dentro del ángulo en la fig. 3 a)), la medida del ángulo es positiva y se dice que **el ángulo es positivo**. Si **el lado terminal gira en la misma dirección que las manecillas del reloj** (como se indica con la flecha dentro del ángulo de la fig. 3 b)), la medida del ángulo es negativa y se dice que **el ángulo es negativo**. Obsérvese las siguientes figuras y la dirección de la flecha dentro del ángulo.

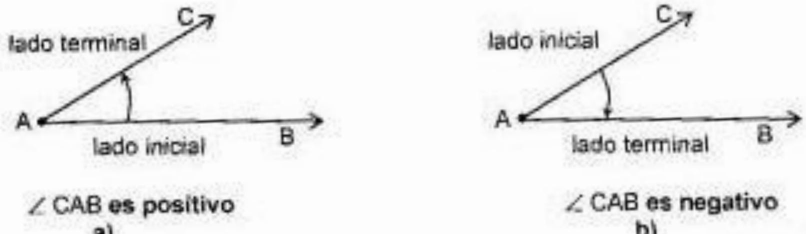
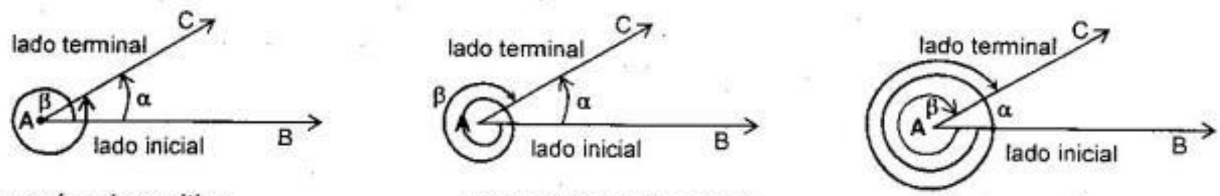


fig. 3

ANGULOS COTERMINALES

Examínese los ángulos en cada una de las siguientes figuras (fig. 4). Refiérase al ∠CAB, al ∠A o simplemente al ángulo α ó al ángulo β y véase la orientación de cada uno de ellos. En los tres incisos se muestra que tanto el ángulo α como el ángulo β, tienen el mismo lado inicial y además tienen el mismo lado final o terminal. Los ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final o terminal se llaman **ángulos coterminales**. En la fig. 4 a), se observa que α y β son positivos (por la orientación de los mismos), en la fig. 4 b), α es positivo y β negativo y en la fig.4 c), ambos son negativos. Se debe recordar también que la circunferencia se divide en 360° y que un grado equivale a tomar una de estas 360 subdivisiones, es decir un grado equivale a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia. Nuevamente, en la fig. 4 a), el ángulo β tiene una medida mayor que 360° y se dice que el ángulo tiene una revolución. Si en un ángulo se muestra (en su gráfica) que el lado final pasa 1, 2, 3, ... , n veces por el lado inicial, se dice que se ha dado 1, 2, 3, ... , ***n*** revoluciones cuando la flecha que indica la dirección pasa por el lado final ***n* + 1** veces. Como no importa el número de revoluciones que se puedan tener (en dirección o no, de las manecillas del reloj) se concluye que existen infinitos ángulos coterminales tanto positivos como negativos a un ángulo dado.



α y β son ángulo positivo
a)

α es positivo y β negativo
b)

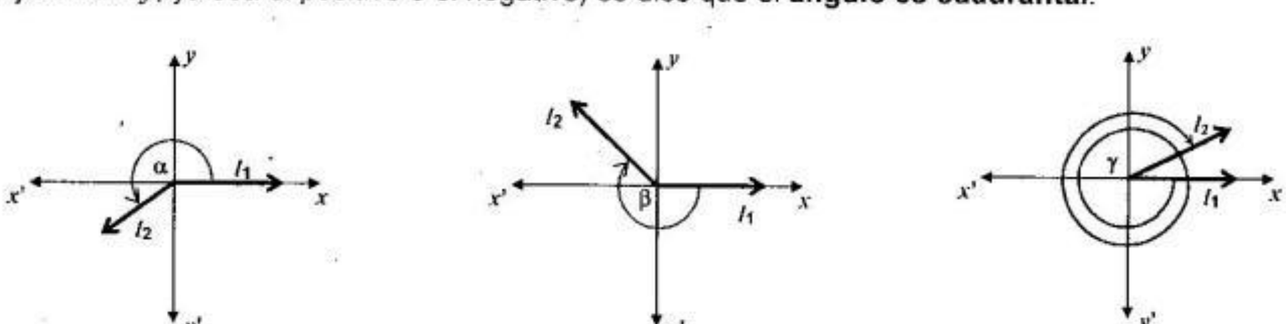
α y β son negativos
c)

fig. 4

ANGULOS EN POSICION NORMAL

Estos ángulos también pueden ubicarse en un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el vértice coincida con el origen, es decir con el punto (0,0) y que el lado inicial coincida con el eje de las x positivas. Si un ángulo tiene estas características, se dice que está en **posición normal o posición estándar**.

La fig. 5 muestra diferentes ángulos en posición normal o estándar, además ángulos positivos o negativos. Por facilidad en este material, se asume que l_1 y l_2 representan al lado inicial y lado final, respectivamente. Tomando la fig. 5 a), se tiene que α es positivo, que está en el tercer cuadrante, ya que su lado final está en el tercer cuadrante. En la fig. 5 b), se dice que β es negativo y que está en el segundo cuadrante ya que el lado final está en el segundo cuadrante. De igual manera en la fig. 5 c), θ es negativo, y está en el primer cuadrante ya que su lado terminal está en el primer cuadrante. Nótese que el lado terminal puede estar en cualquiera de los cuadrantes, o en cualquiera de los ejes coordenados. Si un ángulo está en posición normal y su lado final o terminal en uno de los ejes coordenados (eje de las x o eje de las y, ya sea el positivo o el negativo) se dice que el **ángulo es cuadrantal**.



a) α es positivo

b) β es negativo

c) γ es negativo

fig. 5

Las siguientes gráficas muestran la medida de algunos ángulos. En la fig. 6, las gráficas e), f), g) y h) son ejemplos de ángulos cuadrantales. La notación $\alpha = 60°$ se entenderá que la medida del ángulo α es igual a 60 grados.

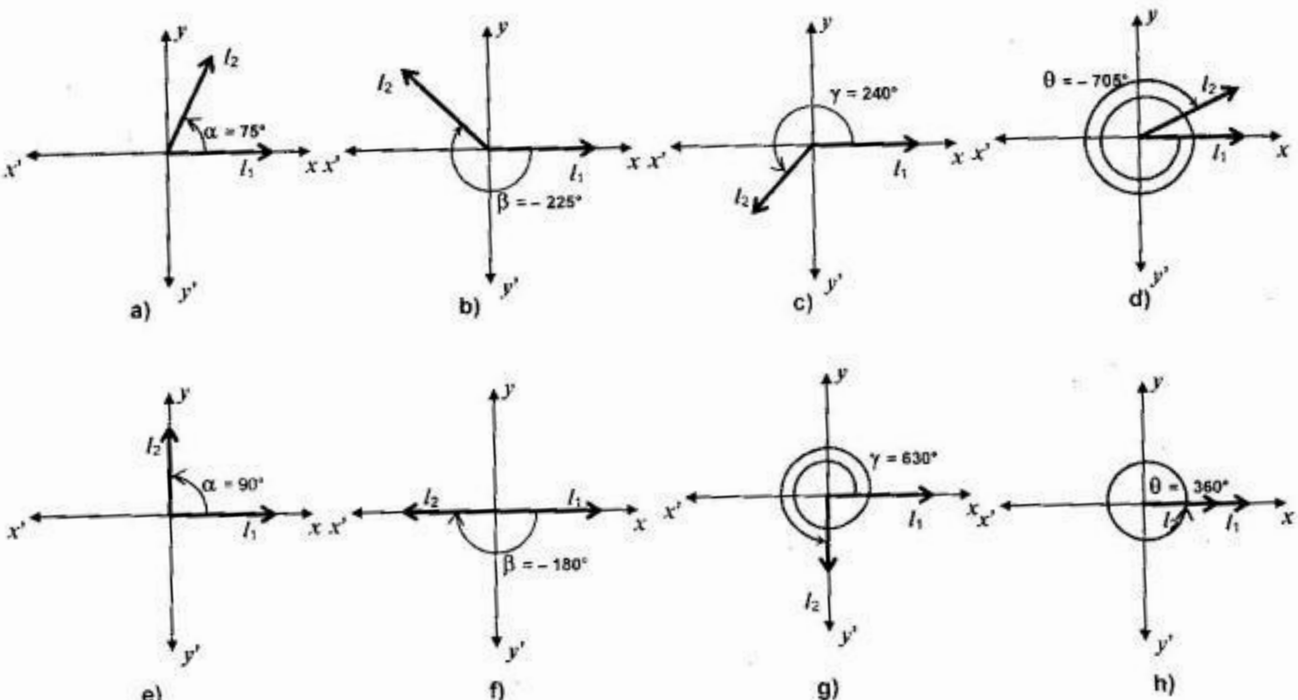
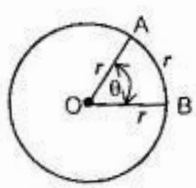


fig. 6

UNIDAD DE MEDIDA DE LOS ANGULOS

Cuando se ha hecho referencia a la medida de un ángulo, ésta siempre ha sido dada en grados, esta unidad de medida se usa en actividades aplicadas a la agrimensura (medición de la tierra), navegación (aérea o marítima) y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas se acostumbra otra unidad de medida, que es la dada en **radianes**. Para definir un ángulo con medida de un radián, hay que auxiliarse de un círculo de radio ***r***. Un ángulo central de un círculo, es el ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es un ángulo central (ver fig. 7), se dice que el arco AB (denotado por $\widehat{\mathbf{AB}}$) de la circunferencia subtiende a θ o que θ es subtendido por $\widehat{\mathbf{AB}}$. Si la longitud del $\widehat{\mathbf{AB}}$ es igual al radio del círculo, entonces θ **mide 1 radián**. Véase la diferencia; en geometría se dice que la medida del ángulo central está dada por la medida del arco que lo subtiende (esta medida se da en grados), ahora la medida del ángulo central corresponde a un radián, si la longitud del arco que lo subtiende coincide con la longitud del radio de la misma. La siguiente figura muestra que θ = un radián o se escribe más simple, diciendo que θ = 1 rad.

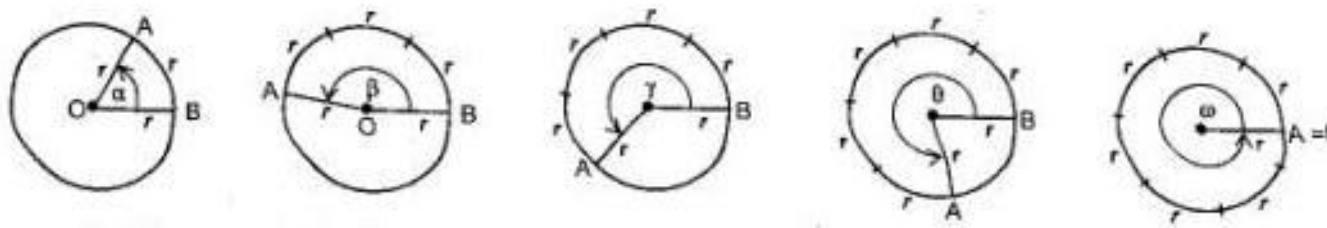


θ = 1 radián

fig. 7

Definición Se dice que **un radián** es la medida del ángulo central en una circunferencia subtendido por un arco que tiene una longitud igual a la del radio de dicha circunferencia.

Considérese una circunferencia de radio r, entonces un ángulo α cuya medida es un radián, subtiende un arco AB de longitud r. De igual manera el ángulo β tiene una medida de 3 radianes ya que éste está subtendido por un arco de longitud $3r$. Se puede repetir el proceso para cada inciso mostrado en fig. 8.



α = 1 radián a) β = 3 radianes b) γ = 4 radianes c) θ = 5 radianes d) $\omega = 2\pi$ radianes e)

fig. 8

Para determinar la medida en radianes correspondiente a 360°, se debe encontrar el número de veces que se puede trazar un arco circular de longitud r alrededor de la circunferencia (ver fig. 8 e)). Se puede observar que este número real no es entero ni racional. De geometría, recuérdese que la circunferencia de un círculo mide $2\pi r$; luego el número de veces que r unidades se trazan es 2π, ya que $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$, luego un ángulo de 2π radianes equivale a 360° y se dice que $360° \doteq 2\pi$ radianes (360° **equivale a** 2π radianes). Generalmente, cuando la medida de un ángulo está dada en radianes, no se escribe la palabra radián o la abreviatura rad. Para el caso, si se tiene que $\beta = 3$, se entenderá que la medida del ángulo β es 3 radianes, que es muy distinto si se dice que $\beta = 3°$.

Ahora es necesario hacer conversiones de ángulos; como pasar la medida de un ángulo dado en grados a radianes y viceversa. Se sabe que $360° \doteq 2\pi$, también se puede decir que $180° \equiv \pi$. Existe una razón entre grados (G) y 180° es decir $\frac{G}{180°}$ como también una razón entre radianes (R) y π, es decir $\frac{R}{\pi}$. Si se comparan estas dos razones, se tiene que $\frac{G}{180°} = \frac{R}{\pi}$. De ésta última, si se despeja para G se obtiene que $G = \frac{180°}{\pi} R$ y si ahora se despeja para R se tiene que $R = \frac{\pi}{180°} G$. Obsérvese que los factores de conversión $\frac{180°}{\pi}$ y $\frac{\pi}{180°}$ son útiles para cambiar de radianes a grados y de grados a radianes respectivamente.

En general se tiene que:

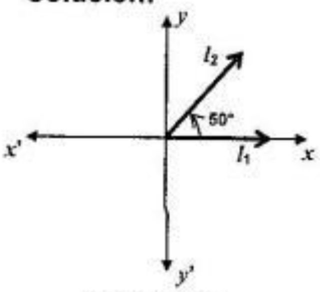
(Angulo medido en radianes) $\times \frac{180°}{\pi}$ = **medida en grados** — para cambiar de radianes a grados

(Angulo medido en grados) $\times \frac{\pi}{180°}$ = **medida en radianes** — para cambiar de grados a radianes

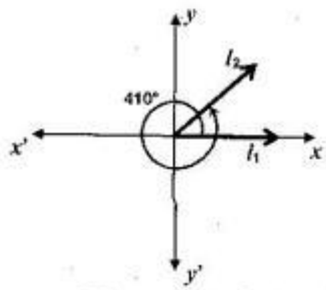
Los siguientes ejemplos, muestran la teoría antes mencionada. Véase:

Ejemplo 1 Si $\alpha = 50°$ determinar dos ángulos coterminales positivos y dos ángulos coterminales negativos a éste.

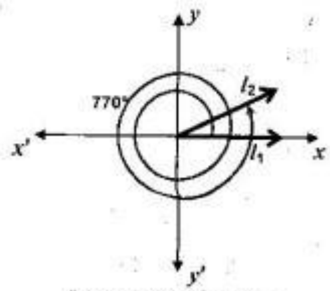
Solución:



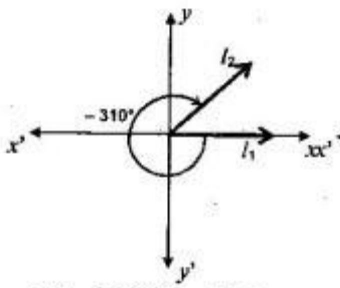
ángulo dado



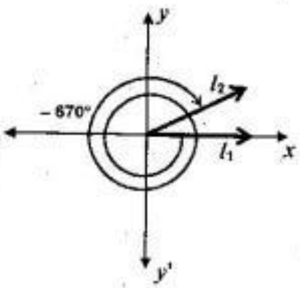
50° +1(360°) = 410°
un ángulo coterminal positivo al ángulo dado.



50° + 2(360°) = 770°
otro ángulo coterminal positivo al ángulo dado.



50° – 1(360°) = – 310°
un ángulo coterminal negativo al ángulo dado.



50° – 2(360°) = – 670°
otro ángulo coterminal negativo al ángulo dado.

En general se dice que dado un ángulo, se puede encontrar infinitos ángulos coterminales, tanto positivos como negativos a éste.

Para encontrar los ángulos coterminales **positivos** se utiliza la siguiente fórmula: $\theta + k(360°)$; con k número entero positivo ($k \in Z^+$) y θ el ángulo dado.

Para encontrar los ángulos coterminales **negativos** la siguiente: $\theta - k(360°)$, donde $k \in Z$, k es un número entero positivo ($k \in Z^+$) y θ el ángulo dado. ■

El ángulo θ dado, también puede darse en radianes y para encontrar los ángulos coterminales, tanto positivos como negativos, se siguen los mismos pasos a diferencia que en vez de utilizar la constante 360° se utiliza la constante 2π. Para el caso, si $\beta = \frac{\pi}{2}$ (medida del ángulo β que en grados corresponde a 90°) un primer ángulo coterminal positivo es $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ y un segundo es $\frac{\pi}{2} + (2)2\pi = \frac{9\pi}{2}$. De igual manera, para calcular un primer ángulo coterminal negativo, se tiene $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ y para un segundo negativo $\frac{\pi}{2} - (2)2\pi = -\frac{7\pi}{2}$.

En general, si γ es un ángulo dado en radianes, entonces para encontrar ángulos coterminales positivos se utiliza la fórmula $\gamma + 2k\pi$, y para encontrar coterminales negativos la siguiente: $\gamma - 2k\pi$, donde $k \in Z^+$.

Ejemplo 2 Convertir cada ángulo dado, de grados a radianes:

a) 45° **b)** 120° **c)** –150° **d)** 1° **e)** –5°

Solución:

a) $45° = 45° \times \frac{\pi}{180°}$ multiplicando el número de grados dado por $\frac{\pi}{180°}$.

$= \frac{45°\pi}{180°}$ efectuando el producto.

$= \frac{\pi}{4}$ simplificando.

b) $120° = 120° \times \frac{\pi}{180°}$ multiplicando el número de grados dado por $\frac{\pi}{180°}$.

$= \frac{120°\pi}{180°}$ efectuando el producto.

$= \frac{2\pi}{3}$ simplificando.

c) $-150° = -150° \times \frac{\pi}{180°}$ multiplicando el número de grados dado por $\frac{\pi}{180°}$.

$= \frac{-150°\pi}{180°}$ efectuando el producto.

$= -\frac{5\pi}{6}$ simplificando.

d) $1° = 1° \times \frac{\pi}{180°}$ multiplicando el número de grados dado por $\frac{\pi}{180°}$.

$= \frac{1°\pi}{180°}$ efectuando el producto.

$= \frac{\pi}{180}$ simplificando.

$\approx$ **0.01745 rad.** aproximando (**se ha aproximado con la única intención de ver la relación**).

e) $-5° = -5° \times \frac{\pi}{180°}$ multiplicando el número de grados dado por $\frac{\pi}{180°}$

$= \frac{-5°\pi}{180°}$ efectuando el producto

$= -\frac{\pi}{36}$ simplificando.

■

Ejemplo 3 Convertir cada ángulo dado, de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{5\pi}{6}$ **c)** $-\frac{7\pi}{4}$ **d)** 1 **e)** -5

Solución:

a) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi}$ multiplicando el número de radianes dado por $\frac{180°}{\pi}$.

$= \frac{180°\pi}{3\pi}$ efectuando el producto.

$= 60°$ simplificando.

b) $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{180°}{\pi}$ multiplicando el número de radianes dado por $\frac{180°}{\pi}$.

$= \frac{180°(5\pi)}{6\pi}$ efectuando el producto.

$= 150°$ simplificando.

c) $-\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{7\pi}{4} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$ multiplicando el número de radianes dado por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

$= \dfrac{180^\circ(-7\pi)}{4\pi}$ efectuando el producto.

$= -315^\circ$ simplificando.

d) $1 = 1 \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$ multiplicando el número de radianes dado por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

$= \dfrac{180^\circ(1)}{\pi}$ efectuando el producto.

$= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$ simplificando.

$\approx 57.296^\circ$ aproximando (**se ha aproximado con la única intención de ver la relación**).

e) $-5 = -5 \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$ multiplicando el número de radianes dado por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

$= \dfrac{180^\circ(-5)}{\pi}$ efectuando el producto.

$= \left(-\dfrac{900}{\pi}\right)^\circ$ simplificando.

$\approx -286.479^\circ$ aproximando (**se ha aproximado con la única intención de ver la relación**).

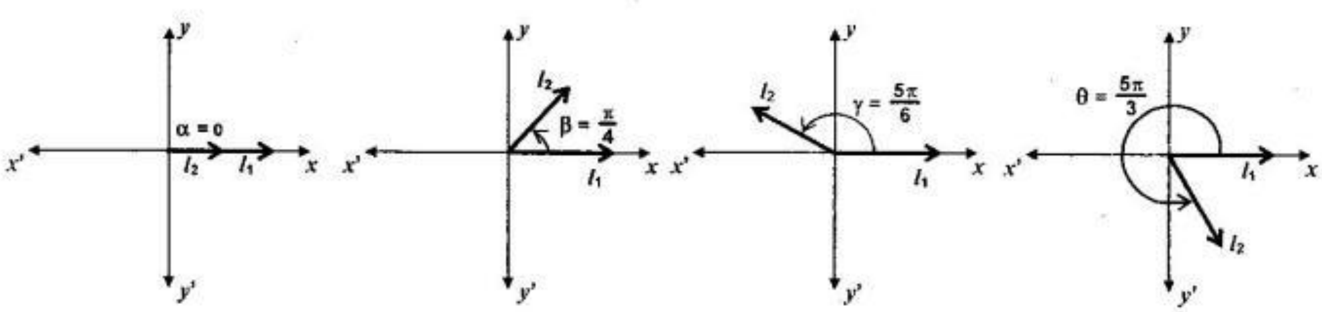
■

Ahora se hará referencia a ciertos ángulos llamados **ángulos especiales**: 30°, 45° y 60° así como los llamados **cuadrantales**: 0°, 90°, 180°, 270° y 360°. Además de los que se han citado, también existen infinitos ángulos relacionados con los mismos, los cuales son: los coterminales a cada uno de ellos, como también los múltiplos de cada uno de ellos (investigar acerca de los múltiplos de un número).

La siguiente tabla muestra estos ángulos especiales, tanto en grados como en radianes. Por su utilidad, es recomendable manejar la medida de cada uno de ellos, tanto en radianes como en grados.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Algunos de estos ángulos en posición normal o estándar están representados en la siguiente figura.



Ejercicios 2.1

1. Ubicar cada ángulo en posición normal (en diferentes sistemas de ejes coordenados) e indicar en cual de los cuadrantes se encuentra el lado final o terminal.

a) $45°$ b) $-60°$ c) $120°$ d) $-135°$ e) $420°$ f) $-840°$
g) $\frac{3\pi}{4}$ h) $\frac{41\pi}{6}$ i) $-\frac{4\pi}{3}$ j) 10π k) $-\frac{15\pi}{2}$ l) -14π

2. Ubicar cada ángulo en posición normal o estándar (en diferentes sistemas de ejes coordenados) y determinar tres ángulos coterminales positivos y tres ángulos coterminales negativos para cada uno.

a) $120°$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $-60°$ d) $-\frac{4\pi}{3}$ e) $20°$ f) 2

3. Convertir cada ángulo dado en grados a radianes (dar valor exacto; en términos de π).

a) $45°$ b) $-60°$ c) $120°$ d) $-135°$ e) $420°$ f) $-840°$
g) $75°$ h) $270°$ i) $-15°$ j) $450°$ k) $-10°$ l) $540°$

4. Convertir cada ángulo dado en radianes a grados (dar el valor exacto).

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{41\pi}{6}$ c) $-\frac{4\pi}{3}$ d) 10π e) $-\frac{15\pi}{2}$ f) -14π
g) $\frac{\pi}{5}$ h) $-\frac{17\pi}{3}$ i) $\frac{19\pi}{4}$ j) -7π k) $\frac{51\pi}{2}$ l) $\frac{\pi}{7}$

2.2 RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS

Según la historia, las razones trigonométricas se originan como las razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Recuérdese que un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto (su medida es de 90°). Además, los otros dos ángulos internos de un triángulo rectángulo son agudos y complementarios.

Supóngase que se tiene un triángulo rectángulo ABC donde sus lados tienen como medida a, b y c unidades. Luego se pueden formar las siguientes razones: $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ y $\frac{c}{a}$ donde cada una recibe un nombre especial (ver fig. 1 a)).

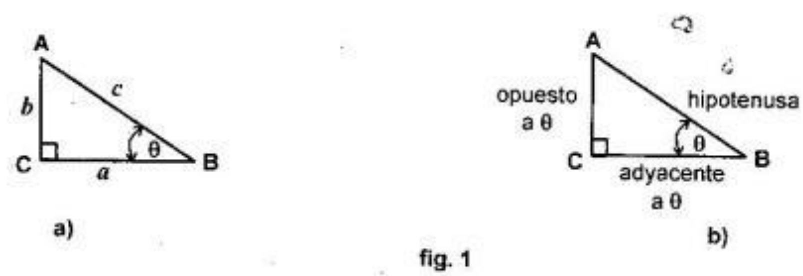


fig. 1

En geometría, se ha nombrado los lados de un triángulo rectángulo como catetos (lado **opuesto a** cada ángulo agudo) e hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto). En este momento, se **especifican los** catetos dependiendo del ángulo al cual se hace referencia. Para el caso, en la fig. 1 a), con **relación al** ángulo θ, el $\overline{CB}$ le llamamos **lado adyacente** (cuya longitud es a) y al $\overline{AC}$ **lado opuesto (cuya** longitud es b) y al $\overline{AB}$ la hipotenusa (cuya longitud es c).

Las seis razones trigonométricas de un ángulo se llaman: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**. Estas se abrevian así: **sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec** y **csc** respectivamente y se definen de la siguiente manera (para ángulos agudos; ver fig. 1).

$$\textbf{seno } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ó} \quad \textbf{sen } \theta = \frac{b}{c}\ ; \qquad \textbf{coseno } \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ó} \quad \textbf{cos } \theta = \frac{a}{c}$$

$$\textbf{tangente } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} \quad \text{ó} \quad \textbf{tan } \theta = \frac{b}{a}\ ; \qquad \textbf{cotangente } \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{opuesto a } \theta} \quad \text{ó} \quad \textbf{cot } \theta = \frac{a}{b}$$

$$\textbf{secante } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente a } \theta} \quad \text{ó} \quad \textbf{sec } \theta = \frac{c}{a}\ ; \qquad \textbf{cosecante } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto a } \theta} \quad \text{ó} \quad \textbf{csc } \theta = \frac{c}{b}$$

Es usual utilizar las siguientes abreviaturas por simplicidad, para denotar lado opuesto, lado adyacente e hipotenusa respectivamente por: opto, ady e hipo.

Las definiciones anteriores se aplican a cualquier triángulo rectángulo y como las longitudes de sus lados son números reales positivos, los valores de las seis razones trigonométricas todas son positivas para todo ángulo agudo θ. Recuérdese también, que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos (lado adyacente o lado opuesto), pero los catetos, si pueden tener la misma longitud. Con lo dicho antes se tiene que:

$0 < \operatorname{sen}\theta < 1$ y $0 < \cos\theta < 1$

$\sec\theta > 1$ **y** $\csc\theta > 1$

tan θ **y** **cot** θ pueden tomar cualquier valor real positivo para un ángulo agudo θ.

Ahora, compárese las siguientes pares de razones:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \ \textbf{ y } \ \csc\theta = \frac{c}{b}\ ; \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \ \textbf{ y } \ \sec\theta = \frac{c}{a}; \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} \ \textbf{ y } \ \cot\theta = \frac{a}{b}.$$

Obsérvese que son **recíprocas entre sí**, es decir:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}; \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}; \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}; \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

También se pueden expresar unas razones en términos de otras:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \tan\theta \quad \text{y que} \quad \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \cot\theta$$

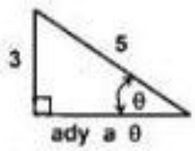
por lo que $\quad \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad$ y $\quad \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta.$

Las primeras igualdades dadas anteriormente (razones recíprocas) son llamadas **identidades recíprocas**, y las últimas, también llamadas identidades en términos de seno y coseno. Todas ellas están en el grupo de las llamadas **identidades fundamentales**, entre otras, a las cuales se hará referencia en el próximo capítulo.

El siguiente ejemplo muestra como dada una de las seis razones trigonométricas, se puede encontrar las otras cinco.

Ejemplo 1 Si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y sen $\theta = \frac{3}{5}$, encontrar las restantes razones trigonométricas de dicho ángulo.

Solución:



Para mejor comprensión y que facilite encontrar lo que se pide, es conveniente dibujar un triángulo rectángulo, para ubicar el ángulo θ con lado opuesto = 3 e hipotenusa = 5 (por definición de seno). Nótese que no se desconoce el lado adyacente (ady), pero si se aplica el Teorema de Pitágoras, se determina así:

$5^2 = 3^2 + (\text{ady})^2$	aplicando el Teorema de Pitágoras.
$3^2 + (\text{ady})^2 = 5^2$	por propiedad simétrica (investigar).
$(\text{ady})^2 = 5^2 - 3^2$	transponiendo términos.
$(\text{ady})^2 = 16$	simplificando.
$\text{ady} = 4$	extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.

Para encontrar las razones trigonométricas restantes, se aplica la definición de cada una de ellas:

$\textbf{sen}\,\theta = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ o $\textbf{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$ **(valor dado);** $\textbf{cos}\,\theta = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ o $\textbf{cos}\,\theta = \dfrac{4}{5}$

$\textbf{tan}\,\theta = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ o $\textbf{tan}\,\theta = \dfrac{3}{4}$; $\textbf{cot}\,\theta = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ o $\textbf{cot}\,\theta = \dfrac{4}{3}$

$\textbf{sec}\,\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ o $\textbf{sec}\,\theta = \dfrac{5}{4}$; $\textbf{csc}\,\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$ o $\textbf{csc}\,\theta = \dfrac{5}{3}$

Nótese que también se pudo utilizar las razones recíprocas. ■

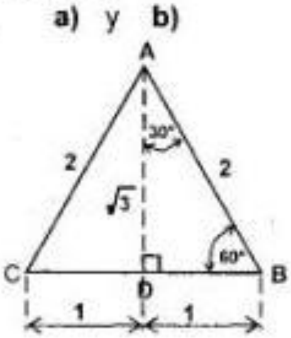
Es de mucha utilidad para temas posteriores conocer las seis razones trigonométricas de los ángulos especiales 30°, 45° y 60°. La idea no es que se memoricen las mismas, ya que no es necesario si se aprende como se determinan de una manera rápida. Véase la explicación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Determinar las seis razones trigonométricas para θ si:

a) $\theta = 30°$ **b)** $\theta = 60°$ **c)** $\theta = 45°$

solución

a) y **b)** $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$



Se procede a dibujar un triangulo equilátero, por ejemplo con lado de longitud 2 unidades (después se verá que la escogencia de la medida del lado del triángulo, es arbitraria). Nótese que el $\overline{AD}$ es una altura, una mediana, una bisectriz y una mediatriz al mismo tiempo. Al trazar el $\overline{AD}$ se observan dos triángulos 30° – 60° – 90° y aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene que AD = $\sqrt{3}$. Observando el triángulo rectángulo ABD, con sus tres lados conocidos se llega a que:

$\textbf{sen 30°} = \dfrac{\textbf{opto}}{\textbf{hipo}}$ o $\textbf{sen 30°} = \dfrac{1}{2}$; $\textbf{cos 30°} = \dfrac{\textbf{ady}}{\textbf{hipo}}$ o $\textbf{cos 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\textbf{tan 30°} = \dfrac{\textbf{opto}}{\textbf{ady}}$ o $\textbf{tan 30°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\textbf{cot 30°} = \dfrac{\textbf{ady}}{\textbf{opto}}$ o $\textbf{cot 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

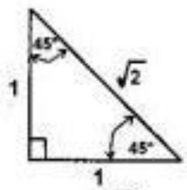
$\sec 30° = \dfrac{\text{hipo}}{\text{ady}}$ o $\sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\csc 30° = \dfrac{\text{hipo}}{\text{opto}}$ o $\csc 30° = \dfrac{2}{1} = 2$

De igual forma se puede determinar, observando el mismo triángulo que:

$\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$; $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$;

$\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\sec 60° = \dfrac{2}{1} = 2$; $\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\theta = 45°$



Para determinar las seis razones trigonométricas cuando $\theta = 45°$, se toma un triángulo rectángulo isósceles de longitud 1 unidad (medida del lado del triángulo, es arbitraria) en sus catetos y se obtiene el valor para la hipotenusa que es $\sqrt{2}$. Con sus tres lados conocidos se llega a que:

$\text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45° = 1$

$\cot 45° = 1$; $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\csc 45° = \sqrt{2}$ ■

Estos tres ángulos del ejemplo 2, para los cuales se han determinado los valores exactos de sus seis razones trigonométricas son muy aplicables en muchos temas de la trigonometría. Se enfatiza que la idea no es que los memorice, sino más bien, que cuando los necesite recuerde de que triángulos auxiliarse, construirlos rápidamente y encontrar los o el valor que necesite. La siguiente tabla resume los resultados obtenidos.

θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

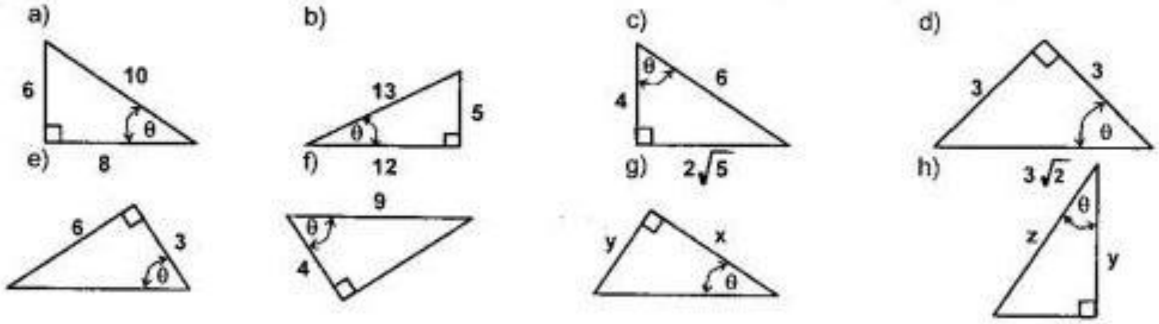
Nótese que:

sen 30° = cos 60°, tan 30° = cot 60° y sec 30° = csc 60°.

Esto es así porque 30° y 60° son medidas de ángulos complementarios.

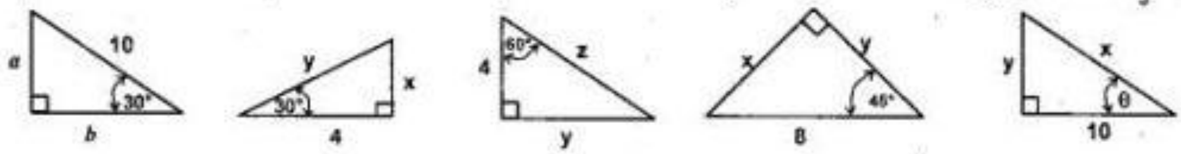
Ejercicios 2.2

1. Encontrar los valores exactos de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ dado.



2. Determinar los valores exactos de las variables desconocidas.

a) b) c) d) e) si $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$



3. Encontrar los valores exactos de las razones trigonométricas restantes para el ángulo agudo θ si:

a) $\text{sen}\,\theta = \frac{6}{7}$ b) $\cos\theta = \frac{3}{8}$ c) $\tan\theta = 3$

d) $\cot\theta = \frac{3}{11}$ e) $\sec\theta = 4$ f) $\csc\theta = \frac{7}{2}$

2.3 RAZONES TRIGONOMETRICAS PARA CUALQUIER ANGULO

Existen problemas de aplicaciones, que para resolverlos, se recurre a la trigonometría. Estos problemas mencionados anteriormente quizá no todos formen un ángulo agudo, por tal razón es necesario extender las definiciones de las razones trigonométricas para un ángulo cualquiera, pero siempre auxiliándose de las razones trigonométricas para ángulos agudos.

Tómese un ángulo θ en posición normal o estándar. Observando las gráficas de la fig. 1 a), b), c) y d), el lado final de cada ángulo esta en el I, II, III y IV cuadrante respectivamente. En cualquiera de los casos, se toma un punto P(x, y) en el lado terminal de θ. Dado que $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$, entonces OP = r = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

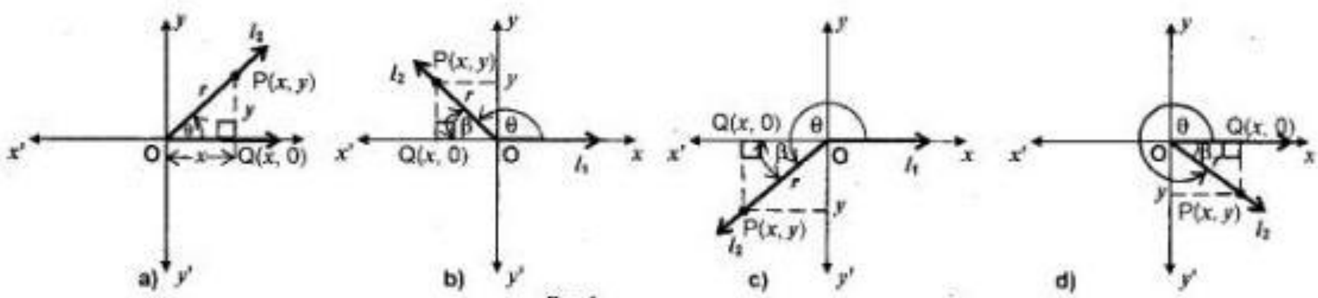


fig. 1

De la fig. 1 a) se tiene que:

$$\textbf{sen}\,\theta = \frac{\textbf{opto}}{\textbf{hipo}} = \frac{y}{r}; \qquad \cos\theta = \frac{\textbf{ady}}{\textbf{hipo}} = \frac{x}{r}; \qquad \tan\theta = \frac{\textbf{opto}}{\textbf{ady}} = \frac{y}{x}.$$

Se considera ahora un ángulo θ como uno de los mostrados en fig. 1 b), c) ó d), o cualquier coterminal a uno de ellos ya sea positivo o negativo o en general un ángulo en posición normal o estándar donde el lado terminal esté en cualquier posición del plano cartesiano. Para cada gráfica de la fig. 1, el triángulo OPQ es rectángulo, el $\overline{OP}$ determina la hipotenusa y su medida es r, PQ (longitud o medida del lado opuesto a β) es $|y|$, OQ (longitud o medida del lado adyacente a β) es $|x|$. Nótese que θ no es agudo, por tal razón hay que auxiliarse del ángulo β; posteriormente, se hará referencia a la relación que existe entre los ángulos θ y β. En estos casos también se definen las seis razones trigonométricas, auxiliándose de las dadas para ángulos agudos. Si uno de los denominadores (longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo) es cero, la razón trigonométrica no estará definida. El cuidado que se debe tener es que, dependiendo de la posición en que se encuentre el lado terminal del ángulo dado en posición normal, la razón trigonométrica encontrada, puede ser: negativa, positiva, cero ó no estar definida. Véase la siguiente definición.

Definición Sea θ un ángulo en posición normal o estándar en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea P(x, y) un punto en el lado terminal de θ, distinto del punto (0, 0). Si OP = $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces (ver fig. 1 b), c) y d)):

sen $\theta = \frac{y}{r}$; **cos** $\theta = \frac{x}{r}$; **tan** $\theta = \frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$)

cot $\theta = \frac{x}{y}$ (si $y \neq 0$); **sec**$\theta = \frac{r}{x}$ (si $x \neq 0$); **csc**$\theta = \frac{r}{y}$ (si $y \neq 0$).

Al hacer referencia a una de las seis razones trigonométricas, ésta puede ser negativa, lo cual no significa que uno de los lados del triángulo rectángulo obtenido tenga medida negativa, pues se sabe que la medida de un segmento es no negativa. El signo (ya sea positivo o negativo) se debe ubicar dependiendo del valor que le corresponda, o bien a x ó a y, según el cuadrante donde éstas se encuentren. Para el caso, en la fig. 1 b), el lado terminal de θ, está en el II cuadrante luego, x tiene signo negativo e y tiene signo positivo, por tal razón **el coseno**, **la tangente**, **la cotangente** y **la secante son negativas** y **el seno** y **la cosecante son positivas**. En la fig. 1 c) tanto x como y, tienen signo negativo, por tal razón el seno, el coseno, la secante y la cosecante son negativas y la tangente y la cotangente son positivas ya que el lado terminal del ángulo θ **está en el tercer cuadrante**. En la fig. 1 d), x tiene signo positivo e y tiene signo negativo, por tal razón el seno, la tangente, la cotangente y la cosecante son negativas y el coseno y la secante son positivas ya que el lado terminal del ángulo θ **está en el cuarto cuadrante**.

Todo lo explicado anteriormente se sintetiza en el siguiente cuadro.

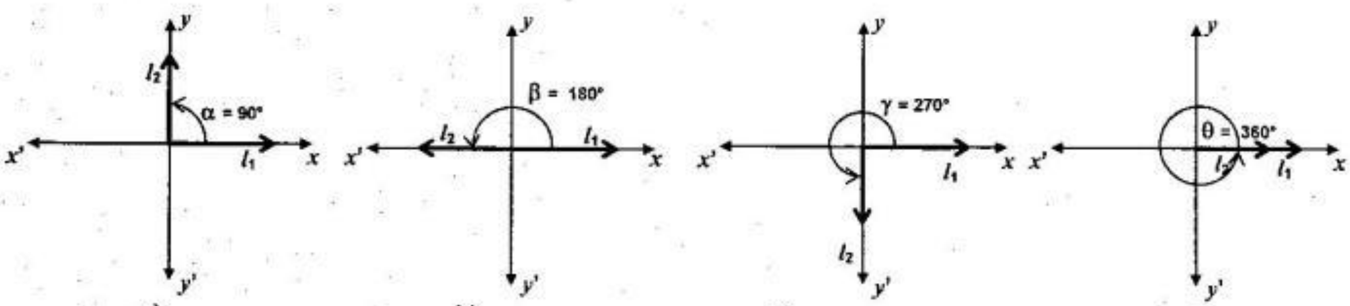
Signo de las razones trigonométricas

Cuadrante que contiene el lado terminal del ángulo θ	**Razones trigonométricas positivas**	**Razones trigonométricas negativas**
I	Todas	Ninguna
II	seno, cosecante	coseno, secante, tangente, cotangente
III	tangente, cotangente	seno, coseno, secante, cosecante
IV	coseno, secante	seno, tangente, cotangente, cosecante

Es importante también hacer referencia al hecho que algunas razones trigonométricas no están definidas para algunos valores de θ y es precisamente cuando x o y son cero (en el caso de los ángulos cuadrantales). Si $x = 0$ entonces el ángulo mide 90° ó 270° y en este caso todas las razones trigonométricas están definidas a **excepción** de la tangente y de la secante. Si $y = 0$ entonces el ángulo mide 180° ó 360° y en este caso todas las razones trigonométricas están definidas a **excepción** de la cotangente y de la cosecante. El siguiente cuadro resume lo antes explicado (ver fig. 2).

Valores para los cuales las razones trigonométricas están definidas

Razones trigonométricas	**Valores para los cuales están definidas las razones trigonométricas**
seno, coseno	Para todo ángulos θ
tangente, secante	Para todo ángulo θ excepto para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ó $\theta = 90° + k\,(180°)$ para $k \in Z$ (números enteros)
cotangente, cosecante	Para todo ángulo θ excepto para $\theta = k\pi$ ó $\theta = k\,(180°)$ para $k \in Z$ (números enteros)



a) b) c) d)

fig. 2

Para corroborar lo dicho en el último cuadro, o para encontrar las seis razones trigonométricas para ángulos cuadrantales, se sugiere auxiliarse de un círculo unitario (círculo de radio 1). Véase la siguiente figura.

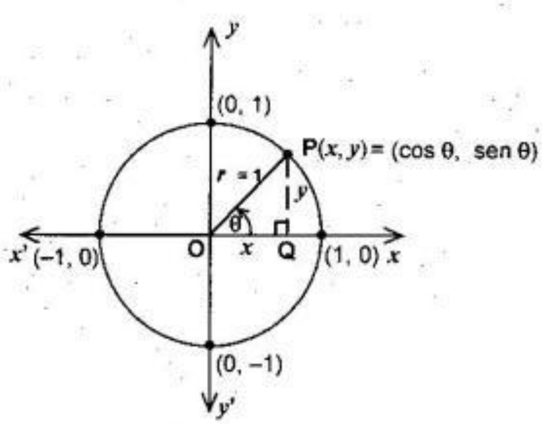


fig. 3

El triángulo OPQ es rectángulo en Q, con lado adyacente a θ de longitud x, lado opuesto a θ de longitud y e hipotenusa de longitud 1. Aplicando las definiciones de seno y coseno respectivamente se tiene que: $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1}$ ó $\operatorname{sen}\theta = y$ y $\cos\theta = \frac{x}{1}$ ó $\cos\theta = x$.
Luego el punto $P(x, y) = P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y para todo θ, las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Si se toma $\theta = 90°$, entonces se tiene que $(\cos 90°, \operatorname{sen} 90°) = (0, 1)$, en otras palabra se dice que **cos 90° = 0** y que **sen 90° = 1 (dos pares ordenados son iguales si y sólo sí sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes son iguales)**.

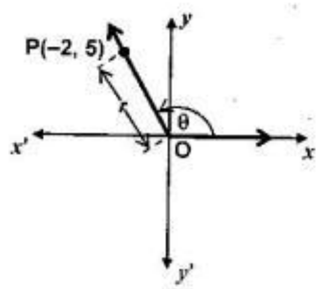
Las otras cuatro razones trigonométricas se encuentran utilizando las razones recíprocas y recordando que $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

Véase que $\tan 90^\circ = \dfrac{\text{sen } 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$ **la cual no está definida**, y se dice que **tan 90° no existe o no está definida o es infinita**. Se tiene además que $\cot 90^\circ = \dfrac{\cos 90^\circ}{\text{sen } 90^\circ} = \dfrac{0}{1} = 0$. De igual manera se obtiene que $\sec 90^\circ = \dfrac{1}{\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{0}$ la cual **no está definida** y $\csc 90^\circ = \dfrac{1}{\text{sen } 90^\circ} = \dfrac{1}{1} = 1$. Este procedimiento se repite para los otros ángulos cuadrantales (180°, 270° y 360°).

Véase algunos ejemplos para aplicar lo expuesto en esta sección.

Ejemplo 1 Si θ es un ángulo en posición estándar o normal, y si el punto P (−2, 5) está en el lado terminal de θ, encontrar los valores exactos de las seis razones trigonométricas de θ.

Solución:



Para facilitar el desarrollo, se recomienda dibujar el ángulo θ. Retomando el punto que está en el lado terminal de θ, el cual es P(−2, 5), se tiene que $x = -2$ e $y = 5$. Calculando r; se tiene que $r = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$. Aplicando la definición de cada una de las razones trigonométricas se llega a:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}; \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}} = \frac{-2\sqrt{29}}{29};$$

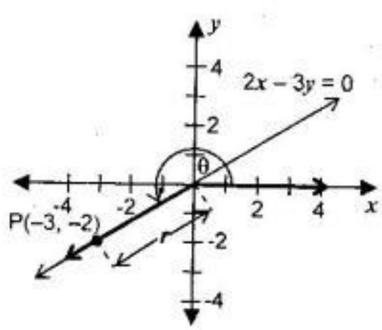
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}; \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{2}{5};$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{\sqrt{29}}{2}; \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

■

Ejemplo 2 Encontrar los valores exactos de las seis razones trigonométricas de θ, si θ está en posición normal o estándar, y su lado terminal se encuentra en el tercer cuadrante y sobre la recta con ecuación $2x - 3y = 0$.

Solución:



Primero se traza la gráfica de la ecuación $2x - 3y = 0$, ó la equivalente, $y = \frac{2}{3}x$. Se dice que el ángulo θ está en posición estándar, en el tercer cuadrante y sobre la gráfica de la ecuación dada (la recta). Para encontrar las razones trigonométricas, es necesario conocer un punto que esté en el lado terminal del ángulo θ. Para facilitar los cálculos, es conveniente asignarle a x el valor de −3, (ya que se dice que el ángulo está en el tercer cuadrante) y con este valor sustituido en la ecuación de la recta se obtiene el valor para $y = -2$, y se obtiene el punto (−3, −2) y el cual está en el lado terminal de θ. Calculando el radio (r) se tiene que $r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Aplicando la definición de cada una de las razones trigonométricas se tiene:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}; \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{-3\sqrt{13}}{13};$$

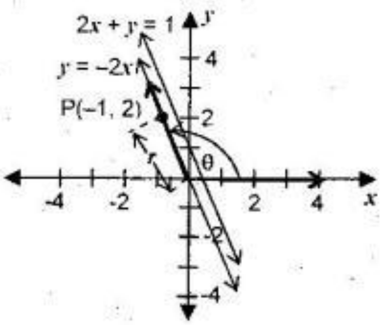
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}; \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{2};$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{\sqrt{13}}{3}; \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

■

Ejemplo 3 Encontrar los valores exactos de las seis razones trigonométricas de θ, si θ está en posición normal o estándar, y su lado terminal se encuentra en el segundo cuadrante y es paralelo a la recta con ecuación $2x + y = 1$.

solución



Primero se trazan la gráfica de la ecuación $2x + y = 1$, ó su equivalente $y = -2x + 1$. Se dice que el ángulo θ está en posición estándar, en el segundo cuadrante y es paralelo a la recta con ecuación dada. Ahora es necesario encontrar la ecuación de la recta que pase por el origen P (0, 0) y que sea paralela a la recta con ecuación $y = -2x + 1$, ya que θ está en posición estándar. Recuérdese que si las rectas son paralelas, éstas deben tener la misma pendiente, por lo que la pendiente de ambas rectas es $m = -2$. Para encontrar la ecuación de la recta que contiene al lado terminal, se aplica la fórmula; punto y pendiente la cual se enuncia así: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, donde $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $m = -2$.

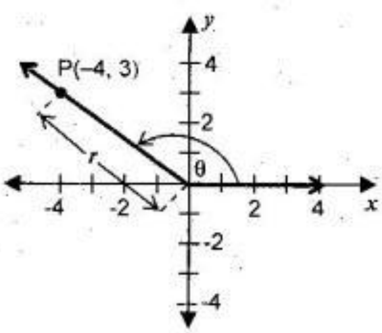
Sustituyendo en esta última ecuación el punto P(0, 0) y $m = -2$ se tiene que $y - 0 = -2\,(x - 0)$ ó $y = -2x$, cuya gráfica contiene al lado terminal de θ. Haciendo $x = -1$ se deduce que $y = 2$ y con estos valores se determina que $r = \sqrt{5}$. Aplicando las definiciones para cada una de las razones trigonométrica se concluye que:

$\textbf{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\quad \textbf{cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$; $\quad \textbf{tan}\,\theta = \frac{y}{x} = -2$;

$\textbf{cot}\,\theta = \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$; $\quad \textbf{sec}\,\theta = \frac{r}{x} = -\sqrt{5}$; $\quad \textbf{csc}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ■

Ejemplo 4 Si $\csc\theta = \frac{5}{3}$ y $\cot\theta < 0$, encontrar los valores de las cinco razones trigonométricas restantes.

Solución:



Se comienza por identificar el cuadrante que contiene al ángulo θ, según las condiciones dadas. Se dice que $\csc\theta = \frac{5}{3}$ lo cual indica que ésta es positiva y el ángulo θ puede estar en el primer o **segundo** cuadrante, ya que la cosecante es positiva en estos cuadrantes. También se dice que $\cot\theta < 0$ (la cotangente es negativa) y ésta es negativa en el **segundo** y cuarto cuadrante. **Ambas condiciones se cumplen únicamente en el segundo cuadrante**, por lo que se asegura que θ está en el segundo cuadrante. Ahora se ubica el ángulo θ en posición estándar (ver figura). Nótese que si $r = 5$ e $y = 3$ (según la definición de cosecante), entonces $x = -4$ (aplicando Pitágoras). Obsérvese que el signo negativo para x le corresponde por la posición del ángulo (ya que en el segundo cuadrante la x es negativa y la y es positiva).

Conociendo ahora el valor para $x = -4$, $y = 3$ y $r = 5$, se aplica la definición para las restantes razones trigonométricas.

$\textbf{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$; $\quad \textbf{cos}\,\theta = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5}$; $\quad \textbf{tan}\,\theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$;

$\textbf{cot}\,\theta = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$; $\quad \textbf{sec}\,\theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{4}$; ■

Ejemplo 5 Encontrar el cuadrante que contiene a θ, si $\csc\theta > 0$ (la cosecante es positiva) y $\tan\theta < 0$ (la tangente es negativa).

Solución:

Recordando los cuadrantes donde cada razón trigonométrica es positiva o negativa, se tiene que la cosecante es positiva en el primer y segundo cuadrante y la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante. **Ambas condiciones se cumplen únicamente en el segundo cuadrante**. En conclusión, θ **se encuentra en el segundo cuadrante**.

■

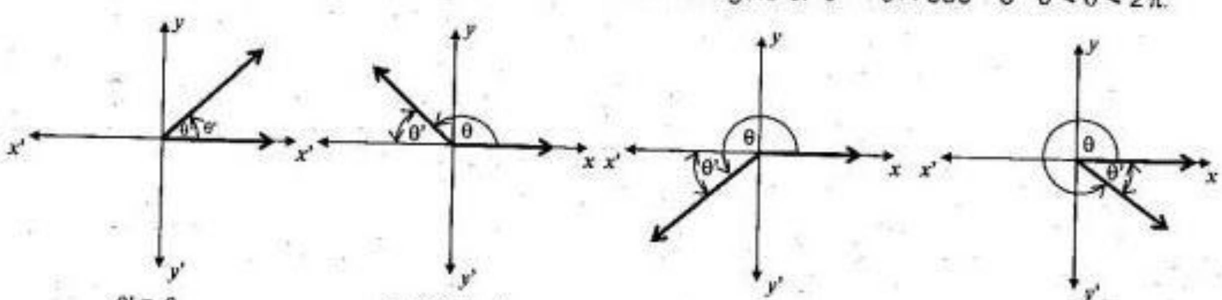
En todos los ejemplos dados anteriormente se ha hecho un enfoque principalmente en determinar el valor exacto de las razones trigonométricas, dando algunas condiciones para el ángulo θ, pero sin conocer la medida del mismo. Ahora se puede pedir que se encuentre los valores exactos para algunos ángulos especiales, y siempre auxiliándose de los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Cabe mencionar que existen infinitos ángulos, a los cuales no será posible calcular su valor exacto, sino únicamente se encontrará un valor aproximado que en estos casos, es necesario auxiliarse de las calculadoras científicas.

Se habla ahora de **ángulos de referencia**, que facilitan el cálculo de los valores exactos para ciertos ángulos.

Definición Sea θ un ángulo no cuadrantal y en posición normal o estándar. El ángulo de referencia para θ, es el ángulo agudo y positivo θ' ó θ_R, formado por el lado terminal de θ y el eje x (ya sea el eje positivo o negativo; el más cercano al lado terminal).

La siguiente figura muestra cada posibilidad para el ángulo de referencia θ' para un ángulo θ no cuadrantal. Recuérdese que el ángulo θ, puede estar dado en grados o radianes y por eso se dan las dos posibilidades en las fórmulas. Las gráficas muestran el ángulo si $0° < \theta < 360°$ ó $0 < \theta < 2\pi$.



a) $\theta' = \theta$

b) $\theta' = 180° - \theta$
$\theta' = \pi - \theta$

c) $\theta' = \theta - 180°$
$\theta' = \theta - \pi$

d) $\theta' = 360° - \theta$
$\theta' = 2\pi - \theta$

fig. 4

COMO DETERMINAR EL ANGULO DE REFERENCIA

Si el ángulo θ dado, no es cuadrantal ni mayor que 360° o menor que 0°, primero se ubica en posición normal y se toma el coterminal a éste de tal manera que $0° <$ coterminal de $\theta < 360°$ ó $0 <$ coterminal de $\theta < 2\pi$, y luego se utilizan las fórmulas dadas en fig. 4. De estos ángulos de referencia encontrados, se puede auxiliar para encontrar los valores exactos de las razones trigonométricas para algunos ángulos. Si θ es un ángulo no cuadrantal, con ángulo de referencia θ', entonces $0° < \theta' < 90°$ ó $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$. Obsérvese la fig. 5 a), b), c) y d), considérese el punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ y tómese el punto $Q(x, 0)$ en el eje de las x. En cada caso se tiene el triángulo rectángulo OPQ cuyos lados tienen las siguientes medidas:

PQ = $|y|$, OQ = $|x|$ y OP = $\sqrt{x^2+y^2} = r$. A cada triángulo rectángulo formado, se le puede aplicar las definiciones de las razones trigonométricas, del ángulo de referencia.

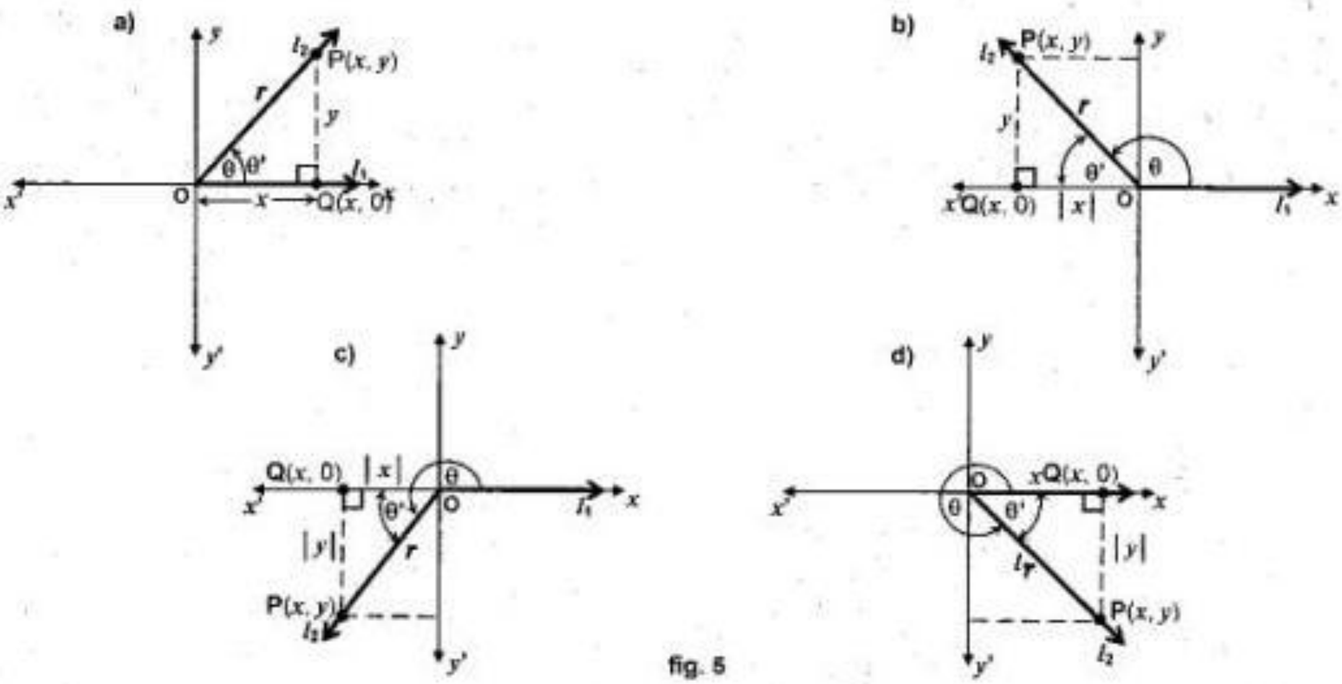


fig. 5

Si se considera el triángulo rectángulo OPQ se definen las razones trigonométricas para cada ángulo así:

$|\text{sen}\,\theta| = \left|\frac{y}{r}\right| = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \text{sen}\,\theta'$, $\quad |\cos\theta| = \left|\frac{x}{r}\right| = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos\theta'$ y

$|\tan\theta| = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{|x|} = \tan\theta'$.

Las otras tres razones trigonométricas, se pueden definir aplicando las razones trigonométricas recíprocas citadas últimamente. A estas definiciones dadas anteriormente, se le pueden eliminarle las barras de valor absoluto, si se ubican los valores de x e y, dependiendo de la posición del lado terminal del ángulo θ. ¡Cuidado! no se debe pensar que un lado del triángulo rectángulo OPQ sea negativo, pues se le enfatiza que las longitudes de los segmentos son números no negativos.

Con mucha frecuencia se utilizan los triángulos especiales: 30° – 60° – 90° y el triángulo rectángulo isósceles estudiado en la sección anterior, para determinar valores exactos de otros ángulos.

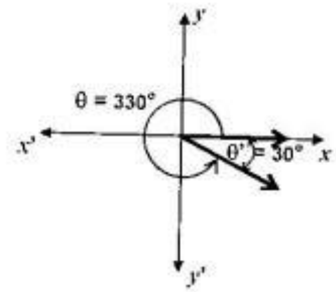
Ejemplo 6 Para cada ángulo θ dado, determinar el ángulo de referencia θ'. Ubiquese ambos ángulos en posición normal y en el mismo plano de coordenadas.

a) $\theta = 330°$ **b)** $\theta = -120°$ **c)** $\theta = \frac{5\pi}{6}$ **d)** $\theta = -4$

Solución:

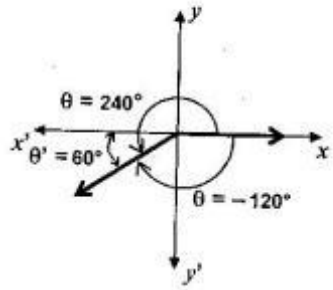
a) $\theta = 330°$

Como $\theta = 330°$, éste está en el tercer cuadrante, luego $\theta' = 360° - 330° = 30°$.



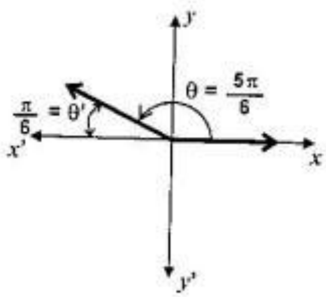
b) $\theta = -120°$

Como $\theta = -120°$, éste está en el tercer cuadrante. En este caso es preferible encontrar el ángulo coterminal entre 0° y 360° el cual es $-120° + 360° = 240°$. Luego $\theta' = 240° - 180° = 60°$.



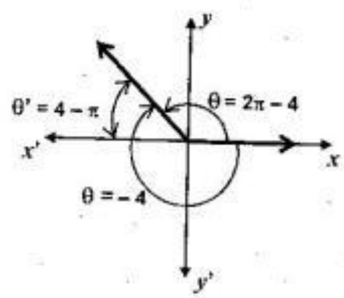
c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Como $\theta = \frac{5\pi}{6}$, éste está en el segundo cuadrante, luego $\theta' = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.



d) $\theta = -4$

Como $\theta = -4$ rad, éste está en el segundo cuadrante, en este caso es preferible encontrar el ángulo coterminal entre 0 y 2π el cual es $-4 + 2\pi$. Luego $\theta' = \pi - (-4 + 2\pi) = 4 - \pi$.



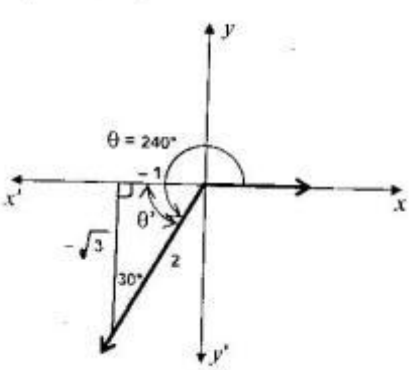
■

Ejemplo 7 Encontrar el valor exacto en cada inciso.

a) sen 240° **b)** sec (−315°) **c)** $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ **d)** $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ **e)** $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solución:

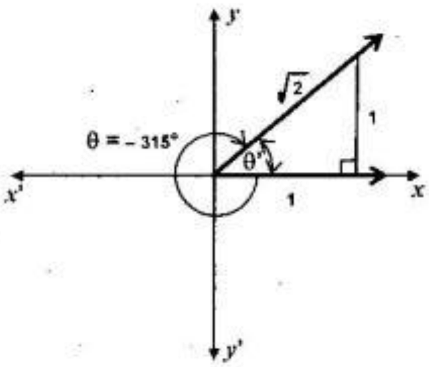
a) sen 240°



$\theta' = 240° - 180°$
$\theta' = 60°$

Primero se ubica el ángulo en posición normal estándar, para determinar su ángulo de referencia. Véase la figura y se notará que el ángulo de referencia ($\theta' = 60°$), está en el tercer cuadrante. Si se ubica el triángulo 30°– 60° – 90° de tal manera que el ángulo de referencia coincida con 60°(medida del ángulo en el triángulo 30°– 60° – 90°) y asignándole tanto a x como a y el signo según la posición del triángulo, se tiene que $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$ y $r = 2$. Recordando la definición de seno se tiene que sen 240° = sen $\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Esto es válido si se tiene dibujado correctamente el ángulo en posición normal.

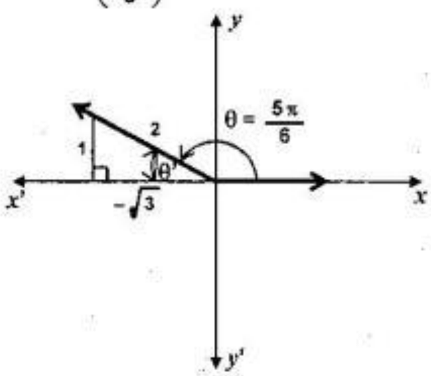
b) sec (–315°)



$\theta' = 360° - 315°$
$\theta' = 45°$

Ubicando el ángulo en posición normal estándar, se determina el ángulo de referencia. Véase la figura y se notará que el ángulo de referencia es 45° (θ' = 45°) y está en el primer cuadrante. Si se ubica el triángulo rectángulo isósceles especial (catetos de longitud una unidad e hipotenusa de longitud $\sqrt{2}$ unidades), de tal manera que el ángulo de referencia coincida con 45°(medida de uno de los ángulos agudos de dicho triángulo) y asignándole tanto a x como a y el signo según la posición del triángulo. Aquí $x = 1$, $y = 1$ y $r = \sqrt{2}$. Recordando la definición de secante se tiene que $\sec(-315°) = \sec\theta' = \dfrac{1}{\cos\theta'} = \sqrt{2}$.

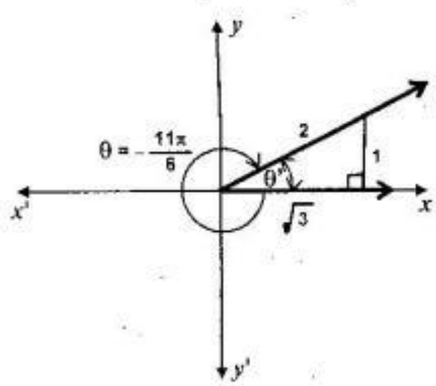
c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$



$\theta' = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Ubicando el ángulo en posición normal estándar, se obtiene el ángulo de referencia. Véase la figura y se nota que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$ ($\theta' = \frac{\pi}{6}$) y está en el segundo cuadrante. Si se ubica el triángulo 30° – 60° – 90° de tal manera que el ángulo de referencia coincida con $\frac{\pi}{6}$ (medida del ángulo en el triángulo 30° – 60° – 90°) y asignándole tanto a x como a y el signo según la posición del triángulo, se tiene que $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ y $r = 2$. Recordando la definición de coseno se llega a que $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

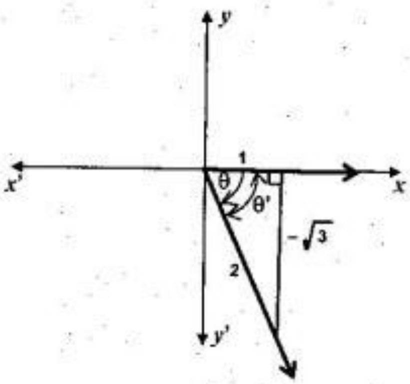
d) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$



$\theta' = 2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Ubicando el ángulo en posición normal estándar, se determina el ángulo de referencia. Véase la figura y se notará que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$ ($\theta' = \frac{\pi}{6}$) y está en el primer cuadrante. Ubicando el triángulo 30° – 60° – 90° de tal manera que el ángulo de referencia coincida con $\frac{\pi}{6}$ (medida del ángulo en el triángulo 30° – 60° – 90°) y asignándole tanto a x como a y el signo según la posición del triángulo, se tiene que $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ y $r = 2$. Recordando la definición de tangente, se tiene que $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

e) $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$



$\theta' = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Ubicando el ángulo en posición normal estándar, encontrando el coterminal positivo entre 0° y 360° a éste, se determina el ángulo de referencia. Según la figura se observa que el ángulo de referencia ($\theta' = \frac{\pi}{3}$), está en el cuarto cuadrante. Ubicando el triángulo 30° – 60° – 90° de tal manera que el ángulo de referencia coincida con $\frac{\pi}{3}$ (medida del ángulo en el triángulo 30° – 60° – 90°) y asignándole tanto a x como a y el signo según la posición del triángulo, se tiene que $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$ y $r = 2$. Recordando la definición de cosecante se llega a que $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ■

Del ejemplo anterior se podrá comprobar que:

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$,
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$,
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ y $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$.

Ejercicios 2.3

1. En los siguientes incisos, θ es un ángulo que está en posición normal y el punto P está en el lado terminal de θ. Determinar el valor exacto de las seis razones trigonométricas de θ, si existen.

   a) P(2, 3) b) P(–3, 1) c) P(4, –1) d) P(–2, –3) e) $P\left(1, \sqrt{3}\right)$ f) $P\left(2\sqrt{3}, -2\right)$

   g) P(2, 0) h) P(0, 3) i) P(–2, 0) j) P(–3, –1) k) P(0, –4) l) $P\left(-3\sqrt{3}, -3\right)$

2. Determinar el valor exacto de las seis razones trigonométricas para θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ está en el cuadrante que se especifica y cumple las condiciones dadas.

   a) θ está en el I cuadrante y P está en la recta $y = 2x$
   b) θ está en el II cuadrante y P está en la recta $y + 3x = 0$
   c) θ está en el IV cuadrante y P está en la recta $2y + 3x = 0$
   d) θ está en el III cuadrante y P está en una recta con pendiente $\frac{2}{3}$
   e) θ está en el I cuadrante y el lado terminal es paralelo a la recta con ecuación $y - x + 1 = 0$
   f) θ está en el II cuadrante y el lado terminal es paralelo a la recta que contiene los puntos (1, 2) y (3, –4)
   g) θ está en el III cuadrante y el lado terminal biseca el mismo.

3. Determinar el valor exacto de las razones trigonométricas restantes de θ para las condiciones dadas.

   a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ y $\tan\theta < 0$ b) $\cot\theta = -\frac{5}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$ c) $\sec\theta = 4$ y $\cot\theta > 0$

   d) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y $\csc\theta > 0$ e) $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\theta < 0$ f) $\csc\theta = \sqrt{3}$ y $\tan\theta < 0$

4. Determinar el cuadrante que contiene a θ para las condiciones dadas.

   a) $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$ b) $\cot\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$ c) $\csc\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$

   d) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$ e) $\sec\theta > 0$ y $\csc\theta > 0$ f) $\tan\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

5. Determinar el ángulo de referencia θ', si θ tiene la medida especificada.

a) $\theta = 120°$ b) $\theta = 280°$ c) $\theta = 350°$ d) $\theta = -105°$ e) $\theta = -215°$ f) $\theta = 60°$

g) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ h) $\theta = \frac{7\pi}{3}$ i) $\theta = \frac{11\pi}{4}$ j) $\theta = \frac{\pi}{6}$ k) $\theta = -\frac{\pi}{3}$ l) $\theta = -\frac{7\pi}{4}$

m) $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ n) $\theta = \frac{7\pi}{12}$ o) $\theta = -\frac{\pi}{8}$ p) $\theta = 2$ q) $\theta = -3$ r) $\theta = 7$

6. Encontrar el valor exacto en cada inciso.

a) sen 150° b) sec 210° c) cos 225° d) tan 240° e) csc 420° f) cot 840°

g) $\csc\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ h) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ i) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ j) $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ k) $\operatorname{sen}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$ l) $\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

m) sen (−60°) n) cos (−120°) o) cot (−270°) p) tan (180°) q) csc 720° r) cot (−90°)

s) $\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ t) $\tan\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$ u) $\sec\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$ v) $\cot\left(-\frac{17\pi}{2}\right)$ w) $\operatorname{sen}\left(-\frac{47\pi}{6}\right)$ x) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO II

1. Ubicar cada ángulo en posición normal, e indique en que cuadrante se encuentra el lado final.

a) −20° b) −180° c) 10° d) −125° e) 320° f) −540°

g) $\frac{7\pi}{5}$ h) $\frac{4\pi}{7}$ i) $-\frac{7\pi}{3}$ j) 20π k) $-\frac{13\pi}{2}$ l) -16π

2. Ubicar cada ángulo en posición normal o estándar y encuentre tres ángulos coterminales positivos y tres ángulos coterminales negativos.

a) 20° b) $\frac{7\pi}{4}$ c) −280° d) $-\frac{15\pi}{3}$ e) 520° f) 3

3. Convertir cada ángulo dado en grados a radianes (dar valor exacto; en términos de π).

a) 125° b) −260° c) 15° d) −125° e) 720° f) −840°

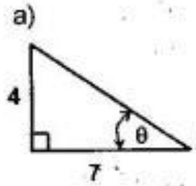
g) −75° h) 240° i) −105° j) 750° k) −100° l) $\left(\frac{3\pi}{5}\right)^{\circ}$

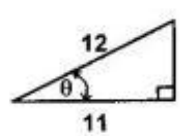
4. Convertir cada ángulo dado en radianes a grados (dar el valor exacto).

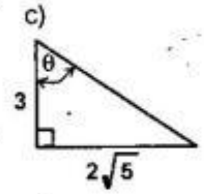
a) $\frac{15\pi}{4}$ b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $-\frac{7\pi}{3}$ d) 20π e) $-\frac{17\pi}{2}$ f) -12π

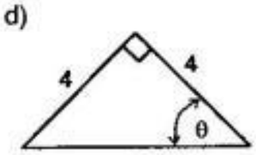
g) $\frac{3\pi}{5}$ h) $-\frac{19\pi}{3}$ i) $\frac{21\pi}{4}$ j) -11π k) $\frac{41\pi}{2}$ l) 4

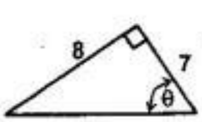
5. Encontrar los valores exactos de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ.

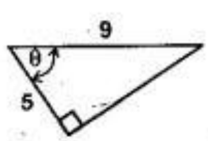
a)


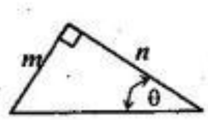
b)


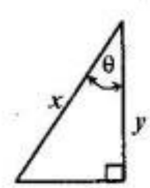
c)


d)


e)


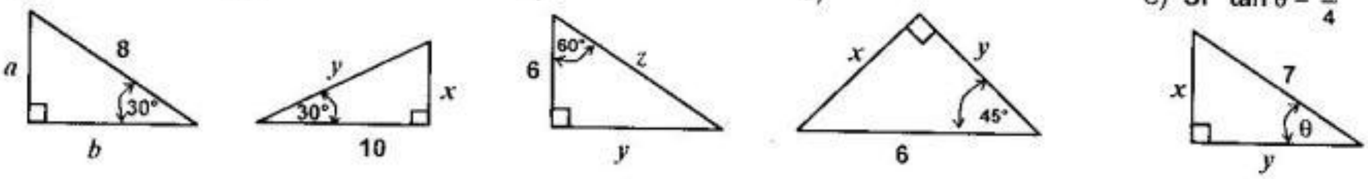
f)


g)


h)


6. Encontrar los valores exactos de las variables desconocidas.

a) b) c) d) e) Si $\tan\theta = \frac{5}{4}$



7. En los siguientes incisos, θ es un ángulo que está en posición normal y el punto P está en el lado terminal de θ. Determinar el valor exacto de las seis razones trigonométricas de θ si existen.

a) $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$ b) $P(-2, 2)$ c) $P(3, -2)$ d) $P(-2, -5)$ e) $P\left(-1,\sqrt{2}\right)$ f) $P\left(2\sqrt{5},-2\right)$

8. Determinar el valor exacto de las seis razones trigonométricas de θ, si θ está en posición normal y el lado terminal de θ está en el cuadrante que se especifica y cumple las condiciones dadas.

a) θ está en el III cuadrante y P está en la recta $y = 3x$.

b) θ está en el IV cuadrante y P está en la recta $y + 2x = 0$.

c) θ está en el II cuadrante y P está en la recta $3y + 4x = 0$.

d) θ está en el I cuadrante y P está en la recta con pendiente $\frac{2}{5}$.

e) θ está en el III cuadrante y el lado terminal es paralelo a la recta con ecuación $y - 2x + 3 = 0$.

f) θ está en el IV cuadrante y el lado terminal es paralelo a la recta que contiene los puntos (1,2) y (3, −4).

g) θ está en el I cuadrante y el lado terminal biseca el mismo.

9. Determinar el valor exacto de las razones trigonométricas restantes de θ para las condiciones dadas.

a) $\cos\theta = \frac{2}{5}$ y $\tan\theta < 0$ b) $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ y $\cos\theta < 0$ c) $\sec\theta = 3$ y $\tan\theta > 0$

d) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $\sec\theta > 0$ e) $\cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$ f) $\csc\theta = \sqrt{5}$ y $\cot\theta < 0$

10. Determinar el cuadrante que contiene a θ según las condiciones dadas.

a) $\cot\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$ b) $\cot\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$ c) $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$

d) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta < 0$ e) $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta > 0$ f) $\tan\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

11. Determinar el ángulo de referencia θ', si θ tiene la medida especificada.

a) $\theta = -120°$ b) $\theta = 230°$ c) $\theta = 445°$ d) $\theta = -125°$ e) $\theta = -285°$ f) $\theta = 160°$

g) $\theta = \frac{2\pi}{9}$ h) $\theta = \frac{11\pi}{5}$ i) $\theta = \frac{41\pi}{4}$ j) $\theta = \frac{19\pi}{6}$ k) $\theta = -\frac{11\pi}{3}$ l) $\theta = -\frac{27\pi}{4}$

m) $\theta = -\frac{3\pi}{19}$ n) $\theta = \frac{25\pi}{12}$ o) $\theta = -\frac{31\pi}{8}$ p) $\theta = \sqrt{5}$ q) $\theta = -6$ r) $\theta = 8$

12. Encontrar el valor exacto en cada inciso.

a) sen 120° b) sec (−210°) c) cos 150° d) tan (−30°) e) csc 135° f) cot 750°

g) $\csc\left(\frac{21\pi}{6}\right)$ h) $\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ i) $\sec\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ j) $\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ k) $\operatorname{sen}\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ l) $\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right)$

m) tan (−270°) n) cot (180°) o) $\sec\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$ p) $\csc\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$ q) tan (−90°) r) cot (20π)

CAPITULO III IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

3.1 IDENTIDADES BASICAS O FUNDAMENTALES

En álgebra se estudia la simplificación de expresiones algebraicas (racionales e irracionales) y de algunas trascendentes (logarítmicas, exponenciales). Ahora se hará referencia a otras trascendentes; las llamadas **trigonométricas**. Algunas de estas expresiones trigonométricas son:

$$x + \cos x; \qquad \frac{1+\operatorname{sen}(2\theta+1)}{\tan(\theta-1)}; \qquad \frac{\sec x + 3^{\cot x}}{\csc x}; \qquad \frac{\theta}{\tan(2\theta)-\operatorname{sen}\theta}$$

De las expresiones trigonométricas anteriores, se debe tener cuidado e indicar para que valores están definidas las mismas. En este momento, el interés es la simplificación de expresiones trigonométricas, ya que frecuentemente encontrarán combinaciones de las seis razones trigonométricas para lo cual será necesario transformarlas en otras más sencillas o más convenientes. Para lograr esto se requiere de conocimientos previos tales como: factorización, simplificación de expresiones algebraicas racionales y además se deben conocer las identidades trigonométricas fundamentales. De estas identidades fundamentales, algunas ya han sido mencionadas en el capítulo anterior (de la número 1 a la 5), las cuales deben memorizarse, para facilitar dicha simplificación. Véase las siguientes:

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

1. $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

2. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

3. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ ó $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

4. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ ó $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

5. $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ ó $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

6. $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

7. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

8. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

De las identidades fundamentales dadas anteriormente, de la número 6 a la 8 son llamadas identidades pitagóricas y se puede hacer uso del siguiente gráfico para ver su procedencia.

Una forma de mostrar las mismas, es auxiliándose del círculo unitario (circulo de radio 1). Ver fig 1.

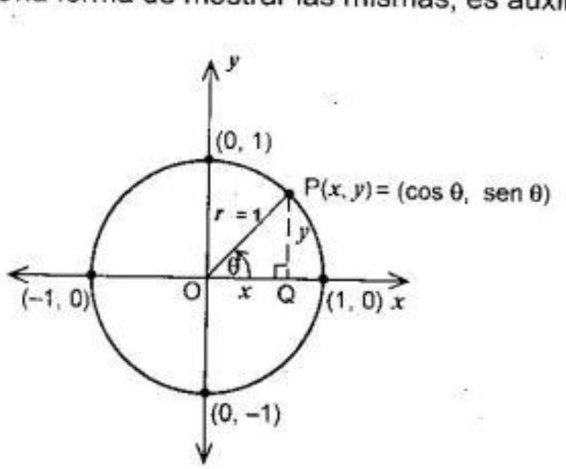


fig. 1

En el capítulo anterior (2.3) se mostró que $\operatorname{sen}\theta = y$ y $\cos\theta = x$. Luego el $P(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y el punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ satisface la ecuación estandar del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ para cualquier valor de θ. De lo anterior se tiene que $(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$, o de forma más común se dice que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Otra forma para obtener las identidades 6, 7 y 8 de la página anterior, se toma un triángulo rectángulo:

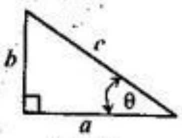


fig. 2

$b^2 + a^2 = c^2$ aplicando el teorema de Pitágoras.

$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$ dividiendo por c^2 ambos lados de la igualdad.

$(\text{sen}\ \theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ aplicando la definición de sen θ y cos θ.

$(\text{sen}\ \theta)^2 = \text{sen}^2\theta$ y $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$ expresiones equivalentes.

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ sustituyendo las expresiones equivalentes.

Véase como llegar a las otras dos identidades pitagóricas

Retomando $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ identidad fundamental pitagórica.

$$\frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$ dividiendo ambos lados de la igualdad por $\text{sen}^2\theta$.

$$\left(\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\right) + \left(\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\right) = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$ separando los términos del lado izquierdo.

$$\left(\frac{\text{sen}\ \theta}{\text{sen}\ \theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\text{sen}\ \theta}\right)^2$$ por propiedades de los exponentes.

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$ simplificando y aplicando identidades fundamentales 2 y 3.

De igual manera, al tomar la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y dividir ambos lados de la igualdad por $\cos^2\theta$, se obtiene que $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Recuérdese que:

$(\cos\theta)^2 = (\cos\theta)(\cos\theta) = \cos^2\theta$

$(\sec\theta)^3 = (\sec\theta)(\sec\theta)(\sec\theta) = \sec^3\theta$

En general, si n es un número entero distinto de -1, entonces una potencia de la forma $(\tan\theta)^n$, ésta se escribe $\tan^n\theta$. Las notaciones $\cos^{-1}\theta$, $\cot^{-1}\theta$, $\sec^{-1}\theta$ u otra de esta forma, son exclusivas para representar las funciones trigonométricas inversas que se estudiarán en capítulos posteriores. Estas últimas representaciones enunciadas anteriormente, no representan recíprocos, como ocurre con los números.

Se debe tener cuidado también con las identidades recíprocas, ya que del álgebra se sabe que $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, pero si se habla de la recíproca de una razón trigonométrica, la forma correcta de expresarlo es la siguiente:

$(\cos\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta}$, $(\text{sen}\ \theta)^{-1} = \frac{1}{\text{sen}\ \theta}$, $(\tan\theta)^{-1} = \frac{1}{\tan\theta}$ y de igual manera las restantes.

Estas identidades se pueden utilizar para:

1. **Expresar cada razón trigonométrica** en **términos de cualquier otra razón** trigonométrica.
2. Para verificar una **identidad trigonométrica**, lo que significa, la igualdad de dos expresiones trigonométricas en donde se debe partir de uno de los dos miembros de la igualdad y después de simplificar y utilizar algunas identidades fundamentales o pitagóricas llegar al otro miembro.
3. **Hallar el valor exacto** de las restantes razones trigonométricas, dando condiciones.
4. Resolución de **ecuaciones trigonométricas** (posteriormente se hablará al respecto)

Ejemplo 1 Sea θ un ángulo agudo.

a) Expresar **cos** θ, en términos de **sen** θ

b) Expresar **cot** θ, en términos de **cos** θ

c) Expresar $\mathbf{cos^2}\,\theta$, en términos de **sen** θ

d) Expresar $\mathbf{tan^2}\,\theta$, en términos de **cos** θ

e) Expresar $\mathbf{tan^2\,\theta - 2\sec^2\theta + 5}$ en términos de **sec** θ

Solución:

a) Expresar **cos** θ, en términos de **sen** θ

$\mathbf{cos}\,\theta$	**retomando la expresión dada.**
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	tomando la identidad fundamental que permita llegar donde se desea.
$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$	despejando para $\mathbf{cos^2}\,\theta$.
$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \mathbf{sen}^2\theta}$	extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.
$\cos\theta = \sqrt{1 - \mathbf{sen}^2\theta}$	ya que se dice que θ es agudo y tanto el coseno como las otras razones trigonométricas son positivas para un ángulo agudo.

Observación: Como se dice que θ es un ángulo agudo, entonces $\cos\theta = \sqrt{1 - \mathbf{sen}^2\theta}$. El mismo resultado hubiese sido si se dijera que θ está en el cuarto cuadrante; ya que el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante. Si se dijera que θ está en el segundo o tercer cuadrante, entonces $\cos\theta = -\sqrt{1 - \mathbf{sen}^2\theta}$, ya que el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante.

b) Expresar **cot** θ, en términos de **cos** θ

$\mathbf{cot}\,\theta$	**retomando la expresión dada.**
$\cot\theta = \dfrac{\mathbf{cos}\,\theta}{\mathbf{sen}\,\theta}$	aplicando identidad fundamental 2.

Nótese que la última expresión está en términos de sen θ y de cos θ. Para llegar donde se quiere se debe expresar sen θ en términos de cos θ. Véase:

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	tomando la identidad fundamental que permita llegar donde se desea.
$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	despejando para $\mathbf{sen^2}\,\theta$.
$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{1 - \mathbf{cos}^2\theta}$	extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.
$\text{sen}\,\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$	ya que se dice que θ es agudo y tanto el seno como las otras razones trigonométricas **son** positivas.

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ sustituyendo sen θ por $\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

c) Expresar $\cos^2\theta$, en términos de **sen θ.**

$\cos^2\theta$	**expresión dada.**
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	tomando la identidad fundamental que permita llegar donde se desea.
$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$	despejando para $\cos^2\theta$, y es lo que pide.

d) Expresar $\tan^2\theta$, en términos de **cos θ**

$\tan^2\theta$	**expresión dada.**
$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$	aplicando identidad fundamental 1.
$\tan^2\theta = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$	aplicando propiedades de potencias.
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	tomando la identidad fundamental que permita llegar donde se desea.
$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	despejando para $\text{sen}^2\theta$.
$\tan^2\theta = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$	sustituyendo $\text{sen}^2\theta$, por $1-\cos^2\theta$.

e) Expresar $\tan^2\theta - 2\sec^2\theta + 5$ en términos de **sec θ**

En ésta, se debe buscar una identidad fundamental que involucre tanto a tan θ, como a sec θ.

$\tan^2\theta - 2\sec^2\theta + 5$	**expresión dada**
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	retomando la identidad fundamental 7.
$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$	despejando para $\tan^2\theta$.

Como ya se tiene despejada la identidad fundamental para $\tan^2\theta$, sustituyendo esta última en la expresión dada, se obtiene:

$$\tan^2\theta - 2\sec^2\theta + 5 = \sec^2\theta - 1 - 2\sec^2\theta + 5$$ sustituyendo $\tan^2\theta$, por $\sec^2\theta - 1$ en la expresión dada.

$$= 4 - \sec^2\theta$$ simplificando. ■

Ejemplo 2 Sea $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ expresar **cos θ**, **tan θ**, **cot θ**, **sec θ** y **csc θ** en términos de **sen θ**.

Solución:

Expresando cos θ, en términos de sen θ.

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	tomando la identidad fundamental que permita llegar donde se desea.
$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$	despejando para $\cos^2\theta$.

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$ extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.

$\cos\theta = -\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$ ya que se dice que θ está en el segundo cuadrante $\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$, y ahí el cos θ es **negativo**.

Expresando tan θ, en términos de sen θ.

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ aplicando identidad fundamental 1.

$\tan\theta = -\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}$ sustituyendo **cos** θ, por $-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$, ya que el **cos** θ es negativo.

Expresando cot θ, en términos de sen θ.

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$ aplicando identidad fundamental 2.

$\cot\theta = -\dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}{\text{sen}\,\theta}$ sustituyendo **cos** θ, por $-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$, ya que el **cos** θ es negativo.

Expresando sec θ, en términos de sen θ.

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ aplicando identidad fundamental 4.

$\sec\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}$ sustituyendo **cos** θ, por $-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$, ya que el **cos** θ es negativo.

Expresando csc θ, en términos de sen θ.

$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$ aplicando identidad fundamental 3. ∎

Ejemplo 3 Expresar cada enunciado en términos de seno y coseno y simplificar. Considerar θ un ángulo agudo.

a) $\cot^2\theta - \csc^2\theta$ **b)** $3\tan^2\beta - 3\sec^2\beta$ **c)** $5\,\text{sen}^4 2\theta - 5\cos^4 2\theta$

d) $\dfrac{\sec\theta\csc\theta}{\tan\theta+\cot\theta}$ **e)** $\dfrac{(1+\tan\alpha)^2}{\sec^2\alpha}$ **f)** $\dfrac{\cot\mu-\tan\mu}{\csc\mu-\sec\mu}$

Solución:

a) $\cot^2\theta - \csc^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} - \dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$ escribiendo en términos de **sen** θ y **cos** θ.

$= \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\text{sen}^2\theta}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{-(1-\cos^2\theta)}{\text{sen}^2\theta}$ extrayendo "–" como factor común.

$= \dfrac{-\cancel{\text{sen}^2\theta}}{\cancel{\text{sen}^2\theta}}$ sustituyendo $1-\cos^2\theta$, por $\text{sen}^2\theta$.

$= -1$ simplificando.

b) $3\tan^2\beta - 3\sec^2\beta = 3\left(\dfrac{\text{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}\right) - 3\left(\dfrac{1}{\cos^2\beta}\right)$ escribiendo en términos de **sen β** y **cos β**.

$= \dfrac{3\text{sen}^2\beta - 3}{\cos^2\beta}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{-3(1-\text{sen}^2\beta)}{\cos^2\beta}$ extrayendo "−3", como factor común.

$= \dfrac{-3\cancel{\cos^2\beta}}{\cancel{\cos^2\beta}}$ sustituyendo $1-\text{sen}^2\theta$, por $\cos^2\theta$.

$= -3$ simplificando.

c) $5\text{sen}^4 2\theta - 5\cos^4 2\theta = 5(\text{sen}^4 2\theta - \cos^4 2\theta)$ extrayendo 5 como factor común.

$= 5(\text{sen}^2 2\theta - \cos^2 2\theta)(\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$ factorizando (diferencia de cuadrados).

$= 5(\text{sen}^2 2\theta - \cos^2 2\theta)(1)$ sustituyendo $\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta$, por **1**.

$= 5(2\text{sen}^2 2\theta - 1)$ sustituyendo $\cos^2 2\theta$ por $1-\text{sen}^2 2\theta$ y simplificando.

d) $\dfrac{\sec\theta\csc\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}\right)}{\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}}$ escribiendo en términos de **sen θ** y **cos θ**.

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta\ \text{sen}\,\theta}}{\dfrac{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\ \text{sen}\,\theta}}$ efectuando la suma en el numerador y en el denominador.

$= \dfrac{1(\cancel{\cos\theta}\ \cancel{\text{sen}\,\theta})}{\cancel{\cos\theta}\ \cancel{\text{sen}\,\theta}\,(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}$ efectuando la división.

$= \dfrac{1}{1}$ simplificando y sustituyendo $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta$ por **1**.

$= 1$ simplificando.

e) $\dfrac{(1+\tan\alpha)^2}{\sec^2\alpha} = \dfrac{\left(1+\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$ escribiendo en términos de **sen α** y **cos α**.

$= \dfrac{\left(\dfrac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$ efectuando la suma del numerador.

$= \dfrac{\dfrac{(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$ aplicando propiedades de potencias.

$= \dfrac{\cancel{\cos^2\alpha}\,(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)^2}{\cancel{\cos^2\alpha}}$ efectuando la división.

$= (\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2$ simplificando y aplicando propiedad conmutativa para la **+**.

$= \mathbf{sen}^2\,\alpha + 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha$ desarrollando el binomio.

$= 1 + 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$ sustituyendo $\mathbf{sen}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha$ por **1**.

f) $\dfrac{\cot\mu - \tan\mu}{\csc\mu - \sec\mu} = \dfrac{\dfrac{\cos\mu}{\text{sen}\,\mu} - \dfrac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}}{\dfrac{1}{\text{sen}\,\mu} - \dfrac{1}{\cos\mu}}$ escribiendo en términos de **sen** μ y **cos** μ.

$= \dfrac{\dfrac{\cos^2\mu - \text{sen}^2\mu}{\text{sen}\,\mu\cos\mu}}{\dfrac{\cos\mu - \text{sen}\,\mu}{\text{sen}\,\mu\cos\mu}}$ efectuando la suma en el numerador y en el denominador.

$= \dfrac{\cancel{\text{sen}\,\mu}\,\cancel{\cos\mu}\left(\cos^2\mu - \text{sen}^2\mu\right)}{\cancel{\cos\mu}\,\cancel{\text{sen}\,\mu}\left(\cos\mu - \text{sen}\,\mu\right)}$ efectuando la división.

$= \dfrac{\cancel{(\cos\mu - \text{sen}\,\mu)}(\cos\mu + \text{sen}\,\mu)}{\cancel{(\cos\mu - \text{sen}\,\mu)}}$ simplificando y factorizando (diferencia de cuadrados).

$= \cos\mu + \text{sen}\,\mu$ simplificando. ∎

VERIFICACION DE IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

En todos los incisos del ejemplo 3, se ha dado una expresión trigonométrica y se ha pedido que se exprese en términos de seno y coseno, además que se simplifique. El hecho de tomar una expresión trigonométrica y pasarla en términos de seno y coseno, simplificarla, aplicar identidades fundamentales y llevarla a otra expresión equivalente, corresponde a lo que se llama **verificar una identidad trigonométrica**. Entonces **una identidad trigonométrica es una igualdad de dos expresiones trigonométricas equivalentes**. Cuando se pida que se verifique una identidad, se dará una igualdad de dos expresiones trigonométricas. Para verificar una identidad, se debe tomar uno de los miembros de la igualdad (el que se considere más complicado) y llegar al otro lado de la misma. En la mayoría de los casos se comienza expresando en términos de seno y coseno o factorizando o aplicando una de las identidades fundamentales. Si ya está en términos de seno y coseno y no se puede aplicar una de las identidades fundamentales, existe otra forma de verificarla (véase ejemplo 4 h)).

Ejemplo 4 Verificar cada una de las identidades dadas.

a) $\tan\mu\sec\mu\cos\mu = \tan\mu$ **b)** $\csc\beta\sec\beta = \tan\beta + \cot\beta$ **c)** $\dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = 1 + \csc\alpha$

d) $\text{sen}\,2\alpha + \cos 2\alpha\cot 2\alpha = \csc 2\alpha$ **e)** $3 - 4\cos^2 x = (2\text{sen}\,x + 1)(2\text{sen}\,x - 1)$

f) $\dfrac{\text{sen}\,3\mu + \tan 3\mu}{1+\cos 3\mu} = \tan 3\mu$ **g)** $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha\left(\csc^2\alpha - \cot^2\alpha\right)}{\cos\alpha\sec\alpha}$

h) $\dfrac{\text{sen}\,\delta}{1-\cos\delta} = \dfrac{1+\cos\delta}{\text{sen}\,\delta}$ **i)** $\dfrac{\cos\mu}{1-\text{sen}\,\mu} = \sec\mu + \tan\mu$

j) $2\csc^2\mu = \dfrac{1}{1+\cos\mu} + \dfrac{1}{1-\cos\mu}$ **k)** $(\cot\alpha - \csc\alpha)^2 = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

Solución:

a) $\tan\mu \sec\mu \cos\mu = \tan\mu$ — **identidad dada.**

$\tan\mu \sec\mu \cos\mu = \left(\dfrac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\mu}\right)\cos\mu$ — **tomando el miembro de la izquierda** y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \dfrac{\text{sen}\,\mu \cancel{\cos\mu}}{\cos\mu \cancel{\cos\mu}}$ — efectuando el producto.

$= \dfrac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}$ — simplificando.

$= \tan\mu$ — aplicando identidad fundamental 1 y es lo se quiere.

b) $\csc\beta \sec\beta = \tan\beta + \cot\beta$ — **identidad dada.**

$\tan\beta + \cot\beta = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} + \dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta}$ — **tomando el miembro de la derecha** y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \dfrac{\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta\,\text{sen}\,\beta}$ — efectuando la suma.

$= \dfrac{1}{\cos\beta\,\text{sen}\,\beta}$ — sustituyendo $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta$ **por 1.**

$= \left(\dfrac{1}{\cos\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,\beta}\right)$ — por propiedad del producto.

$= \csc\beta \sec\beta$ — aplicando identidades fundamentales (3 y 4) y propiedad conmutativa.

c) $\dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\alpha} = 1 + \csc\alpha$ — **identidad dada.**

$\dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} + \dfrac{\cancel{\text{sen}\alpha}}{\cancel{\text{sen}\alpha}}$ — **tomando el miembro de la izquierda** y separando los términos. Nótese que se pudo haber tomado el miembro derecho y pasarlo en términos de seno y coseno.

$= \csc\alpha + 1$ — simplificando y aplicando identidades.

$= 1 + \csc\alpha$ — por propiedad conmutativa para la suma. Se obtiene lo deseado.

d) $\text{sen}\,2\alpha + \cos 2\alpha \cot 2\alpha = \csc 2\alpha$ — **identidad dada.**

$\text{sen}\,2\alpha + \cos 2\alpha \cot 2\alpha = \text{sen}\,2\alpha + \cos 2\alpha\left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}\right)$ — **tomando el miembro de la izquierda** y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \text{sen}\,2\alpha + \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}$ — efectuando el producto en el segundo término.

$= \dfrac{\text{sen}^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}$ — efectuando la suma.

$= \dfrac{1}{\text{sen}\,2\alpha}$ — aplicando identidad fundamental 6.

$= \csc 2\alpha$ — aplicando identidad 3.

e) $3 - 4\cos^2 x = (2\text{sen}\,x + 1)(2\text{sen}\,x - 1)$ — **identidad dada.**

$(2\text{sen}\,x + 1)(2\text{sen}\,x - 1) = 4\text{sen}^2 x - 1$ — **tomando el miembro de la derecha** y efectuando el producto (producto notable).

$= 4(1 - \cos^2 x) - 1$ — sustituyendo $\text{sen}^2 x$ **por** $1 - \cos^2 x$.

$= 4 - 4\cos^2 x - 1$ — efectuando el producto.

$= 3 - 4\cos^2 x$ — simplificando.

f) $\dfrac{\text{sen } 3\mu + \tan 3\mu}{1+\cos 3\mu} = \tan 3\mu$ — **identidad dada.**

$$\frac{\text{sen } 3\mu + \tan 3\mu}{1+\cos 3\mu} = \frac{\text{sen } 3\mu + \dfrac{\text{sen } 3\mu}{\cos 3\mu}}{1+\cos 3\mu}$$

tomando el miembro de la izquierda y llevándolo en términos de seno y coseno.

$$= \frac{\dfrac{\cos 3\mu \,\text{sen } 3\mu + \text{sen } 3\mu}{\cos 3\mu}}{1+\cos 3\mu}$$

efectuando la suma del numerador.

$$= \frac{\dfrac{\text{sen } 3\mu\,(\cos 3\mu + 1)}{\cos 3\mu}}{1+\cos 3\mu}$$

factorizando el numerador.

$$= \frac{\text{sen } 3\mu\,\cancel{(\cos 3\mu + 1)}}{\cos 3\mu\,\cancel{(1+\cos 3\mu)}}$$

efectuando la división.

$$= \frac{\text{sen } 3\mu}{\cos 3\mu}$$

simplificando.

$$= \tan 3\mu$$

aplicando identidad **1**.

g) $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha\left(\csc^2\alpha - \cot^2\alpha\right)}{\cos\alpha \sec\alpha}$ — **identidad dada.**

$$\frac{\text{sen } \alpha\left(\csc^2\alpha - \cot^2\alpha\right)}{\cos\alpha \sec\alpha} = \frac{\text{sen } \alpha\left(1+\cot^2\alpha - \cot^2\alpha\right)}{\cos\alpha \sec\alpha}$$

tomando el miembro derecho. Recuérdese que $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

$$= \frac{\text{sen } \alpha\,(1)}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}$$

expresando en términos de seno y coseno y simplificando.

$$= \frac{\text{sen } \alpha}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}}$$

efectuando el producto del denominador.

$$= \frac{\text{sen } \alpha}{1}$$

simplificando.

$$= \text{sen } \alpha$$

simplificando.

h) $\dfrac{\text{sen } \delta}{1-\cos\delta} = \dfrac{1+\cos\delta}{\text{sen } \delta}$ — **Identidad dada**; note que ambos miembros están dados en términos de seno y coseno.

$$\frac{\text{sen } \delta}{1-\cos\delta} = \frac{\text{sen } \delta}{1-\cos\delta} \times \frac{1+\cos\delta}{1+\cos\delta}$$

Tomando el miembro de la izquierda, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador. También se pudo haber tomado el miembro derecho y operar con el conjugado del numerador.

$$= \frac{\text{sen } \delta\,(1+\cos\delta)}{1-\cos^2\delta}$$

efectuando los productos.

$$= \frac{\text{sen } \delta\,(1+\cos\delta)}{\text{sen}^2\,\delta}$$

sustituyendo $1-\cos^2\delta$ por $\text{sen}^2\,\delta$.

$$= \frac{1+\cos\delta}{\text{sen } \delta}$$

simplificando.

i) $\dfrac{\cos\mu}{1-\operatorname{sen}\mu} = \sec\mu + \tan\mu$ — **identidad dada.**

$\sec\mu + \tan\mu = \dfrac{1}{\cos\mu} + \dfrac{\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}$ — **tomando el miembro derecho** y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \dfrac{1+\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}$ — efectuando la suma.

$= \dfrac{1+\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}\times\dfrac{1-\operatorname{sen}\mu}{1-\operatorname{sen}\mu}$ — multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador.

$= \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\mu}{\cos\mu\,(1-\operatorname{sen}\mu)}$ — efectuando los productos.

$= \dfrac{\cancel{\cos^2\mu}}{\cancel{\cos\mu}\,(1-\operatorname{sen}\mu)}$ — sustituyendo $1-\operatorname{sen}^2\mu$ por $\cos^2\mu$

$= \dfrac{\cos\mu}{1-\operatorname{sen}\mu}$ — simplificando y obteniendo lo deseado.

j) $2\csc^2\mu = \dfrac{1}{1+\cos\mu} + \dfrac{1}{1-\cos\mu}$ — **identidad dada.**

$\dfrac{1}{1+\cos\mu} + \dfrac{1}{1-\cos\mu} = \dfrac{1-\cos\mu+1+\cos\mu}{(1+\cos\mu)\,(1-\cos\mu)}$ — **tomando el miembro derecho** y efectuando la suma.

$= \dfrac{2}{1-\cos^2\mu}$ — simplificando.

$= \dfrac{2}{\operatorname{sen}^2\mu}$ — sustituyendo $1-\cos^2\mu$ por $\operatorname{sen}^2\mu$.

$= 2\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\mu}\right)^2$ — por propiedades del producto y de potencias.

$= 2\csc^2\mu$ — aplicando identidad fundamental 3.

k) $(\cot\alpha-\csc\alpha)^2 = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ — **identidad dada.**

$(\cot\alpha-\csc\alpha)^2 = \cot^2\alpha - 2(\cot\alpha)(\csc\alpha) + \csc^2\alpha$ — **tomando el miembro de la izquierda** y desarrollando el binomio.

$= \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 2\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ — llevando a términos de seno y coseno.

$= \dfrac{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ — efectuando la suma.

$= \dfrac{(\cos\alpha-1)^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ — factorizando el numerador.

$= \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ — note que $(\cos\alpha-1)^2 = (1-\cos\alpha)^2$.

$= \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}$ — sustituyendo $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$.

$= \dfrac{\cancel{(1-\cos\alpha)^2}}{\cancel{(1-\cos\alpha)}(1+\cos\alpha)}$ — factorizando el denominador.

$= \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ — simplificando y obteniendo lo deseado. ■

Ejemplo 5 Hallar los valores exactos de las razones trigonométricas restantes, utilizando identidades trigonométricas si: $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y $\cot\theta < 0$.

Solución:

Como $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y $\cot\theta < 0$ ($\cot\theta$ negativo), θ está en el IV cuadrante.

Tomando la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y despejando primero para $\operatorname{sen}^2\theta$, y después para $\operatorname{sen}\theta$, se encuentra lo que se necesita. Véase:

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ identidad fundamental que se debe tomar.

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ despejando para $\operatorname{sen}^2\theta$.

$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.

$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ sustituyendo el valor del coseno dado; **nótese que el seno es negativo en el cuarto cuadrante.**

$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}}$ simplificando.

$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ simplificando y es lo que se nos pide.

Para encontrar $\tan\theta$, se toma la identidad $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

Ahora, si se quiere encontrar el valor de $\cot\theta$, es preferible (por facilidad) tomar $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, de donde $\cot\theta = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$.

De igual manera se tiene que:

$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$ y $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$ ∎

Ejercicios 3.1

Aplicando las identidades trigonométricas fundamentales, escribir la primera expresión en términos de la segunda, para un ángulo agudo θ.

1. $\tan\theta$; $\operatorname{sen}\theta$ **2.** $\cot\theta$; $\cos\theta$ **3.** $\sec\theta$; $\operatorname{sen}\theta$ **4.** $\csc\theta$; $\cos\theta$

5. $\tan^2\theta$; $\cos\theta$ **6.** $\cot^2\theta$; $\operatorname{sen}\theta$ **7.** $\sec^2\theta$; $\operatorname{sen}\theta$ **8.** $\csc^2\theta$; $\cos\theta$

Determinar el valor exacto del resto de las razones trigonométricas para el ángulo θ, según las condiciones dadas aplicando identidades.

9. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$ y $\cos\theta = \frac{4}{5}$ **10.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ y $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ **11.** $\cot\theta = -\frac{\sqrt{11}}{5}$ y $\sec\theta = -\frac{6}{\sqrt{11}}$

12. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ y $\cot\theta < 0$ **13.** $\cot\theta = -2$ y $\cos\theta > 0$ **14.** $\csc\theta = \frac{4}{3}$ y $\sec\theta < 0$

Simplificar cada expresión trigonométrica utilizando las identidades fundamentales.

15. $\sec\gamma\cos\gamma$ **16.** $\cot\gamma\tan\gamma$ **17.** $\cot\lambda\sec\lambda$ **18.** $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x$ **19.** $\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$

20. $\frac{\csc^2\beta - 1}{\cot\beta}$ **21.** $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$ **22.** $\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x}$ **23.** $\frac{\operatorname{sen}^2 x + (1+\cos x)^2}{\cos x + 1}$ **24.** $\frac{\operatorname{sen}^3\beta - \cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}$

Verificar cada identidad.

25. $\cot\alpha\tan\alpha = 1$

26. $\operatorname{sen}\beta\cot\beta = \cos\beta$

27. $\tan\beta\operatorname{sen}\beta + \cos\beta = \sec\beta$

28. $\dfrac{\cot^2 x - 1}{1+\cot^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

29. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x\cot x} = 1$

30. $\dfrac{\cos\delta}{1+\operatorname{sen}\delta} + \dfrac{1+\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta} = 2\sec\delta$

31. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\csc\alpha}{\cot\alpha} = \tan\alpha$

32. $\sec\beta + \tan\beta = \dfrac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}$

33. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\phi - \cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi\cos\phi} = \tan\phi - \cot\phi$

34. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\lambda}{1+\cos\lambda} = 1 - \cos\lambda$

35. $\dfrac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x} = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 1}$

36. $\dfrac{\sec\lambda}{\tan\lambda + \cot\lambda} = \operatorname{sen}\lambda$

37. $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = 0$

38. $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

39. $\dfrac{1-\cot^2\psi}{\tan^2\psi - 1} = \cot^2\psi$

40. $\dfrac{\cos\mu}{1+\operatorname{sen}\mu} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}$

41. $\dfrac{\csc\mu + 1}{\cot\mu} = \dfrac{\cot\mu}{\csc\mu - 1}$

42. $\dfrac{1-\operatorname{sen}2\varphi}{1+\operatorname{sen}2\varphi} = (\tan 2\varphi - \sec 2\varphi)^2$

43. $\dfrac{1+(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{\operatorname{sen} x} = 2(\csc x - \cos x)$

44. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\beta}{1+\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta + 2\operatorname{sen}\beta + 1}$

45. $\dfrac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = 2\csc\beta$

46. $\dfrac{(\operatorname{sen}2\beta - \cos 2\beta)^2}{\cos 2\beta} = \sec 2\beta - 2\operatorname{sen}2\beta$

47. $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta} = \dfrac{\cot\beta}{\csc\beta - 1}$

48. $\dfrac{\cot 3\theta - 1}{1+\cot 3\theta} = \dfrac{1-\tan 3\theta}{\tan 3\theta + 1}$

49. $\operatorname{sen}^4\lambda + \cos^2\lambda = \cos^4\lambda + \operatorname{sen}^2\lambda$

50. $\csc 2\beta - \sec 2\beta = \dfrac{\cot 2\beta - \tan 2\beta}{\operatorname{sen}2\beta + \cos 2\beta}$

51. $(\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda)^4 = 1$

52. $1 + \operatorname{sen}\beta\cos\beta = \dfrac{\operatorname{sen}^3\beta - \cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}$

53. $(\sec\lambda + \tan\lambda)^4(\sec\lambda - \tan\lambda)^4 = 1$

54. $x^2\cot^2\alpha - y^2\csc^2\alpha + y^2\cot^2\alpha - x^2\csc^2\alpha = -y^2 - x^2$

55. $(1+\operatorname{sen}\lambda)^2(1-\operatorname{sen}\lambda)^2 = \cos^4\lambda$

56. $\dfrac{\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{2-\cos\theta}{\cos\theta + 1}$

57. $\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

58. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2} = \dfrac{1}{2}\sec\theta$

59. $\dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = \operatorname{sen}^2\theta$

60. $\dfrac{2\cos^2\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

61. $\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \sec\theta$

62. $\dfrac{\cos\alpha + \tan\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot\alpha + \sec\alpha$

63. $\dfrac{\cot\theta + 1}{\csc\theta} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

64. $1 - \operatorname{sen}\delta = \dfrac{\cos^2\delta}{1+\operatorname{sen}\delta}$

65. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

66. $\dfrac{1+\cos\lambda}{1-\cos\lambda} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2}$

67. $\dfrac{1+\sec\phi}{\operatorname{sen}\phi + \tan\phi} = \csc\phi$

68. $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$

69. $\dfrac{\csc^4\gamma - 1}{\cot^2\gamma} = 2 + \cot^2\gamma$

70. $\dfrac{\tan^2\kappa - 1}{1-\cot^2\kappa} = \tan^2\kappa$

71. $\dfrac{\tan\beta}{\operatorname{sen}\beta - 2\tan\beta} = \dfrac{1}{\cos\beta - 2}$

72. $\dfrac{\tan\beta}{\operatorname{sen}\beta + 2\tan\beta} = \dfrac{1}{\cos\beta + 2}$

73. $\dfrac{\tan\mu + \cot\rho}{\tan\mu\cot\rho} = \tan\rho + \cot\mu$

74. $\dfrac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \dfrac{1-\tan x\tan y}{\tan x + \tan y}$

3.2 IDENTIDADES DE SUMA, DIFERENCIA DE ANGULOS Y COFUNCIONES

Las identidades básicas o fundamentales estudiadas anteriormente, involucran únicamente un ángulo. En esta sección se considerarán identidades en las que intervienen dos ángulos.

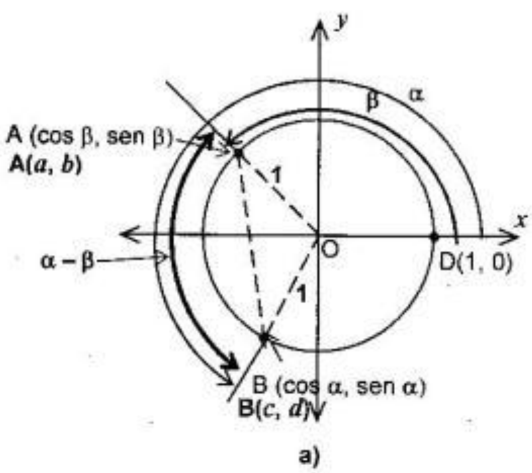
Se inicia con la identidad que se refiere a la diferencia para el coseno, ya que las otras se demuestran a partir de ésta en particular.

$$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.}$$

Demostración de la identidad antes mencionada

Considérese los ángulos α y β que están en el intervalo $]0,2\pi[$ y $0<\beta<\alpha$. La identidad antes mencionada, se cumple para todo número real y ángulos medidos en grados o radianes.

Observando el círculo unitario de la figura 1 a), los ángulos α y β en posición estándar, se tiene el triángulo AOB. Si ahora se gira este triángulo en sentido a favor de las manecillas del reloj con respecto al origen, de tal manera que el punto A coincida con el punto D, entonces el lado terminal que contiene al punto B, estará en el lado terminal que contiene al punto C (ver fig. 1 b).



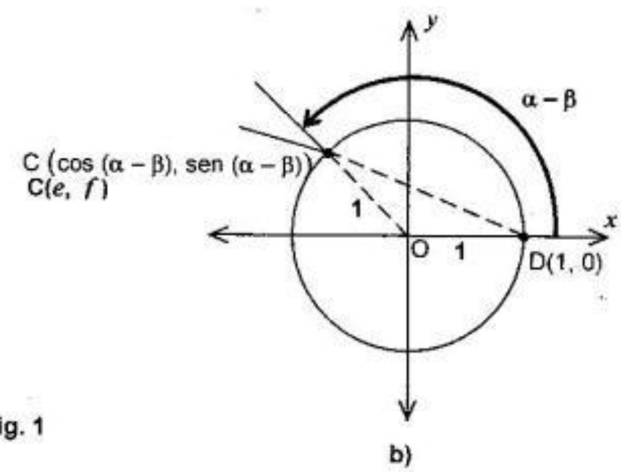


fig. 1

En la rotación realizada anteriormente, se tiene que d(A, B) = d(C, D). Por comodidad se asume que: A(cos β, sen β) = (a, b), B(cos α, sen α) = (c, d) y C(cos (α – β), sen (α – β)) = (e, f).

Luego se tiene que $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}=\sqrt{(1-e)^2+(0-f)^2}$ aplicando la fórmula de distancia: d(A, B) = d(C, D).

o $(c-a)^2+(d-b)^2=(1-e)^2+f^2$ elevando al cuadrado ambos lados.

$c^2-2ac+a^2+d^2-2bd+b^2=1-2e+e^2+f^2$ desarrollando los binomios.

$(c^2+d^2)+(a^2+b^2)-2ac-2bd=1-2e+(e^2+f^2)$ asociando.

$1+1-2ac-2bd=1-2e+1$ sustituyendo $c^2+d^2=a^2+b^2=e^2+f^2=1$ ya que los puntos A, B y C están sobre el círculo unitario.

$e=ca+db$ simplificando y conmutando factores.

Luego $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. sustituyendo e, a, c, b y d por cos (α – β), cos β, cos α, sen β, y sen α respectivamente.

■

Si se reemplaza β por $-\beta$, en la última ecuación (identidad coseno de una diferencia) y utilizando identidades para ángulos negativos (enunciadas en el capitulo anterior), se obtiene la identidad del coseno para la suma.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta))$ — expresando en forma equivalente.

$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$ — aplicando la identidad, el coseno de la diferencia.

$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ — aplicando la identidad del ángulo negativo.

Por tanto $\quad$ **$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.**

Con el propósito de obtener las otras identidades de suma y diferencia principalmente para el seno y la tangente, se estudian otras, llamadas **cofunciones** a partir de la identidad coseno de una diferencia.

Retomando la identidad $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ y sustituyendo α por $\frac{\pi}{2}$ se tiene:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta$ — aplicando la identidad coseno de una diferencia.

$= (0)\cos\beta + (1)\operatorname{sen}\beta$ — determinando el valor del coseno y seno indicado.

$= \operatorname{sen}\beta$ — simplificando.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \operatorname{sen}\beta$ — **concluyendo acerca de la primera cofunción.**

Esta última igualdad es válida para cualquier número real β, o el ángulo dado en radianes. Cuando β está dado en grados, se debe sustituir $\frac{\pi}{2}$ por 90° y se tiene que $\cos(90° - \beta) = \operatorname{sen}\beta$.

Retomando nuevamente $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ **y** sustituyendo β por $\frac{\pi}{2}-\alpha$, se obtiene:

$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ — aplicando identidad de suma del coseno.

$= (0)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + (1)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ — determinando los valores del coseno y seno.

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ — simplificando.

Obteniendo que: $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Esta última también es válida para cualquier número real α o ángulo dado en radianes.

Véase también que $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ — aplicando identidad fundamental.

$= \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ — aplicando cofunción de seno y coseno.

$= \cot\alpha$ — aplicando identidades fundamentales.

Par tanto $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$

Se tiene ahora, $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ aplicando identidad fundamental.

$= \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$ aplicando cofunción.

$= \csc\alpha$ aplicando identidad fundamental.

En conclusión, se generaliza las siguientes cofunciones:

1. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ **2.** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{sen}\,\alpha$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ **4.** $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

5. $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\csc\alpha$ **6.** $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\alpha$

Todas las anteriores son válidas para todo número α o un ángulo en radianes. De igual manera, para cada una se puede sustituir $\frac{\pi}{2}$ por 90°.

Utilizando éstas últimas cofunciones, se llega a otras identidades, véase:

$\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]$ aplicando cofunciones.

$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-(-\beta)\right]$ aplicando propiedad distributiva y asociativa.

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{sen}(-\beta)$ aplicando identidad **$\cos(\alpha-\beta)$**.

$=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\beta$ aplicando cofunción y ángulo negativo

Concluyendo que **$\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\beta$** **identidad seno de la resta de dos ángulos.**

Mostrando ahora para sen $(\alpha+\beta)$.

$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,(\alpha-(-\beta))$ escribiendo de forma equivalente.

$=\text{sen}\,\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\,\text{sen}\,(-\beta)$ aplicando la identidad **$\text{sen}\,(\alpha-\beta)$**.

$=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ aplicando la identidad del ángulo negativo.

Luego **$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$** **identidad seno de la suma.**

Ahora,

$\tan(\alpha-\beta)$ $=\frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ aplicando identidad fundamental.

$=\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ aplicando identidad del seno y del coseno para la resta en el numerador y en el denominador.

$=\dfrac{\frac{\text{sen}\,\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}-\frac{\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}+\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ dividiendo por $\cos\alpha\cos\beta$ el numerador y denominador.

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$ simplificando y escribiendo de forma equivalente.

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$ simplificando y escribiendo de forma equivalente.

Luego $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ para todos los ángulos o números reales α y β

De forma similar si se sustituye β por $-\beta$, se prueba que $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

Enunciando las identidades que se han demostrado hasta este momento:

Identidades de la suma de dos ángulos

1. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

2. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

3. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

4. $\sec(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

5. $\csc(\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$

6. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

Identidades de la resta de dos ángulos

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

2. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

3. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

4. $\sec(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

5. $\csc(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$

6. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{1 + \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$

Los ejercicios que se presentan a continuación, son similares a los planteados en la sección anterior, ahora lo nuevo es la aplicación de las identidades enunciadas en ésta.

Ejemplo 1 Verificar cada identidad.

a) $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

c) $\cos(\beta + 2k\pi) = \cos\beta$, con $k \in Z$

d) $\cot(\beta + \pi) = \cot\beta$

e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$

f) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

g) $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{1 + \cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha}$

h) $\sec(\theta + \lambda) = \dfrac{\csc\theta\csc\lambda}{\cot\theta\cot\lambda - 1}$

i) $\tan\left(\varphi - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cot\varphi$

j) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

k) $\dfrac{1}{\cot\theta - \cot\mu} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\mu}{\operatorname{sen}(\mu - \theta)}$

Solución:

a) $\text{sen}\,(\alpha + 2\pi) = \text{sen}\,\alpha$ — **identidad dada**.

$\text{sen}\,(\alpha + 2\pi) = \text{sen}\,\alpha \cos 2\pi + \cos\alpha\,\text{sen}\,2\pi$ — tomando el lado izquierdo y aplicando identidad **sen (α+β)**.

$= \text{sen}\,\alpha\ (1) + \cos\alpha\ (0)$ — sustituyendo los valores para **sen 2π y cos 2π**

$= \text{sen}\,\alpha$ — simplificando.

b) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ — **identidad dada**.

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$ — tomando el lado derecho y aplicando identidad **tan (α+β)**.

$= \dfrac{1+\tan\alpha}{1-(1)\tan\alpha}$ — sustituyendo el valor de $\tan\frac{\pi}{4}$.

$= \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ — simplificando.

c) $\cos\,(\beta + 2k\pi) = \cos\beta,\ \text{ con } k \in Z$ — **identidad dada**.

$\cos\,(\beta + 2k\pi) = \cos\beta\cos 2k\pi - \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,2k\pi$ — tomando el lado izquierdo y aplicando identidad **cos (α+β)**.

$= \cos\beta\,(1) - \text{sen}\,\beta\,(0)$ — sustituyendo el valor de **sen 2kπ y cos 2kπ** para, cualquier $k \in Z$.

$= \cos\beta$ — simplificando.

d) $\cot\,(\beta + \pi) = \cot\beta$ — **identidad dada**.

$\cot\,(\beta + \pi) = \dfrac{1-\tan\beta\,\tan\pi}{\tan\beta+\tan\pi}$ — *tomando el lado izquierdo y aplicando identidad* ***cot (α+β)***.

$= \dfrac{1-\tan\beta\,(0)}{\tan\beta + 0}$ — sustituyendo por el valor de **tan π**.

$= \dfrac{1}{\tan\beta}$ — simplificando.

$= \cot\beta$ — *aplicando identidad.*

e) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)$ — **identidad dada**.

$\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right) = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\cos\beta + \cos\dfrac{\pi}{2}\,\text{sen}\,\beta$ — tomando el lado derecho y aplicando identidad **sen(α + β)**.

$= (1)\cos\beta + (0)\,\text{sen}\,\beta$ — sustituyendo el valor de $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2}$.

$= \cos\beta$ — simplificando.

$= \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$ — por cofunciones.

f) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ **identidad dada**.

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$

tomando el lado izquierdo y aplicando **sen (α+β) y sen (α – β)**.

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

aplicando propiedad distributiva.

$=2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ simplificando.

g) $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$ **identidad dada**.

$\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}$ tomando el miembro de la izquierda y llevándolo en términos de seno y coseno.

$=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$ aplicando identidad de seno y coseno de la resta.

$=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}+\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}}{\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\beta}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\cos\alpha\cancel{\operatorname{sen}\beta}}{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\operatorname{sen}\beta}}}$ dividiendo por **sen α sen β** el numerador y denominador.

$=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}+1}{\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$ simplificando y escribiendo de forma equivalente.

$=\dfrac{1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$ aplicando propiedad conmutativa e identidades fundamentales.

h) $\sec(\theta+\lambda)=\dfrac{\csc\theta\csc\lambda}{\cot\theta\cot\lambda-1}$ **identidad dada**.

$\sec(\theta+\lambda)=\dfrac{1}{\cos(\theta+\lambda)}$ tomando el miembro de la izquierda y llevándolo en términos de coseno.

$=\dfrac{1}{\cos\theta\cos\lambda-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}$ aplicando identidad de coseno de la suma.

$=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}}{\dfrac{\cos\theta\cos\lambda}{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}-\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}}{\cancel{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}}}$ dividiendo por **sen θ sen λ** el numerador y denominador.

$=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\lambda}}{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}-1}$ escribiendo de forma equivalente y simplificando.

$=\dfrac{\csc\theta\csc\lambda}{\cot\theta\cot\lambda-1}$ aplicando identidades fundamentales.

i) $\tan\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot\varphi$ **identidad dada.**

$$\tan\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

expresando en términos de seno y coseno. Nótese que no se puede *utilizar la identidad* ***tan (α − β), ya que tan*** $\frac{3\pi}{2}$ *no está definida.*

$$= \frac{\text{sen}\,\varphi\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\varphi\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}}{\cos\varphi\cos\frac{3\pi}{2} + \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}}$$

aplicando identidades **sen (α − β) y cos (α − β)**.

$$= \frac{\text{sen}\,\varphi\,(0) - \cos\varphi\,(-1)}{\cos\varphi\,(0) + \text{sen}\,\varphi\,(-1)}$$

sustituyendo por el valor **sen** $\frac{3\pi}{2}$ **y cos** $\frac{3\pi}{2}$.

$$= \frac{\cos\varphi}{-\text{sen}\,\varphi}$$

simplificando.

$$= -\cot\varphi$$

aplicando identidad fundamental.

j) $\text{sen}\,(\alpha - \beta)\,\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$ **identidad dada.**

$\text{sen}\,(\alpha - \beta)\,\text{sen}\,(\alpha + \beta) = (\text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)$ tomando el lado izquierdo y aplicando **sen (α − β) y sen (α+β)**.

$= (\text{sen}\,\alpha\cos\beta)^2 - (\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)^2$ aplicando álgebra (productos notables).

$= \text{sen}^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta$ aplicando álgebra (propiedad de potencia).

$= \text{sen}^2\alpha\,(1 - \text{sen}^2\beta) - (1 - \text{sen}^2\alpha)\,\text{sen}^2\beta$ aplicando $\mathbf{\cos^2\alpha = 1 - sen^2\beta}$.

$= \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta$ por propiedad distributiva.

$= \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$ simplificando.

k) $\dfrac{1}{\cot\theta - \cot\mu} = \dfrac{\text{sen}\theta\,\text{sen}\mu}{\text{sen}(\mu - \theta)}$ **identidad dada.**

$$\frac{\text{sen}\theta\,\text{sen}\mu}{\text{sen}(\mu - \theta)} = \frac{\text{sen}\theta\,\text{sen}\mu}{\text{sen}\mu\cos\theta - \cos\mu\,\text{sen}\theta}$$

tomando el miembro de la derecha y aplicando **sen (μ − θ)** en el denominador.

$$= \frac{\dfrac{\cancel{\text{sen}\theta\,\text{sen}\mu}}{\cancel{\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\mu}}}{\dfrac{\cancel{\text{sen}\mu}\cos\theta}{\text{sen}\theta\,\cancel{\text{sen}\mu}} - \dfrac{\cos\mu\,\cancel{\text{sen}\theta}}{\cancel{\text{sen}\theta}\,\text{sen}\mu}}$$

dividiendo por **sen θ sen μ** el numerador y denominador.

$$= \frac{1}{\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} - \dfrac{\cos\mu}{\text{sen}\mu}}$$

simplificando.

$$= \frac{1}{\cot\theta - \cot\mu}$$

aplicando identidad fundamental. ■

Estas identidades también son útiles para determinar el valor exacto de razones trigonométricas para otros ángulos, que se les llama ángulos especiales, ya que se pueden expresar como la suma o diferencia de dos ángulos especiales. El siguiente ejemplo muestra lo dicho anteriormente.

Ejemplo 2 Determinar el valor exacto en cada inciso.

a) $\cos 75°$ **b)** $\text{sen}\frac{\pi}{12}$ **c)** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **d)** $\csc 15°$

e) $\sec 105°$ **f)** $\text{sen } 165°$ **g)** $\text{sen}\frac{19\pi}{12}$ **h)** $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Solución:

a) $\cos 75° = \cos(45° + 30°)$ expresando 75° como la suma de dos ángulos especiales.

$= \cos 45° \cos 30° - \text{sen } 45° \text{ sen } 30°$ aplicando identidad **cos (α + β)**.

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ efectuando los productos.

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ efectuando la suma.

b) $\text{sen}\frac{\pi}{12} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ descomponiendo $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ resta de ángulos especiales.

$= \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\text{ sen}\frac{\pi}{6}$ aplicando identidad **sen (α − β)**.

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ efectuando los productos.

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ efectuando la suma.

c) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ descomponiendo $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ suma de ángulos especiales.

$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{3}\text{ sen}\frac{\pi}{4}$ aplicando identidad **cos (α + β)**.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ efectuando los productos.

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ efectuando la suma.

d) $\csc 15° = \frac{1}{\text{sen}15°}$ aplicando identidad fundamental.

$= \frac{1}{\text{sen}(45° - 30°)}$ expresando 15° como la diferencia de ángulos especiales.

$= \frac{1}{\text{sen } 45° \cos 30° - \cos 45° \text{ sen } 30°}$ aplicando identidad **sen (α − β)**.

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ simplificando.

$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$ racionalizando y simplificando.

e) $\sec 105° = \dfrac{1}{\cos 105°}$ aplicando identidad fundamental.

$= \dfrac{1}{\cos(60° + 45°)}$ expresando **105° como la suma** de dos ángulos especiales.

$= \dfrac{1}{\cos 60° \cos 45° - \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45°}$ aplicando identidad **cos (α + β)**.

$= \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ simplificando.

$= -\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ racionalizando y simplificando.

f) $\operatorname{sen} 165° = \operatorname{sen} 15°$ Si se ubica el ángulo 165° en posición normal, éste está en el segundo cuadrante y el seno en éste es positivo. El **ángulo de referencia es 15°**, lo que simplifica el ejercicio.

$= \operatorname{sen}(45° - 30°)$ escribiendo **15° como la resta** de dos ángulos especiales.

$= \operatorname{sen} 45° \cos 30° - \cos 45° \operatorname{sen} 30°$ aplicando identidad **sen (α − β)**.

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ efectuando la suma.

g) $\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12} = -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$

Si se ubica el ángulo $\frac{19\pi}{12}$ en posición normal, éste está en el cuarto cuadrante y el seno ahí es negativo, luego el ángulo de referencia es $\frac{5\pi}{12}$.

$= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ descomponiendo $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ (suma de ángulos especiales).

$= -(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ aplicando identidad **sen** $(\alpha + \beta)$.

$= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ aplicando propiedad distributiva.

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ efectuando los productos.

$= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ efectuando la suma.

h) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$ por identidad fundamental.

$= \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{12}}$ por identidad para ángulos negativos.

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$ expresando $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ (como diferencia de ángulos especiales).

$= \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}$ aplicando identidad **cos** $(\alpha - \beta)$.

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}$ sustituyendo por el valor de cada expresión indicada.

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ simplificando

$= \sqrt{6} - \sqrt{2}$ racionalizando y simplificando. ■

Ejemplo 3 Escribir en forma equivalente utilizando identidades fundamentales.

a) $\operatorname{sen} 41° \cos 25° - \cos 41° \operatorname{sen} 25°$

b) $\cos 52° \cos 34° - \operatorname{sen} 52° \operatorname{sen}(-34°)$

c) $\operatorname{sen}(-57°) \cos 13° - \cos 57° \operatorname{sen}(-13°)$

d) $\dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}}$

e) $\dfrac{\tan 52° + \tan 33°}{1 - \tan 52° \tan 33°}$

f) $\dfrac{1 + \tan 20° \tan 43°}{\tan 20° - \tan 43°}$

Solución:

a) $\operatorname{sen} 41° \cos 25° - \cos 41° \operatorname{sen} 25° = \operatorname{sen}(41° - 25°)$ aplicando identidad $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

$= \operatorname{sen} 16°$ efectuando la resta. Nótese que no es un ángulo especial.

b) $\cos 52° \cos 34° - \operatorname{sen} 52° \operatorname{sen}(-34°) = \cos 52° \cos(-34°) - \operatorname{sen} 52° \operatorname{sen}(-34°)$

expresando de forma equivalente, ya que $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

$= \cos(52° + (-34°))$ aplicando identidad $\cos(\alpha + \beta)$.

$= \cos 18°$ efectuando la suma.

c) $\operatorname{sen}(-57°) \cos 13° - \cos 57° \operatorname{sen}(-13°) = \operatorname{sen}(-57°)\cos(-13°) - \cos(-57°)\operatorname{sen}(-13°)$

expresando de forma equivalente, ya que $\cos(-\beta) = \cos\beta$.

$= \operatorname{sen}((-57°) - (-13°))$ aplicando identidad $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

$= \operatorname{sen}(-44°)$ efectuando la suma.

$= -\operatorname{sen}(44°)$ aplicando identidad $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$.

d) $\dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{7}\right)}$ aplicando identidad $\cos(\alpha + \beta)$.

$= \dfrac{1}{\cos\frac{31\pi}{35}}$ simplificando.

$= \sec\dfrac{31\pi}{35}$ aplicando identidad elemental.

$= -\sec\dfrac{4\pi}{35}$ tomando el ángulo de referencia.

e) $\dfrac{\tan 52° + \tan 33°}{1 - \tan 52° \tan 33°} = \tan(52° + 33°)$ aplicando identidad $\tan(\alpha + \beta)$.

$= \tan 85°$ efectuando la suma.

f) $\dfrac{1 + \tan 20° \tan 43°}{\tan 20° - \tan 43°} = \dfrac{1}{\dfrac{\tan 20° - \tan 43}{1 + \tan 20° \tan 43°}}$ expresando de forma equivalente.

$= \dfrac{1}{\tan(20° - 43°)}$ aplicando identidad $\tan(\alpha - \beta)$.

$= \dfrac{1}{\tan(-23°)}$ simplificando.

$= \cot(-23°)$ aplicando identidad fundamental.

$= -\cot 23°$ aplicando identidad de ángulos negativos.

■

Ejemplo 4 Determinar el valor exacto en cada inciso, utilizando identidades fundamentales.

a) sen 32° cos 28° + cos 32° sen 28°

b) cos 75° cos 30° + sen 75° sen 30°

c) $\dfrac{1}{\textbf{sen}(-13°)\cos 17° - \textbf{sen } 17° \cos 13°}$

d) $\dfrac{\tan 70° - \tan 10°}{1+\tan 70° \tan 10°}$

Solución:

a) $\text{sen } 32° \cos 28° + \cos 32° \text{ sen } 28° = \text{sen }(32° + 28°)$ — aplicando identidad **sen (α + β)**.

$= \text{sen } 60°$ — simplificando.

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — encontrando el valor del **sen 60°**.

b) $\cos 75° \cos 30° + \text{sen } 75° \text{ sen } 30° = \cos (75° - 30°)$ — aplicando identidad **cos (α − β)**.

$= \cos 45°$ — simplificando.

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — encontrando el valor del **cos 45°**.

c) $\dfrac{1}{\text{sen}(-13°)\cos 17° - \text{sen } 17° \cos 13°} = \dfrac{1}{\text{sen}(-13°)\cos 17° - \text{sen } 17° \cos(-13°)}$ — forma equivalente.

$= \dfrac{1}{\text{sen}(-13° - 17°)}$ — aplicando identidad **sen (α − β)**.

$= \dfrac{1}{\text{sen}(-30°)}$ — efectuando la suma.

$= -\dfrac{1}{\text{sen } 30°}$ — por identidad para ángulos negativos.

$= -2$ — indicando el valor del **sen 30°**.

d) $\dfrac{\tan 70° - \tan 10°}{1+\tan 70° \tan 10°} = \tan(70° - 10°)$ — aplicando identidad **tan (α − β)**.

$= \tan 60°$ — simplificando.

$= \sqrt{3}$ — indicando el valor del **tan 60°**. ■

Ejemplo 5 Si **sen** $\alpha = \dfrac{4}{5}$, con α que está en el II cuadrante y **cos** $\beta = \dfrac{3}{7}$ con $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$, determinar **el valor exacto** de:

a) sen (α + β) **b)** cos (α + β) **c)** sen (α − β) **d)** tan (α − β)

e) El cuadrante donde está α + β **f)** El cuadrante donde está α − β

Solución:

Para determinar el valor exacto en este tipo de problemas, es de gran ayuda ubicar tanto el ángulo α como el ángulo β en posición normal. Luego se debe completar el triángulo rectángulo que contiene los ángulos de referencias respectivos, para poder encontrar los valores de las razones trigonométricas requeridas. No olvidar el análisis del signo negativo, dependiendo del cuadrante que contiene al ángulo según la razón trigonométrica dada. Ver fig. 2.

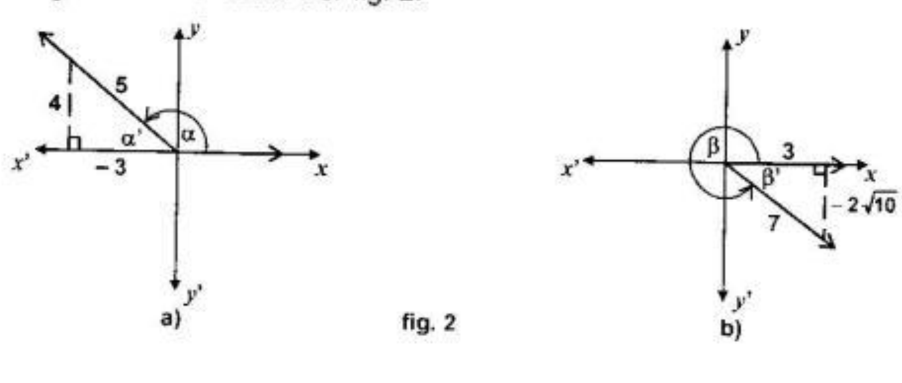


fig. 2

Luego

a) $\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ — aplicando la identidad **sen (α + β)**.

$= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{7}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ — sustituyendo el valor para **sen α y cos β** (dados) y el valor para **cos α y sen β** (calculados).

$= \frac{12}{35} + \frac{6\sqrt{10}}{35}$ — simplificando.

$= \frac{12+6\sqrt{10}}{35}$ — **note que el resultado de sen (α + β) es positivo.**

b) $\cos\,(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$ — aplicando la identidad **cos (α + β)**.

$= -\frac{3}{5}\left(\frac{3}{7}\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ — sustituyendo el valor para **sen α , cos β, cos α y sen β.**

$= -\frac{9}{35} + \frac{8\sqrt{10}}{35}$ — simplificando.

$= \frac{-9+8\sqrt{10}}{35}$ — **note que el resultado de cos (α + β) es positivo.**

c) $\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ — aplicando identidad **sen (α − β)**.

$= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$ — sustituyendo el valor para **sen α, cos β, cos α y sen β.**

$= \frac{12}{35} - \frac{6\sqrt{10}}{35}$ — simplificando.

$= \frac{12-6\sqrt{10}}{35}$ — **note que el resultado de sen (α − β) es negativo.**

d) $\tan\,(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ — aplicando identidad **tan (α − β)**.

$$= \frac{-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)}$$ — sustituyendo por el valor de **tan α y tan β**, que debe calcularse.

$$= \frac{-\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{10}}{3}}{1+\frac{4}{3}\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)}$$ — simplificando.

$$= \frac{\frac{-4+2\sqrt{10}}{3}}{\frac{9+8\sqrt{10}}{9}}$$ — efectuando la suma.

$$= \frac{-12+6\sqrt{10}}{9+8\sqrt{10}}$$ — simplificando. Nótese que este resultado es positivo y que también se puede racionalizar.

e) El cuadrante donde está $\alpha + \beta$

Para identificar el cuadrante donde se encuentra $\alpha + \beta$, es necesario identificar el signo de dos razones trigonométricas: seno, coseno, tangente y cotangente. Con las razones seno y cosecante o con las razones coseno y secante no se logra nada, ya que para estas parejas su signo coincide en cada cuadrante.

Del inciso **a)** se nota que el **sen $(\alpha + \beta)$ es positivo** y del inciso **b)** que el **cos $(\alpha + \beta)$ es positivo** y el cuadrante donde el seno es positivo y el coseno es positivo es el **primero**, luego $\alpha + \beta$ **está en el primer cuadrante ($(\alpha + \beta) \in$ I cuadrante).**

f) El cuadrante donde está $\alpha - \beta$

De igual manera se ve que del inciso **c)**, se obtiene que el **sen $(\alpha - \beta)$ es negativo** y del inciso **d)** que la **tan $(\alpha - \beta)$ es positiva** y el cuadrante donde el seno es negativo y la tangente es positiva es el **tercero**, luego $\alpha - \beta$ **está en el tercer cuadrante ($(\alpha - \beta) \in$ III cuadrante).** ■

Ejercicios 3.2

Verificar cada identidad.

1. $\dfrac{\cos(\mu - \phi)}{\cos\mu \operatorname{sen}\phi} = \tan\mu + \cot\phi$
2. $\cot\phi - \cot\mu = \dfrac{\operatorname{sen}(\mu - \phi)}{\operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\phi}$
3. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$
4. $\cot(2\alpha - 3\beta) = \dfrac{\cot 2\alpha \cot 3\beta + 1}{\cot 3\beta - \cot 2\alpha}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$
7. $\cot\mu - \tan\phi = \dfrac{\cos(\mu + \phi)}{\operatorname{sen}\mu \cos\phi}$
8. $\tan\mu - \tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}(\mu - \phi)}{\cos\mu \cos\phi}$
9. $\tan\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan 2\alpha + 1}{1 - \tan 2\alpha}$
10. $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$
11. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \tan\beta$
12. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = -\tan\beta$
13. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \cot\beta$
14. $\sec(2\alpha + 2\beta) = \dfrac{\csc 2\alpha \csc 2\beta}{\cot 2\alpha \cot 2\beta - 1}$
15. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
16. $1 + \cot\mu\tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}(\mu + \phi)}{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}$
17. $\tan\mu + \tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}(\mu + \phi)}{\cos\mu\cos\phi}$
18. $\cot\mu + \tan\phi = \dfrac{\cos(\mu - \phi)}{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}$
19. $\dfrac{\cos(\theta + \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} = \dfrac{1 - \tan\theta\tan\varphi}{1 + \tan\theta\tan\varphi}$
20. $\sec(\alpha - \beta) = \dfrac{\sec\alpha \sec\beta}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$
21. $1 - \tan\mu\tan\phi = \dfrac{\cos(\mu + \phi)}{\cos\mu\cos\phi}$
22. $\csc(\alpha - \beta) = \dfrac{\csc\alpha \sec\beta}{1 - \cot\alpha\tan\beta}$
23. $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$
24. $\dfrac{\sec(\alpha - \beta)}{\csc(\alpha + \beta)} = \dfrac{1 + \cot\alpha\tan\beta}{\cot\alpha + \tan\beta}$
25. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$
26. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$
27. $\dfrac{\operatorname{sen}\mu\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}(\phi - \mu)} = \dfrac{1}{\cot\mu\tan\phi - 1}$

Simplificar utilizando identidades de suma o diferencia.

28. $\cos(30° - \theta)$
29. $\operatorname{sen}(\phi - 30°)$
30. $\operatorname{sen}(\theta + 180°)$
31. $\cos(\beta + 360°)$
32. $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$
33. $\cot\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$
34. $\sec\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$
35. $\csc(\phi + 2\pi)$
36. $\operatorname{sen}(\alpha + 4\pi)$
37. $\cos(\alpha + 6\pi)$
38. $\tan(\alpha + \pi)$
39. $\cot(\alpha + 3\pi)$

Determinar el valor exacto.

40. $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}$ 41. $\cot 30° + \operatorname{sen} 225°$ 42. $\cos 120° - \operatorname{sen} 135°$ 43. $\cos\frac{3\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$

44. $\sec 75°$ 45. $\operatorname{sen} 75°$ 46. $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ 47. $\cos\frac{\pi}{12}$ 48. $\tan 195°$ 49. $\sec 165°$

50. $\cos 255°$ 51. $\csc 285°$ 52. $\cot 345°$ 53. $\tan 435°$ 54. $\operatorname{sen}\frac{37\pi}{12}$ 55. $\csc\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$

Escribir en forma equivalente utilizando identidades fundamentales.

56. $\cos 83° \cos 42° + \operatorname{sen} 83° \operatorname{sen} 42°$

57. $\cos 53° \cos 31° + \operatorname{sen} 53° \operatorname{sen} 31°$

58. $\operatorname{sen} 14° \cos 22° - \cos 14° \operatorname{sen} 22°$

59. $\cos 25° \cos 43° - \operatorname{sen} 25° \operatorname{sen}(-43°)$

60. $\operatorname{sen}(-75°) \cos 31° - \cos 75° \operatorname{sen}(-31°)$

61. $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{8}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}$

62. $\dfrac{\tan 25° + \tan 30°}{1-\tan 25° \tan 30°}$

63. $\dfrac{1+\tan 40° \tan 20°}{\tan 40° - \tan 20°}$

64. $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{7}}$

65. $\dfrac{1}{\cos 56° \cos 32° + \operatorname{sen} 56° \operatorname{sen} 32°}$

Determinar el valor exacto en cada inciso, utilizando identidades fundamentales:

66. $\cos 73° \cos 43° + \operatorname{sen} 73° \operatorname{sen} 43°$

67. $\cos 37° \cos 8° - \operatorname{sen} 37° \operatorname{sen} 8°$

68. $\operatorname{sen} 21° \cos 39° + \cos 21° \operatorname{sen} 39°$

69. $\cos 72° \cos 42° + \operatorname{sen} 72° \operatorname{sen} 42°$

70. $\operatorname{sen} 23° \cos 37° + \cos 23° \operatorname{sen} 37°$

71. $\cos 76° \cos 16° + \operatorname{sen} 76° \operatorname{sen} 16°$

72. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(-20°)\cos 10° - \operatorname{sen} 10° \cos 20°}$

73. $\dfrac{\tan 70° - \tan 25°}{1+\tan 70° \tan 25°}$

74. $\dfrac{1+\tan 55° \tan 25°}{\tan 55° - \tan 25°}$

75. $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{15}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}}$

76. $\dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{28}\cos\frac{\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{28}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}$

77. $\dfrac{1}{\cos 78° \cos 48° + \operatorname{sen} 78° \operatorname{sen} 48°}$

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$, $\sec(\alpha+\beta)$, $\cot(\alpha+\beta)$ y el cuadrante donde se encuentra $\alpha-\beta$ y $\alpha+\beta$, según las condiciones dadas.

78. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{4}$, con α que está en el II cuadrante y $\cos\beta=-\frac{1}{4}$ con β en el tercer cuadrante

79. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{4}$, con α que está en el II cuadrante y $\cos\beta=\frac{4}{7}$ con β en el cuarto cuadrante

80. $\tan\alpha=\frac{6}{5}$, con α que está en el III cuadrante y $\sec\beta=\frac{6}{5}$ con β en el primer cuadrante

81. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, con α que está en el I cuadrante y $\sec\beta=\frac{6}{5}$ con β en el primer cuadrante

82. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, con $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ y $\operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$ con $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

83. $\tan\alpha=-\frac{6}{5}$; con $-\frac{3\pi}{2}<\alpha<-\pi$ y $\csc\beta=\frac{7}{5}$ con $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

84. $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, con $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$ y $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ con $-\frac{3\pi}{2}<\beta<-\pi$

85. $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, con $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ y $\tan\beta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ con $-\frac{3\pi}{2}<\beta<-\pi$

3.3 IDENTIDADES DE ANGULO DOBLE Y ANGULO MEDIO

Utilizando las identidades en las que intervienen dos ángulos, se deducirá principalmente las relacionadas con ángulos dobles y de éstas últimas, se llega a las identidades de ángulo medio.

Retomando la identidad **sen (α + β) = sen α cos β + cos α sen β**

Supóngase que $\beta = \alpha$, entonces:

$\mathbf{sen}\,(\alpha + \alpha) = \mathbf{sen}\,\alpha \cos\alpha + \cos\alpha\,\mathbf{sen}\,\alpha$ — sustituyendo β por α.

ó

$\mathbf{sen}\,(2\alpha) = 2\mathbf{sen}\,\alpha \cos\alpha$ — simplificando y obtenemos la identidad del seno del doble de un ángulo.

De igual forma, si se toma la identidad **cos (α + β) = cos α cos β − sen α sen β**

y suponiendo que $\beta = \alpha$, se obtiene:

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \mathbf{sen}\,\alpha\,\mathbf{sen}\,\alpha$ — sustituyendo β por α.

ó

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathbf{sen}^2\alpha$ — simplificando y obteniendo una identidad del coseno del doble de un ángulo.

Nótese que se puede sustituir en la última identidad $\cos^2\alpha$ ó $\mathbf{sen}^2\alpha$ por $1 - \mathbf{sen}^2\alpha$ ó $1 - \cos^2\alpha$ respectivamente.

$$\cos(2\alpha) = (1 - \mathbf{sen}^2\alpha) - \mathbf{sen}^2\alpha$$
sustituyendo $\cos^2\alpha$ por $1 - \mathbf{sen}^2\alpha$.

$$= 1 - 2\mathbf{sen}^2\alpha$$
simplificando, **se obtiene la segunda identidad**.

Ahora

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
sustituyendo $\mathbf{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$.

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
simplificando, **se obtiene la tercera identidad**.

Tomando la identidad para la suma de la tangente y sustituyendo $\beta = \alpha$, se tiene:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
retomando la identidad de la tangente de una suma.

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$$
sustituyendo β por α.

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$
simplificando.

Sintetizando las identidades verificadas anteriormente:

Identidades de ángulos dobles

1. $\mathbf{sen}\,2\alpha = 2\mathbf{sen}\,\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathbf{sen}^2\alpha = 1 - 2\mathbf{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
3. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

La *identidad* para el coseno del doble de un ángulo, es muy aplicada en cálculo, ya que ésta permite transformar una expresión en forma de potencia en otra equivalente pero con exponente uno. Véase:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	retomando una de las identidades para el coseno del doble del ángulo.
$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$	sumando 1 en ambos lados de la ecuación.
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	despejando para el término cuadrático y aplicando simetría.

Si ahora se toma la identidad

$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$	retomando otra de las identidades para el coseno del doble del ángulo.
$2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$	transponiendo términos.
$\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	despejando para el término cuadrático.

Recuérdese que $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$, luego $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$, por lo que

$$\tan^2\alpha = \frac{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Estas últimas identidades, son llamadas:

Identidades de potencias

1. $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 2. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ 3. $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

Si de estas últimas se supone que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$, se obtienen las **identidades para el ángulo medio,** véase:

$\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	retomando la identidad para $\operatorname{sen}^2\alpha$, dada últimamente.
$\operatorname{sen}^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos 2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{2}$	sustituyendo $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.
$\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}$	despejando para $\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}$ se obtiene la identidad para el seno del ángulo medio. Se tomará la raíz positiva o negativa, según el cuadrante que contenga a $\dfrac{\beta}{2}$.

Suponiendo nuevamente que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$, y tomando la siguiente identidad $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ se tiene que:

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	retomando la identidad para $\cos^2\alpha$, dada últimamente.

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos 2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}$$ sustituyendo $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

$$\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$ despejando para $\cos\frac{\beta}{2}$, se obtiene la identidad para el coseno del ángulo medio. El signo de la raíz depende del cuadrante que contenga a $\frac{\beta}{2}$.

Finalmente, si se toma

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$ retomando la identidad para $\tan^2\alpha$, dada últimamente.

$$\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ aplicando identidad fundamental y sustituyendo $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

$$\tan\frac{\beta}{2} = \pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}}$$ sustituyendo $\mathrm{sen}^2\frac{\beta}{2}$ y $\cos^2\frac{\beta}{2}$.

$$\tan\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$$ simplificando.

En estas tres identidades es importante saber identificar cuando considerar la raíz positiva o la raíz negativa, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo $\frac{\beta}{2}$. Para el caso $\mathrm{sen}\frac{\beta}{2}$, se toma la raíz positiva si $\frac{\beta}{2}$ está en el primer o segundo cuadrante y se toma la raíz negativa si $\frac{\beta}{2}$, está en el tercer o cuarto cuadrante. De igual manera, para $\cos\frac{\beta}{2}$, se toma la raíz positiva si $\frac{\beta}{2}$ está en el primer o cuarto cuadrante y se toma la raíz negativa si $\frac{\beta}{2}$, está en el segundo o tercer cuadrante. En el caso de la $\tan\frac{\beta}{2}$, se toma la raíz positiva si $\frac{\beta}{2}$ está en el primer o tercer cuadrante, o la raíz negativa si $\frac{\beta}{2}$ está en el segundo o cuarto cuadrante.

De la identidad de la tangente de un ángulo medio, se deducen otras equivalentes que no es necesario analizar el signo, ya que de la aplicación de ellas se obtiene el signo, ya sea éste positivo (+) o negativo (–). Véase:

$$\mathrm{sen}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos 2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}$$ tomando identidad.

$$1-\cos\beta = 2\mathrm{sen}^2\frac{\beta}{2}$$ despejando para el término $1 - \cos\beta$ (después de simplificar). **(1)**

$$\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}\,2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$ tomando **sen** β, y expresando en forma equivalente (identidad para el ángulo doble). **(2)**

$$\frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cancel{2}\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ dividiendo igualdad (1) entre igualdad (2).

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ simplificando.

$$= \tan\frac{\beta}{2}$$ aplicando identidad fundamental.

Por tanto $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$ identidad para la tangente del ángulo medio.

De igual manera se puede probar que $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}$

Sintetizando se tiene:

Identidades para ángulos medios

1. $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$ **2.** $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$

3. $\tan\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$

Los problemas que se tratarán en esta sección son semejantes a los tratados en la anterior. Por ejemplo, se pedirá que se verifique identidades y que se determine el valor exacto de algunas razones trigonométricas, para otros ángulos.

Ejemplo 1 Verificar cada identidad

a) $\cos 3\theta = \cos\theta\,(1-4\operatorname{sen}^2\theta)$ **b)** $8\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4\operatorname{sen}\theta$ **c)** $\frac{\operatorname{sen}^2 2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = 4(1-\operatorname{sen}^2\varphi)$

d) $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos 2\alpha$ **e)** $2\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{1+\cos\beta}$ **f)** $\operatorname{sen} 2\alpha = \tan\alpha\,(1+\cos 2\alpha)$

g) $\frac{\cos 2\theta}{1-\operatorname{sen}2\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ **h)** $\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\tan\beta+\operatorname{sen}\beta}{2\tan\beta}$ **i)** $\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = 4\cos\theta - \sec\theta$.

Solución:

a) $\cos 3\theta = \cos\theta\,(1-4\operatorname{sen}^2\theta)$ **identidad dada.**

$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta)$ tomando el miembro de la izquierda y expresándolo de forma equivalente.

$= \cos 2\theta\cos\theta - \operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta$ aplicando identidad $\cos(\alpha+\beta)$.

$= (1-2\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta - (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$ aplicando identidades $\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen}2\theta$. Nótese que es importante identificar las identidades convenientes.

$= \cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$ efectuando los productos y simplificando.

$= \cos\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$ simplificando.

$= \cos\theta\,(1-4\operatorname{sen}^2\theta)$ extrayendo factor común, se obtiene la **expresión deseada**.

b) $8\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4\text{sen}\,\theta$ **identidad dada**.

$8\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4\left(2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$ tomando el miembro de la izquierda y expresándola de forma equivalente.

$= 4\left(\text{sen}\ 2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ aplicando identidad **sen 2θ**.

$= 4\text{sen}\,\theta$ simplificando.

c) $\frac{\text{sen}^2 2\varphi}{\text{sen}^2\varphi} = 4(1-\text{sen}^2\varphi)$ **identidad dada**.

$\frac{\text{sen}^2 2\varphi}{\text{sen}^2\varphi} = \frac{(2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi)^2}{\text{sen}^2\varphi}$ tomando el miembro de la izquierda y aplicando identidad **sen 2φ**.

$= \frac{4\cancel{\text{sen}^2\varphi}\cos^2\varphi}{\cancel{\text{sen}^2\varphi}}$ aplicando propiedades de potencia.

$= 4\cos^2\varphi$ simplificando.

$= 4(1-\text{sen}^2\varphi)$ aplicando identidad fundamental $\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

d) $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos 2\alpha$ **identidad dada**.

$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$ tomando el miembro de la izquierda y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \frac{\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$ efectuando las sumas en el numerador y denominador.

$= \frac{\cancel{\cos^2\alpha}(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}{\cancel{\cos^2\alpha}(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)}$ efectuando la división.

$= \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1}$ simplificando y aplicando identidad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$= \cos 2\alpha$ simplificando y aplicando identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$.

e) $2\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} = \frac{\text{sen}^2\beta}{1+\cos\beta}$ **identidad dada**.

$2\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\right)^2$ tomando el miembro izquierdo y aplicando identidad para ángulo medio

$= 2\left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)$ eliminando la raíz.

$= 1-\cos\beta \times \frac{1+\cos\beta}{1+\cos\beta}$ multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador.

$= \dfrac{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)}{1+\cos\beta}$ efectuando el producto.

$= \dfrac{1-\cos^2\beta}{1+\cos\beta}$ efectuando el producto del numerador.

$= \dfrac{\text{sen}^2\beta}{1+\cos\beta}$ aplicando identidad fundamental **y es lo que se quiere.**

f) $\text{sen } 2\alpha = \tan\alpha\,(1+\cos 2\alpha)$ **identidad dada.**

$\tan\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \tan\alpha + \tan\alpha\cos 2\alpha$ tomando el miembro derecho y efectuando el producto.

$= \tan\alpha + \tan\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1)$ aplicando identidad $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

$= \tan\alpha + 2\cos^2\alpha\tan\alpha - \tan\alpha$ efectuando el producto.

$= 2\cancel{\cos^2\alpha}\left(\dfrac{\text{sen }\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\right)$ Simplificando (términos semejantes) y expresando $\tan\alpha$, en términos de seno y coseno.

$= 2\,\text{sen }\alpha\cos\alpha$ simplificando.

$= \text{sen } 2\alpha$ aplicando identidad del doble del seno de un ángulo

g) $\dfrac{\cos 2\theta}{1-\text{sen}2\theta} = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ **identidad dada.**

$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \dfrac{1+\dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}}$ tomando el miembro de la derecha y llevándolo en términos de seno y coseno.

$= \dfrac{\dfrac{\cos\theta+\text{sen }\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-\text{sen}\theta}{\cos\theta}}$ efectuando las sumas.

$= \dfrac{\cancel{\cos\theta}(\cos\theta+\text{sen}\theta)}{\cancel{\cos\theta}(\cos\theta-\text{sen}\theta)}$ efectuando la división.

$= \dfrac{\cos\theta+\text{sen}\theta}{\cos\theta-\text{sen}\theta}\times\dfrac{\cos\theta-\text{sen}\theta}{\cos\theta-\text{sen}\theta}$ simplificando, multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador.

$= \dfrac{(\cos\theta+\text{sen}\theta)(\cos\theta-\text{sen}\theta)}{(\cos\theta-\text{sen}\theta)^2}$ planteando los productos.

$= \dfrac{\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta-2\text{sen}\theta\cos\theta+\text{sen}^2\theta}$ efectuando el producto en el numerador desarrollando el binomio.

$= \dfrac{\cos^2\theta-\text{sen}^2\theta}{1-2\text{sen }\theta\cos\theta}$ aplicando identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ en el denominador.

$= \dfrac{\cos 2\theta}{1-\text{sen}2\theta}$ por identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$ y $\text{sen}2\theta = 2\text{sen }\theta\cos\theta$.

h) $\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{\tan\beta+\operatorname{sen}\beta}{2\tan\beta}$ **identidad dada.**

$\frac{\tan\beta+\operatorname{sen}\beta}{2\tan\beta}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}+\operatorname{sen}\beta}{\frac{2\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$ tomando el miembro de la derecha y llevándolo en términos de seno y coseno.

$=\frac{\frac{\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\cos\beta}}{\frac{2\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$ efectuando la suma del numerador.

$=\frac{\cos\beta(\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\beta)}{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}$ efectuando la división.

$=\frac{\cancel{\cos\beta}\,\cancel{\operatorname{sen}\beta}(1+\cos\beta)}{2\cancel{\operatorname{sen}\beta}\cancel{\cos\beta}}$ sacando factor común en el numerador.

$=\frac{1+\cos\beta}{2}$ simplificando.

$=\left(\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\right)^2$ expresando de forma equivalente, si $\frac{1+\cos\beta}{2}>0$.

$=\cos^2\frac{\beta}{2}$ aplicando identidad para $\cos\frac{\beta}{2}$.

i) $\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=4\cos\theta-\sec\theta$ **identidad dada.**

$\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}(2\theta+\theta)}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ tomando el miembro de la izquierda y expresando el numerador de forma equivalente.

$=\frac{\operatorname{sen}2\theta\cos\theta+\cos2\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ aplicando identidad el seno de la suma.

$=\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ aplicando identidad del **sen 2θ** y **cos 2θ**.

$=\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ efectuando el producto en el numerador.

$=\frac{3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ simplificando.

$=\frac{\cancel{\operatorname{sen}\theta}(3\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta}$ extrayendo factor común.

$=\frac{3\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}$ simplificado y aplicando identidad $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$=\frac{4\cos^2\theta-1}{\cos\theta}$ simplificado.

$=\frac{4\cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos\theta}}-\frac{1}{\cos\theta}$ expresando de forma equivalente.

$=4\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}$ simplificando.

$=4\cos\theta-\sec\theta$ aplicando identidad fundamental. ■

Ejemplo 2 Expresar en términos de **cos** α con exponente 1.

a) $\cos^2\alpha\ \text{sen}^2\alpha$ **b)** $\cos^4\alpha$ **c)** $\text{sen}^4\dfrac{\theta}{2}$

Solución:

a) $\cos^2\alpha\ \text{sen}^2\alpha = \left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)$ aplicando identidad $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ y $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

$= \dfrac{1}{4}\left(1-\cos^2 2\alpha\right)$ efectuando los productos.

$= \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1+\cos 2(2\alpha)}{2}\right)$ aplicando identidad $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)$ efectuando la suma.

$= \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$ efectuando el producto.

b) $\cos^4\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^2$ aplicando propiedades de potencias.

$= \left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2$ aplicando identidad $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

$= \dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)$ por propiedades de potencia y desarrollando el binomio.

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{4}\cos^2 2\alpha$ por propiedad distributiva.

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos 2(2\alpha)}{2}\right)$ aplicando identidad $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}\left(1+\cos 4\alpha\right)$ simplificando.

$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$ por propiedad distributiva.

$= \dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$ simplificando.

c) $\text{sen}^4\dfrac{\theta}{2} = \left(\text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2$ aplicando propiedad de potencia.

$= \left(\dfrac{1-\cos 2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2}\right)^2$ aplicando identidad $\text{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.

$= \left(\dfrac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$ simplificando.

$= \dfrac{1}{4}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)$ por propiedad de potencia y desarrollando el binomio.

$= \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{4}\cos^2\theta$ por propiedad distributiva.

$= \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$ aplicando identidad $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}(1 + \cos 2\theta)$ simplificando.

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 2\theta$ por propiedad distributiva.

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta$ simplificando. ■

Ejemplo 3 Determinar el valor exacto, aplicando identidades para ángulo medio.

a) sen 15° **b)** sen 22.5° **c)** $\cos\frac{\pi}{8}$ **d)** cos 165° **e)** csc 195° **f)** sen 165°

g) $\tan\frac{7\pi}{8}$ **h)** $\sec\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ **i)** cos 112.5° **j)** $\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ **k)** $\cot\frac{3\pi}{8}$ **l)** cos (157°30')

Solución:

a) $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}\left(\frac{30°}{2}\right)$ expresando en forma equivalente. Nótese que también se puede aplicar diferencia de ángulos.

$= \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$ aplicando identidad $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$. **Nótese que se toma la raíz positiva ya que 15° está en el primer cuadrante y en éste, el seno es positivo.**

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$ determinando el valor de cos 30°.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ simplificando.

b) $\operatorname{sen} 22.5° = \operatorname{sen}\left(\frac{45°}{2}\right)$ expresando de forma equivalente.

$= \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$ aplicando identidad $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$. **Nótese que se toma la raíz positiva ya que 22.5° está en el primer cuadrante y en éste, el seno es positivo.**

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ determinando el valor de **cos 45°**.

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ simplificando.

c) $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)$ expresando de forma equivalente.

$= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$. **Nótese que se toma la raíz positiva ya que $\frac{\pi}{8}$ está en el primer cuadrante y en éste, el coseno es positivo.**

$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ determinando el valor de $\cos\frac{\pi}{4}$.

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ simplificando.

d) $\cos 165° = \cos\left(\frac{330°}{2}\right)$ expresando en forma equivalente.

$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 330°}{2}}$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$.

$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$ determinando el valor de cos 330°. **Nótese que 330° está en el cuarto cuadrante, su ángulo de referencia es 30° y en éste, el coseno es positivo.**

$= \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ simplificando. **Nótese que se toma la raíz negativa ya que 165° está en el segundo cuadrante y en éste, el coseno es negativo.**

e) $\csc 195° = \frac{1}{\text{sen } 195°}$ aplicando identidad fundamental.

$= \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{390°}{2}\right)}$ expresando de forma equivalente.

$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos 390°}{2}}}$ aplicando identidad $\text{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$.

$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}$ determinando el valor de sen 390°. **Nótese que 390° está en el primer cuadrante, su ángulo de referencia es 30° y en éste, el coseno es positivo.**

$= \frac{1}{-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}$ simplificando. **Nótese que se toma la raíz negativa ya que 195° está en el tercer cuadrante y en éste, el seno es negativo.**

$= -\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ simplificando; también se puede racionalizar dos veces.

f) $\operatorname{sen} 165° = \operatorname{sen}\left(\dfrac{330°}{2}\right)$ expresando en forma equivalente.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 330°}{2}}$ aplicando identidad $\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$ determinando el valor de cos 330°. **Nótese que 330° está en el cuarto cuadrante, su ángulo de referencia es 30° y en éste, el coseno es positivo.**

$= \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ simplificando. **Note que se toma la raíz positiva ya que 165° está en el segundo cuadrante y en éste, el seno es positivo.**

g) $\tan\dfrac{7\pi}{8} = \tan\left(\dfrac{\frac{7\pi}{4}}{2}\right)$ expresando de forma equivalente.

$= \dfrac{1-\cos\frac{7\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}}$ aplicando identidad $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$. **Nótese que se pudo haber aplicado las otras opciones.**

$= \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ determinando el $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$ y el $\cos\frac{7\pi}{4}$. **Nótese que $\frac{7\pi}{4}$ está en el cuarto cuadrante y su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$**, además en éste, el seno es negativo y el coseno positivo.

$= \dfrac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ efectuando la suma en el numerador.

$= \dfrac{2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ simplificando.

$= \dfrac{2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \times \dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ multiplicando y dividiendo por $-\sqrt{2}$.

$= \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}$ efectuando los productos.

$= 1-\sqrt{2}$ simplificando.

h) $\sec\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$ aplicando identidad fundamental.

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$ aplicando identidad de un ángulo negativo.

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}\right)}$ expresando en forma equivalente.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}{2}}}$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}}}$ encontrando el valor de $\cos\frac{3\pi}{4}$. Nótese que $\frac{3\pi}{4}$ está en el segundo cuadrante, que su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$ y que el coseno en éste, es negativo.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}}$ efectuando la suma en el numerador en la cantidad sub radical.

$= \dfrac{1}{\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ efectuando la división.

$= \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ expresando de forma equivalente. Nótese que $-\frac{3\pi}{8}$ está en el cuarto cuadrante, y en éste, el coseno es positivo.

i) $\cos 112.5° = \cos\left(\dfrac{225°}{2}\right)$ expresando en forma equivalente.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 225°}{2}}$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ determinando el valor de **cos 225°**. **Nótese que 225° está en el tercer cuadrante, su ángulo de referencia es 45° y en éste, el coseno es negativo.**

$= \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= -\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ simplificando. **Nótese que se tomó la raíz negativa ya que 112.5° está en el segundo cuadrante y en éste, el coseno es negativo.**

j) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{8}$ aplicando propiedad de un ángulo negativo.

$= -\tan\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{4}}{2}\right)$ expresando en forma equivalente.

$= -\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}$ aplicando una de las posibilidades para la identidad $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}$.

$= -\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ determinando el $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ y el $\cos\frac{\pi}{4}$.

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$ efectuando la suma en el denominador.

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$ efectuando la división.

$$= 1-\sqrt{2}$$ racionalizando y simplificando.

k) $\cot\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan\frac{3\pi}{8}}$ aplicando identidad fundamental.

$$= \frac{1}{\tan\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}\right)}$$ expresado en forma equivalente.

$$= \frac{1}{\frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$$ aplicando identidad $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\text{sen}\,\beta}{1+\cos\beta}$

$$= \frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$ expresando de forma equivalente (aplicando el recíproco).

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ encontrando el valor de $\cos\frac{3\pi}{4}$ y de $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$. Nótese que $\frac{3\pi}{4}$ está en el segundo cuadrante, que su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$ y que el coseno en éste, es negativo y el seno es positivo.

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ efectuando la suma en el numerador.

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ efectuando la división.

$$= \sqrt{2}-1$$ racionalizando y simplificando.

l) $\cos(157°30') = \cos\left(\frac{315°}{2}\right)$ expresando en forma equivalente.

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 315°}{2}}$$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$.

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$ determinando el valor de cos 315°. **Nótese que 315° está en el cuarto cuadrante, su ángulo de referencia es 45° y en éste, el coseno es positivo.**

$= \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$ efectuando la suma y la división.

$= -\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ simplificando. **Nótese que se tomó la raíz negativa ya que 157.5° está en el segundo cuadrante y en éste, el coseno es negativo.**

■

Ejemplo 4 Si $\csc\alpha = \frac{5}{4}$, con α que está en el II cuadrante, determinar **el valor exacto** de:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ **b)** $\cos 2\alpha$ **c)** $\tan 2\alpha$ **d)** $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ **e)** $\cos\frac{\alpha}{2}$

f) $\tan\frac{\alpha}{2}$ **g)** $\sec\frac{\alpha}{2}$ **h)** El cuadrante donde está 2α

Solución:

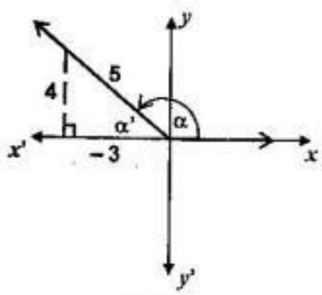


fig .1

Auxiliándose de una gráfica para ubicar el ángulo α en posición normal. Formando el triángulo rectángulo que contenga el ángulo de referencia, para que facilite encontrar los valores de las razones trigonométricas requeridas. Como $\csc\alpha$ se define hipotenusa entre lado opuesto, se ubican estos valores en el triángulo rectángulo formado y se determina el tercer lado de éste.

Respondiendo cada inciso se tiene:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ aplicando identidad $\mathbf{sen\ 2\alpha = 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha}$.

$= 2\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ determinando el valor de **sen α y cos α (ver fig. 1).**

$= -\dfrac{24}{25}$ simplificando. **Nótese que, sen 2α es negativo.**

b) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ aplicando identidad $\mathbf{cos\ 2\alpha = 2cos^2\ \alpha - 1}$.

$= 2\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 - 1$ determinando el valor de **cos α (ver fig. 1).**

$= \dfrac{18}{25} - 1$ efectuando el producto.

$= -\dfrac{7}{25}$ efectuando la suma. **Nótese que cos 2α es negativo.**

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ aplicando identidad $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

$= \dfrac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$ determinando el valor de **tan α (ver fig. 1).**

$= \dfrac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{24}{7}$ efectuando operaciones indicadas. Nótese que la **tan 2α** es positivo.

d) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ aplicando la identidad $\mathbf{sen}\dfrac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}$.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ determinando el valor de **cos α** (**ver fig. 1**).

$= \pm\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}$ aplicando ley de los signos.

$= \pm\sqrt{\dfrac{\frac{8}{5}}{2}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ simplificando. Nótese que si α está en el segundo cuadrante $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, luego $\frac{\alpha}{2}$ está en el primero $\left(\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$ y por tal razón se toma la raíz positiva.

e) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ aplicando la identidad $\mathbf{cos}\dfrac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}$.

$= \pm\sqrt{\dfrac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ determinando el valor de cos α (**ver fig. 1**).

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}$ aplicando ley de los signos.

$= \pm\sqrt{\dfrac{\frac{2}{5}}{2}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ efectuando la división y simplificando. Se toma la raíz positiva porque ya se dijo que $\frac{\alpha}{2}$ está en el primer cuadrante.

f) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ aplicando la identidad $\mathbf{tan}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$.

$= \dfrac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}$ determinando el valor de **cos α** (**ver fig. 1**).

$= \dfrac{1+\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ aplicando ley de los signos.

$= 2$ efectuando las operaciones planteadas.

g) $\sec\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ aplicando identidad fundamental.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}}$ aplicando identidad $\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}}$ determinando el valor de **cos α (ver fig. 1)**.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}}$ aplicando ley de los signos.

$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{\frac{1}{5}}}$ efectuando las operaciones planteadas.

$= \sqrt{5}$ Simplificando. Nótese que si $\alpha \in$ **II cuadrante,** $\frac{\alpha}{2} \in$ **I cuadrante** y **cos** $\frac{\alpha}{2}$ es positivo en el primer cuadrante.

h) El cuadrante donde está 2α

Nótese que según los resultados en los incisos anteriores (a) y b)), se obtuvo que tanto sen 2α **como** cos 2α son **negativos** y el único cuadrante donde ambas razones trigonométricas son negativas **es** en el tercero, por tal razón **2α está en el tercer cuadrante**. ∎

Ejemplo 5 Encontrar el valor exacto de sen θ y cos θ, dado que $\sec 2\theta = -\frac{7}{5}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Solución:

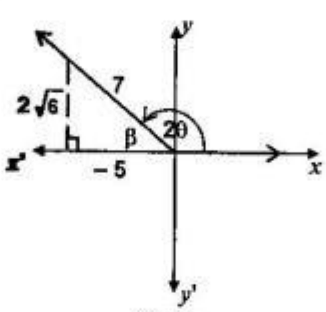


fig .2

Se dice que θ está en el primer cuadrante ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), luego 2θ está en el segundo cuadrante. Ubicando el ángulo 2θ en posición estándar y completando el triángulo rectángulo que contiene al ángulo de referencia β, se tiene la fig. 2. Aplicando una de las identidades recíprocas se tiene que $\cos 2\theta = -\frac{5}{7}$. Tomando la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, sustituyendo en ésta el valor de $\cos 2\theta$ y despejando para el término $\cos\theta$, se obtiene:

$-\frac{5}{7} = 2\cos^2\theta - 1$ sustituyendo el valor de **cos 2θ**.

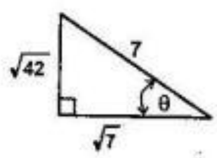
$2\cos^2\theta = -\frac{5}{7} + 1$ transponiendo términos y por simetría.

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{7}$ despejando para $\cos^2\theta$.

$\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ racionalizando. Se toma cos θ positivo, ya que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Determinando el valor exacto para sen θ



Se sabe que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ y que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, se determina que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{42}}{7}$ (ver triángulo). Este valor se puede determinar de forma similar de cómo se encontró el valor exacto de cos θ, a diferencia que se debe tomar la identidad $\mathbf{\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta}$ y despejar para sen θ.

■

Ejemplo 6 Si 2θ es un ángulo en posición normal o estándar y el punto (–1, –3) está en el lado terminal de 2θ, determinar:

a) $\tan\theta$ **b)** $\operatorname{sen} 4\theta$ **c)** $\cos 3\theta$ **d)** $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ **e)** $\sec 6\theta$ **f)** $\csc\dfrac{3\theta}{2}$

Solución:

a) tan θ

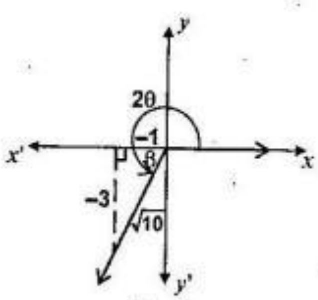


fig . 3

Se tiene que 2θ está en el tercer cuadrante, ya que el punto (–1, –3) está en el lado terminal de 2θ y éste está en el tercer cuadrante (ver fig.3). Ubicando el ángulo 2θ en posición normal o estándar y completando el triángulo rectángulo que contiene al ángulo de referencia β, se tiene la fig. 3. Se observa en la misma figura que $\mathbf{\cos 2\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Si se toma la identidad $\mathbf{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$, sustituyendo en ésta y despejando para el término **cos θ**, se obtiene:

$-\dfrac{1}{\sqrt{10}} = 2\cos^2\theta - 1$ sustituyendo el valor de cos 2θ.

$2\cos^2\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} + 1$ transponiendo términos y por simetría.

$\cos^2\theta = \dfrac{10-\sqrt{10}}{20}$ despejando para $\cos^2\theta$.

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{20}}$ despejando para cos θ.

ó $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{20}}$ ya que si 2θ está en el tercer cuadrante, θ está en el segundo y en éste el coseno es negativo.

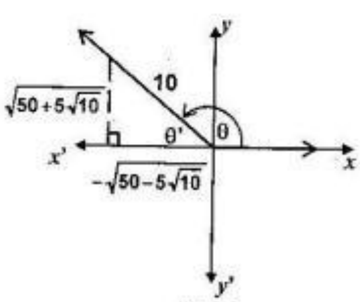


fig . 4

Simplificando este último resultado se tiene que:

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{10-\sqrt{10}}{20}} = -\frac{\sqrt{10-\sqrt{10}}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10-\sqrt{10}}}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{10}$$

Con este último resultado (cos θ), se construye la fig. 4 y se procede a contestar algunos inciso solicitados.

a) $\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}$ aplicando la definición de tangente. Nótese que este resultado se puede racionalizar.

b) $\operatorname{sen} 4\theta = \operatorname{sen}(2(2\theta))$ escribiendo de forma equivalente.

$= 2\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta)$ aplicando identidad seno del doble de un ángulo.

$= 2\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ sustituyendo **sen (2θ) y cos (2θ) (ver fig. 3)**.

$= \dfrac{3}{5}$ simplificando.

c) $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$ escribiendo de forma equivalente.

$= \cos\theta\cos(2\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(2\theta)$ aplicando identidad; coseno de una suma.

$= -\dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{10}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) - \dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{10}\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ sustituyendo **cos θ**, **cos (2θ)**, **sen θ** y **sen (2θ) (ver fig. 3 y fig. 4)**.

$= \dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{10\sqrt{10}} + \dfrac{3\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{10\sqrt{10}}$ efectuando los productos.

$= \dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{10}} + 3\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{10\sqrt{10}}$ efectuando la suma.

$= \dfrac{\sqrt{500-50\sqrt{10}} + 3\sqrt{500+50\sqrt{10}}}{100}$ racionalizando.

d) $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ aplicando identidad para el seno del ángulo medio.

$= \sqrt{\dfrac{1-\left(-\dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{10}\right)}{2}}$ Sustituyendo **cos θ**. Nótese que **2θ** está en el tercer cuadrante, θ está en el segundo cuadrante y $\frac{\theta}{2}$ está en el primer cuadrante. Luego **sen** $\frac{\theta}{2}$ es positivo.

$= \sqrt{\dfrac{10+\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{20}}$ efectuando la suma en el numerador y la división.

$= \dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{50-5\sqrt{10}}}}{10}$ simplificando y racionalizando.

e) $\sec 6\theta = \dfrac{1}{\cos 6\theta}$ aplicando identidad.

$\cos 6\theta = \cos(2\theta + 4\theta)$ Expresando **cos 6θ** de forma equivalente. Nótese que determinando **cos 6θ** y luego el recíproco de éste se encuentra **sec 6θ.**

$= \cos 2\theta \cos(4\theta) - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}(4\theta)$ aplicando identidad; coseno de una suma.

$= \cos 2\theta \cos(2(2\theta)) - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}(2(2\theta))$ expresando de forma equivalente **cos 4θ** y **sen 4θ**.

$= \cos 2\theta\,(\cos^2(2\theta) - \operatorname{sen}^2(2\theta)) - \operatorname{sen} 2\theta\,(2\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta))$ aplicando identidades ángulo doble.

$= \cos^3(2\theta) - \cos 2\theta \operatorname{sen}^2(2\theta)) - 2\operatorname{sen}^2(2\theta)\cos(2\theta)$ efectuando los productos.

$= \cos^3(2\theta) - 3\cos 2\theta \operatorname{sen}^2(2\theta))$ simplificando.

$= \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^3 - 3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2$ sustituyendo **cos 2θ** y **sen 2θ (ver fig. 3)**.

$= \dfrac{-1}{10\sqrt{10}} + \dfrac{3}{\sqrt{10}}\left(\dfrac{9}{10}\right)$ simplificando

$= \dfrac{13}{5\sqrt{10}}$ efectuando el producto, la suma y simplificando.

$\sec 6\theta = \dfrac{1}{\cos 6\theta} = \dfrac{5\sqrt{10}}{13}$ sustituyendo y simplificando.

f) $\csc\dfrac{3\theta}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{3\theta}{2}}$ aplicando identidad.

$\operatorname{sen}\dfrac{3\theta}{2} = \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\theta}{2}\right)$ tomando **sen** $\dfrac{3\theta}{2}$ expresando de forma equivalente; $\dfrac{3\theta}{2} = \theta + \dfrac{\theta}{2}$.

$= \operatorname{sen}\theta \cos\dfrac{\theta}{2} + \cos\theta \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$ aplicando identidad; seno de una suma.

$= \dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{10}}}{10}\left(\dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{50-5\sqrt{10}}}}{10}\right) + \left(-\dfrac{\sqrt{50-5\sqrt{10}}}{10}\right)\dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{50-5\sqrt{10}}}}{10}$ sustituyendo **sen θ,** **cos** $\dfrac{\theta}{2}$, **cos θ** y **sen** $\dfrac{\theta}{2}$. Nótese que **cos** $\dfrac{\theta}{2}$ se encuentra utilizando el resultado del inciso **d)** (construya el triángulo rectángulo y encuentre el lado adyacente a $\dfrac{\theta}{2}$, luego aplique la definición de coseno).

$= \dfrac{\sqrt{50+5\sqrt{10}}\,\sqrt{50-5\sqrt{50-5\sqrt{10}}} - \sqrt{50-5\sqrt{10}}\,\sqrt{50+5\sqrt{50-5\sqrt{10}}}}{100}$ efectuando la suma.

$\csc\dfrac{3\theta}{2} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{3\theta}{2}} = \dfrac{100}{\sqrt{50+5\sqrt{10}}\,\sqrt{50-5\sqrt{50-5\sqrt{10}}} - \sqrt{50-5\sqrt{10}}\,\sqrt{50+5\sqrt{50-5\sqrt{10}}}}$ sustituyendo y simplificando.

■

Ejemplo 7 Si $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, determinar el valor exacto de:

a) $\cos\frac{\pi}{5}$ **b)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}$ **c)** $\tan\frac{2\pi}{5}$ **d)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ **e)** $\sec\frac{9\pi}{10}$ **f)** $\csc\frac{3\pi}{20}$

Solución:

a) $\cos\frac{\pi}{5}$

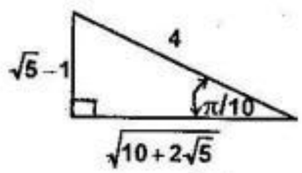


fig. 5

Con la información dada, se procede a elaborar un triángulo rectángulo para encontrar la medida del otro lado. Recuérdese que seno θ es igual a $\frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, luego lado adyacente es igual a $\sqrt{4^2-\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$ ó $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (simplificando).

Ahora $\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{10}$ escribiendo de forma equivalente.

$= \cos 2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ escribiendo de forma equivalente.

$= 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1$ aplicando identidad coseno del ángulo doble.

$= 2\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 - 1$ sustituyendo el valor de $(\cos\frac{\pi}{10})^2$.

$= \frac{10+2\sqrt{5}}{8} - 1$ simplificando.

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ efectuando la suma y simplificando.

b) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}$ enunciado dado.

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)$ expresando de forma equivalente.

$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$ aplicando identidad seno de una suma.

$= (1)\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + (0)\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ sustituyendo cada factor.

$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ simplificando.

c) $\tan\frac{2\pi}{5}$ enunciado dado.

$\tan\frac{2\pi}{5} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ expresando de forma equivalente.

$= \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}$ expresando en términos de seno y coseno.

$$= \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{10} + \text{sen}\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{10}}$$ aplicando identidades seno y coseno de una resta.

$$= \frac{(1)\cos\frac{\pi}{10} - (0)\text{sen}\frac{\pi}{10}}{(0)\cos\frac{\pi}{10} + (1)\text{sen}\frac{\pi}{10}}$$ simplificando (ángulos cuadrantales).

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{10}}{\text{sen}\frac{\pi}{10}}$$ simplificando.

$$= \cot\frac{\pi}{10}$$ aplicando identidad.

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$ aplicando la definición de la cotangente (ver fig. 5).

$$= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$ racionalizando.

Nótese que en el inciso c), el complemento de $\frac{2\pi}{5}$ es $\frac{\pi}{10}$, por tal razón también es posible aplicar una de las cofunciones: $\mathbf{tan}\,\frac{2\pi}{5} = \mathbf{cot}\,\frac{\pi}{10}$ y aplicar la definición de cotangente en la fig. 5.

d) $\cot\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ enunciado dado.

$$\cot\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = -\cot\frac{3\pi}{5}$$ aplicando propiedad $\cot(-\alpha) = -\cot\,\alpha$.

Utilizando el resultado del inciso b), se construye otro triángulo rectángulo así:

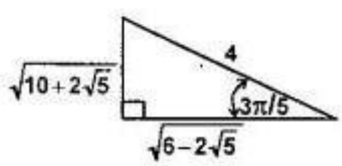


fig. 6

Luego

$$-\cot\frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = -\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}$$ aplicando definición de cotangente (ver fig. 6) y racionalizando.

e) $\sec\frac{9\pi}{10}$ enunciado dado.

$$\sec\frac{9\pi}{10} = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)$$ expresando de forma equivalente.

$$= \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)}$$ aplicando identidad.

Determinando $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{10} + \text{sen}\,\pi\,\text{sen}\frac{\pi}{10}$$ aplicando identidad coseno de una resta.

$$= (-1)\cos\frac{\pi}{10} + (0)\,\text{sen}\frac{\pi}{10}$$ sustituyendo **cos π** y **sen π**.

$$= -\cos\frac{\pi}{10}$$ simplificando.

$$= -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$ simplificando.

Ahora

$$\sec\frac{9\pi}{10} = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)} = -\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$ sustituyendo y simplificando.

ó $$\sec\frac{9\pi}{10} = -\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}$$ racionalizando.

f) $\csc\frac{3\pi}{20}$ enunciado dado.

$$\csc\frac{3\pi}{20} = \csc\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20}\right)$$ expresando de forma equivalente.

$$\csc\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20}\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20}\right)}$$ aplicando identidad.

Determinando

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{10}\text{sen}\frac{\pi}{20}$$ expresando de forma equivalente.

$$= \text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\frac{\pi}{10}}{2} + \cos\frac{\pi}{10}\text{sen}\frac{\frac{\pi}{10}}{2}$$ expresando de forma equivalente.

$$= \text{sen}\frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{10}}{2}} + \cos\frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{10}}{2}}$$ aplicando identidad, ángulo medio.

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}}$$ sustituyendo en cada factor.

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$ efectuando la suma

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,\frac{\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2\sqrt{2}}$$ aplicando propiedad de radicales.

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8\sqrt{2}}$$ efectuando los productos

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8\sqrt{2}}$$ efectuando la suma.

Luego $\csc\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{20}\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{20}\right)} = \dfrac{8\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$ simplificando. ■

Ejercicios 3.3

Verificar cada identidad.

1. $\tan 2\theta = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$ **2.** $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}2\theta}{1+\cos 2\theta}$ **3.** $(\text{sen } 2\beta + \cos 2\beta)^2 = 1 + \text{sen } 4\beta$

4. $1 + \dfrac{1}{\sec 2\beta} = \dfrac{\text{sen}2\beta}{\tan\beta}$ **5.** $\cos 2\theta = \cos^4\theta - \text{sen}^4\theta$ **6.** $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\text{sen}2\alpha}$

7. $\cos 2\mu = \dfrac{1-\tan^2\mu}{1+\tan^2\mu}$ **8.** $\cos^2 4\alpha - \text{sen}^2 4\alpha = \cos 8\alpha$ **9.** $\text{sen } 6\lambda = 2\,\text{sen } 3\lambda \cos 3\lambda$

10. $\dfrac{\cos 2\theta}{1+\text{sen } 2\theta} = \dfrac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$ **11.** $2\csc 4\mu = \csc 2\mu \sec 2\mu$ **12.** $\text{sen } 3\theta = \text{sen }\theta\,(3 - 4\text{sen}^2\theta)$

13. $2\text{sen}^2 2\alpha + \cos 4\alpha = 1$ **14.** $\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \cos\alpha$ **15.** $\dfrac{2(\tan\alpha - \cot\alpha)}{\tan^2\alpha - \cot^2\alpha} = \text{sen } 2\alpha$

16. $2\cos^2\theta = \dfrac{\cot\theta}{\csc 2\theta}$ **17.** $\cot^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sec\alpha + 1}{\sec\alpha - 1}$ **18.** $\dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \cos 2\alpha$

19. $\dfrac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha} = \sec 2\alpha$ **20.** $\tan 2\theta = \dfrac{2\cot\theta}{\cot^2\theta - 1}$ **21.** $\dfrac{1+\text{sen}2\theta}{\text{sen}2\theta} = 1 + \dfrac{1}{2}\sec\theta\csc\theta$

22. $\text{sen}^3\beta + \cos^3\beta = (\text{sen }\beta + \cos\beta)(1 - \frac{1}{2}\text{sen } 2\beta)$ **23.** $(\text{sen }\beta + \cos\beta)^3 = (\text{sen }\beta + \cos\beta)(1 + \text{sen } 2\beta)$

24. $\text{sen } 4\alpha = 4\text{sen }\alpha\cos\alpha\,(1 - 2\text{sen}^2\alpha)$ **25.** $\cos^2 2\alpha - \text{sen}^4\alpha = \cos^2\alpha - \frac{3}{2}\text{sen}^2 2\alpha$

26. $\text{sen}^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$ **27.** $\dfrac{\cos\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha} - \dfrac{\cos\alpha - \text{sen}\alpha}{\cos\alpha + \text{sen}\alpha} = 2\tan 2\alpha$

28. $\dfrac{\cos^3\alpha + \text{sen}^3\alpha}{\cos\alpha + \text{sen}\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}2\alpha$ **29.** $\dfrac{1+\text{sen}2\alpha + \cos 2\alpha}{1+\text{sen}2\alpha - \cos 2\alpha} = \cot\alpha$

Expresar en términos de coseno con exponente 1.

30. $\cos^4 2\alpha$ **31.** $\text{sen}^4 3\alpha$ **32.** $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$ **33.** $\cos^6\alpha$

34. $\text{sen}^2\alpha\,\cos^4\alpha$ **35.** $\text{sen}^4\alpha\,\cos^4\alpha$ **36.** $\dfrac{1}{\sec^4\alpha}$ **37.** $\dfrac{1}{\csc^4\alpha}$

Escribir en forma equivalente utilizando identidades.

38. $2\text{sen } 20° \cos 20°$ **39.** $\cos^2 25° - \text{sen}^2 25°$ **40.** $\dfrac{2\tan 12°}{1-\tan^2 12°}$ **41.** $\dfrac{\text{sen } 18°}{1+\cos 18°}$

42. $4\text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$ **43.** $3\cos^2\frac{2\pi}{7} - 3\,\text{sen}^2\frac{2\pi}{7}$ **44.** $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{9}}{1-\tan^2\frac{\pi}{9}}$ **45.** $\dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{\text{sen}\frac{2\pi}{7}}$

46. $2\cos^2\frac{2\pi}{9} - 1$ **47.** $1 - 2\text{sen}^2\frac{\pi}{11}$ **48.** $\sqrt{\dfrac{1-\cos 35°}{2}}$ **49.** $\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}}$

Determinar el valor exacto.

50. sen 195° **51.** tan 202.5° **52.** csc $\frac{7\pi}{8}$ **53.** cos $\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ **54.** sec $\frac{15\pi}{8}$ **55.** tan $\frac{9\pi}{8}$

56. sen 105° **57.** cos 105° **58.** sen 337.5° **59.** sen 157°30' **60.** cot $\frac{15\pi}{8}$ **61.** csc $\frac{23\pi}{8}$

Determinar el valor exacto de cos 2α, sen 2α, csc 2α, cot 2α, sen$\frac{\alpha}{2}$, cos$\frac{\alpha}{2}$, tan$\frac{\alpha}{2}$, sec$\frac{\alpha}{2}$, y el cuadrante donde se encuentra 2α, según las condiciones dadas.

62. sen $\alpha = \frac{6}{7}$, con α que está en el II cuadrante.

63. csc $\alpha = \frac{4}{3}$, con α que está en el II cuadrante.

64. tan $\alpha = \frac{6}{5}$, con α que está en el III cuadrante.

65. cot $\alpha = 2$, con α que está en el I cuadrante.

66. sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

67. tan $\alpha = -\frac{6}{5}$, con $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

68. cos $\alpha = -\frac{2}{3}$, con $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

69. sen $\alpha = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Determinar el valor exacto de sen$\frac{\alpha}{2}$, cos$\frac{\alpha}{2}$, tan$\frac{\alpha}{2}$ y sec $\frac{\alpha}{2}$, según las condiciones dadas.

70. cos $\alpha = -\frac{5}{8}$, con α que está en el III cuadrante.

71. csc $\alpha = \frac{4}{3}$, con α que está en el I cuadrante.

72. tan $\alpha = -\frac{1}{5}$, con α que está en el IV cuadrante.

73. cot $\alpha = 2$, con α que está en el III cuadrante.

74. sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

75. tan $\alpha = -\frac{6}{5}$, con $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

76. cos $\alpha = -\frac{2}{3}$, con $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

77. sen $\alpha = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

78. Encontrar el valor exacto de sen θ y cos θ, dado que cot $2\theta = -\frac{3}{4}$ y $0° < \theta < 90°$

79. Encontrar el valor exacto de sen θ y cos θ, dado que sec $2\theta = -\frac{5}{4}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

80. Encontrar el valor exacto de tan θ y sec θ, dado que sen $2\theta = \frac{3}{5}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

81. Si cot $2\phi = -\frac{3}{7}$, el lado terminal de 2ϕ está en el cuarto cuadrante, sen $\mu = \frac{4}{5}$ y el lado terminal de μ está en el segundo cuadrante, determinar:

a) $\cos(\phi + \mu)$ **b)** $\tan(\phi - \mu)$ **c)** $\text{sen}(3\phi + 2\mu)$ **d)** $\sqrt{2}\sec 3\phi - 5\cos\frac{\mu}{2}$

3.4 ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

En las secciones anteriores se trató acerca de las identidades trigonométricas, las cuales son igualdades donde intervienen razones trigonométricas. Dicha igualdad es válida para todo valor asignado a la variable (ángulo) y que la razón trigonométrica respectiva esté definida.

En álgebra se define una ecuación como una igualdad donde intervienen variables. Dependiendo de las características de esta igualdad, así se clasifica el tipo de ecuación que se tenga. En este momento es de interés, las ecuaciones trigonométricas, por tal razón se espera que una de las características de esta igualdad es que al menos se tenga un término trigonométrico con una incógnita (ángulo desconocido). Estas ecuaciones pueden satisfacerse para algún o algunos valores de la variable o quizá no se satisfaga para ningún valor de la variable. Los valores que satisfacen la ecuación se llaman **soluciones** y al conjunto de soluciones se le llama **conjunto solución** de la ecuación (**C. S**). Si ésta no tiene valores que satisfacen la ecuación, se dice que no hay soluciones, o que el conjunto solución para ésta, es vacío. Estos valores o soluciones pueden darse en radianes o en grados.

Para resolver ecuaciones trigonométricas, se deben recordar elementos del álgebra como: **la factorización, simplificación de expresiones algebraicas racionales, así como también la aplicación adecuada de las identidades trigonométricas enunciadas anteriormente**. Para su facilidad, se debe considerar una razón trigonométrica en particular como una "variable" y resolver para ésta.

Son algunos ejemplos de ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$ **b)** $2\operatorname{sen}\phi = 1$ **c)** $\tan^2\beta - 3 = 0$ **d)** $2\tan x - \cot x - 1 = 0$ entre otras.

Véase como encontrar el conjunto solución de ecuaciones trigonométricas:

Ejemplo 1 Encontrar las soluciones generales para cada ecuación.

a) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$ **b)** $\tan^2\beta - 3 = 0$ **c)** $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

d) $\cos\alpha\sec\alpha = 1$ **e)** $\operatorname{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $2\operatorname{sen}^2\beta - \cos\beta - 1 = 0$

g) $(2\cos\mu - 1)\left(\operatorname{sen}\mu + \sqrt{2}\right) = 0$ **h)** $\cos\mu\operatorname{sen}\mu = \operatorname{sen}\mu$ **i)** $\operatorname{sen}3x\cos 2x - \cos 2x = 0$

j) $\dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x\tan 2x} = -\sqrt{3}$ **k)** $\operatorname{sen}\varphi = 1 + \cos\varphi$ **l)** $\operatorname{sen}2\beta + \cos\beta = 0$

m) $\tan\frac{x}{2} - \operatorname{sen}x = 0$ **n)** $\tan\beta + \sec\beta = \sqrt{3}$ **o)** $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$

p) $\cos x\cos 3x - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}3x = 0$ **q)** $\cos x\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}x\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución:

a) $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$

Para resolver ecuaciones trigonométricas, es necesario recordar algunos elementos tales como: ubicar el cuadrante donde la razón trigonométrica sea positiva o negativa, dependiendo de la condición que se dé, recordar las razones trigonométricas para los ángulos especiales (30°, 45°, 60°, los cuadrantales y los múltiplos de éstos), aplicar todas las identidades enunciadas anteriormente, factorizar, determinar ángulos de referencia, entre otros.

Véase:

$2\text{sen}\,\theta + 1 = 0$ **ecuación dada.**

$\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}$ despejando para el término trigonométrico; **recordando que el seno es negativo en el tercer y cuarto cuadrante y que sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (ángulo de referencia).**

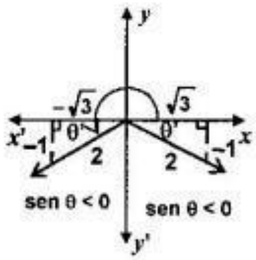


fig .1

En la fig. 1, se muestra donde el seno es negativo y se representan los ángulos de referencia en ambos cuadrantes que corresponden a 30° ó $\frac{\pi}{6}$.

Nótese que:

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ ó $\theta = \frac{11\pi}{6}$ determinando el valor de θ $\left(\theta = \pi + \frac{\pi}{6}\right.$ y $\left.\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ **ver fig. 1.**

$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ó $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in Z$ El sen $\theta = -\frac{1}{2}$ para infinitos ángulos coterminales; es decir, si $\theta = \frac{7\pi}{6}$ y se repite cada $2k\pi$ con $k \in Z$. Lo mismo ocurre cuando $\theta = \frac{11\pi}{6}$.

$\theta = \frac{7\pi + 12k\pi}{6}$ ó $\theta = \frac{11\pi + 12k\pi}{6}$ simplificando.

$\textbf{C. S} = \left\{\frac{7\pi + 12k\pi}{6}, \frac{11\pi + 12k\pi}{6} \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales de la ecuación en radianes.

Observación: Si se pidiera el conjunto solución en un intervalo específico, lo conveniente es encontrar **las** soluciones generales y luego asignarle valores a k, de tal manera que el ángulo encontrado, satisfaga **la** ecuación en dicho intervalo.

Para el caso si en el inciso **a) se pide el conjunto solución en el $[0,4\pi]$, se debe asignar a k los valores de 0 y 1 y sustituir cada uno de ellos, en la ecuación que determina las soluciones generales antes encontrados para** θ $\left(\theta = \frac{7\pi + 12k\pi}{6}\right.$ ó $\left.\theta = \frac{11\pi + 12k\pi}{6}\right)$ y se concluye que el

$\textbf{C. S.} = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}.$

Si para ésta misma se piden las soluciones en el $[-2\pi, 2\pi]$, **se debe asignar a k los valores de –1 y 0 y sustituir cada uno de ellos, de forma similar que el caso anterior** concluyendo que el $\textbf{C. S.} = \left\{-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$

Nota: No siempre los valores asignados a k son los mismos, se debe probar con valores cercanos a cero, tomar positivos y negativos y probar en el intervalo que se piden, si satisface la igualdad.

b) $\tan^2\beta - 3 = 0$ ecuación dada.

$\tan^2\beta = 3$ despejando para el término trigonométrico ($\tan^2\beta$).

$\tan\beta = \pm\sqrt{3}$ despejando para $\tan\beta$.

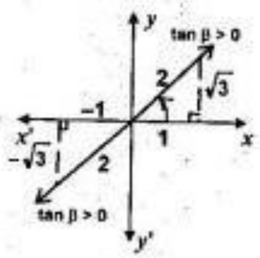


fig .2

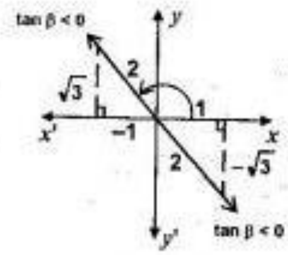


fig .3

$\tan\beta = \sqrt{3}$ la tangente es positiva

$\tan\beta = -\sqrt{3}$ la tangente es negativa

Nótese que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$, además recuérdese que el valor de la tangente se repite cada π radian ó cada 180°. Luego

si $\tan\beta = \sqrt{3}$ y $\tan\beta = -\sqrt{3}$

$\beta = \frac{\pi}{3} + k\pi$ y $\beta = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ determinando las soluciones generales.

$\beta = \frac{\pi + 3k\pi}{3}$ y $\beta = \frac{2\pi + 3k\pi}{3}$ simplificando.

C. S $= \left\{\frac{\pi + 3k\pi}{3}, \frac{2\pi + 3k\pi}{3} \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

c) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ecuación dada.

$\alpha - \frac{\pi}{4} = \pi$ valor del ángulo donde el coseno de éste es −1. Recuérdese que $\cos\pi = -1$:

$\alpha - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$ indicando las soluciones generales. No olvide que el período para el **cos** es 2π.

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$ despejando para α.

$\alpha = \frac{5\pi + 8k\pi}{4}$ simplificando.

C. S $= \left\{\frac{5\pi + 8k\pi}{4} \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

d) $\cos\alpha \sec\alpha = 1$ ecuación dada.

$\cos\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1$ aplicando identidad $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$ efectuando el producto.

$1 = 1$ simplificando. **Obsérvese que ésta es una identidad y que es verdadera para cualquier valor de α excepto donde el $\cos\alpha = 0$.**

$\alpha \in R - \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ todos los números reales menos los valores donde el coseno es cero.

C. S $= R - \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2} \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

e) $\text{sen}\,(2\theta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ecuación dada**.

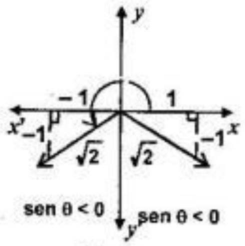


fig .4

Recuérdese que el seno es negativo en el tercer y cuarto cuadrante y que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$.

Luego

$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4}$ ó $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4}$ tomando el valor para cada ángulo donde el seno es igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ó $2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tomando las soluciones generales.

$2\theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $2\theta = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ transponiendo términos.

$\theta = \frac{11\pi + 24k\pi}{24}$ ó $\theta = \frac{17\pi + 24k\pi}{24}$ simplificando.

C. S $= \left\{\frac{11\pi + 24k\pi}{24}, \frac{17\pi + 24k\pi}{24} \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

Encontrando el conjunto solución de la ecuación del inciso e), en el intervalo de $[-2\pi, 3\pi]$

Retomando las soluciones generales obtenidas y asignándoles a k los valores de −2, −1, 0, 1 y 2, además sustituyendo los valores especificados para k en la misma, se obtiene que el **C. S.** $= \left\{-\frac{37\pi}{24}, -\frac{31\pi}{24}, -\frac{13\pi}{24}, -\frac{7\pi}{24}, \frac{65\pi}{24}, \frac{59\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}\right\}$.

f) $2\text{sen}^2\beta - \cos\beta - 1 = 0$ **ecuación dada**. Nótese que hay tres términos con dos razones trigonométricas distintas.

$2(1 - \cos^2\beta) - \cos\beta - 1 = 0$ aplicando identidad $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, para tener una sola razón trigonométrica.

$2 - 2\cos^2\beta - \cos\beta - 1 = 0$ efectuando el producto.

$2\cos^2\beta + \cos\beta - 1 = 0$ simplificando. Nótese que se obtuvo un trinomio de forma cuadrático.

$(2\cos\beta - 1)(\cos\beta + 1) = 0$ factorizando (tanteo).

$2\cos\beta - 1 = 0$ ó $\cos\beta + 1 = 0$ igualando cada factor con 0.

$\cos\beta = \frac{1}{2}$ ó $\cos\beta = -1$ despejando.

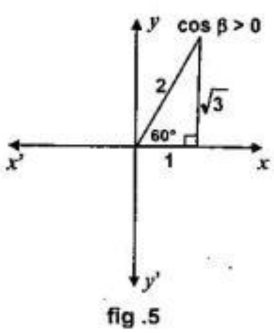


fig .5

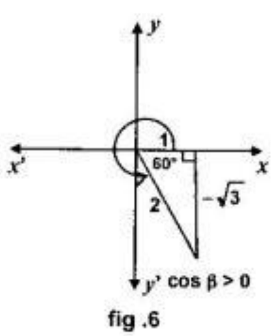


fig .6

Para el primer factor, recordando que el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y que si $\cos\beta = \frac{1}{2}$, se tiene que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$. Luego, se tiene que $\beta = \frac{\pi}{3}$ ó $\beta = \frac{5\pi}{3}$.
Para el segundo factor, ya que $\cos\beta = -1$ se tiene que $\beta = \pi$ y en general, $\beta = \pi + 2k\pi$.

Generalizando las soluciones se tiene que: $\beta = \pi + 2k\pi$, $\beta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $\beta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

En conclusión **C. S** = $\left\{\frac{\pi+6k\pi}{3}, \frac{5\pi+6k\pi}{3}, \pi+2k\pi \text{ con } k\in Z\right\}$ indicando las soluciones generales

Observación: cuando se tiene el producto de dos factores igualados a 0, **NO** debe pasar a dividir uno de ellos, ya que se pierden soluciones y el conjunto solución no sería el correcto.

g) $(2\cos\mu - 1)(\text{sen}\mu + \sqrt{2}) = 0$ — **ecuación dada**. Nótese que la expresión ya está factorizada.

$2\cos\mu - 1 = 0$ ó $\text{sen}\,\mu + \sqrt{2} = 0$ — igualando cada factor con 0.

$\cos\mu = \frac{1}{2}$ ó $\text{sen}\,\mu = -\sqrt{2}$ — despejando cada término trigonométrico.

Recuérdese que el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y el ángulo de referencia es $\mu' = \frac{\pi}{3}$. Esto implica que $\mu = \frac{\pi}{3}$, ó $\mu = \frac{5\pi}{3}$. Tomando las soluciones generales, se tiene que $\mu = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $\mu = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. Véase las siguientes gráficas.

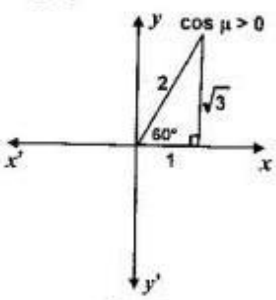


fig .7

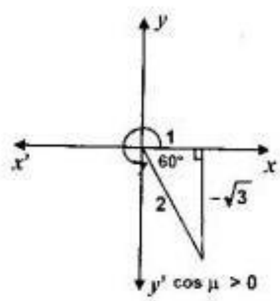


fig .8

En el segundo factor se tiene que $\text{sen}\,\mu = -\sqrt{2}$, lo cual no es posible ya que $-1 \le$ **sen** $\mu \le 1$. En este caso se dice que existe una solución extraña y que para el factor $\text{sen}\,\mu = -\sqrt{2}$, no hay soluciones. Luego:

C. S = $\left\{\frac{\pi+6k\pi}{3}, \frac{5\pi+6k\pi}{3} \text{ con } k\in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

h) $\cos\mu\,\text{sen}\,\mu = \text{sen}\,\mu$ — **ecuación dada.**

$\cos\mu\,\text{sen}\,\mu - \text{sen}\,\mu = 0$ — comparando con cero.

$\text{sen}\,\mu(\cos\mu - 1) = 0$ — factorizando.

$\text{sen}\,\mu = 0$ ó $\cos\mu - 1 = 0$ — comparando cada factor con cero.

$\text{sen}\,\mu = 0$ ó $\cos\mu = 1$ — despejando para cada término.

Nuevamente se dice que **el seno es igual a 0,** si $\mu = \pi$ ó $\mu = 2\pi$ y que el **coseno es igual a 1 si** $\mu = 0$ ó $\mu = 2\pi$. Generalizando; el **seno es igual a 0, cuando el ángulo es igual a** $k\pi$, y el **coseno es igual a 1** cuando el ángulo es igual a $2k\pi$, con $k \in Z$.

Luego **C. S** = $\{k\pi, \text{ con } k\in Z\}$ indicando las soluciones generales.

i) $\text{sen } 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$ ecuación dada.

$\cos 2x\,(\text{sen } 3x - 1) = 0$ factorizando (factor común).

$\cos 2x = 0$ ó $\text{sen } 3x - 1 = 0$ comparando cada factor con cero.

$\cos 2x = 0$ ó $\text{sen } 3x = 1$ despejando para cada término.

El coseno es igual a 0 cuando el ángulo es igual a $\frac{\pi}{2}$ y cuando el ángulo es igual a $\frac{3\pi}{2}$ y el seno es igual a 1 cuando el ángulo es igual a $\frac{\pi}{2}$ únicamente. Observando que el argumento del factor coseno, es $2x$ y el del término seno es $3x$, luego generalizando se obtiene que si:

$\cos 2x = 0$ ó $\text{sen } 3x = 1$

entonces $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ó $3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ generalizando para cada término trigonométrico.

$2x = \frac{\pi + 2k\pi}{2}$ ó $3x = \frac{\pi + 4k\pi}{2}$ simplificando.

$x = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$ ó $x = \frac{\pi + 4k\pi}{6}$ despejando para x.

C. S $= \left\{ \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \frac{\pi + 4k\pi}{6}, \text{ con } k \in Z \right\}$ indicando las soluciones generales.

j) $\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = -\sqrt{3}$ ecuación dada.

$\tan(x + 2x) = -\sqrt{3}$ aplicando la identidad $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.

$\tan 3x = -\sqrt{3}$ simplificando.

Nuevamente se tiene que la tangente de un ángulo es negativa en el segundo y cuarto cuadrante. Y como el ángulo de referencia, según lo indicado anteriormente es $\frac{\pi}{3}$, los ángulos buscados son $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, en donde el período de ésta, es π.

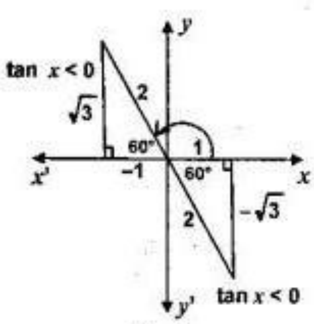


fig .9

$\tan 3x = -\sqrt{3}$ retomando.

$3x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ generalizando (el periodo es π).

$3x = \frac{2\pi + 3k\pi}{3}$ simplificando.

$x = \frac{2\pi + 3k\pi}{9}$ despejando para x.

C. S $= \left\{ \frac{2\pi + 3k\pi}{9}, \text{ con } k \in Z \right\}$ indicando las soluciones generales.

k) $\operatorname{sen}\varphi = 1 + \cos\varphi$ — ecuación dada.

$(\operatorname{sen}\varphi)^2 = (1 + \cos\varphi)^2$ — elevando al cuadrado. **Aquí, debido a esta operación, se podría obtener soluciones extrañas, por tal razón se debe comprobar cada valor obtenido en la ecuación original.**

$\operatorname{sen}^2\varphi = 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi$ — desarrollando el binomio.

$1 - \cos^2\varphi = 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi$ — aplicando identidad $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, en el miembro izquierdo.

$0 = 2\cos\varphi + 2\cos^2\varphi$ — simplificando.

$\cos\varphi + \cos^2\varphi = 0$ — aplicando simetría y simplificando.

$\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi) = 0$ — factorizando (factor común).

$\cos\varphi = 0$ ó $\cos\varphi = -1$ — despejando para cada término trigonométrico.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ó $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ó $\varphi = \pi$ — indicando los valores donde el coseno es **0 ó −1. De estos valores obtenidos, se debe probar cada uno en la ecuación original para ver si la satisface y luego generalizar.**

Comprobación

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \overset{?}{=} 1 + \cos\frac{\pi}{2}$ — asignando el valor de $\frac{\pi}{2}$ a φ.

$1 \overset{?}{=} 1 + 0$ — determinando el valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2}$.

$1 = 1$ — que es verdadero y por tanto $\frac{\pi}{2}$ **es una solución.**

Si $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \overset{?}{=} 1 + \cos\frac{3\pi}{2}$ — asignando el valor de $\frac{3\pi}{2}$ a φ.

$-1 \overset{?}{=} 1 + 0$ — determinando el valor de $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$ y $\cos\frac{3\pi}{2}$.

$-1 \neq 1$ — no satisface la ecuación y por tanto $\frac{3\pi}{2}$ **no es una solución.**

Si $\varphi = \pi$

$\operatorname{sen}\pi \overset{?}{=} 1 + \cos\pi$ — asignando el valor de π a φ.

$0 \overset{?}{=} 1 + (-1)$ — determinando el valor de $\operatorname{sen}\pi$ y $\cos\pi$.

$0 = 0$ — que es verdadero y por tanto π **es una solución.**

Ahora que se ha verificado cada uno de los valores determinados para φ, y generalizando los que satisfacen la ecuación se tiene:

$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ — soluciones generales, ya que el coseno se hacer cero en cada $k\pi$.

$\varphi = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$ — soluciones generales, ya que el coseno es −1 y se repite cada 2π.

Luego $\mathbf{C.S} = \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2}, \pi + 2k\pi, \text{ con } k \in Z\right\}$ — indicando las soluciones generales.

l) $\operatorname{sen} 2\beta + \cos\beta = 0$ — **ecuación dada.**

$2\operatorname{sen}\beta\cos\beta + \cos\beta = 0$ — aplicando identidad $\mathbf{sen\ 2\beta = 2sen\ \beta\cos\beta}$.

$\cos\beta\,(2\operatorname{sen}\beta + 1) = 0$ — factorizando.

$\cos\beta = 0$ ó $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$ — despejando para cada término trigonométrico.

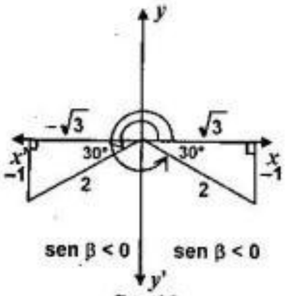


fig .10

Recordando que el coseno es 0 cuando el ángulo es igual a $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ahora, si $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$, luego los ángulos buscados son: $\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$ que generalizando se dice que si $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ò $\beta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$. En conclusión

$$\textbf{C. S} = \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2}, \frac{7\pi + 12k\pi}{6}, \frac{11\pi + 12k\pi}{6} \text{ con } k \in Z\right\}$$

indicando las soluciones generales.

m) $\tan\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$ — **ecuación dada.**

$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x = 0$ — aplicando la identidad $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

$\frac{1-\cos x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = 0$ — efectuando la suma.

$1 - \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 0\,(\operatorname{sen} x)$ — multiplicando por sen x, en ambos lados de la igualdad.

$1 - \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$ — aplicando identidad $\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$ y efectuando el producto.

$\cos^2 x - \cos x = 0$ — simplificando.

$\cos x\,(\cos x - 1) = 0$ — factorizando.

$\cos x = 0$ ó $\cos x = 1$ — comparando cada factor con cero.

El coseno es igual a 0, cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y el coseno es igual a 1, cuando $x = 0$ y cuando $x = 2\pi$ o en general, cuando x toma los valores de $2k\pi$, con $k \in Z$.

En conclusión $\textbf{C. S} = \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2}, 2k\pi, \text{ con } k \in Z\right\}$

n) $\tan\beta + \sec\beta = \sqrt{3}$ — **ecuación dada.**

$(\tan\beta + \sec\beta)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ — elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$\tan^2\beta + 2\tan\beta\sec\beta + \sec^2\beta = 3$ — desarrollando el binomio.

$\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{2\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right) + \frac{1}{\cos^2\beta} = 3$ — expresando en términos de seno y coseno.

$\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{2\operatorname{sen}\beta}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\beta} = 3$ — simplificando.

$\frac{\operatorname{sen}^2\beta + 2\operatorname{sen}\beta + 1}{\cos^2\beta} = 3$ — efectuando la suma.

$\operatorname{sen}^2 \beta + 2\operatorname{sen} \beta + 1 = 3\cos^2 \beta$ multiplicando por $\cos^2 \beta$ ambos lados de la igualdad.

$\operatorname{sen}^2 \beta + 2\operatorname{sen} \beta + 1 = 3(1 - \operatorname{sen}^2 \beta)$ aplicando identidad $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.

$4\operatorname{sen}^2 \beta + 2\operatorname{sen} \beta - 2 = 0$ efectuando el producto, simplificando y aplicando simetría.

$2\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen} \beta - 1 = 0$ dividiendo por 2 ambos lados de la igualdad.

$(2\operatorname{sen} \beta - 1)(\operatorname{sen} \beta + 1) = 0$ factorizando.

$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}$ ó $\operatorname{sen} \beta = -1$ despejando para cada término trigonométrico.

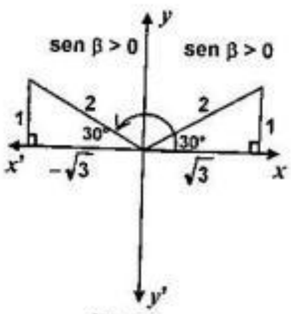


fig .11

Si sen $\beta = \frac{1}{2}$, se tiene que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$, luego los ángulos buscados son $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ ya que el seno es positivo en el primer y segundo cuadrante. Además sen $\beta = -1$, si $\beta = \frac{3\pi}{2}$. **No olvidar que en este caso se debe verificar cada solución encontrada ya que se ha elevado al cuadrado y podría haber soluciones extrañas.**

Comprobación

Si $\beta = \frac{\pi}{6}$

$\tan \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{6} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}$ asignando a β el valor de $\frac{\pi}{6}$ en la ecuación original.

$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}$ determinando el valor de $\tan\frac{\pi}{6}$ y $\sec \frac{\pi}{6}$.

$\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ que es verdadero, por tanto $\frac{\pi}{6}$ **es solución**.

Si $\beta = \frac{5\pi}{6}$

$\tan \frac{5\pi}{6} + \sec \frac{5\pi}{6} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}$ asignando a β el valor de $\frac{5\pi}{6}$ en la ecuación original.

$-\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \stackrel{?}{=} \sqrt{3}$ determinando el valor de $\tan\frac{5\pi}{6}$ y $\sec \frac{5\pi}{6}$.

$-\frac{3\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{3}$ que es falso, luego $\frac{5\pi}{6}$ **no es solución de la ecuación.**

Si $\beta = \frac{3\pi}{2}$

$\tan \frac{3\pi}{2} + \sec \frac{3\pi}{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}$ asignando a β el valor de $\frac{3\pi}{2}$ en la ecuación original. **Note que** $\tan \frac{3\pi}{2}$ y $\sec \frac{3\pi}{2}$ **no están definidas**, luego $\frac{3\pi}{2}$ **no es solución de la ecuación.**

$\textbf{C. S} = \left\{\frac{\pi + 12k\pi}{6}, \text{ con } k \in Z\right\}$ indicando las soluciones generales.

o) $\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ — ecuación dada.

$\frac{1-\cos x}{2} + \cos x = 1$ — tomando la identidad $\text{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$ ó $\text{sen}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2}$

$\frac{1-\cos x}{2} = 1 - \cos x$ — transponiendo términos.

$1 - \cos x = 2(1 - \cos x)$ — multiplicando por 2 ambos lados de la igualdad.

$\cos x = 1$ — Simplificando y despejando para el término trigonométrico.

$x = 2\pi$ — valor para el cual el coseno es igual a 1.

Generalizando se tiene $x = 2\pi + 2k\pi$ y

$\text{C. S} = \{2k\pi, \text{ con } k \in Z\}$ — indicando las soluciones generales.

p) $\cos x \cos 3x - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, 3x = 0$ — ecuación dada.

$\cos(x + 3x) = 0$ — aplicando la identidad $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

$\cos 4x = 0$ — simplificando.

$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ — el coseno se hace cero en $\frac{\pi}{2}$ y se repite cada π.

$4x = \frac{\pi + 2k\pi}{2}$ — efectuando la suma.

$x = \frac{\pi + 2k\pi}{8}$ — despejando para x.

$\text{C. S} = \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{8}, \text{ con } k \in Z\right\}$ — soluciones generales.

q) $\cos x\, \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — ecuación dada.

$\text{sen}(x + 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — aplicando identidad $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

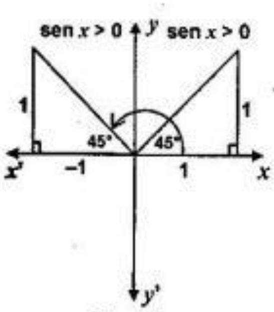


fig .12

$\text{sen}\, 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — simplificando.

$3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ó $3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ — con auxilio del ángulo de referencia.

$3x = \frac{\pi + 8k\pi}{4}$ ó $3x = \frac{3\pi + 8k\pi}{4}$ — efectuando las sumas.

$x = \frac{\pi + 8k\pi}{12}$ ó $x = \frac{3\pi + 8k\pi}{12}$ — despejando para x.

$\text{C. S} = \left\{\frac{\pi + 8k\pi}{12}, \frac{3\pi + 8k\pi}{12} \text{ con } k \in Z\right\}$ — soluciones generales. ■

Para todas las ecuaciones dadas anteriormente, las soluciones son valores exactos, pero se pueden dar situaciones donde no se obtengan estos valores exactos. Si fuese este el caso, para determinar el conjunto solución se darán soluciones aproximadas, y para ello es necesario hacer uso de una calculadora científica. Enseguida se dan las instrucciones para el uso de la calculadora.

Instrucciones para el uso de la calculadora

Las calculadoras científicas muestran las teclas **sin**, **cos** y **tan** que permite determinar el valor de estas razones trigonométricas para ángulos, siempre que las mismas estén definidas. Los valores de las razones **csc**, **sec** y **cot** se obtienen utilizando las identidades recíprocas y luego con el auxilio de la tecla recíproca que en la calculadora la muestra x^{-1} o también pudiese aparecer como $1/x$. **Es muy importante asegurarse del "modo" en el que encuentra su calculadora: grado o radianes**. Se debe observar si el ángulo al cual se le determinará la razón trigonométrica, esta dado en grados o en radianes. En la calculadora, en la parte superior de la pantalla muestra una D ó Deg para indicarle que la medida del ángulo lo considerará en grados, o mostrará en la misma posición que la anterior, una R ó Rad, para indicar que el ángulo está medido en radianes.

Cada calculadora es distinta, dependiendo del modelo, se recomienda consultar el manual. Para seleccionar una de éstas dos opciones (grado o radian), se debe identificar una tecla que muestra la palabra **MODE**, presiónela una o dos veces hasta que le indique las opciones (Deg, Rad, Grad) y presionar el número que corresponde. Para el caso, para una calculadora CASIO modelo $fx - 350$MS, en la parte superior a la derecha aparece la tecla ON al lado de la tecla MODE, presionando dos veces consecutivas la tecla MODE, indica las opciones **Deg** **Rad** **Gra**, presionar 1 si se desea trabajar con
1 **2** **3**
grados ó 2 si desea trabajar en radianes.

No olvide hacer el cambio cada vez que lo necesite (su calculadora debe permanecer en grados, salvo que se desee trabajar en radianes se debe hacer el cambio, pero al terminar debe volver al modo de grados).

Véase algunos ejemplos:

Si se necesita determinar el valor de sen 30°, primero hay que asegurarse que la calculadora esté en el modo de grados, luego presionar la tecla **sin**, luego 30 y por último la tecla "=", obteniendo el resultado de 0.5 que es un valor exacto. Nótese que no es necesario escribir 30°, ya que la calculadora está en el modo de grado. Si ahora se desea calcular cos 45°, se presiona la tecla **cos**, luego 45 y luego la tecla "=", obteniendo el valor aproximado de 0.707106781, que es una aproximación de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (valor exacto de cos 45°).

Determinando ahora el valor de cot 40°

La calculadora no cuenta con esta tecla, pero se sabe que la cotangente es la recíproca de la tangente, por tal razón se utiliza la tecla **tan** y la tecla que muestra x^{-1}.
Calculando el valor de **cot 40°:** primero presionar la tecla **tan**, seguido de 40 para obtener un resultado aproximado de 0.839099631, sin borrar de la pantalla este resultado, presionar la tecla x^{-1} seguido de la tecla "=" obteniendo el valor aproximado de 1.19175353593. La aproximación de un valor determinado, depende de su utilidad o de lo acordado con el profesor. Para determinar valores para la secante y la cosecante, se utilizan sus recíprocas respectivas y siguiendo el mismo procedimiento utilizado para la cotangente.

Trabajando en radianes: cambiar la calculadora al modo radianes y determinar el valor de sen $\frac{\pi}{2}$.
Primero hay que asegurarse de haber cambiado la calculadora al modo de radianes, luego presionar la tecla **sin**, ahora escriba $\frac{\pi}{2}$ (utilizar paréntesis o la tecla de fracción si la calculadora lo permite) seguidamente la tecla "=" obteniendo así el valor exacto de 1; que es el valor esperado.

Calculando el valor de cos 2

Con la calculadora en el modo de radianes, presionar la tecla **cos**, luego presionar la tecla 2 y por último la tecla "=" obteniendo el valor aproximado de –0.416146836. Obsérvese que este valor es negativo, porque un ángulo de 2 radianes, está en el segundo cuadrante.

Calculando el valor de csc 3

Con la calculadora en el modo de radianes, presionar la tecla **sin**; ya que la cosecante es la recíproca del seno, luego presionar la tecla 3, luego la tecla "=", obteniendo el valor aproximado de 0.141120008, ahora presionar la tecla x^{-1} seguido de la tecla "=", obteniendo el valor aproximado de 7.086167396, que es el valor aproximado de csc 3.

¡NO OLVIDAR CAMBIAR SU CALCULADORA AL MODO DE GRADO CADA VEZ QUE SE HAYA TRABAJADO EN EL MODO DE RADIANES!

Ejemplo 2 Encontrar las soluciones generales para cada ecuación en grados y en radianes aproximando a dos cifras decimales.

a) $3\text{sen}^2\beta - 5\text{sen}\,\beta - 2 = 0$ **b)** $2\tan^2 x - 5\tan x - 3 = 0$ **c)** $\sec^2 x - 5\sec x - 6 = 0$

Solución:

a) $3\text{sen}^2\beta - 5\text{sen}\,\beta - 2 = 0$ ecuación dada.

$(3\text{sen}\,\beta + 1)(\text{sen}\,\beta - 2) = 0$ factorizando.

$\text{sen}\,\beta = -\frac{1}{3}$ ó $\text{sen}\,\beta = 2$ despejando para cada término trigonométrico.

La expresión $\cancel{\text{sen}\,\beta} = 2$, **se descarta, ya que el seno de un ángulo no puede ser mayor que uno (compruébelo con su calculadora).**

Ahora, si $\text{sen}\,\beta = -\frac{1}{3}$, implica que el ángulo buscado está en el tercer o cuarto cuadrante, además el valor al cual está igualado sen β, no es un valor especial, lo que implica que se debe recurrir a una calculadora científica para aproximar el ángulo de referencia y luego indicar las soluciones generales, las cuales también serán aproximadas.

Determinando el ángulo de referencia de la siguiente manera:

Con la calculadora y en el modo de grado, utilizar la función $\mathbf{sin^{-1}}$, la cual se encuentra en la misma tecla de sin, solo que en la segunda función y que en la calculadora aparece en el extremo superior izquierdo. Para cambiar a la segunda función se debe usar la tecla **SHIFT** (que significa alternar).

Luego si $\text{sen}\,\beta' = \frac{1}{3}$ (**β' es el ángulo de referencia de β**), entonces $\beta' = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ y $\beta' \approx 19.47°$, éste es el ángulo de referencia, mismo que servirá para encontrar los ángulos buscados, para luego encontrar las soluciones generales.

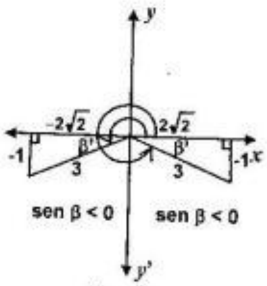


fig .13

Observando la fig.13, se tiene que uno de los ángulos buscados está en el tercer cuadrante, que el ángulo de referencia para éste es $\beta' \approx 19.47°$, luego el valor aproximado de uno de ellos es $180° + 19.47° = 199.47°$ y generalizando las soluciones se obtiene que $\beta \approx 199.47° + 360°k$, para k entero.

El otro ángulo, es $\beta \approx 360° - 19.47°$ ó $\beta \approx 340.53°$, ya que éste está en el cuarto cuadrante y las soluciones generales para este nuevo valor es $\beta \approx 340.53° + 360°k$, para k entero.

Luego **C. S** $\approx \{\ \mathbf{199.47° + 360°}k,\ \mathbf{340.53° + 360°}k,\ \text{con}\ \ k \in Z\}$ indicando las soluciones generales.

Encontrando las soluciones en radianes

Primero cambiar la calculadora al modo de radianes y retomando sen $\beta' = \frac{1}{3}$, entonces $\beta' = \textbf{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ y $\beta' \approx 0.34$, éste es el ángulo de referencia dado en radianes, mismo que servirá para encontrar los ángulos buscados, para luego encontrar las soluciones generales.

Observando la fig.13, se tiene que uno de los ángulos buscados, está en el tercer cuadrante, que el ángulo de referencia es $\beta' \approx 0.34$, luego el valor aproximado de uno de ellos es $\pi + 0.34$ y las solución general, en este cuadrante es $\beta \approx \pi + 0.34 + 2k\pi$, para k entero.

El otro ángulo, es $\beta \approx 2\pi - 0.34$, ya que éste está en el cuarto cuadrante y las soluciones generales para este nuevo valor es $\beta \approx 2\pi - 0.34 + 2k\pi$, para k entero.

Luego **C. S** $\approx \{\ \pi + \mathbf{0.34} + 2k\pi,\ 2\pi - \mathbf{0.34} + 2k\pi,\ \textbf{con}\ \ k \in Z\}$ indicando las soluciones generales.

CAMBIE SU CALCULADORA AL MODO DE GRADO, DESPUES DE TRABAJAR EN RADIANES

b) $2\tan^2 x - 5\tan x - 3 = 0$ — **ecuación dada.**

$(2\tan x + 1)(\tan x - 3) = 0$ — factorizando.

$\tan x = -\frac{1}{2}$ ó $\tan x = 3$ — despejando para cada término.

$x' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ó $x' = \tan^{-1}(3)$ — determinando los ángulos de referencia (ángulo agudo y positivo).

$x' \approx 26.57°$ ó $x' \approx 71.57°$ — aproximando los ángulos de referencia.

$x \approx 180° - 26.57° \approx 153.43°$ ó $x \approx 71.57°$ — Nótese que en el primer factor, **la tangente es negativa** por lo que el ángulo está en el segundo cuadrante y para el segundo factor la tangente es positiva por lo que el ángulo está en el primer cuadrante y éste coincide con el ángulo de referencia.

Las soluciones generales son: $x \approx 153.43° + 180°k$ ó $x \approx 71.57° + 180°k$, para k entero.

Recuérdese que el periodo de la tangente es 180°.

Luego **C. S** $\approx \{\ \mathbf{153.43° + 180°}k,\ \mathbf{71.57° + 180°}k,\ \textbf{con}\ \ k \in Z\}$ indicando las soluciones generales.

Dando las soluciones en radianes

Cambiar la calculadora al modo de radianes

Si $\tan x = -\frac{1}{2}$ ó $\tan x = 3$ despejando para cada término.

$x' = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ó $x' = \tan^{-1}(3)$ determinando los ángulos de referencia.

$x' \approx 0.46$ ó $x' \approx 1.25$ aproximando los ángulos de referencia.

$x \approx \pi - 0.46$ ó $x \approx 1.25$ determinando los ángulos.

Las soluciones generales son: $x \approx \pi - 0.46 + k\pi$ ó $x \approx 1.25 + k\pi$, para k entero. **Recuérdese que el periodo de la tangente es π.**

Luego **C. S** $\approx \{\pi - 0.46 + k\pi,\ 1.25 + k\pi,\ \text{con } k \in Z\}$ indicando las soluciones generales.

CAMBIE SU CALCULADORA AL MODO DE GRADO

c) $\sec^2 x - 5\sec x - 6 = 0$ **ecuación dada.**

$(\sec x + 1)(\sec x - 6) = 0$ factorizando.

$\sec x = -1$ ó $\sec x = 6$ despejando para cada término. **Nótese que el primer término está igualado con un valor especial, por tal razón se puede encontrar valores exactos como solución.**

Si $\sec x = -1$, entonces $x = 180°$ valor para el cual la secante es igual a -1.

Si $\sec x = 6$, entonces $\cos x = \frac{1}{6}$ aplicando las identidades recíprocas. **Recuérdese que el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y que el periodo es 360° ó 2π.**

Luego

$x = 180°$ ó $x' = 80.41°$ determinado el ángulo de referencia para el segundo término dado que el primero es un ángulo cuadrantal.

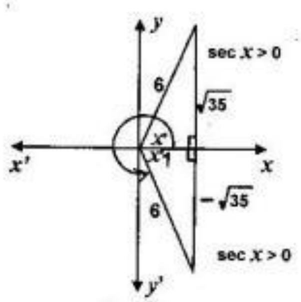


fig .14

Del primer factor se tiene que un grupo de soluciones es $180° + 360k$. Para el segundo factor, un ángulo aproximado es $80.41°$ y el otro es $279.59°$ $(360° - 80.41°)$ y las soluciones generales son: $80.41° + 360°k$ y la otra es $279.59° + 360°k$, para k entero.

C. S $\approx \{180° + 360°k,\ 80.41° + 360°k,\ 279.59° + 360°k,\ \text{con } k \in Z\}$

indicando las soluciones generales.

Dando las soluciones en radianes

Cambiar la calculadora al modo de radianes

Si $\sec x = -1$ ó $\sec x = 6$ retomando los factores.

Si $\sec x = 6$, entonces $\cos x = \frac{1}{6}$ aplicando las identidades recíprocas.

$x = \pi$ ó $x' = 1.40$ determinado el ángulo de referencia para el segundo término en radianes.

$x = \pi$ ó $x \approx 1.40$ ó $x \approx 2\pi - 1.40$ determinando los ángulos en radianes.

$x = \pi + 2k\pi$ ó $x \approx 1.40 + 2k\pi$ ó $x \approx 2\pi - 1.40 + 2k\pi$ determinando las soluciones generales.

Luego **C. S** $\approx \{\pi + 2k\pi, 1.40 + 2k\pi, 2\pi - 1.40 + 2k\pi,\ \text{con } k \in Z\}$ indicando las soluciones generales.

CAMBIE SU CALCULADORA AL MODO DE GRADO

■

Ejercicios 3.4

Determinar el conjunto solución para cada ecuación en el $[0°, 360°]$ y en $[0, 2\pi]$ (en grado y en radianes).

1. $2\cos\beta = 1$ **2.** $2\operatorname{sen}\beta - 1 = 0$ **3.** $\sqrt{2}\operatorname{sen}\beta + 1 = 0$ **4.** $2\cos\varphi - \sqrt{3} = 0$

5. $\tan^2\theta - 3 = 0$ **6.** $\sec\frac{x}{2} + 2 = 0$ **7.** $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ **8.** $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$

Determinar las soluciones generales para cada ecuación.

9. $\cos\beta = \cot\beta$ **10.** $\cos^2 x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$ **11.** $2\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}2\beta = 0$ **12.** $2\operatorname{sen}^2\beta + 3\cos\beta = 0$

13. $\tan 2\beta = 2\cos\beta$ **14.** $\cos 2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0$ **15.** $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ **16.** $4\operatorname{sen}^2\beta - 4\operatorname{sen}\beta + 1 = 0$

17. $\csc\beta + \cot\beta = 1$ **18.** $\operatorname{sen}x + 1 = \cos x$ **19.** $\tan x - 1 = \sec x$ **20.** $2\cos^2\frac{\beta}{2} - 3\cos\frac{\beta}{2} + 1 = 0$

21. $\tan 2x = 2\operatorname{sen}2x$ **22.** $\operatorname{sen}^2 4x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}8x$ **23.** $\sec^2 x + \tan x = 1$ **24.** $\sqrt{3}\operatorname{sen}x = \cos x$

25. $\operatorname{sen}^2 x - 1 = \cos^2 x$ **26.** $4\cos^2\beta - 3 = 0$ **27.** $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}x = -1$ **28.** $2\csc\mu + \operatorname{sen}\mu + 3 = 0$

29. $\cot^2 x + \csc x = 1$ **30.** $2\operatorname{sen}3\varphi\cos 3\varphi = 0$ **31.** $\tan 2x = 3\tan x$ **32.** $\cos^2\beta + 2\operatorname{sen}\beta + 2 = 0$

33. $\operatorname{sen}^3 4x = \operatorname{sen}4x$ **34.** $\cos 8x = \operatorname{sen}4x$ **35.** $\operatorname{sen}10x + \operatorname{sen}5x = 0$ **36.** $\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} + \cos\phi = 1$

37. $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{sen}x$ **38.** $2\cos^2\frac{x}{2} = 2\cos^2 x$ **39.** $\tan^5 x - 9\tan x = 0$ **40.** $\sec 2x = \cos 2x$

41. $\sec x - \cos x = \tan x$ **42.** $\tan\frac{x}{2} = 1 - \cos x$ **43.** $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x = 0$ **44.** $2\cos^2\beta + \operatorname{sen}2\beta = 0$

45. $4\cos 2x + 4\operatorname{sen}^2 x = 3$ **46.** $\cos 2\mu + \cos 4\mu = 0$ **47.** $\csc^2 x = \cot x + 1$ **48.** $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

49. $\sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x = 1$ **50.** $3 - \operatorname{sen}2\mu = \cos 4\mu$ **51.** $\tan 2\mu + 2\operatorname{sen}\mu = 0$ **52.** $\tan 2\mu + 2\cos\mu = 0$

53. $\sec\frac{x}{2} + 2 = 0$ **54.** $\tan\frac{x}{2} + 1 = 0$ **55.** $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 1 = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ **56.** $4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1$

57. $\dfrac{\tan 4x - \tan 2x}{1 + \tan 4x\tan 2x} = -1$ **58.** $\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **59.** $\dfrac{1}{\sec 3x} = \dfrac{1}{2}$ **60.** $\dfrac{1}{\cot\frac{x}{2}} = 1$

61. $\tan^5 x - 4\tan^3 x + 3\tan x = 0$ **62.** $2\operatorname{sen}\beta\cos\beta + \operatorname{sen}\beta - 2\cos\beta - 1 = 0$

63. $\cot^3 x - \cot^2 x - 3\cot x + 3 = 0$ **64.** $2\cos 3x\cos x + 2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}3x = \sqrt{2}$

65. $2\operatorname{sen}x\cos 2x + 2\cos x\operatorname{sen}2x - \sqrt{3} = 0$ **66.** $5\operatorname{sen}6x\cos 2x - 5\cos 6x\operatorname{sen}2x = 0$

Encontrar las soluciones generales, si existen, en cada ecuación aproximando la respuesta a dos decimales. Indique su respuesta en grados y radianes.

67. $\cos\beta = \frac{1}{3}$ **68.** $(3\operatorname{sen}x + 1)(3\operatorname{sen}x + 2) = 0$ **69.** $5\operatorname{sen}^2\beta - 1 = 0$

70. $\tan^2\beta - 2\tan\beta - 8 = 0$ **71.** $\cot^2 x - 5 = 0$ **72.** $12\operatorname{sen}^2\beta - 15\operatorname{sen}\beta - 4 = 0$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO III

Verificar cada identidad indicada.

1. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ **2.** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$ **3.** $1-2\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

4. $\dfrac{2}{\cot x+\tan x} = \operatorname{sen} 2x$ **5.** $\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x} = \dfrac{\sec x+\csc x}{\sec x-\csc x}$ **6.** $\dfrac{\operatorname{sen}\beta+\tan\beta}{\cot\beta+\csc\beta} = \operatorname{sen}\beta\tan\beta$

7. $1+\tan^2 x = \sec^3 x\ \cos x$ **8.** $\dfrac{1+\operatorname{sen}2\beta}{\cos 2\beta} = \dfrac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}$ **9.** $\tan\beta+\cot\beta = \sec\beta\csc\beta$

10. $2\tan y+1 = \dfrac{\cos y+2\operatorname{sen}y}{\cos y}$ **11.** $\csc 2\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}+\cot 2\alpha$ **12.** $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\sec\theta}{2\sec\theta}$

13. $\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha = 1-\dfrac{1}{\csc^2\alpha}$ **14.** $\tan\alpha+\tan\beta = \tan\alpha\ \tan\beta\,(\cot\alpha+\cot\beta)$

15. $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}x}+\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}x} = 2\sec^2 x$ **16.** $1+2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}x\cos x\,(1+\cot x)(1+\tan x)$

Determinar el valor exacto para cada inciso.

17. $\cot 165°$ **18.** $\tan 112.5°$ **19.** $\cot\dfrac{3\pi}{8}$ **20.** $\cos 112.5°$

21. $\operatorname{sen} 345°$ **22.** $\tan\dfrac{23\pi}{12}$ **23.** $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right)$ **24.** $\sec 105°$

25. $\tan\dfrac{x}{2}$, si $\tan x = -\dfrac{7}{5}$ y $\operatorname{sen}x > 0$ **26.** $\cos\dfrac{x}{2}$, si $\operatorname{sen}x = \dfrac{5}{6}$ y $\tan x < 0$

27. $\cos\dfrac{x}{2}$, si $\cot x = \dfrac{3}{2}$ y $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ **28.** $\tan 2x$, si $\operatorname{sen}x = \dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

29. $\operatorname{sen}(x-y)$, si $\operatorname{sen}x = \dfrac{3}{8}$, x está en el primer cuadrante; $\cos y = -\dfrac{3}{4}$ e y está en el segundo cuadrante.

30. $\tan(x+y)$, si $\tan x = \dfrac{7}{3}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; $\sec y = -\dfrac{5}{4}$ y $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$.

31. Si $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ y $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$, determine:

a) $\tan\dfrac{17\pi}{60}$ **b)** $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{60}$ **c)** $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{5}$ **d)** $\cos\dfrac{\pi}{10}$ **e)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ **f)** $\tan\dfrac{\pi}{6}$ **g)** $\sec\dfrac{3\pi}{5}$

Expresar en términos de coseno con exponente igual a 1.

32) $\cos^4(x+y)$ **33.** $\operatorname{sen}^4\dfrac{\alpha}{4}$ **34.** $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha$ **35.** $\dfrac{1}{\csc^4\dfrac{\beta}{2}}$

Determinar las soluciones generales para cada una de las siguientes ecuaciones.

36. $3+3\cos x = 2\operatorname{sen}^2 x$ **37.** $2\cos\alpha = \cot\alpha$ **38.** $\csc\alpha = \sec\alpha$

39. $2\cos\beta\tan\beta-1 = 0$ **40.** $4\cos^2\theta+4\cos\theta = 3$ **41.** $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{3-3\operatorname{sen}x}$

42. $3\cos^2\theta = 3-\operatorname{sen}^2\theta$ **43.** $\tan^2\theta+3 = 2\sec^2\theta$ **44.** $\csc^2\theta = 2\cot^2\theta$

45. $\operatorname{sen}\alpha+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha = 0$ **46.** $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi$ **47.** $\tan\mu = \operatorname{sen}2\mu$

48. $2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} = 1$ **49.** $\dfrac{2\tan 3x}{1-\tan^2 3x} = 1$ **50.** $2\operatorname{sen}^2 2\theta-\csc^2 2\theta+1 = 0$

51. $2\cos^2 3\theta-1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **52.** $\dfrac{\tan 3x+\tan x}{1-\tan 3x\tan x} = -1$ **53.** $\dfrac{\tan 3x-\tan x}{1+\tan 3x\tan x} = -\sqrt{3}$

54. $\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1}{2}$ **55.** $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}2x} = \sqrt{3}$ **56.** $\dfrac{\operatorname{sen}4x}{1+\cos 4x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

CAPITULO IV APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRIA

4.1 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS Y APLICACIONES

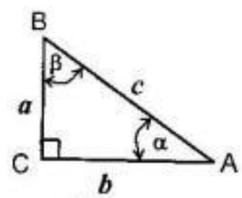


fig .1

En este capítulo se habla de la resolución de triángulos, iniciando con los triángulos rectángulos y luego generalizando a los triángulos oblicuángulos. Se entenderá por resolver un triángulo, determinar la medida de cada ángulo interno, así como la longitud de cada uno de los lados desconocidos. Se convendrá que en un triángulo rectángulo, el lado con longitud a es el opuesto al ángulo α, el lado de longitud b es el opuesto al ángulos β y el lado de longitud c es la hipotenusa. Ver fig. 1.

En las instrucciones se dirá que se encuentren las partes restantes de un triángulo dando condiciones. Para poder encontrar estas partes será necesario conocer: **un lado y un ángulo (LA)** o **conocer dos lados (LL)**. En la mayoría de los casos no será posible determinar valores exactos, por tal razón se conviene dar las respuestas aproximadas a dos decimales. Se utilizarán las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras en el caso que se conozcan la longitud de dos lados del triángulo. También se recurrirá a la propiedad de suma de ángulos internos de un triángulo la cual expresa que la suma de la medida de los ángulos internos en un triángulo es igual a 180° o a determinar el complemento de un ángulo. Así mismo hay que auxiliarse de una calculadora científica para aproximar algunos valores por determinar. Véase los siguientes ejemplos.

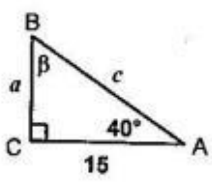
Ejemplo 1 Determinar las partes restantes en cada triángulo rectángulo si:

a) $\alpha = 40°$, $b = 15$ **b)** $\beta = 19°$, $c = 8$ **c)** $a = 14$, $c = 18$

d) $\beta = 54°$, $b = 12$ **e)** $\alpha = 69°24'$, $b = 2\sqrt{3}$ **f)** $b = \sqrt{23}$, $a = 11$

Solución:

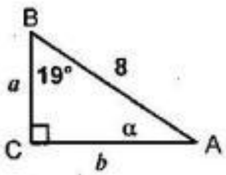
a) $\alpha = 40°$, $b = 15$



En este caso se conoce un lado y un ángulo (α), β se determina por complemento de ángulos, lo que implica que $\beta = 90° - \alpha = 50°$.
El valor de a se determina aplicando la razón trigonométrica tangente (entre otras), obteniendo que $\tan 40° = \dfrac{a}{15}$ ó $a = 15 \tan 40°$ de donde $a \approx 12.59$. Para determinar el valor de c, se aplica la razón trigonométrica coseno (entre otras) y se tiene que $\cos 40° = \dfrac{15}{c}$ ó $c = \dfrac{15}{\cos 40°}$ de donde $c \approx 19.58$.

Observación: En este tipo de problemas, la mayoría de los valores por determinar serán valores aproximados, por tal razón se sugiere donde sea posible utilizar los datos dados para encontrar los desconocidos y obtener una mejor precisión de los resultados requeridos. Se puede probar determinando el valor de c, utilizando el valor de a antes calculado. Otra opción que se tiene es utilizar el mayor número de decimales posibles (los que permite la calculadora) obtenidos al encontrar el valor de a y sustituir este resultado donde se necesite. Quizá se piense que una centésima sea insignificante, pero en cantidades muy grande es significativo y no se diga en una medida angular cuando se tiene un radio considerable.

b) $\beta = 19°$, $c = 8$

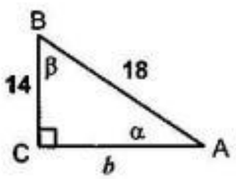


Se conoce un lado y un ángulo (β), α se determina por complemento de ángulos, lo que implica que $\alpha = 90° - \beta = 71°$.

El valor de a se determina aplicando la razón trigonométrica coseno para el ángulo β, o bien la razón seno para el ángulo α. Si se opta por la primera, se tiene que $\cos 19° = \frac{a}{8}$ ó $a = 8\cos 19°$, de donde $a \approx 7.56$.

El valor de b se encuentra aplicando la razón trigonométrica coseno para el ángulo α, nótese que también se pudo aplicar la razón seno para el ángulo β. Luego $\cos 71° = \frac{b}{8}$ ó $b = 8\cos 71°$ de donde $b \approx 2.6$.

c) $a = 14$, $c = 18$



Se conocen dos lados (un cateto y la hipotenusa), utilizando el Teorema de Pitágoras se determina la longitud del otro cateto, obteniendo:

$b = \sqrt{18^2 - 14^2} = 8\sqrt{2}$. Nótese que en este caso sí es posible dar un valor exacto.

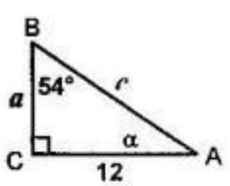
Para determinar la medida del ángulo α, se utiliza la razón seno diciendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{14}{18}$ ó $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{14}{18}\right)$, obteniendo que $\alpha \approx 51.06°$.

El valor de β se determina por complemento de ángulos y se obtiene: $\beta = 90° - \alpha$ ó $\beta \approx 90° - 51.06°$ ó $\beta \approx 38.94°$. Se debe confirmar que $\alpha + \beta = 90°$ ya que éstos son complementarios.

Obsérvese si se calcula el ángulo β utilizando la razón trigonométrica tangente y aproximando el valor del lado opuesto a β. Es decir, tomando $b \approx 11.31$.

$\tan \beta = \frac{11.31}{14}$ ó $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{11.31}{14}\right)$, obteniendo que $\beta \approx 38.93°$ y en este caso $\alpha + \beta \neq 90°$.

d) $\beta = 54°$, $b = 12$

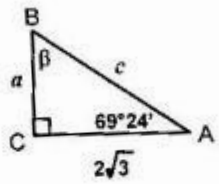


Se conoce un lado y un ángulo (β), α se determina por complemento, lo que implica que $\alpha = 90° - \beta = 36°$.

El valor de a se obtiene aplicando la razón trigonométrica tangente para el ángulo β, o bien la razón tangente para el ángulo α. Si se opta por la primera, se tiene que $\tan 54° = \frac{12}{a}$ ó $a = \frac{12}{\tan 54°}$, de donde $a \approx 8.72$.

El valor de c se encuentra aplicando la razón trigonométrica coseno para el ángulo α, nótese que también se pudo aplicar la razón coseno para el ángulo β o seno para α o el Teorema de Pitágoras, pero en todos estos casos, se tomará el valor de a antes encontrado, y éste es un valor aproximado y puede alejarse de la precisión del valor requerido. Tomando $\cos 36° = \frac{12}{c}$ ó $c = \frac{12}{\cos 36°}$ de donde $c \approx 14.83$.

e) $\alpha = 69°24'$, $b = 2\sqrt{3}$

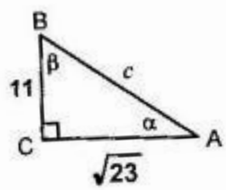


Se conoce un lado y un ángulo (α), β se determina por complemento de ángulos, lo que implica que $\beta = 90° - \alpha = 90° - 69°24' = 20°36'$.

El valor de a se determina aplicando la razón trigonométrica tangente, obteniendo que $\tan 69°24' = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ ó $a = 2\sqrt{3}\,\tan 69°24'$ de donde $a \approx 9.22$.

Para determinar el valor de c, se aplica la razón trigonométrica coseno y se tiene que $\cos 69°24' = \dfrac{2\sqrt{3}}{c}$ ó $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 69°24'}$ de donde $c \approx 9.85$.

f) $b = \sqrt{23}$, $a = 11$



Se conocen dos lados (dos catetos), por Pitágoras se determina el valor de la hipotenusa. Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que $c = \sqrt{\left(\sqrt{23}\right)^2 + 11^2} = \sqrt{23 + 121} = 12$. El valor de α se determina aplicando la razón trigonométrica seno tal que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{11}{12}$ ó $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{11}{12}\right)$ concluyendo que $\alpha \approx 66.44°$ y $\beta \approx 23.56°$. ■

La resolución de triángulos tiene aplicaciones en varios campos tales como: ingeniería, física, astronomía y navegación (aérea o marítima). Dependiendo del problema se hace un análisis para encontrar la solución del mismo. Algunos elementos importantes que facilitarán resolver estos problemas se detallan a continuación: es importante elaborar una figura de tal manera que permita observar un triángulo que en este caso debe ser un triángulo rectángulo. A diferencia de algunos problemas de navegación, es necesario identificar una horizontal, la cual debe ser paralela al plano que contiene el suelo, ubicar el observador, a partir del ojo del observador viendo al objeto se toma la línea visual. Con la línea visual y la horizontal se forma el ángulo ya sea de **elevación** o de **depresión** (ver fig. 2). Otra forma de diferenciar entre un ángulo de elevación o un ángulo de depresión, es viendo la posición del objeto con respecto al observador. Si el objeto está en una posición donde el observador tenga que inclinar la vista para buscar el objeto (el objeto está en una posición más alto que el observador, pero no directamente sobre él), se tiene un ángulo de elevación. Por el contrario si el observador baja la vista para buscar el objeto (pero no directamente abajo de él) se tiene un ángulo de depresión.

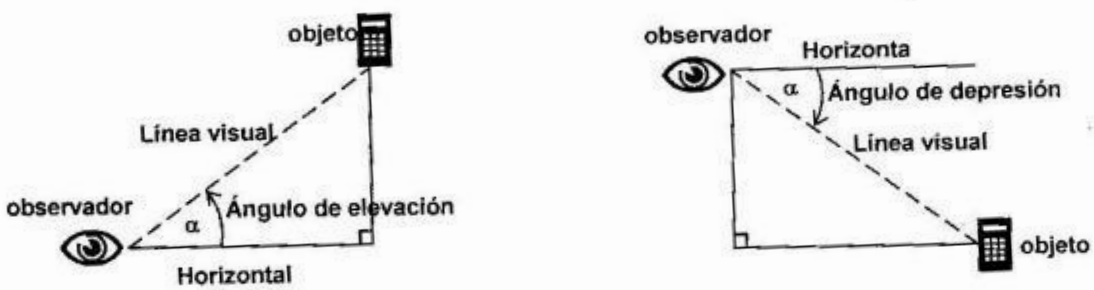
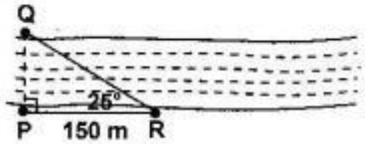


fig .2

Véase algunas aplicaciones sobre los mismos.

Ejemplo 2 Un agrimensor desea medir la anchura de un río, para lo cual se auxilia de un aparato que le permite medir el ángulo desde un punto que ha de fijar. En un punto P de un lado del río coloca dicho aparato y toma como referencia un punto Q en el otro lado del río. Después de girar un ángulo de 90° en P, camina 150 metros alejándose de P, hasta llegar al punto R, toma un ángulo α y determina que éste mide 25°. ¿Cuál es la anchura del río?

Solución:



La anchura del río está determinada por la longitud del segmento PQ. Obsérvese el triángulo rectángulo QPR, donde el dato por encontrar es el lado opuesto al ángulo con medida 25°. Utilizando la razón tangente se tiene que:

$\tan 25° = \dfrac{PQ}{150}$ aplicando la razón trigonométrica.

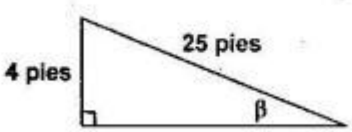
$PQ = 150 \tan 25°$ despejando para PQ.

$PQ \approx 69.95$ determinando el valor de tan 25° y multiplicando.

Conclusión: La anchura del río es aproximadamente de 69.95 metros. La exactitud dependerá de la precisión de las medidas de 150 m y 25°, respectivamente. ∎

Ejemplo 3 Se desea construir una rampa que tenga 25 pies de longitud y que la altura de la misma sea de 4 pies. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación de la rampa?

Solución:



Elaborando una figura que muestra una cara de la rampa se indican los datos. Lo que se pide es la medida del ángulo de inclinación (β).

Utilizando la razón trigonométrica seno se tiene que:

$\text{sen}\ \beta = \dfrac{\mathbf{4pies}}{\mathbf{25pies}}$ aplicando la razón trigonométrica seno.

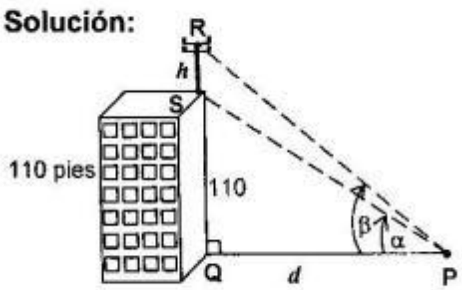
$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{4}{25}\right)$ despejando para β.

$\beta \approx 9.21°$ encontrando el valor aproximado para β.

Conclusión: El ángulo de elevación de la rampa debe ser aproximadamente de 9.21°. ∎

Ejemplo 4 Una antena está ubicada en una de las esquinas de la azotea de un edificio de 110 pies de altura. En un punto P situado en el mismo plano horizontal de la base del edificio, el ángulo de elevación a la base de la antena es de 37°30' y el ángulo de elevación a la parte superior de la antena es de 40°. Determinar la altura de la antena.

Solución:



Después de elaborar un dibujo que represente la información, se observan dos triángulos rectángulos Δ PQR y Δ SQP. Nótese que con los datos dados no es posible determinar la altura de la antena de forma directa, ya que no se conoce las dos condiciones necesarias (AL, LL).

De los triángulos PQS y PRQ se puede tomar una de las razones trigonométricas:

$\tan \alpha = \tan 37°30' = \dfrac{110}{d}$ y $\tan \beta = \tan 40° = \dfrac{110 + h}{d}$ respectivamente.

De éstas últimas se tiene que:

$d = \dfrac{110}{\tan 37°30'}$ y $d = \dfrac{110 + h}{\tan 40°}$, por propiedad transitiva se dice que

$\dfrac{110}{\tan 37°30'} = \dfrac{110 + h}{\tan 40°}$ igualando los valores para d planteados.

ó $110 \tan 40° = (110 + h) \tan 37°30'$ aplicando propiedades de proporciones.

$110 \tan 40° = 110 \tan 37°30' + h \tan 37°30'$ aplicando propiedad distributiva.

$h \tan 37°30' = 110 \tan 40° - 110 \tan 37°30'$ despejando para el término con variable.

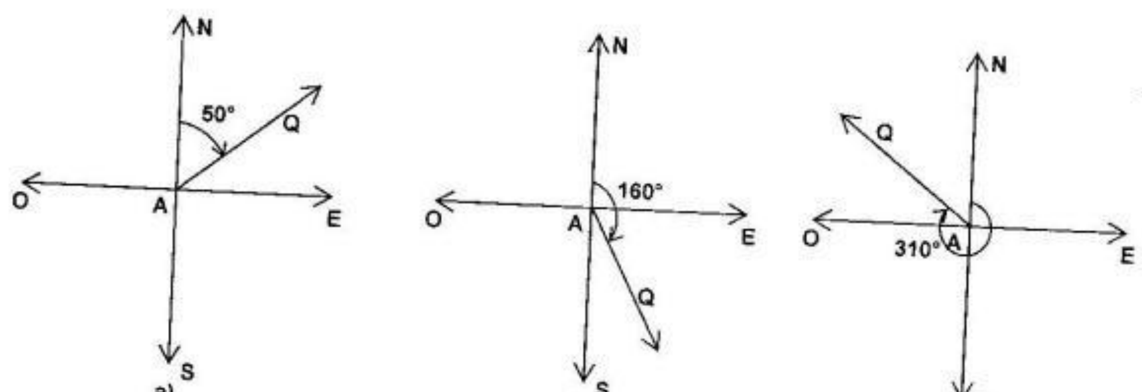
$h = \dfrac{110 \tan 40° - 110 \tan 37°30'}{\tan 37°30'}$ despejando para h.

$h \approx 10.29$ indicando el valor aproximado para h.

Conclusión: La altura de la antena es aproximadamente de 10.29 pies.

■

Los problemas de aplicación relacionados con la navegación (aérea o marítima), se analizan de forma distinta a los descritos anteriormente. Se le llama rumbo o dirección al ángulo medido en grados y en sentido de las manecillas del reloj o se puede dar otra condición la cual se describe posteriormente. El ángulo se considera positivo, aún cuando contradice que el ángulo que se hace girar en sentido de las manecillas del reloj es negativo. Se debe auxiliar de los puntos cardinales y contando desde el norte, hasta indicar la dirección o rumbo de su desplazamiento; recuérdese que este ángulo es positivo. Véase la fig. 3, el punto (0,0) (A), determinará el puerto o aeropuerto (punto de partida). La fig. 3 a), b) y c) representa la orientación (el ángulo) en un cierto punto Q con respecto a un observador que se encuentra en el punto de partida A. Este ángulo está medido en grados, en sentido de las manecillas del reloj, desde el norte hasta el segmento AQ. Se recomienda trabajar a escala (utilizando regla y transportador) en este tipo de problemas.



a) Rumbo: 50°

b) Rumbo: 160°

c) Rumbo: 310°

fig. 3

Otros problemas de este tipo (navegación, aviación) o de agrimensura, muestran la dirección o rumbo de un punto A (punto de partida) a un punto Q, siempre con auxilio de los puntos cardinales. Este ángulo ha de ser agudo y positivo el cual se representa tomando la orientación ya sea del **norte hacia el**

este o bien hacia el oeste, o también la orientación **del sur hacia el este o hacia el oeste**. Si la dirección se indica del norte hacia el este, entonces se lee el rumbo norte-este o simplemente nor-este. Para el caso si un objeto (avión o barco) se desplaza con un rumbo de 50° *del norte hacia el este, se simboliza* ***N 50° E***. Así mismo si el objeto se desplaza 30° del norte hacia el oeste se indica que el rumbo es de **N 30° O** (es usual también **N 30° W**). De igual manera si un objeto se desplaza 20° del sur al este, se lee que la dirección es **S 20° E**. Se puede tener el caso también si el objeto se desplaza 75°20' del sur al oeste, indicando que la dirección o rumbo es de **S 75°20' O ó S 75°20' W**. No es posible leer las **relaciones** este-norte, este-sur, oeste-norte u oeste-sur.

En la fig. 4 se indican algunos ejemplos de rumbo de algunos objetos. En la fig. 4 a) a la d), se lee en el orden que antes se ha explicado, pero para la fig. 4 e) y f) se nota que los ángulos no están ubicados de tal manera que se puedan leer directamente, se debe tener cuidado de cómo están estos ángulos trazados, para leerlos en forma correcta.

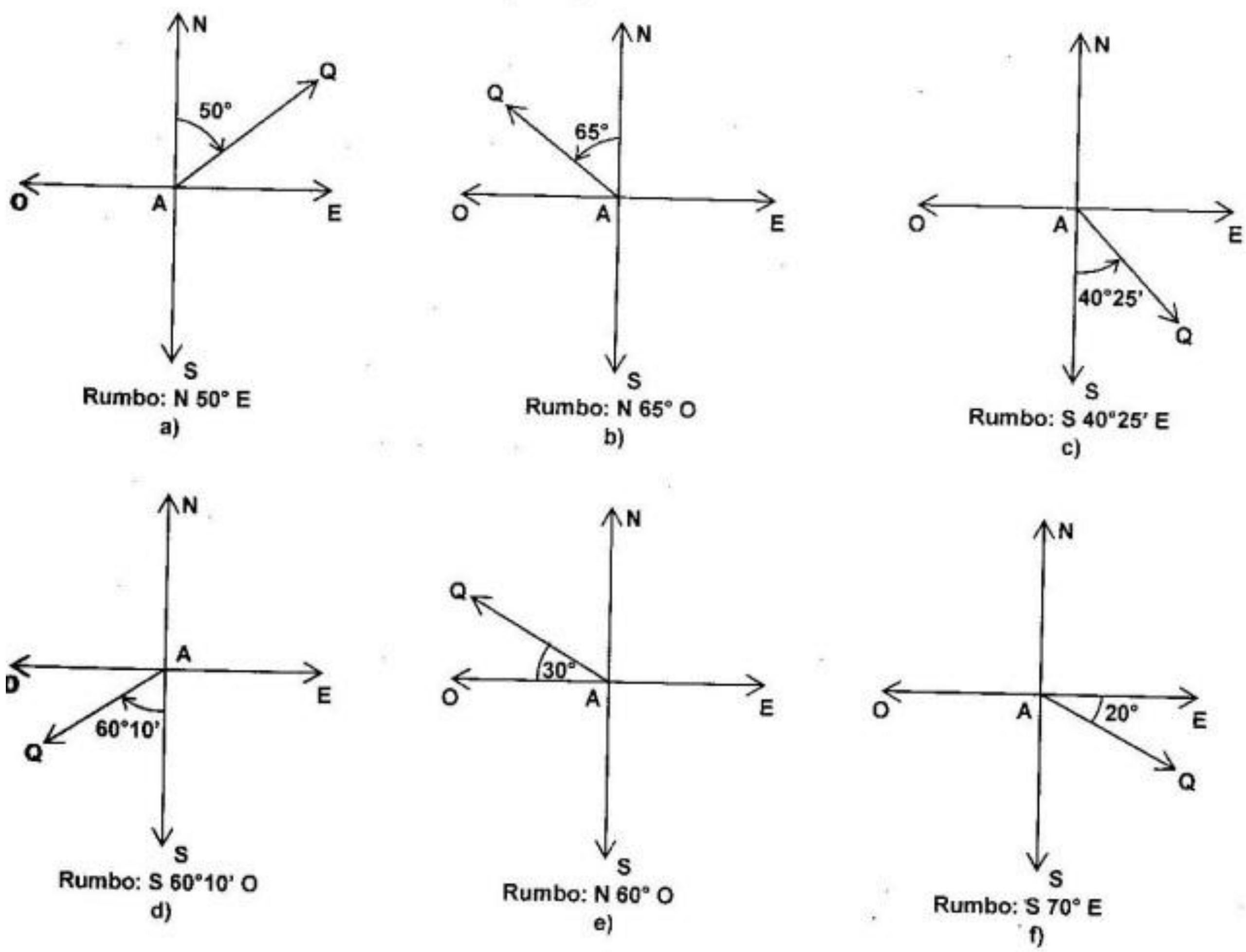


fig. 4

Un objeto también se puede mover directamente hacia el este, hacia el oeste, hacia el norte o hacia el sur y éste se desplazará sobre el eje respectivo, según se especifique.

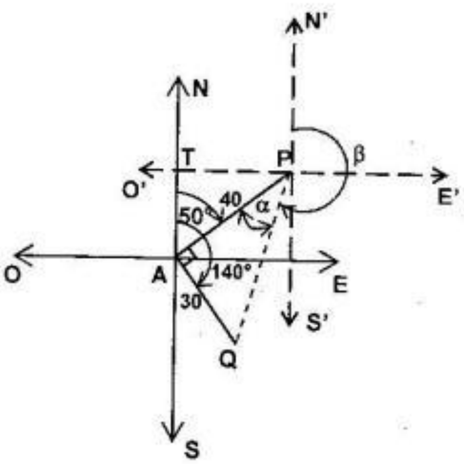
Cuando se enuncian los problemas de aplicaciones, se debe saber si se refiere a un objeto o a dos objetos. En el caso que sean dos objetos y ambos salen del mismo punto de partida, es el caso mas fácil ya que solamente se traza el rumbo en forma correcta para cada uno de ellos. Las preguntas que se pueden hacer en este caso, es con respecto a la distancia que se encuentran ambos objetos, después de transcurrido algún tiempo o la posición o rumbo que se encuentra uno del otro o la posición que se encuentra uno de ellos con respecto al punto de partida. En el caso que se pregunte el rumbo o posición de uno con respecto al otro, en el punto donde se encuentra el objeto con respecto al cual se pregunta, se debe elaborar otro plano cartesiano y buscar esta posición (en el ejemplo 5 se indica). En el caso que el problema se refiera a un solo objeto, se ubica la primera posición en la que se encuentra y en este punto se elabora otro plano cartesiano para marcar la segunda posición (se indica en el ejemplo dado). Para encontrar la posición u orientación a la que se encuentra el objeto del punto de partida, en el lugar que se encuentra, se traza otro plano cartesiano y se busca el ángulo determinado por el eje del Norte o el eje del Sur y la línea (segmento) determinado por el punto donde se encuentra el objeto en ese momento y el punto de partida, teniendo en cuenta que el ángulo buscado debe ser agudo. **Todo lo explicado en esta parte con relación a las aplicaciones, también es válida para las dos siguientes secciones**. Véase los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5 Dos embarcaciones salen del puerto A al mismo tiempo. La primera embarcación navega con un rumbo 50°, a 20 millas por hora y la segunda navega con una dirección de 140° a 15 millas por hora. Después de haber transcurrido dos horas, determinar:

a) La distancia a la que se encuentran dichas embarcaciones.

b) La posición u orientación a la que se encuentra la primera embarcación con respecto a la segunda.

Solución:



En la figura se muestran los rumbos y las posiciones en las que se encuentran ambas embarcaciones después del tiempo indicado. Como siempre, se entenderá que A es el punto de partida, el punto P es la posición donde se encuentra la primera embarcación, el punto Q es la posición en la que se encuentra la segunda embarcación, la longitud del segmento PQ determina la distancia a la que se encuentran ambas embarcaciones, la longitud del segmento AP es la distancia a la que se encuentra la primera embarcación del punto de partida (40 millas), la longitud del segmento AQ es la distancia a la que encuentra la segunda embarcación del punto de partida (30 millas), el **Δ** APQ es un triángulo rectángulo en A y el ángulo β es la posición que se encuentra la primera embarcación con respecto a la segunda.

Aplicando el Teorema de Pitágoras se determina la longitud del segmento PQ, indicando que $PQ = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$.

Para el inciso a), se concluye que: la distancia a la que se encuentras ambas embarcaciones después de dos horas es de 50 millas. Nótese que este resultado fue posible determinar su valor exacto.

Para responder al inciso b), se debe leer la medida del ángulo β mostrado en la figura anterior, el cual está medido desde el norte hasta llegar a la línea que une ambas embarcaciones. El ángulo β se determina sumando 180° con la medida del $\angle$ QPS'. Obsérvese que el $\angle$ ATP y el $\angle$ O'PS' son rectos y que la $m\angle APO' = 40°$. Determinando la $m\angle APQ$ (supóngase que la medida del ángulo es α), se tiene que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{30}{50}$ ó $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ de donde $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ ó $\alpha \approx 36.87°$.

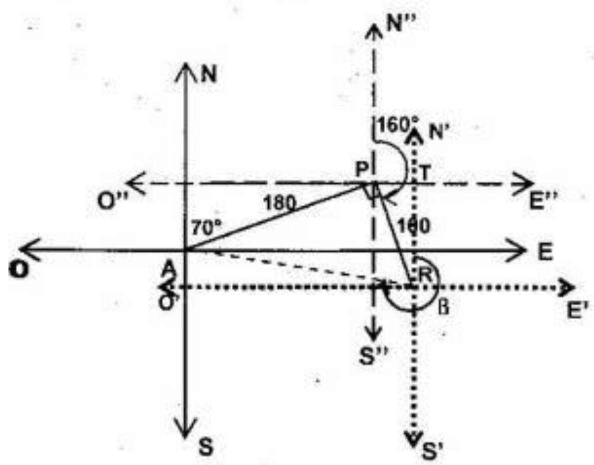
Luego $\beta = 270° - 40° - \alpha$. En conclusión $\beta \approx \mathbf{270° - 36.87° - 40°}$ ó $\beta \approx \mathbf{193.13°}$ y se dice que la posición del primer barco con relación al segundo, es aproximadamente de 193.13°. ■

Ejemplo 6 Un avión sale de un aeropuerto con un rumbo de 70° y recorre 180 millas. De repente se entera que no cuenta con suficiente combustible para llegar al lugar de destino. Para llegar al aeropuerto mas cercano que se encuentra a 100 millas de donde se encuentra en ese momento, debe cambiar de dirección y lo hace a 160°. Determinar:

a) La distancia a la que se encuentran el punto de partida del avión, al lugar donde llegó a abastecerse de combustible.

b) La orientación a la que se encuentra el avión del lugar donde arribó con respecto al punto de partida.

Solución:



Después de elaborar la figura correspondiente a la información dada se identifica que: **Δ** APR, **Δ** AQ'R y **Δ** PTR son triángulos rectángulos, $m\angle$ APO'' = 20°, $m\angle$ TPR = 70°, $m\angle$ PRT = 20°, primer recorrido del avión: AP = 180 millas, segundo recorrido del avión: PR = 100 millas. **Para contestar el inciso a),** distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida, se debe encontrar AR (longitud del segmento), que por el Teorema de Pitágoras se tiene que AR = $\sqrt{180^2+100^2}$ = $\sqrt{42{,}400}$ = $20\sqrt{106}$. **Se concluye** que la distancia a la que se encuentra el punto de partida del avión, al lugar donde llegó a abastecerse de combustible es $20\sqrt{106}$ millas o que se encuentra a una distancia aproximada de 205.91 millas.

Para contestar el inciso b), es necesario elaborar el tercer plano que se muestra en la figura anterior (con punto de partida R) y esta orientación está determinada por la medida del ángulo β, la cual está tomada desde el norte hasta la línea ($\overline{AR}$), que une el punto donde se encuentra el avión con el punto de partida. La medida del ángulo β es igual a 270° + $m\angle$ ARO'.

La $m\angle$ ARO' = 90° − $m\angle$ ARP − $m\angle$ PRT. Llámese $m\angle$ ARP = α, luego $\tan\alpha = \dfrac{180}{100}$ ó $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{5}\right)$ ó $\alpha \approx \mathbf{60.95°}$. Luego $\beta \approx \mathbf{90° - 60.95° - 20°} \approx \mathbf{9.05°}$.

Se concluye que la orientación a la que se encuentra el avión del lugar de arribo con respecto al punto de partida es aproximadamente de 279.05°. ■

Ejemplo 7 Dos barcos salen del mismo puerto y al mismo tiempo. Uno de ellos navega con un rumbo de **S**55°**E** a 18 millas por hora, mientras que el otro navega con un rumbo de **S**35°**O** a 24 millas por hora. Después de haber transcurrido dos horas y media, determinar:

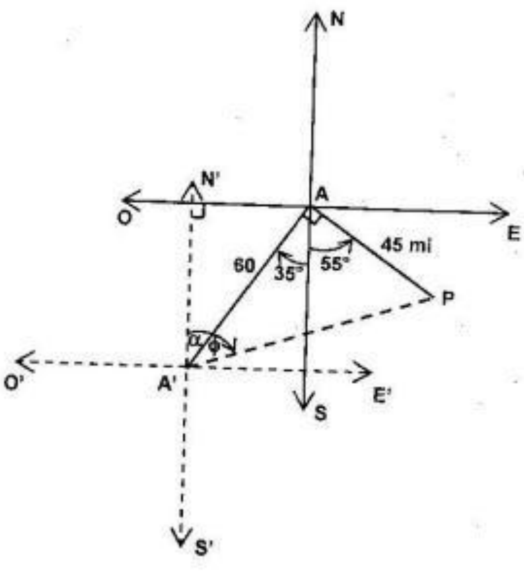
a) La distancia a la que se encuentran ambos barcos.

b) La posición u orientación a la que se encuentra el segundo barco con respecto al primero.

Solución:

En la figura se ha representado la información dada, véase algunos resultados:

AP = 45 millas	distancia recorrida en dos horas y media el primer barco; d = vt (distancia = velocidad x tiempo)
AA' = 60 millas	distancia recorrida en dos horas y media el segundo barco; d = vt (distancia = velocidad x tiempo)
$m\angle A'AO = 55°$	por complemento de ángulos.
$m\angle N'A'A = \alpha = 35°$	por ángulos alternos internos entre paralelas.



Respondiendo al inciso a): se nota que $\Delta AA'P$ es un triángulo rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que $A'P = \sqrt{60^2 + 45^2} = \sqrt{5{,}625} = 75$. **Se concluye** que: la distancia a la que se encuentran ambos barcos es de 75 millas.

b) Nótese que la orientación de los barcos está dada de forma diferente a los ejemplos anteriores, por tal razón se debe contestar en la misma notación. La posición del segundo barco (A') con respecto al primero (P), es el ángulo agudo medido en este caso, desde el norte hasta la línea que une ambos barcos; en donde se escribe N $(\alpha + \phi)$ E, donde $\alpha = 35°$. Para determinar ϕ, tómese $\tan\phi = \frac{45}{60}$ ó $\tan\phi = \frac{3}{4}$ ó $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ó $\phi \approx 36.87°$.

Se concluye: la posición a la que se encuentra el segundo barco con respecto al primero es aproximadamente de N 71.87° E.

■

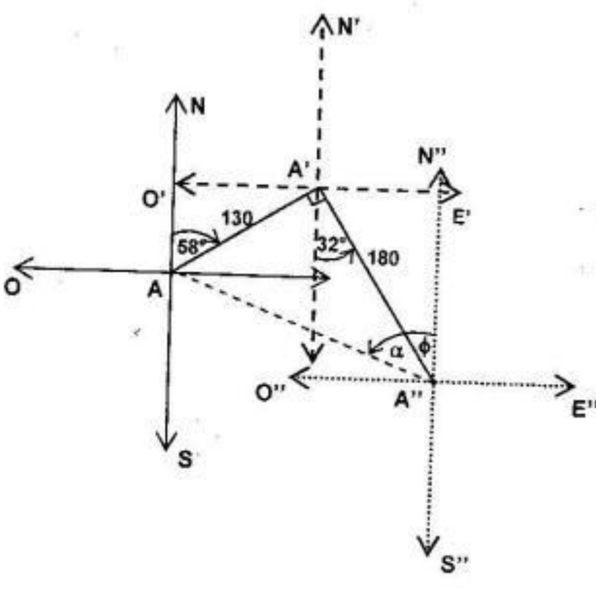
Ejemplo 8

Un avión sale de un aeropuerto con un rumbo de N 58° E. Después de volar 130 millas se entera que se equivocó de rumbo y se corrige orientándose en dirección S 32° E y recorre 180 millas más. Determinar:

a) La distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida.

b) La orientación a la que se encuentra con respecto al punto de partida.

Solución:



a) Se comprueba que $\angle AA'A''$ es recto, luego por Pitágoras, se determina la distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida.

Luego $AA'' = \sqrt{130^2 + 180^2} = 10\sqrt{493}$. **Se concluye que**: la distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida es de $10\sqrt{493}$ millas, o que la distancia a la que se encuentra el avión del punto de partida es aproximadamente de 222.04 millas.

b) Para determinar la orientación a la que se encuentra el avión del punto de partida, es necesario dibujar un tercer plano (el que se muestra a la derecha) y tomar como punto de partida el punto donde se encuentra el avión en este momento.

El ángulo agudo que responde este inciso, se debe leer del norte al oeste, ya que según la gráfica elaborada para este fin, se visualiza que la línea que conecta el punto de partida con el punto donde se encuentra el avión en este momento $(\overline{AA''})$ está en el segundo cuadrante, el cual se lee N $(\alpha + \phi)$ O.

Si se analiza la gráfica anterior, se nota que: $m\angle O'A'A = 32°$, $m\angle A''A'E' = 58°$, $m\angle A'A''N'' = \phi = 32°$ y $\tan\alpha = \frac{130}{180}$ ó $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{130}{180}\right)$ ó $\alpha \approx 35.84°$.

En conclusión se dice que la orientación a la que se encuentra el avión del punto de partida es aproximadamente de N 67.84° O. ■

Ejercicios 4.1

1. Encontrar las partes restantes para cada triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en el vértice C.

   a) $\alpha = 21°$, $a = 10$ b) $\alpha = 42°$, $b = 15$ c) $\alpha = 55°$, $c = 18$ d) $\beta = 32°$, $b = 45$

   e) $\beta = 42°25'$, $a = 10$ f) $\beta = 54.3°$, $c = 12.3$ g) $\alpha = 65°$, $c = \sqrt{5}$ h) $\beta = 28°$, $b = 2\sqrt{3}$

   i) $b = 4$, $a = 10$ j) $b = 5$, $c = 13$ k) $a = 6$, $c = 7$ l) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$

2. Desde la azotea de un edificio de 20m de altura que se encuentra cerca del mar, se observa un velero con un ángulo de 32.4°. ¿A qué distancia de la base del edificio se encuentra el velero?

3. En la orilla de un río se encuentra una torre de 120 m de altura. Desde el punto mas alto de la torre, el ángulo de depresión a una roca que se encuentra al otro lado y a la orilla del río es de 41°. ¿Determinar la anchura del río?

4. En un terreno se encuentra un árbol de 32 pies de altura. Determinar el ángulo de elevación a la parte superior del árbol desde un punto que está 51 pies de la parte inferior del mismo.

5. Un barco sale de un puerto con un rumbo de 22° a 20 millas por hora a las 9:00 a. m, una hora más tarde, otro barco sale del mismo puerto con un rumbo de 112° a 25 millas por hora.

   a) Determinar la distancia a la que se encuentran ambos barcos a las 12:00 m.

   b) Determinar la orientación a la que se encuentra el primer barco con respecto al segundo a las 12:00 m.

   c) Determinar la orientación a la que se encuentra el segundo barco con respecto al primer a las 12:00 m.

6. Un barco zarpa de un puerto con una dirección de 75° a 20 millas por hora. Después de navegar durante tres horas decide cambiar de rumbo a 165° y sigue éste por cinco horas a 17 millas por hora. Después de trascurrido este tiempo **a)** ¿Cuál es la distancia a la que se encuentra el barco del puerto? **b)** ¿Cuál es la orientación del puerto con respecto al barco después de las ocho horas de recorrido?

7. Desde un punto P que está en una calle en línea recta hasta la base de una montaña, se observa un ángulo de elevación a la cima de la misma de 35.4°. Sobre la misma calle, alineado con P y con la base de la montaña se toma otro punto Q que está a 50 metros del punto P, y se observa que el ángulo de elevación a la cima de la montaña desde Q, es de 42.3°. Determinar la altura de la montaña.

8. Desde la azotea del último piso de un edificio de 42 metros de altura, el ángulo de elevación a la parte superior de una estatua es de 12°. Desde la base del mismo edificio, el ángulo de elevación al mismo punto de la estatua es de 25°.

   a) Determinar la altura de la estatua.

   b) Determinar la distancia del edificio a la estatua.

9. Desde la cima de una montaña de 300 metros de altura con respecto a una laguna cercana a la misma, el ángulo de depresión a un punto P en la orilla más cercana a ésta, es de 60°, y el ángulo de depresión a un punto Q directamente opuesto a P y al otro lado de la orilla de la laguna, es de 32°. Los puntos P, Q y la base de la montaña, están en la misma horizontal. Calcular la anchura de la laguna determinada por los puntos P y Q.

10. Desde un punto P situada en un terreno plano, el ángulo de elevación a la parte superior de un pino es de 20°. Desde otro punto Q, 10 metros más cercano al pino, alineado con P y con el pie del pino, el ángulo de elevación a la parte superior del mismo es de 30°. Determinar la altura del pino.

11. Se observa un edificio de 2000 pies de altura. Suponga que se quiere construir otro edificio de menor altura y sobre el mismo nivel (misma horizontal), de modo que el ángulo de elevación (medido desde la base del nuevo edificio por construir) a la parte superior del edificio ya construido es de 72° y el ángulo de depresión medido desde una altura h; altura del nuevo edificio por construir es de 6°. ¿De qué altura debe ser el edificio por construir y que tan lejos está del edificio construido?.

12. Un barco navega en el Golfo de Fonseca en línea recta. Cuando pasa por un punto P, visualiza una zona rocosa en un ángulo de 25° desde la ruta que lleva. Después de recorrer 8 millas, visualiza que la zona rocosa está a 45° con respecto a la ruta que lleva. ¿Qué tan cerca pasará el barco de la zona rocosa?

13. Desde la parte superior de un cerro costero (la base del cerro está a la orilla del mar), de 80 m de altura, se observa una embarcación anclada (fijo en un punto en el mar). El ángulo de depresión a la embarcación es de 16.5°.

    a) Determinar la distancia a la que se encuentra la embarcación al pie del cerro.

    b) Determinar la distancia a la que se encuentra la embarcación, a la cima del cerro.

14. Un avión está volando a una altura de 7500 metros. Desde un punto fijo del avión en vuelo, el ángulo de depresión hasta la torre de control en el aeropuerto es de 19.4°, ¿Cuál es la distancia desde otro punto que se encuentra directamente debajo del punto donde se realizó la medición del ángulo a la torre de control?

15. Un avión se prepara para hacer su aterrizaje en un aeropuerto. Si al comienzo de la aproximación final éste se encuentra a una altura de 2000 pies, y su distancia recorrida en la pista es de 6000 pies con respecto al comienzo de la rampa de aterrizaje, ¿qué ángulo de depresión debe utilizar el piloto para que comience al principio de la rampa de aterrizaje?

16. Un automóvil que va por una carretera en línea recta, después de recorrer 1000 metros observa que el ángulo de elevación a la cima de una montaña cambia de 25° a 43°. Determinar la altura de la montaña, suponiendo que la línea recta llega hasta el pie de la misma.

17. Desde la azotea de un edificio comercial, el ángulo de elevación a la parte superior de otro edificio de apartamentos es de 45° y el ángulo de depresión a la base del edificio de apartamentos es de 62°. Si el edificio de apartamentos tiene una altura de 250 pies, ¿a qué distancia se encuentran ambos edificios? ¿Qué altura tiene el edificio comercial?

18. Un avión asciende en un ángulo de 16° con una velocidad constante de 285 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará en estar a una altura de 10 millas?

19. Un piloto de un jet de la fuerza naval aterrizará en un porta aviones. A una altura de 2,500 pies, el piloto observa el porta aviones con un ángulo de 17°. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el avión y el porta aviones? (distancia del porta aviones, al punto que se encuentra directamente abajo del avión y en la horizontal).

20. Una señora se encuentra de pie en una ventana que está a 90 pies sobre el nivel del suelo. De repente observa a un niño que camina directamente hacia ella (en busca de la puerta del edificio que está en la misma línea vertical con la ventana que ella se encuentra). Desde que visualiza al niño nota que el ángulo de depresión hacia el niño, cambia de 35° a 53°. ¿Qué distancia ha recorrido el niño cuando hace las mediciones?

21. Un guardabosque se encuentra en una torre a 30 metros sobre el nivel del suelo. De repente observa un incendio a un ángulo de depresión de 10°. ¿A qué distancia se encuentra el incendio de la torre del guardabosque?

22. Un cable de soporte debe ser colocado en la parte superior de un poste telefónico de 25 pies de altura y fijado en el suelo. ¿Qué cantidad de alambre se necesita para que forme un ángulo de 48° con el nivel del suelo?

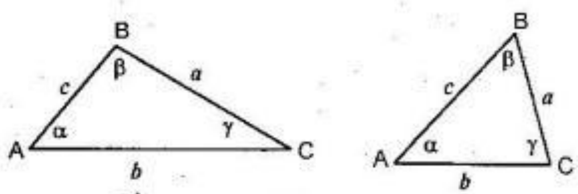
23. Dos barcos A y B zarpan de un puerto a la misma hora. El barco A viaja a una velocidad de 20 millas por hora en una dirección de N32°E y el barco B viaja a una velocidad de 28 millas por hora en una dirección de S58°E. ¿a qué distancia se encuentran ambos barcos, después de dos horas? ¿en qué dirección se encuentra el barco B, con respecto al barco A?

4.2 LEY DE LOS SENOS Y APLICACIONES

En la sección anterior se analizaron los triángulos rectángulos, encontrando sus partes desconocidas teniendo dos de ellas (LL o LA). Pero en la vida diaria los problemas planteados, no siempre se tendrá un triángulo rectángulo. Las **leyes de los senos** y **de los cosenos** (esta última, estudiada en la siguiente sección) son las principales herramientas utilizadas para resolver los **triángulos oblicuángulos; ya sean obtusángulos o acutángulos** (tienen un ángulo obtuso o tiene sus tres ángulos agudos respectivamente). Inclusive con estas leyes, también se resuelven los triángulos rectángulos.

Se continúa con la convención, que el lado de longitud a, será el opuesto al ángulo α, que el lado de longitud b, será el opuesto al ángulo β y el lado de longitud c, será el opuesto al ángulo γ (que ya no necesariamente será recto).

De la fig. 1 a) se observa que, el ángulo de menor medida es el opuesto al lado de menor longitud y que el ángulo de mayor medida es el opuesto al lado de mayor longitud.



a) fig 1 b)

Recuérdese que resolver un triángulo implica encontrar las partes restantes (partes desconocidas) del mismo conociendo algunas de ellas, siempre que este triángulo exista.

La ley de los senos se aplica en los siguientes casos: si se conocen dos ángulos y el lado comprendido (**ALA**), si se conocen dos ángulos cualesquiera y un lado (**AAL**) y **el caso ambiguo** cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados (**LLA**). Con la siguiente ilustración se pretende llegar a la fórmula de la ley de los senos.

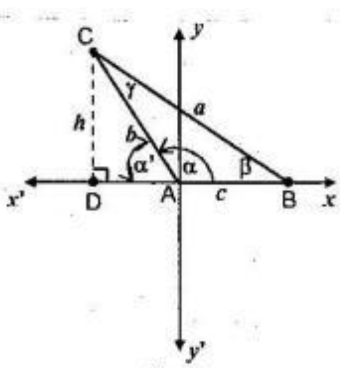


fig. 2

De la fig. 2, se tienen los siguientes datos: α es un ángulo obtuso en posición normal, α' es el ángulo de referencia de α, $\overline{CD}$ es perpendicular al eje x. Además, ΔCDB y ΔCDA son triángulos rectángulos, sen α = sen α' (ya que el seno es positivo en el segundo cuadrante). Las letras a, b, c y h determinan la longitud de algunos de los lados de los ΔCDB y ΔCAB.

Además, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha' = \dfrac{h}{b}$ ó $h = b \operatorname{sen}\alpha$

De igual manera, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{h}{a}$ ó $h = a \operatorname{sen}\beta$

Por propiedad transitiva se tiene que: b sen α = a sen β

Esta última igualdad, se expresa de forma equivalente así:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \textbf{(1)}$$

Si ahora se intercambian de posición los ángulos de tal manera que α esté en la posición γ y β en la posición de α, con respecto a la fig.2, se llega a la siguiente igualdad $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$ **(2)**

Tomando **(1) y (2)**, se llega a la **ley de los senos** indicando que:

Para un triángulo ABC con ángulos α, β y γ y con los lados respectivos con medida a, b y c, se tiene **la ley de senos:** $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$ o su equivalente $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

Aunque se comparan tres razones (razones continuadas), cuando se desconoce un término conociendo tres de ellos, se toma la igualdad que involucre el dato desconocido con los conocidos, de tal manera que la incógnita (valor desconocido) sea único o si los desconocidos están en términos de la misma incógnita. Por ejemplo, se puede tomar las siguientes igualdades considerando la primera igualdad:

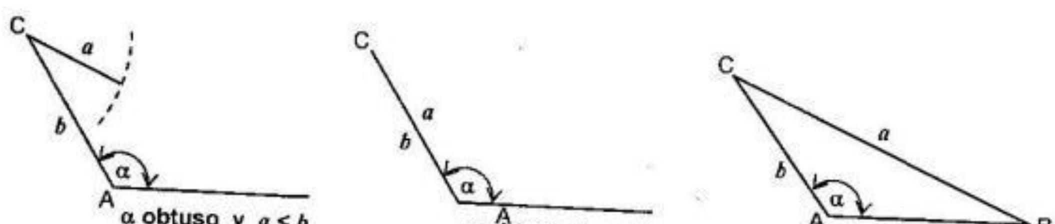
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

La ley de los senos, se puede enunciar en otras palabras así: **la razón del seno de un ángulo respecto a su lado opuesto, es igual a la razón del seno de cualquiera de los otros dos ángulos respecto a su lado opuesto.**

Los casos ALA ó AAL se reducen a uno sólo; cuando se conocen dos ángulos y un lado cualquiera. En este caso se aplica la regla en forma directa; para el caso si conocen dos ángulos y se necesita el tercero, éste se determina por suma de ángulos internos de un triángulo.

El caso ambiguo (LLA ó ALL) cuando se conocen dos lados y un ángulo, es el que se debe tener cuidado, ya que se pueden tener varias posibilidades. Se abordan primero los casos elementales; el ángulo dado puede ser obtuso o agudo, **si éste es obtuso existen tres posibilidades:**

1. Que el ángulo dado sea opuesto al lado de menor longitud; **en este caso no existe triángulo** (fig. 3 a)).
2. Que los lados dados sean de igual longitud; **en este caso no existe triángulo** (fig. 3 b)).
3. Que el ángulo dado sea opuesto al lado de mayor longitud; **en este caso existe un triángulo** (fig. 3 c)).



α obtuso y $a < b$
a)

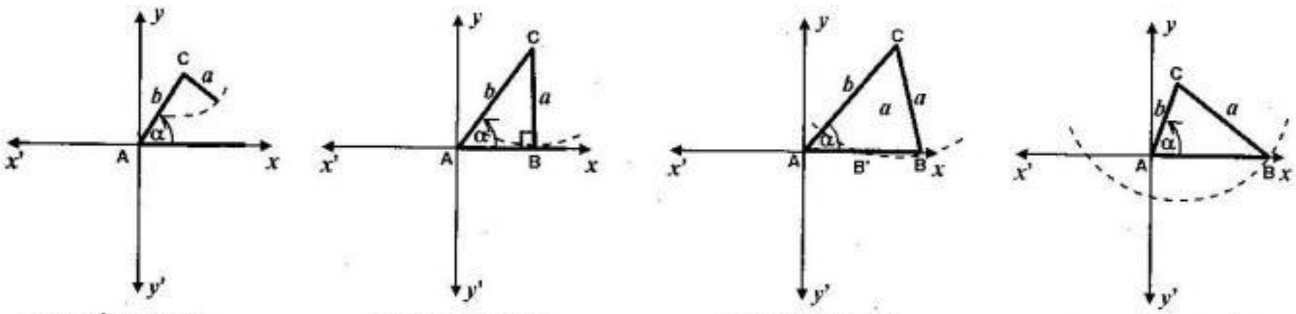
α obtuso y $a = b$
b)

α obtuso y $a > b$
c)

fig. 3

Para este mismo caso (caso ambiguo), **si el ángulo es agudo** existen más posibilidades, obsérvese acerca de las mismas.

Tómese el triángulo ABC, con a y b, longitudes de los lados conocidos y α el ángulo agudo dado. Ubicando α en posición normal, AC = b, $\overline{AC}$ es el lado terminal de α, el vértice B está sobre el eje x positivo y CB = a. Ya que se conoce la longitud del lado opuesto a α, que es a, se puede encontrar la posición del vértice B si se traza un arco circular de longitud a con centro en C. Las siguientes figuras muestras las cuatro posibilidades que se dan.



α agudo y $a < b$, sen $\beta > 1$, no existe triángulo — a)

α agudo y $a < b$, sen $\beta = 1$, existe un triángulo rectángulo — b)

α agudo y $a < b$, sen $\beta < 1$, existen dos triángulos — c)

α agudo y $a > b$, sen $\beta < 1$, existe un triángulo — d)

fig. 4

Los siguientes ejemplos muestran algunos de los casos, acerca de las posibilidades que se enunciaron anteriormente. Recuérdese de la importancia de dibujar un triángulo para facilitar el desarrollo.

Ejemplo 1 Encontrar las partes restantes para cada triángulo si:

a) $\alpha = 42°$, $\gamma = 51°$, $b = 18$

b) $\beta = 129°$, $c = 25$, $b = 20$

c) $\alpha = 119°20'$, $a = 24$, $c = 15$

d) $\beta = 60°$, $b = 10\sqrt{3}$, $a = 20$

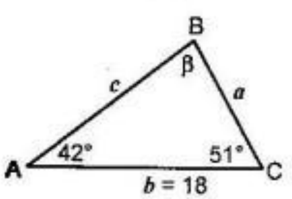
e) $\gamma = 52°$, $b = 28$, $c = 21$

f) $\alpha = 48°$, $b = 43$, $a = 37$

g) $\alpha = 67°23'$, $b = 20$, $a = 27$

Solución :

a) $\alpha = 42°$, $\gamma = 51°$, $b = 18$



Se tiene el caso ALA o AAL (dos ángulos cualesquiera y un lado), razón por la cual se aplica la regla directamente y se tiene un sólo triángulo. Nótese que para aplicar una de las tres posibilidades es necesario determinar primero, el valor para β. Aplicando la propiedad, suma de ángulos internos para triángulos, se tiene que: $\beta = 180° - 42° - 51° = \mathbf{87°}$. Ahora se aplica la siguiente regla y que al sustituir los valores dados se obtiene.

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{sen}\,42°}{a} = \frac{\text{sen}\,87°}{18}.$$

Nótese que el valor por encontrar es el de a y despejando para ésta se tiene que:

$$a = \frac{18\ \text{sen}\,42°}{\text{sen}\,87°} \quad \text{ó} \quad a \approx \mathbf{12.06}.$$

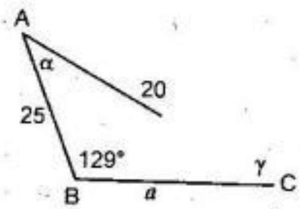
Ahora se determina el valor para c, aplicando la razón y sustituyendo los valores conocidos y se tiene que $\dfrac{\text{sen}\,\beta}{b} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{c}$ ó $\dfrac{\text{sen}\,87°}{18} = \dfrac{\text{sen}\,51°}{c}$.

Despejando para c, se obtiene que $c = \dfrac{18\ \text{sen}\,51°}{\text{sen}\,87°}$ ó $c \approx \mathbf{14.01}$.

Obsérvese que el ángulo de mayor medida es opuesto al lado de mayor longitud.

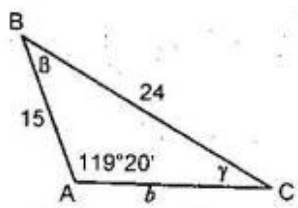
En síntesis, $\beta = 87°$, $a \approx 12.06$ y $c \approx 14.01$

b) $\beta = 129°$, $c = 25$, $b = 20$



Se aplica el caso ALL, en éste se debe tener cuidado ya que se puede presentar el caso ambiguo y no existir triángulo. Al proceder a dibujar el triángulo, se observa que el lado opuesto al ángulo de mayor medida, es menor que el otro lado conocido, además se sabe, que un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso. Por tal razón, **se concluye que no existe triángulo**. Se puede comprobar que al aplicar una de las proporciones dadas (Ley de senos) se obtienen valores para los otros ángulos, pero al sumarlos contradice la propiedad de la suma de ángulos internos de un triángulo.

c) $\alpha = 119°20'$, $a = 24$, $c = 15$



Se tiene el caso ALL, nótese que el ángulo dado es obtuso y que éste es opuesto al lado de mayor longitud, lo que implica que existe un triángulo. Aplicando ley de seno y sustituyendo los valores conocidos se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{sen} 119°20'}{24} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{15} \quad \text{ó}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{15 \operatorname{sen} 119°20'}{24} \quad \text{o} \quad \gamma = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{15 \operatorname{sen} 119°20'}{24}\right).$$

Obteniendo que $\gamma \approx 33°0'56''$, y con este resultado se obtiene el valor de β. Determinando la medida del mismo se tiene que: $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ ó $\beta \approx 180° - 119°20' - 33°0'56'' \approx 27°39'4''$. Una vez que se han obtenido los valores de los ángulos, se deben sumar los tres para comprobar que la suma de éstos es igual a 180°.

Para determinar el valor para b, se aplica la siguiente proporción:

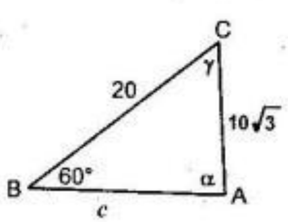
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{sen} 119°20'}{24} = \frac{\operatorname{sen} 27°39'4''}{b}.$$

Despejando para b, se tiene que:

$$b = \frac{24 \operatorname{sen} 27°39'4''}{\operatorname{sen} 119°20'} \quad \text{ó} \quad b \approx \mathbf{12.78}.$$

En conclusión, $\beta \approx \mathbf{27°39'4''}$, $\gamma \approx \mathbf{33°0'56''}$ y $b \approx \mathbf{12.78}$.

d) $\beta = 60°$, $b = 10\sqrt{3}$, $a = 20$



Se tiene el caso ALL, nótese que el ángulo dado es agudo y que el lado opuesto a éste, es de menor longitud que el otro lado dado. Se debe tener cuidado ya que en estos casos se tiene varias posibilidades (no existir triángulo, existir un triángulo rectángulo, existir dos triángulos o existir un triángulo). Inicialmente no es fácil determinarlo, sino hasta que se aplica la ley adecuada y se determina el seno del ángulo comprendido por el lado opuesto al ángulo dado y el lado desconocido.

Obsérvese el triángulo, y aplicando la ley de senos se tiene:

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{sen}\,60^\circ}{10\sqrt{3}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{20}$$

Despejando para sen α, se tiene: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{20\,\text{sen}\,60^\circ}{10\sqrt{3}}$.

Utilizando la calculadora se tiene que **sen α = 1, obteniendo el caso b), de la fig.4 (existe un triángulo rectángulo).**

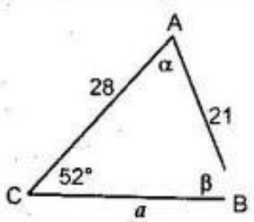
Este resultado implica que α = **90°**, y por complemento de ángulos se determina que $\gamma = 30°$.

El valor para c, se determina aplicando Pitágoras, ya que se tiene un triángulo rectángulo y así es posible obtener un valor exacto.

Véase que $c = \sqrt{20^2 - \left(10\sqrt{3}\right)^2}$ ó $c = 10$

En conclusión, $\alpha = 90°$ $\gamma = 30°$, $c = 10$.

e) $\gamma = 52°$, $b = 28$, $c = 21$



Se tiene el caso ALL, nótese que el ángulo dado es agudo y que el lado opuesto a éste, es de menor longitud que el otro lado dado. Igual que en el inciso anterior, se debe analizar cual de los casos se obtendrá. Obsérvese el triángulo, y aplicando la ley de senos se tiene:

$\dfrac{\text{sen}\,52^\circ}{21} = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{28}$ ó $\text{sen}\,\beta = \dfrac{28\,\text{sen}\,52^\circ}{21}$. Obteniendo que sen $\beta \approx$ **1. 05** y como este valor es mayor que uno se obtiene el caso del inciso a) de la fig. 4, concluyendo que **no existe triángulo**.

Observación: Inicialmente, no es posible determinar que caso se tenga, si existe triángulo o no, se debe partir del supuesto de que éste existe para auxiliarse de una figura y luego se puede mejorar la misma si de desea.

f) $\alpha = 48°$, $b = 43$, $a = 37$

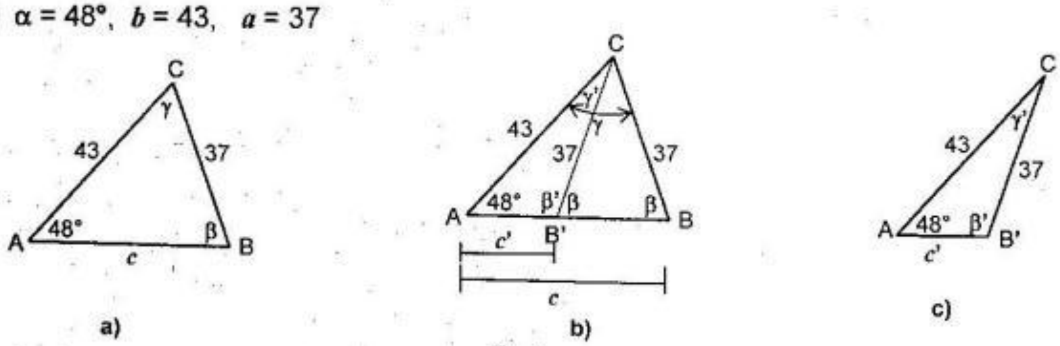


fig. 5

Se tiene el caso ALL, nótese que el ángulo dado es agudo y que el lado opuesto a éste, es de menor longitud que el otro lado dado. Nuevamente se analiza que caso se tiene, determinando el resultado del sen β (fig. 5 a)). Recuérdese que se analiza el seno del ángulo formado por el lado opuesto al ángulo dado y el lado desconocido.

Aplicando la ley de senos se tiene:

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{sen}\,\beta}{43} = \frac{\text{sen}\,48°}{37}$$

Despejando para sen β , se tiene: $\text{sen}\,\beta = \dfrac{43\ \text{sen}\,48°}{37}$.

Utilizando la calculadora se determina que **sen $\beta \approx$ 0.863654797**, **obteniendo el caso c), de la fig. 4 (existe dos triángulos)**. Estos dos triángulos se pueden visualizar en la fig. 5 b), los cuales al tomarlos por separados se aprecian en la fig. 5 a) y c), para los cuales deben determinarse los valores desconocidos.

Encontrando las partes restantes del triángulo de la fig. 5 a)

Se tiene que **sen $\beta \approx$ 0.863654797**, por lo que $\beta \approx 59.73°$ y $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.
Luego se concluye que: $\gamma \approx 180° - 48° - 59.73° \approx 72.27°$.

Determinando el valor de c:

Tomando $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{c}$ ó $\dfrac{\text{sen}\,48°}{37} = \dfrac{\text{sen}\,72.27°}{c}$

Despejando para c, se tiene que: $c = \dfrac{37\ \text{sen}\,72.27°}{\text{sen}\,48°}$ ó $c \approx 47.42$

En conclusión, para el triángulo de la fig. 5 a) se tiene: $\beta \approx 59.73°$, $\gamma \approx 72.27°$ y $c \approx 47.42$

Encontrando las partes restantes del otro triángulo (fig. 5 c))

Se determinó que $\beta \approx 59.73°$, luego $\beta' = 180° - \beta$ (ver fig. 5 b)), por lo que $\beta' \approx 120.27°$.

$\gamma' = 180° - \alpha - \beta'$, por lo que $\gamma' \approx 180° - 48° - 120.27° \approx 11.73°$.

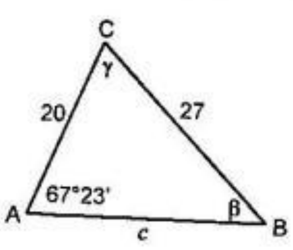
Determinando el valor de c':

Tomando $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma'}{c'}$ ó $\dfrac{\text{sen}\,48°}{37} = \dfrac{\text{sen}\,11.73°}{c'}$

Despejando para c', se tiene que: $c' = \dfrac{37\ \text{sen}\,11.73°}{\text{sen}\,48°}$ ó $c' \approx 10.12$.

En conclusión, para el triángulo de la fig. 5 c) se tiene: $\beta' \approx 120.27°$, $\gamma \approx 11.73°$ y $c' \approx 10.12$.

g) $\alpha = 67°23'$, $b = 20$, $a = 27$



Se tiene el caso ALL, nótese que el ángulo dado es agudo y que el lado opuesto a éste, es de mayor longitud que el otro lado dado. En este caso, dado que el lado opuesto al ángulo dado es de mayor longitud que el otro lado dado, se espera que el sen β **<** 1 ya que en este caso existe un triángulo (ver fig. 4 d)). Téngase cuidado de la diferencia entre el ejemplo del inciso f) y g) ya que en los dos casos, el seno del ángulo por analizar es menor que uno. La **diferencia es la longitud del lado opuesto al ángulo dado** que en el inciso f) éste es menor y en el inciso g) éste es mayor.

Obsérvese el triángulo y aplicando la ley de senos se tiene:

$\dfrac{\textbf{sen 67°23'}}{\textbf{27}} = \dfrac{\textbf{sen}\ \beta}{\textbf{20}}$ ó sen $\beta = \dfrac{\textbf{20 sen 67°23'}}{\textbf{27}}$. Obteniendo que sen $\beta \approx$ **0. 683776** el cual coincide con el análisis hecho anteriormente.

Luego $\beta \approx$ **43°8'**, y $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ ó $\gamma \approx 180° - 67°23' - 43°8' \approx 69°29'$.

Determinando el valor de c:

Tomando $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\ \gamma}{c}$ ó $\dfrac{\textbf{sen 67°23'}}{\textbf{27}} = \dfrac{\textbf{sen 69°29'}}{c}$

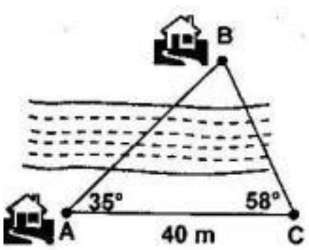
Despejando para c, se tiene que: $c = \dfrac{\textbf{27 sen 69°29'}}{\textbf{sen 67°23'}}$ ó $c \approx 27.39$

En conclusión: $\beta \approx 43°8'$, $\gamma \approx$ **69°29' y** $c \approx$ **27.39.** ■

La ley de senos se utiliza para resolver ciertos problemas de aplicación. Para dar respuesta a estas aplicaciones, se analizan de forma similar a los dados en la sección anterior (triángulos rectángulos) la diferencia en éstos, es que no necesariamente se obtendrá un triángulo rectángulo.

Ejemplo 2 Dos casas se encuentran en lados opuestos de la orilla de un río. Un topógrafo desea medir la distancia a la que se encuentran. Ubica un punto A en una de las casas y mide que el ángulo hacia un punto B que está en la otra casa es de 35°. Se aleja 40 metros sobre la misma orilla del río donde se encuentra el punto A y desde donde se encuentra en ese momento, hace otra medición en dirección al punto B de la casa que está en la otra orilla y ésta es de 58°. ¿Cuál es la distancia entre las casas?

Solución:



La distancia entre las casas está determinada, por la longitud del segmento AB. Obsérvese el triángulo ABC, se tiene el caso AAL, en donde para encontrar la distancia entre las casas, se utiliza la ley de senos. Determinando el tercer ángulo, se tiene que éste mide 87°. Luego, se tiene que:

$$\frac{\text{sen } 58°}{AB} = \frac{\text{sen } 87°}{40} \qquad \text{aplicando ley de seno.}$$

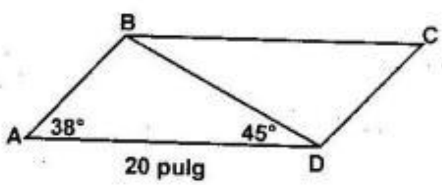
$$AB = \frac{40 \text{ sen } 58°}{\text{sen } 87°} \qquad \text{despejando para AB.}$$

$$AB \approx 33.97 \qquad \text{simplificando.}$$

Conclusión: La distancia entre las casas es aproximadamente de 33.97 metros. ■

Ejemplo 3 La base de un paralelogramo mide 20 pulgadas, el ángulo menor entre la base y el lado adyacente es de 38° y la diagonal de menor longitud forma un ángulo de 45° con la base. Determinar la longitud del lado adyacente al ángulo con vértice A.

Solución:



La longitud del lado adyacente, está determinada, por la longitud del segmento AB. Obsérvese el triángulo ABD, se tiene el caso ALA, en donde para encontrar la longitud del lado adyacente del paralelogramo, se aplica ley de senos. Determinando el tercer ángulo se tiene que éste mide 97°. Aplicando ley de seno se tiene que:

$$\frac{\text{sen } 45°}{AB} = \frac{\text{sen } 97°}{20} \qquad \text{aplicando ley de seno.}$$

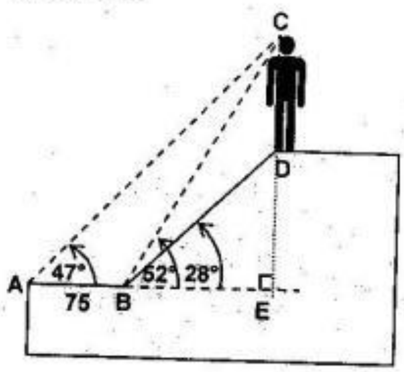
$$AB = \frac{20 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 97°} \qquad \text{despejando para AB.}$$

$$AB \approx 14.25 \qquad \text{simplificando.}$$

Conclusión: La longitud del lado adyacente es aproximadamente de 14.25 pulgadas. ■

Ejemplo 4 Una estatua se encuentra sobre una colina. Cuando se observa la parte superior de la estatua desde la base de la colina, el ángulo de elevación es de 52°; cuando se observa a una separación de la base de la colina a 75 pies, el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua es de 47°. Si la colina tiene una inclinación de 28° ¿cuál es la altura de la estatua?

Solución:



Elaborando una figura adecuada se visualiza los siguientes triángulos: **Δ** ABC, **Δ** CBD y el triángulo rectángulo ACE, entre otros. Obsérvese que el dato por encontrar está en el triángulo CBD, del cual en este momento se conoce únicamente la medida del ángulo CBD que es 24° (52° – 28°). Observando los datos dados y auxiliándonos de la figura, se tiene que $m\angle ABC = 128°$ ya que el $\angle ABC$ y el $\angle CBE$ son suplementarios, $m\angle CBD = 24°$, $m\angle ACB = 5°$, $m\angle ACE = 43°$, $m\angle BCE = 38°$ y $m\angle CDB = 118°$. Determinando primero BC, aplicando ley de senos se tiene que:

$$\frac{\text{sen } 47°}{BC} = \frac{\text{sen } 5°}{75} \qquad \text{aplicando ley de seno.}$$

$$BC = \frac{75 \text{ sen } 47°}{\text{sen } 5°} \qquad \text{despejando para BC.}$$

$$BC \approx 629.35 \text{ pies} \qquad \text{simplificando.}$$

Con este dato se puede determinar lo solicitado (altura de la estatua) aplicando nuevamente ley de senos y diciendo que:

$$\frac{\text{sen } 24°}{CD} = \frac{\text{sen } 118°}{BC} \qquad \text{aplicando ley de seno.}$$

$$CD = \frac{BC \text{ sen } 24°}{\text{sen } 118°} \qquad \text{despejando para CD.}$$

$$CD \approx 289.92 \qquad \text{simplificando.}$$

Conclusión: La altura de la estatua es aproximadamente de 289.92 pies. ■

Ejercicios 4. 2

1. Encontrar las partes restantes para cada triángulo.

a) $\gamma = 25°$, $\beta = 50°$, $b = 60$ b) $\alpha = 65°$, $\beta = 32°$, $c = 15$ c) $\alpha = 58°$, $\gamma = 52°$, $c = 18$

d) $\alpha = 52.3°$, $\beta = 32.4°$, $c = 6$ e) $\beta = 15°20'$, $\gamma = 12°$, $a = 10$ f) $\gamma = 85°$, $\beta = 22°15'$, $c = 11.2$

g) $a = 20$, $c = 40$, $\gamma = 30°$ h) $a = 24$, $b = 32$, $\alpha = 52°$ i) $b = 22$, $c = 41$, $\beta = 130°$

j) $b = 20$, $c = 18$, $\gamma = 38°$ k) $b = 43$, $c = 40$, $\beta = 72°$ l) $c = 28$, $a = 24$, $\gamma = 110°$

m) $a = 10.2$, $c = 15$, $\alpha = 54°$ n) $a = 38.2$, $b = 42.1$, $\beta = 65°$ o) $a = 18$, $c = 14$, $\alpha = 75°20'15''$

p) $b = 18$, $a = 18$, $\alpha = 62°$ q) $b = 13$, $c = 21$, $\gamma = 95°$ r) $c = 30$, $b = 28$, $\beta = 64°$

s) $a = 48$, $c = 56$, $\gamma = 55°$ t) $c = 34$, $b = 23$, $\beta = 36°$ u) $a = 40$, $c = 35$, $\alpha = 46°$

2. La base de un paralelogramo es de 30 pulgadas, el ángulo mayor entre la base y el lado adyacente es de 115° y la diagonal de mayor longitud forma un ángulo de 32° con la base. Determinar la longitud del lado adyacente.

3. Un avión vuela directamente sobre dos torres de control separadas a 600 metros una de la otra. Un controlador en una de las torres, observa que el ángulo de elevación al avión es de 38.2°, en el mismo instante otro observador que se encuentra en la otra torre, advierte que el ángulo de elevación al mismo avión desde dicha torre es de 40.7°. Determinar la altitud a la que se encuentra el avión en ese instante.

4. Dos barcos de la fuerza naval de un pais determinado, separados a 12 millas entre sí, y a una distancia de 3 millas de la línea limítrofe, vigilan embarcaciones de países vecinos que entran ilegalmente en aguas de dicho país. Si el capitán de uno de los barcos observa una embarcación que se desplaza en línea paralela con respecto a la posición de estos, observa que el ángulo a dicha embarcación es de 36°50'. En ese mismo instante, el capitán del otro barco, reporta la misma embarcación con un ángulo de 21°. ¿A qué distancia se encuentra la embarcación de cada uno de los barcos? ¿Ha invadido dicha embarcación aguas del país vecino?

5. Para medir la altura de un árbol, un ingeniero hace dos mediciones angulares de dos puntos A y B separados a 125 pies a la parte inferior del árbol. Las mediciones son 35.8° y 43°. Determinar la altura del árbol.

6. Un globo flota en el aire exactamente sobre la recta que une dos puntos P y Q que están a 5 millas de distancia. Si el ángulo de elevación al globo del punto P es de 22.45° y del punto Q es de 49.8°, determine la altura del globo.

7. Un poste telefónico se sostiene de dos cables sujetados a la parte superior del poste y en el suelo, en lados opuestos del poste, en los puntos P y Q separados a 100 pies entre sí. Si los ángulos de elevación en los puntos P y Q son de 43.25° y 68.3° respectivamente, determinar la longitud de los cables y la altura del poste.

8. Un automovilista viaja en dirección a una montaña a 80 km/h. Observa que en un tiempo de 10 minutos el ángulo de elevación a la cima de la montaña cambia de 15° a 20°. Determinar la altura de la montaña.

9. Un pasajero que va en un autobús a una velocidad de 40 km/h, observa una antena de telefonia móvil. Determina que el ángulo de elevación a la parte superior de la misma es de 9°. Cinco minutos después mide que el ángulo de elevación al mismo punto es de 15°. ¿A qué distancia se encuentra el pasajero de la antena cuando realizó la última medición angular? ¿Cuál es la altura de la antena?

10. Un avión vuela a una altura de 1800 pies sobre la cima de una montaña de altura 3500 pies. Cerca de ésta, se encuentra otra montaña más alta, que desde el avión se observa con un ángulo de depresión de 48°. La segunda montaña tiene un ángulo de elevación de 16° desde la cima de primera montaña. Determinar la altura de la segunda montaña.

11. Un topógrafo desea saber si es funcional una antena telefónica en la cima de una montaña, por tal razón debe conocer la altura de la misma. Para determinar dicha altura, éste fija un punto A y mide el ángulo de elevación a la cima de la montaña que es 46.24°. Después se aleja de este punto y de la montaña 1100 pies y mide el ángulo de elevación que es 34°. ¿Cuál es la altura de la montaña?

12. Dos observadores se encuentran separados a 12 kilómetros entre sí, observan un helicóptero que vuela sobre un pueblo que se encuentra entre ellos. Si los observadores están a una misma altura (sobre la misma horizontal) y los ángulos de elevación de cada observador al helicóptero son 23° y 43° respectivamente, determinar la altura a la que se encuentra el helicóptero.

13. Una escalera de 21 pies, está apoyada sobre un muro de contención que tiene una inclinación de 38.4° con respecto a la horizontal. Si la escalera está separada a 6 pies de la base del muro, determinar la longitud del muro, desde donde descansa la escalera sobre él, hasta el suelo.

14. Desde un punto A, un atleta recorre 3 kilómetros en dirección N40°E a un punto B. Este debe hacer una trayectoria triangular pasando también por un punto C, que se encuentra al este de A. ¿Si el atleta recorre 2 kilómetros del punto B en busca de C en una dirección de SθE, logrará su objetivo? ¿Si ahora el atleta recorre 2.5 kilómetros del punto B al punto C, a qué distancia se encontrará del punto A? ¿Cuál es la menor distancia, a la que se encontrará el atleta del punto B, en el recorrido de C a A? ¿Qué dirección debe tomar del punto B, para hacer el menor recorrido de C a A?

4.3 LEY DE LOS COSENOS Y APLICACIONES

Existen otros problemas que con lo analizado anteriormente, no se podrán resolver. Para el caso, cuando se conoce la longitud de dos lados y el ángulo comprendido (LAL) o cuando se conoce la longitud de los tres lados (LLL). Para éstos casos los triángulos son únicos (no existe la posibilidad que se presenten casos ambiguos como en la ley de senos) y se resuelven **aplicando la ley de los cosenos**. Cuando se conozcan los tres lados, recuérdese las condiciones dadas en geometría para que éste exista; la suma de dos lados cualesquiera en un triángulo, debe ser mayor que el tercer lado.

Se deducirá la ley de los cosenos, partiendo de la siguiente figura:

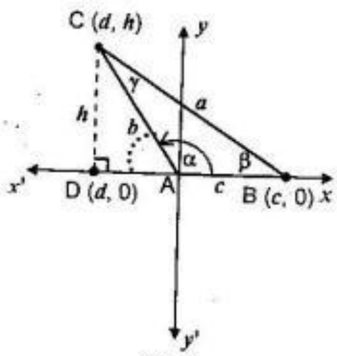


fig. 1

De la fig. 1, se tienen los siguientes datos: α es un ángulo obtuso en posición normal (también es válido si el ángulo α es agudo), el $\overline{CD}$ es perpendicular al eje x, en el punto D $(d, 0)$, Δ CDB y Δ CDA son triángulos rectángulos. Las letras a, b, c, d y h determinan la longitud de los lados de los ΔCDB y ΔCAB, los puntos A, B, C y D tienen como coordenadas $(0, 0)$, $(c, 0)$, (d, h) y $(d, 0)$ respectivamente.

Aplicando razones trigonométricas, se tiene que:

$\cos\alpha = \dfrac{d}{b}$ ó $d = b\cos\alpha$

De igual manera, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{b}$ ó $h = b\operatorname{sen}\alpha$

Nótese que BC = a, o que d (B, C) = a; la distancia del punto B al punto C, es igual a a.

También se puede decir que $a^2 = [d(\mathrm{B,C})]^2$

ó $[d(\mathrm{B,C})]^2 = (d-c)^2 + (h-0)^2$ — aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano.

$= (b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha - 0)^2$ — sustituyendo el valor de d y h.

$= b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2\alpha$ — desarrollando los binomios.

$= b^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — asociando y factorizando.

$= b^2(1) + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — aplicando identidad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — simplificando.

Por tanto, $[d(\mathrm{B,C})]^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, que es una de las fórmulas para la ley de los cosenos. Las otras dos que se enuncian a continuación se pueden deducir intercambiando la posición de los ángulos en la fig. 1.

Ley de los cosenos

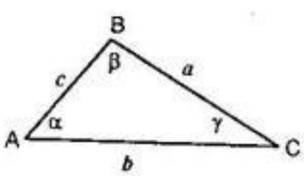


fig. 2

Para un triángulo con vértices A, B y C se tiene que:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

La lectura de estas tres fórmulas se pueden memorizar diciendo que: el cuadrado de la longitud de un lado en un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos dos veces el producto de las longitudes de estos lados, multiplicado por el coseno del ángulo entre estos lados. Nótese que si se tiene que uno de los ángulos, es 90° se determina que el coseno de éste es igual a cero. Este último resultado se reduciría, a la aplicación del Teorema de Pitágoras. En vista de lo anterior, no importa el tipo de triángulo que se tenga (rectángulo u oblicuángulo) se aplica la ley de senos o la ley de los cosenos dependiendo de la información que se tenga. De igual manera se pueden combinar las leyes una vez que se tiene la información necesaria para poder aplicar la ley que se desee.

Como conclusión se tiene que:

Se aplica ley de los cosenos en los casos:

1. Cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (ángulo comprendido); LAL
2. Cuando se conocen los tres lados; LLL

Se aplica ley de los senos en los casos (para efectos de comparación):

1. Cuando se conocen dos ángulos y un lado cualquiera; AAL, ALA
2. Cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (caso ambiguo); LLA

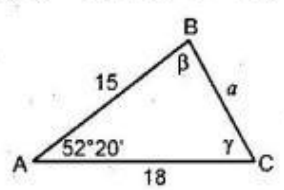
Ejemplo 1 Encontrar las partes restantes para cada triángulo si:

a) $\alpha = 52°20'$, $c = 15$, $b = 18$ b) $\beta = 139°$, $c = 15$, $a = 30$

c) $b = 11$, $a = 18$, $c = 14$ d) $b = 25$, $a = 20$, $c = 15$

Solución:

a) $\alpha = 52°20'$, $c = 15$, $b = 18$



Se tiene el caso LAL, razón por la cual se aplica la ley de los cosenos para determinar el valor de a. Luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula anterior se tiene:

$a^2 = 15^2 + 18^2 - 2(15)(18)\cos 52°20'$ ó $a = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2(15)(18)\cos 52°20'}$

De donde $a \approx 14.80$.

Ahora que se conocen los tres lados y un ángulo, si se desea, se puede aplicar ley de senos. Por efectos de practicar, se aplica la ley de coseno. Se procede a encontrar β tomando la siguiente fórmula y sustituyendo los valores conocidos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ ó $18^2 \approx (14.8)^2 + 15^2 - 2(14.8)(15)\cos\beta$; nótese que el valor tomado para a es aproximado.

Despejando para el término desconocido se tiene:

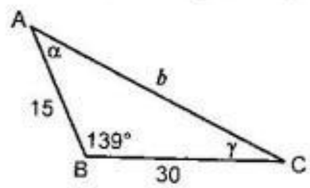
$$\cos\beta \approx \frac{(14.8)^2 + 15^2 - 18^2}{2(14.8)(15)} \quad \text{ó} \quad \cos\beta \approx 0.2704$$

Obteniendo que: $\beta \approx \mathbf{74°18'51''}$ y $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ ó $\gamma \approx \mathbf{53°21'9''}$.

En síntesis, $\beta \approx \mathbf{74°18'51''}$, $a \approx \mathbf{14.80}$, y $\gamma \approx \mathbf{53°21'9''}$.

Recuérdese que siempre es preferible realizar operaciones con los datos dados, más que con los resultados que se han encontrado por uno mismo. Vale la pena mencionar también, que existirán problemas en donde será necesario recurrir a estos cálculos que se han determinado.

b) $\beta = 139°$, $c = 15$, $a = 30$



Se tiene el caso LAL, razón por la cual se aplica la ley de los cosenos para determinar el valor de b. Luego

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula anterior se tiene:

$b^2 = 15^2 + 30^2 - 2(15)(30)\cos 139°$ ó $b = \sqrt{15^2 + 30^2 - 2(15)(30)\cos 139°}$

De donde $b \approx 42.48$.

Aplicando nuevamente la ley de los cosenos, se procede a encontrar α tomando la siguiente fórmula y sustituyendo los valores conocidos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ ó $30^2 = (42.48)^2 + 15^2 - 2(42.48)(15)\cos\alpha$

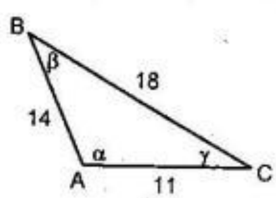
Despejando para el término desconocido se tiene:

$\cos\alpha = \dfrac{(42.48)^2 + 15^2 - 30^2}{2(42.48)(15)}$ ó $\cos\alpha \approx 0.8863$

Obteniendo que: $\alpha \approx \mathbf{27.58°}$ y $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ ó $\gamma \approx \mathbf{13.42°}$

En síntesis, $\alpha \approx \mathbf{27.58°}$, $\gamma \approx \mathbf{13.42°}$ y $b \approx \mathbf{42.48}$.

c) $b = 11$, $a = 18$, $c = 14$



Se tiene el caso LLL, razón por la cual se aplica ley de cosenos para determinar β luego,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula anterior se tiene:

$11^2 = 14^2 + 18^2 - 2(14)(18)\cos\beta$ ó $\cos\beta = \dfrac{14^2 + 18^2 - 11^2}{2(14)(18)}$

ó $\cos\beta \approx 0.7917$ y $\beta \approx \mathbf{37.66°}$

Aplicando nuevamente la ley de los cosenos, se procede a encontrar α tomando la siguiente fórmula y sustituyendo los valores conocidos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ ó $18^2 = 14^2 + 11^2 - 2(14)(11)\cos\alpha$

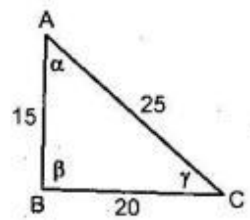
Despejando para el término desconocido se tiene:

$\cos\alpha = \dfrac{14^2 + 11^2 - 18^2}{2(14)(11)}$ ó $\cos\alpha \approx -0.0227$ ($\cos\alpha < 0$, implica que α es obtuso)

Obteniendo que: $\alpha \approx \mathbf{91.30°}$ y $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ ó $\gamma \approx \mathbf{51.04°}$

En síntesis, $\alpha \approx \mathbf{91.30°}$, $\gamma \approx \mathbf{51.04°}$ y $\beta \approx \mathbf{37.66°}$.

d) $b = 25$, $a = 20$, $c = 15$



Se tiene el caso LLL, razón por la cual se aplica la ley de los cosenos para determinar β luego,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula anterior se tiene:

$25^2 = 15^2 + 20^2 - 2(15)(20)\cos\beta$ ó $\cos\beta = \dfrac{15^2 + 20^2 - 25^2}{2(15)(20)}$

ó $\cos\beta = \mathbf{0}$ y $\beta = 90°$

Nótese que se tiene un ángulo recto por lo que el triángulo que se analiza es un triángulo rectángulo. Por facilidad, se procede a trabajarlo como un triángulo rectángulo. Luego

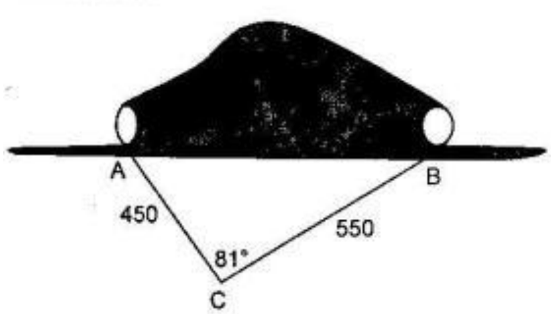
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{20}{25}$ ó $\alpha \approx 53.13°$

y $\gamma = 90° - \alpha$ ó $\gamma \approx \mathbf{36.87°}$

En síntesis, $\alpha \approx \mathbf{53.13°}$, $\gamma \approx \mathbf{36.87°}$ y $\beta = \mathbf{90°}$. ■

Ejemplo 2 Se desea construir un túnel que atraviese de extremo a extremo la base de una montaña. Un topógrafo desea hacer un presupuesto y para tal fin, debe saber la longitud que el túnel tendrá. El topógrafo toma los puntos A y B en lados opuestos de la montaña por donde pasará dicho túnel. Toma otro punto C alejado de la montaña y separado de los puntos A y B 450 y 550 metros respectivamente y con un ángulo C de 81°. ¿Cuál será la longitud del túnel?

Solución:



Elaborando una figura adecuada se determina el **Δ** ABC, con dos lados conocido y el ángulo comprendido, por tal razón se debe aplicar ley de cosenos para responder a la pregunta dada. Se pide determinar AB, tomando la fórmula:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Sustituyendo en ésta se tiene:

$AB^2 = 450^2 + 550^2 - 2(450)(550)\cos 81°$

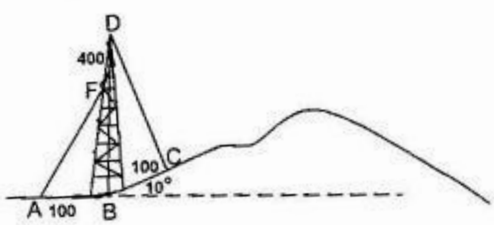
$AB = \sqrt{450^2 + 550^2 - 2(450)(550)\cos 81°}$

$AB \approx 653.89$ metros

Conclusión: La longitud del túnel será aproximadamente de 653.89 metros. ■

Ejemplo 3 Uno de los lados de la base de una antena telefónica de 400 pies de altura, está ubicada en una colina que tiene una pendiente de 10°. Esta se debe sujetar con un cable desde la parte superior, al suelo separado de la base de la torre y sobre la pendiente a 100 pies. Del otro extremo de la base (que está sobre la horizontal), se debe sujetar a una separación de 100 pies y a una distancia de tres cuartos de la base a la parte superior de la antena. ¿Cuál debe ser la longitud de cada cable?

Solución:



Elaborando una figura adecuada se muestra el Δ AFB, el cual es rectángulo con dos lados conocidos (AB = 100 y BF = 300; determinando tres cuartos de 400), por tal razón se aplica el Teorema de Pitágoras para obtener la longitud de uno de los cables. Además se visualiza el ΔBDC, con dos lados conocidos y el ángulo comprendido ($m\angle DBC = 80°$), por lo cual se aplica la ley de los cosenos. Primero se encontrará AF, obteniendo:

Encontrando AF

$AF^2 = AB^2 + BF^2$	aplicando el Teorema de Pitágoras.
$AF^2 = 100^2 + 300^2$	sustituyendo.
$AF = \sqrt{100^2 + 300^2}$	extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.
$= \sqrt{100{,}000}$	simplificando.
$= 100\sqrt{10}$	simplificando.
≈ 316.23 pies	aproximando.

Determinando DC (longitud del otro cable)

Tomando los datos del ΔBDC y aplicando ley de coseno se tiene:

$DC^2 = 400^2 + 100^2 - 2(400)(100)\cos 80°$	sustituyendo.
$DC = \sqrt{400^2 + 100^2 - 2(400)(100)\cos 80°}$	extrayendo raíz cuadrada en ambos lados.
$= 395.11$ pies	simplificando.

Conclusión: El cable al plano horizontal, debe tener una longitud aproximada de 316.23 pies y el otro (del lado de la montaña) una longitud aproximada de 395.11 pies. ■

Ejercicios 4. 3

1. Encontrar las partes restantes para cada triángulo.

a) $\alpha = 35°$, $b = 20$, $c = 15$ **b)** $\beta = 60°$, $a = 15$, $c = 30$ **c)** $\gamma = 58°$, $b = 15$, $a = 18$

d) $\beta = 36°20'12''$, $a = 15$, $c = 13$ **e)** $\gamma = 83°$, $b = 15.4$, $a = 12.3$ **f)** $\alpha = 75°$, $c = 25$, $b = 25$

g) $a = 20$, $c = 40$, $b = 40$ **h)** $a = 12.4$, $b = 14$, $c = 18$ **i)** $a = 20$, $b = 15$, $c = 25$

j) $a = 20$, $b = 10$, $c = 12$ **k)** $a = 11.4$, $b = 13.2$, $c = 16.3$ **l)** $a = 120$, $b = 114$, $c = 88$

2. Un topógrafo desea determinar la distancia a la que se encuentran dos casas ubicadas en orillas opuestas de un lago. Para tal hecho, toma un punto de referencia C a una distancia de 15 millas de una de las casas y a una distancia de 22 millas de la otra casa. Además determina que el ángulo desde el punto C a cada punto determinado en cada casa es de 68°. Determinar la distancia a la que se encuentran las casas.

3. Un avión vuela de una ciudad A, a una ciudad B la cual se encuentra al este de A. Dichas ciudades se Encuentran a 130 millas entre sí. Después debe llegar a otra ciudad C la cual se encuentra a 90 millas de distancia de la ciudad B y en una orientación de N48°E a partir de B. ¿A qué distancia se encuentra la ciudad A de la ciudad C?, ¿Con qué ángulo debe orientarse el avión para regresar a la ciudad A, desde la ciudad C? ¿A qué orientación se encuentra la ciudad C a partir de la ciudad A?

4. Un barco debe llegar desde una isla A, a una isla B las cuales están separadas a 300 millas náuticas entre si y B al norte de A. Antes de zarpar visualiza una tormenta en dirección a la que lo conduce a la isla B, por tal razón decide desviarse 25° con respecto a la línea recta que une ambas islas. El capitán mantiene una velocidad constante de 12 millas náuticas por hora y después de haber navegado 10 horas, observa que la tormenta ha desaparecido de su ruta. ¿Con qué ángulo debe orientarse en éste momento el barco, para dirigirse directamente a la isla B? ¿Cuánto tiempo más tiene que navegar para llegar a la isla B?

5. Un campo de béisbol de las Grandes Ligas, tiene la forma de un cuadrado de 90 pies de lado. El montículo de lanzamiento está ubicado a 60.5 pies de la placa de home (meta), sobre la recta que une home (meta) con la segunda base. ¿A qué distancia se encuentra el montículo de la primera base? ¿A qué distancia se encuentra home de la segunda base? Encontrar la medida del ángulo determinado por el segmento de recta que une el montículo y la tercera base y el segmento de recta determinado por la segunda base y el montículo.

6. Un campo de béisbol de las Ligas Pequeñas, tiene la forma de un cuadrado de 60 pies de lado. El montículo de lanzamiento está ubicado a 46 pies de la placa de home (meta), sobre la recta que une home (meta) con la segunda base. ¿A qué distancia se encuentra el montículo de la primera base?. ¿A qué distancia se encuentra home de la segunda base? Encontrar la medida del ángulo formado por el segmento de recta con extremos el montículo y home y el segmento de recta determinado por la primera base y el montículo.

7. Un atleta debe recorrer una trayectoria de 1100 metros con una trayectoria especifica. A partir de un punto A debe recorrer 600 metros en dirección N 50° E y la diferencia, con una dirección de N 30° O. ¿A qué distancia se encuentra el atleta del punto de partida después de haber recorrido la trayectoria? ¿Qué dirección debe tomar para regresar al punto de partida?

8. Determinar la longitud de un lado de un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

9. Dos lados adyacentes de un paralelogramo tienen 23 y 36 pies de longitud respectivamente. Si el ángulo comprendido por estos dos lados es de 46.25°, determinar las longitudes de las dos diagonales.

10. Un caminante, recorre 300 metros en dirección S 40° E desde un punto A y después 400 metros en dirección S 52° O. ¿ A qué distancia se encuentra el caminante del punto A? ¿En qué dirección se encuentra el caminante del punto de partida?

11. Un turista que se encuentra en una ciudad A, desea visitar las ciudades B y C. El sabe que la ciudad C, está a 5 kilómetros, en dirección N 38° O, de la ciudad B. También sabe que la ciudad B está a 7 kilómetros en dirección N 48° E de la ciudad A. ¿ A qué distancia se encuentra el turista de la ciudad C? ¿En qué dirección se encuentra la ciudad C, con respecto a la ciudad A?

12. Tres niños se encuentran en un campo de fútbol, jugando con una pelota. Los niños están ubicados (no en línea recta) de tal manera que el primer niño le pasa la pelota al segundo, el segundo al tercero, y éste se la devuelve al primero. Si el primer niño está separado a 5 metros y 7 metros del segundo y tercer niño respectivamente y la separación entre el segundo y tercero es de 10 metros, determinar, los ángulo interiores del triángulo que forman los niños.

13. Un turista se encuentra en una comunidad cuyo terreno es plano (valle) y desea hacer una caminata por la comunidad. Se ubica en un punto A como referencia, y a partir de este punto recorre 1000 metros hacia el sur llegando a un punto B, luego gira **N θ O** y recorre 900 metros y llega a un punto C. Estando en el punto C se entera que se encuentra a 500 metros del punto A. Determinar la orientación a la que se encuentra el turista del punto de partida.

14. Los lados de la base de un prisma rectangular (paralelepípedo) miden 6 y 3 pulgadas y la altura del mismo es de 4 pulgadas. Determinar el ángulo determinado por una de las diagonales de la base y una diagonal del prisma.

15. Un piloto vuela al este durante 2 horas. En este momento se entera que lleva un error y lo corrige orientándose A **S** 80° **E** de su curso original y vuela durante 2 horas con 30 minutos más. Si el piloto ha mantenido una velocidad constante de 600 millas por hora, ¿a qué distancia se encuentra del punto de partida?

16. Dos barcos A y B zarpan de un puerto a la misma hora. Si el barco A se desplaza con un rumbo de N 55° E a 30 millas por hora y el barco B con un rumbo de S 65° E a 20 millas por hora. ¿A qué distancia se encontrarán ambos barcos, después de dos horas? ¿en qué dirección se encuentra el barco A con respecto al barco B?

17. Dos hombres que están separados a 8 metros entre sí, deben arrastrar un objeto pesado. Para tal acción, cada uno debe amarrar una cuerda al objeto y deben halarla al mismo tiempo. Si una cuerda mide10 metros y la otra 12 metros libres para tensarlas, determinar el ángulo que forman las dos cuerdas.

18. Un avión despega de un aeropuerto con un rumbo de 310°. Después de volar 160 millas, se entera que no es ese el rumbo que debió haber tomado y se corrige tomando una dirección de 220° y recorre 320 millas. Determinar la distancia y la orientación a la que se encuentra el avión del punto de partida.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO IV

1. Encontrar las partes restantes para cada triángulo (del inciso **a)** al **h)**, $\gamma = 90°$).

a) $\alpha = 24°,\ a = \dfrac{3}{4}$ **b)** $\alpha = 72°,\ b = \sqrt{15}$ **c)** $\alpha = 55°22',\ c = 57$ **d)** $\beta = 35.2°,\ b = 53$

e) $b = 11,\ a = 41$ **f)** $a = 10,\ c = 13$ **g)** $b = \sqrt{7},\ c = 8$ **h)** $a = 15, b = 4\sqrt{3}$

i) $\alpha = 48°,\ b = 25, c = 18$ **j)** $\beta = 60°,\ \gamma = 83°,\ c = 20$ **k)** $\gamma = 58°,\ b = 15,\ c = 18$

l) $\beta = 62°15',\ a = 15, b = 13$ **m)** $\alpha = 62°,\ a = 29,\ b = 32$ **n)** $\beta = 101°,\ b = 114,\ c = 88$

o) $a = 15, c = 25,\ b = 30$ **p)** $\gamma = 113°,\ b = 24,\ c = 18$ **q)** $a = 30, b = 24,\ c = 18$

2. Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden 16 y 20 pies de longitud y el ángulo interior comprendido por estos dos lados es de 40°. Determinar el área del paralelogramo (OBS. Área del paralelogramo = base x altura).

3. Los ángulos congruentes de un triángulo isósceles miden 50° y cada uno de los lados congruentes miden 30 pulgadas de longitud. Determinar la medida del tercer lado.

4. La base de un triángulo isósceles mide 16 pulgadas de longitud y los lados congruentes miden 25 pulgadas de longitud. Determinar la medida del ángulo opuesto a la base.

5. Determinar la longitud del lado de un octágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 pulgadas.

6. Una de las diagonales de un paralelogramo, tiene una longitud de 12 pulgadas y forma un ángulo de 31° con la base del paralelogramo. Si el área del paralelogramo es de 24 pulg^2 ¿Cuál el la dimensión de sus lados?

7. Determinar la longitud de un lado de un polígono regular de nueve lados (nonágono) inscrito en un círculo de radio igual a 12 cm.

8. Un ingeniero necesita diseñar una escalera eléctrica con una altura 10 pies y debe formar un ángulo con la horizontal de 18°. ¿Qué longitud debe tener la escalera?

9. Un hombre de 6 pies de estatura, proyecta una sombra de 10 pies de largo sobre el nivel del suelo. Determinar el ángulo de elevación del sol.

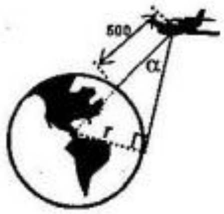
10. Un conductor se dirige hacia una montaña que tiene una altura 1200 pies. La carretera que lo conduce a ésta, está en línea recta. En un punto P, observa que el ángulo de elevación a la cima de la montaña es de 22°, desde otro punto Q, sobre la misma carretera, observa que el ángulo de elevación a la cima de la montaña es de 28°. Determinar la distancia que ha recorrido el conductor desde el punto que realizó la primera medición hasta el punto que tomó la segunda medición.

11. Un observador de la guardia costera, se encuentra en la parte superior de un faro (torre) a 60 pies sobre el nivel del mar. Observa dos yates alineados entre si y con la base del faro. Uno de los yates se dirige directamente al faro y con un ángulo de depresión de 38°. El otro se encuentra con un ángulo de depresión de 25° y se traslada en dirección opuesta al faro. Determinar la distancia a que se encuentran ambos yates en el momento de la medición.

12. Un niño sujeta la cuerda de un cometa a 3 pies del suelo. Se estima que el ángulo de elevación del cometa es de 48°. Si se han soltado 400 pies de la cuerda para volar el cometa. ¿A qué distancia se encuentra el cometa del suelo?

13. Un tanque elevado para almacenar agua está construido a 350 pies de un edificio. Desde una ventana del edificio se observa que el ángulo de elevación a la parte superior del tanque es de 42° y el ángulo de depresión a la parte inferior del tanque es de 22°. ¿Cuál es la altura del tanque de agua? ¿A qué altura esta la ventana de donde se tomaron las mediciones?

14. Un avión vuela a una altura de 5,500 pies sobre una carretera recta. De repente observa un automóvil en marcha sobre la carretera con un ángulo de 50°. Luego observa otro auto, al lado opuesto, sobre la misma carretera, con un ángulo de 32°. ¿A qué distancia entre si están los automóviles?

15. 

Una nave espacial se encuentra a una altura de 500 millas de la tierra. Un astronauta observa el horizonte terrestre, determinando un ángulo α de 62.56°. Determinar el radio de la tierra. Ver figura.

16. Un barco zarpa de un puerto a las 6:00 a. m. y navega en dirección N 25°O con una velocidad de 18 millas por hora. Otro barco zarpa del mismo puerto, a las 7:30 a. m. en dirección S 65° O a 20 millas por hora. ¿A qué distancia se encuentran ambos barcos a las 9:00 a. m.? ¿En qué dirección o posición se encuentra el primero con respecto al segundo?

17. Un avión despega de un aeropuerto, con un rumbo de 140° y vuela a 200 millas por hora durante 45 minutos y luego vuela en dirección 230° por una hora 15 minutos y a la misma velocidad. ¿A qué distancia se encuentra el avión del punto de partida? ¿En qué posición se encuentra el avión del aeropuerto?

18. Una escalera de 21 pies de longitud descanza sobre un faldon de una montaña. La parte inferior de la escalera está separada a 12 pies de la base de la montaña. La parte superior de la escalera está a una longitud del faldon de la montaña de 18 pies. Determinar el ángulo de inclinación de la montaña.

19. Un yate zarpa de un puerto a las 6 a. m. con un rumbo de 64° a una velocidad de 15 millas por hora. A las 8 a. m. otro yate sale del mismo puerto con un rumbo de 110° a 18 millas por hora. ¿A qué distancia se encuentran entre sí los yates a las 11 a. m.? ¿Cuál es la orientación a la que se encuentra el primer yate con respecto al segundo?

20. Dos pueblos se encuentran separados por una carretera en línea recta de longitud 12 kilometros. En determinado momento un avión se encuentera volando directamente arriba de la carretera. Los ángulos de depresión a los pueblos eran de 10° y 12° en determinado momento. Calcular las distancias desde el avión a cada uno de los pueblos en dicho momento. Determinar la altura a la que se encuentra el avión en ese instante.

21. Un turista que viaja en un autobus hacia el este, en una carretera recta y a una velocidad constante de 80 km por hora, observa desde un punto A sobre la carretera, un rótulo que se encuentra a 10 km de A y en direción N 43° E de A. Como no puede leer el rótulo, hace uso de sus binoculares pero tampoco puede leerlo, sino hasta que se encuentra a 8 km de distancia del mismo. Determine aproximadamente ¿por cuánto tiempo podrá leer el rótulo usando sus binoculares? ¿cuánto tiempo transcurrurá, desde que vió por primera vez el rótulo hasta que ya no pudo leerlo nuevamente? ¿cuál es la distancia mas cercana al rótulo, por donde pasa el autobus?

CAPITULO V FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

5.1 FUNCION SENO Y FUNCION COSENO

En este capítulo se hablará de algunas funciones trascendentes como son las funciones trigonométricas así como también las funciones trigonométricas inversas.

Recuérdese que una función f, definida de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}$ es una correspondencia entre dos subconjuntos A y B (subconjuntos de $\boldsymbol{R}$), tal que a cada elemento x en A, le corresponde un único elemento y ó $f(x)$ en B. El conjunto A se le llama dominio de la función y el conjunto B, el rango de la misma. El elemento y ó $f(x)$ es la imagen de x, mediante la función f.

En esta sección se aprenderá a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno debido a que sus características son muy similares. Los tipos de funciones que se considerarán en esta sección se describen en el siguiente cuadro (llámese a $(bx + c)$ o a "bx" el argumento de la función).

Función seno	Función coseno
$f(x) = \text{sen } x$	$f(x) = \cos x$
$f(x) = a \text{ sen } x$	$f(x) = a \cos x$
$f(x) = a \text{ sen } bx$	$f(x) = a \cos bx$
$f(x) = a \text{ sen } (bx + c)$	$f(x) = a \cos (bx + c)$
$f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$	$f(x) = a \cos (bx + c) + d$

cuadro 1

Existen diferentes procedimientos para trazar gráficas de funciones, en particular de las trigonométricas. En este momento se presenta un método; cualquier otro que coincida con los resultados obtenidos bajo este procedimiento, también es válido.

Se comienza trazando las gráficas de la función seno y de la función coseno "elemental". Véase las gráficas de la fig. 1 y fig. 2, que con auxilio de la tabla 1 se grafica la función seno, en todo su dominio (fig.1) y luego en un intervalo (fig. 2) ya que la función seno y la función coseno tienen un período de 2π (el valor de la función seno o de la función coseno se repite infinitas veces).

La tabla 1 muestra algunos valores asignados a x para obtener valores de y (imágenes y preimágenes) en el intervalo de 0 a 2π. Nótese que los valores que se obtienen para y están en el $[-1,1]$.

$f(x) = \text{sen}\, x$

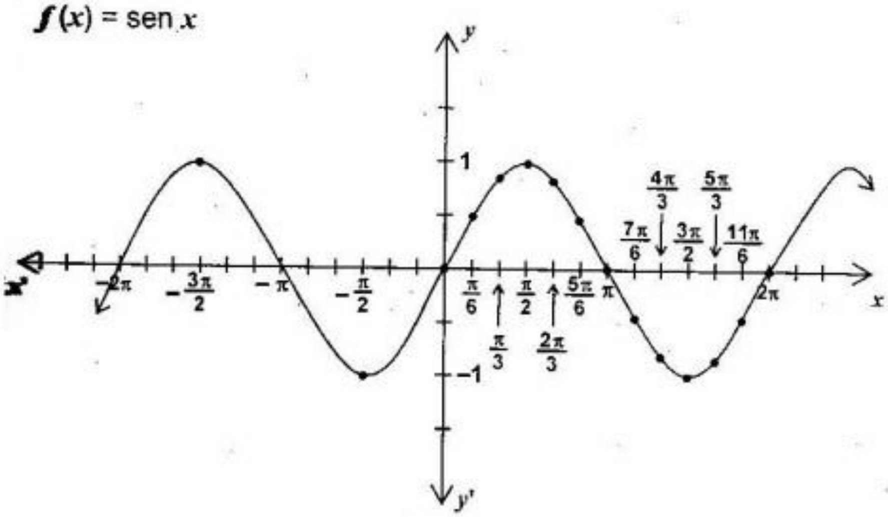


fig .1

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0

tabla 1

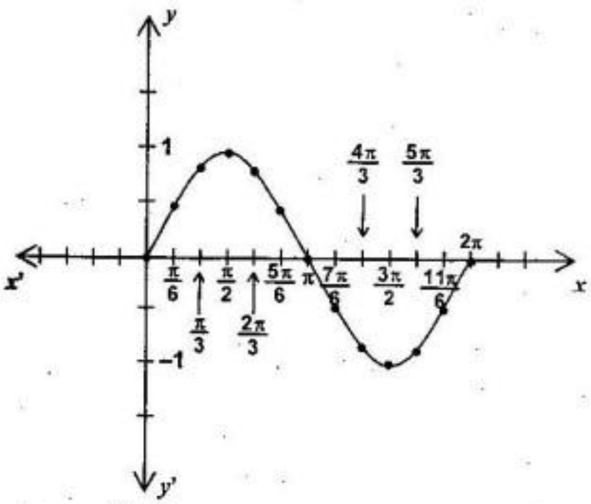


fig .2

Quizá se vea tediosa la forma de trazar una gráfica de este tipo por la cantidad de valores que se le asignen a x para encontrar el valor respectivo de y, pero no es necesario tomar la cantidad de valores descritos en la tabla 1. Posteriormente se verá que serán suficiente asignar cinco valores para x, también se notará que con la práctica se deducirán algunos valores por el comportamiento de la función misma. Lo importante es conocer la forma de la función elemental en cada función analizada.

En la gráfica de la fig. 2, se ha trazado un ciclo o un período de la función, en cambio en la fig. 1, ésta corresponde a la gráfica de la función seno en todo su dominio. Generalmente se especifica si se desea que se trace: uno, uno y medio, dos o más ciclos para una función trigonométrica. Si no se especifica el número de ciclos que se desea, será suficiente en el caso de la función seno y coseno, trazar un ciclo y dibujar una flecha en cada extremo de la gráfica, lo que indicará que ésta se extiende en ambos lados y con el mismo comportamiento.

La siguiente gráfica que se traza es la de la función coseno; siempre la "elemental", véase la tabla 2.

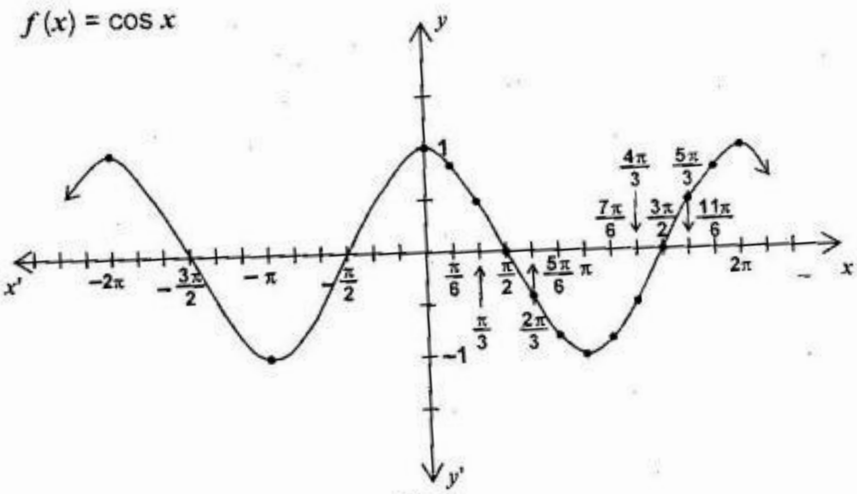


fig .3

x	$f(x)$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	1

tabla 2

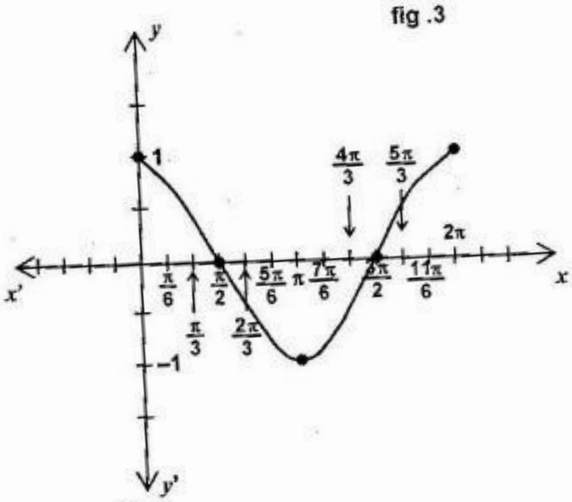


fig .4

Ahora, es de interés trazar la gráfica de una función de la forma $f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$ y $f(x) = a \cos (bx + c) + d$. Es importante recordar que estas gráficas tiene la forma de ondas que se extienden desde $-\infty$ hasta $+\infty$, que se repite infinitas veces la mayor imagen y la menor imagen, que si corta el eje de las x, lo hace infinitas veces. Auxiliándose de las gráficas de la fig. 2 y fig. 4, es posible visualizar la gráfica de $f(x) = a \text{ sen } x$ y $f(x) = a \cos x$, donde se obtendrá como mayor imagen y como menor imagen los valores de a y $-a$ respectivamente si $a > 0$. El efecto de a, en esta función es llamado amplitud de la gráfica de la función y se representa por $|a|$. Si las ecuaciones de las funciones están dadas por $f(x) = \text{ sen } bx$ y $f(x) = \cos bx$, el período (longitud del intervalo que se traza un ciclo) para cada una es el $\left[0, \frac{2\pi}{b}\right]$ si $b > 0$. Otro efecto de b, es que las ondas de la gráfica, se pueden contraer o expandir. Las gráficas de la fig. 2 y fig. 4, pueden desfasarse a la derecha o a la izquierda a lo cual se le denomina desfase o corrimiento y éste está dado por $-\frac{c}{b}$. El efecto de d, se ve reflejado en el rango.

Las gráficas de la fig. 5 y fig. 6, muestran el efecto de a y el efecto de b. En la fig. 7 se grafica un ciclo de las funciones descritas, para que se compare la longitud del intervalo donde se grafica un ciclo de cada función (efecto de b). Se puede notar que cuando $b > 1$, la gráfica se contrae y que cuando $0 < b < 1$, la gráfica se expande.

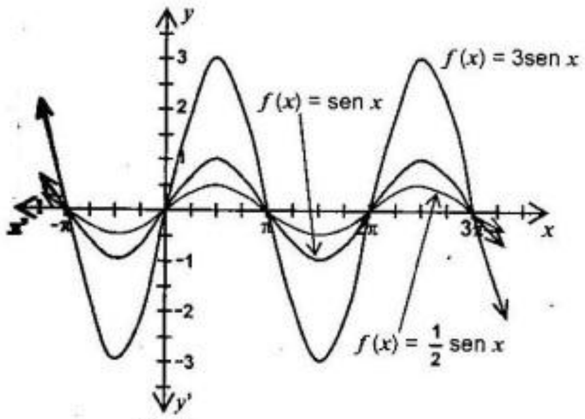


fig. 5

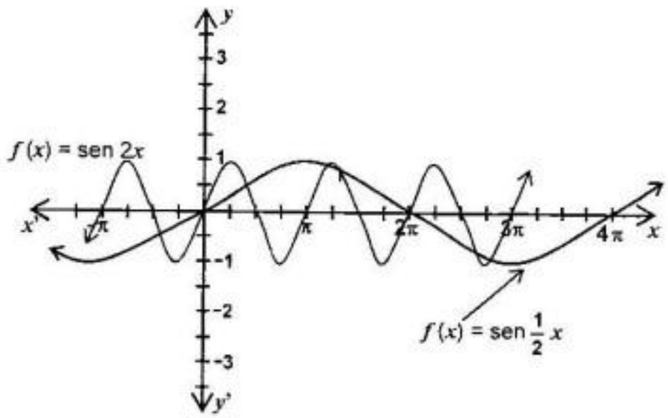


fig. 6

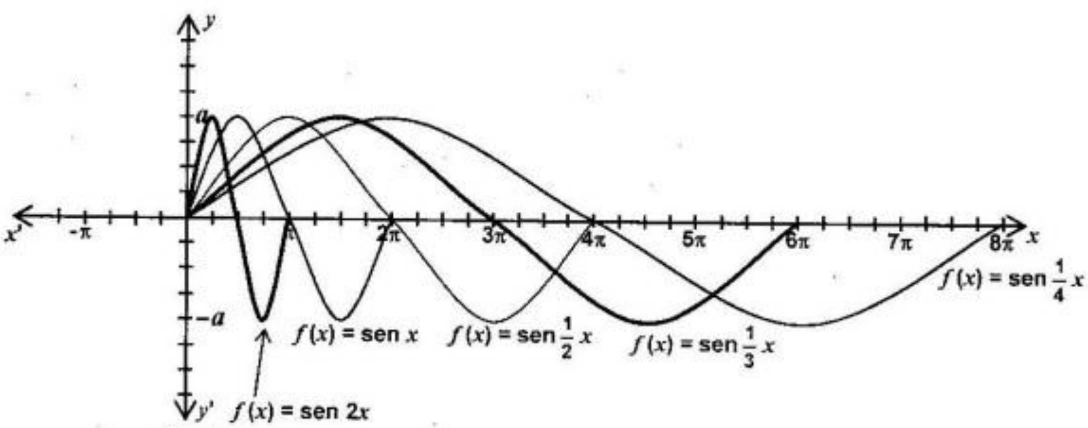


fig. 7

La siguiente propiedad, sintetiza el efecto que tienen las constantes (números reales) a, b, c y d, en cada una de las ecuaciones que representan la función seno y la función coseno.

Propiedad 1 Si $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$ o $f(x) = a \cos(bx + c) + d$, para números reales a, b, c y d, con a y b diferentes de cero, la gráfica tiene una amplitud $|a|$, período de $\frac{2\pi}{|b|}$ y un desfase o corrimiento en $-\frac{c}{b}$. El valor para d se ve reflejado en el rango. Además se puede encontrar un intervalo que contenga exactamente un ciclo de la gráfica, resolviendo la inecuación $0 \leq bx + c \leq 2\pi$, de donde el corrimiento o desfase es el extremo izquierdo de la solución de esta desigualdad. El rango está determinado por $\left[-|a|+d, |a|+d\right]$.

Los ejemplos que se presentan a continuación, muestran valores reales para a, b, c y d. El procedimiento que se presenta es con la idea que se observe como determinar las imágenes de los cinco valores asignados a x y que permita determinar el número necesario de mayores y menores imágenes como los de los intermedios para tener una mejor aproximación de la gráfica. En estas gráficas se analizan los siguientes elementos: dominio (valores para los cuales está definida la función), amplitud (unidades que aumenta o disminuyen las imágenes a partir de la función elemental (mayor imagen que es 1 y menor imagen que es -1)), período (longitud del intervalo donde hay un ciclo de la función), desfase o corrimiento (unidades que se mueve a la derecha o izquierda la gráfica del origen; en base a la elemental), y el rango (intervalo de imágenes).

Para graficar funciones, son elementos importantes los interceptos con los ejes coordenados (I_x e I_y). En el caso de las funciones trigonométricas, usualmente no se consideran, ya que en la mayoría de los casos las ecuaciones planteadas (haciendo y ó $f(x) = 0$) quizá el término trigonométrico no esté comparado con un valor especial (recuérdese la solución de ecuaciones trigonométricas), más sin embargo en algunos ejemplos se determinan. Si en cálculo hay necesidad de la utilización de los mismos y estos no corresponden a valores exactos, se debe recurrir a resolver la ecuación como se describe en la sección de ecuaciones trigonométricas (obteniendo soluciones aproximadas).

Ejemplo 1 Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar: dominio, amplitud, período, desfase o corrimiento y el rango.

a) $f(x) = 2\text{sen}\, x$ **b)** $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **c)** $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = -3\text{sen}\, x$ **e)** $f(x) = \cos(x) - 2$ **f)** $f(x) = \cos(3x)$

g) $f(x) = -2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ **h)** $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ **i)** $f(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Solución:

a) $f(x) = 2\text{sen}\, x$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \le x \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad, el argumento de la función y resolviendo la misma.

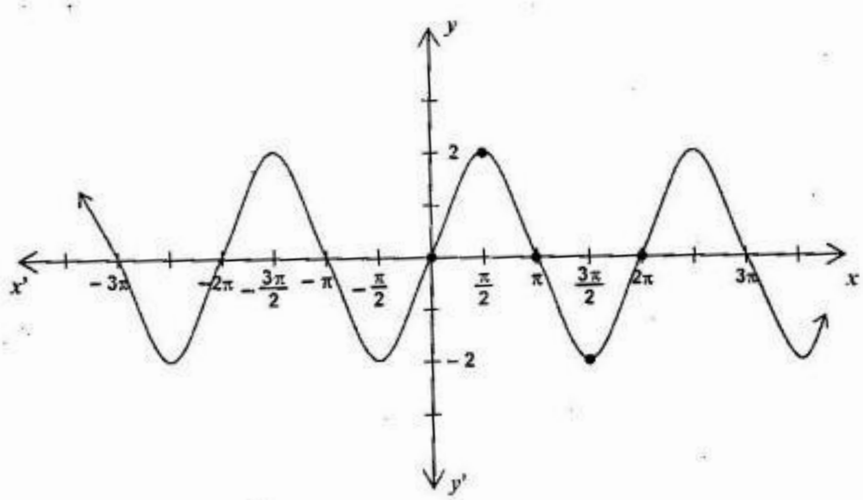
Dominio de $f = \mathbb{R}$

Amplitud: $|2| = 2$

Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

En este caso, no hay corrimiento

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = 2\text{sen}\, x$

$f(0) = 2\text{sen}(0) = 0;$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$ $f(\pi) = 2\text{sen}(\pi) = 0;$ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$

$f(2\pi) = 2\text{sen}(2\pi) = 0$

Nótese que es suficiente determinar las imágenes anteriores y luego se repiten los valores en cada intervalo, que corresponde a un ciclo. Como se nota, no es necesario determinar los interceptos con los ejes coordenados, pero para efecto de práctica se determinan los mismos.

Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$f(x) = 2\text{sen}\, x$ y $f(0) = 2\text{sen}\, 0 = 2(0) = 0$ obteniendo que $I_y(0,0)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$f(x) = 2\text{sen}\,x$ y $2\text{sen}\,x = 0$ ó $\text{sen}\,x = 0$. Las soluciones para esta ecuación son (valores donde el sen x es cero): $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ ó en general para $k\pi$, **con** $k \in Z$.

Recuérdese que los interceptos con los ejes coordenados son pares ordenados. Luego se tiene que $I_x(k\pi, 0)$ **con** $k \in Z$.

El proceso se repite, para cada función dada. En el caso que la ecuación no tenga solución, la función no tendrá interceptos con el eje de las x.

Rango de f: $[-2, 2]$

b) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

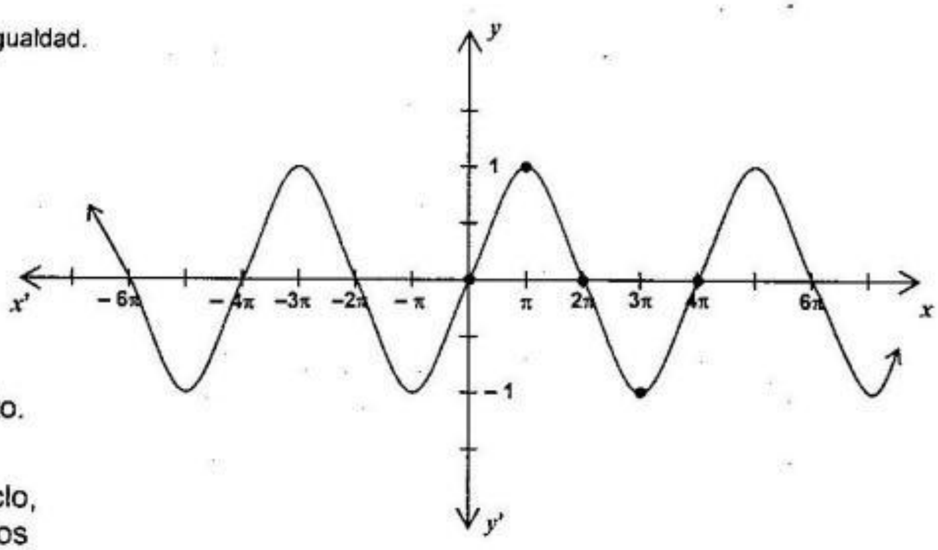
$0 \le \frac{1}{2}x \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

$0 \le x \le 4\pi$ resolviendo la desigualdad.

Dominio de $f = R$

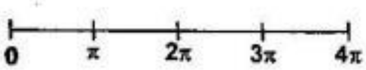
Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$



En este caso, no hay corrimiento.

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f(0) = \text{sen}\,(0) = 0$; $f(\pi) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f(2\pi) = \text{sen}\,(\pi) = 0$; $f(3\pi) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$f(4\pi) = \text{sen}\,(2\pi) = 0$

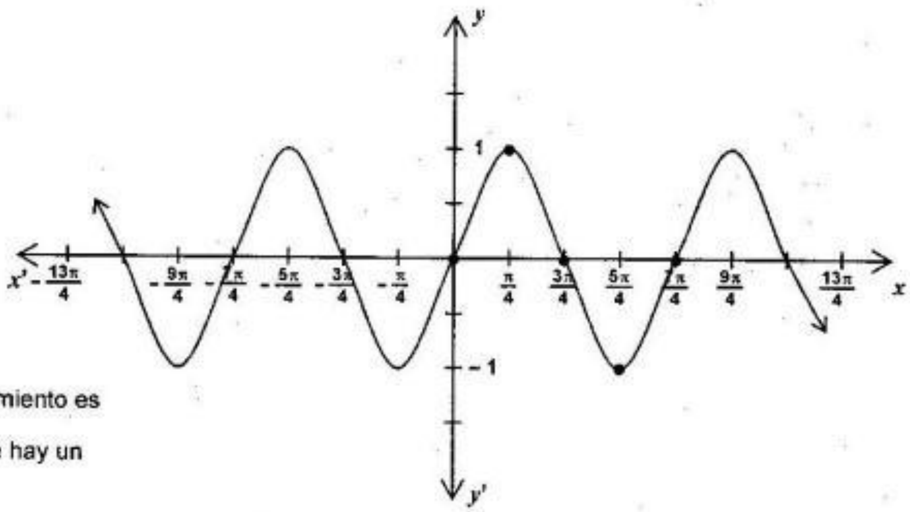
Rango de f: $[-1, 1]$.

c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{4}$ resolviendo.



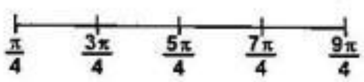
Dominio de $f = \boldsymbol{R}$

Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

Corrimiento: $\frac{\pi}{4}$ (nótese que el corrimiento es el extremo izquierdo del intervalo donde hay un ciclo de la función).

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(0) = 1;$ $\qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi) = -1;$ $\qquad f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) = 1$

Nótese que los ángulos resultantes (en el argumento), después de sustituir el valor para x, y simplificar, se obtienen ángulos cuadrantales. Además se puede notar que las unidades en el intervalo donde se da un ciclo de la gráfica están cada $\frac{2\pi}{4}$ (de $\frac{\pi}{4}$ pasa a $\frac{3\pi}{4}$, de $\frac{3\pi}{4}$ pasa a $\frac{5\pi}{4}$, de $\frac{5\pi}{4}$ pasa a $\frac{7\pi}{4}$ y de $\frac{7\pi}{4}$ pasa a $\frac{9\pi}{4}$ y así sucesivamente). Si es necesario agregar mas unidades hacia la derecha, no es difícil ver la sucesión de las mismas: $\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \cdots$. De igual manera se puede extender hacia la izquierda, en la misma secuencia con valores negativos, según lo requerido en la recta numérica. Además, si se compara la gráfica de las funciones de los incisos a) y b) (función seno), éstas tiene la misma forma con esta última.

Rango de f: $[-1, 1]$.

d) $f(x) = -3\text{sen } x$

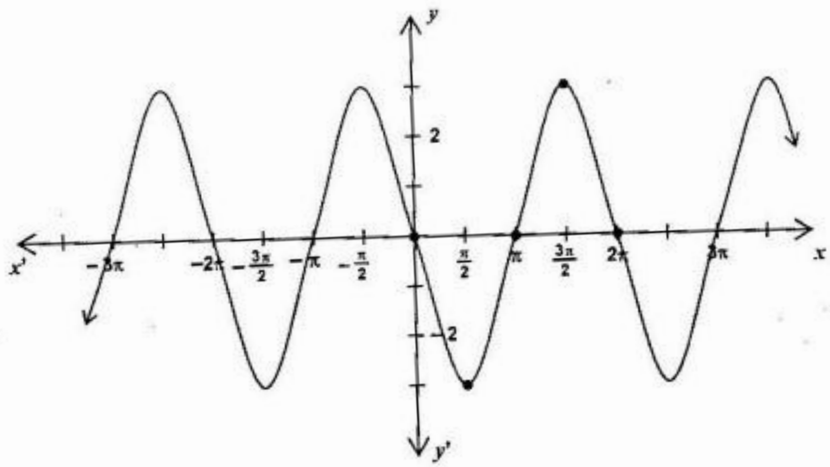
Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \leq x \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función y resolviendo.

Dominio de $f = R$

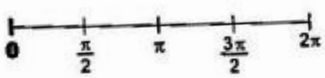
Amplitud: $|-3| = 3$

Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$



En este caso, no hay corrimiento

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = -3\text{sen } x$

$f(0) = -3\text{sen } (0) = 0;$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3;$ $\quad f(\pi) = -3\text{sen } (\pi) = 0;$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3;$ $\quad f(2\pi) = -3\text{sen } (2\pi) = 0$

Rango de f: $[-3, 3]$.

e) $f(x) = \cos(x) - 2$

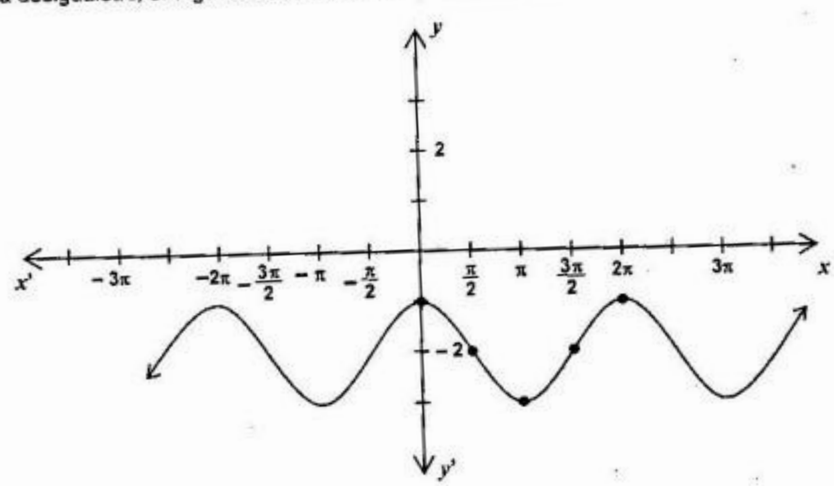
Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \leq x \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad, el argumento de la función y resolviendo.

Dominio de $f = R$

Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$



Corrimiento: no hay

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.

Determinando algunas imágenes para $f(x) = \cos(x) - 2$

$f(0) = \cos(0) - 2 = 1 - 2 = -1;$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f(\pi) = \cos(\pi) - 2 = -1 - 2 = -3;$ $\qquad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f(2\pi) = \cos(2\pi) - 2 = 1 - 2 = -1$

Procediendo a graficar se llega a la misma. Por práctica nuevamente, se determinan los interceptos con los ejes coordenados.

Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$f(x) = \cos x - 2$ y $f(0) = \cos(0) - 2 = 1 - 2 = -1$ obteniendo que $I_y(0, -1)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$f(x) = \cos x - 2$ ó $\cos x = 2$. Nótese que esta ecuación no tiene solución ($\cos x > 1$) y por tanto, I_x no existe.

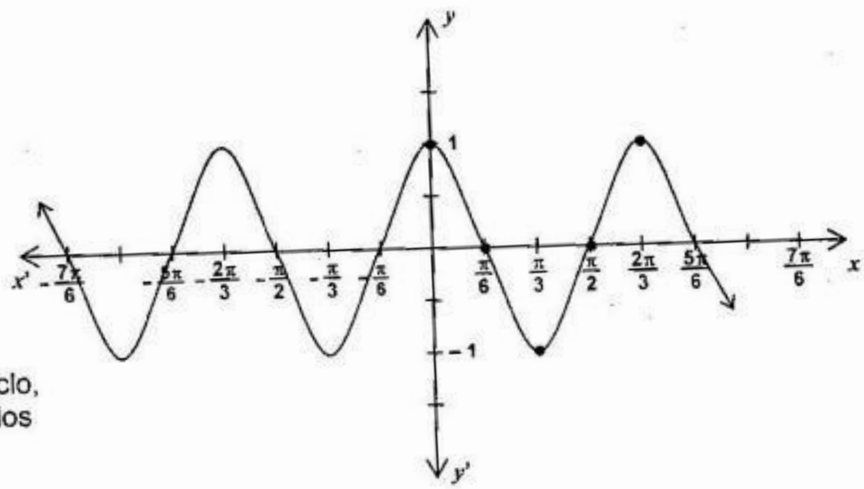
Rango de f: $[-3, -1]$.

f) $f(x) = \cos(3x)$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \le 3x \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

$0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$ resolviendo.



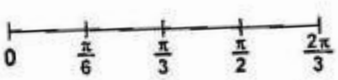
Dominio de $f = R$

Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

Corrimiento: no hay

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = \cos(3x)$

$f(0) = \cos(3(0)) = \cos(0) = 1;$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos(\pi) = -1;$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(2\pi) = 1$

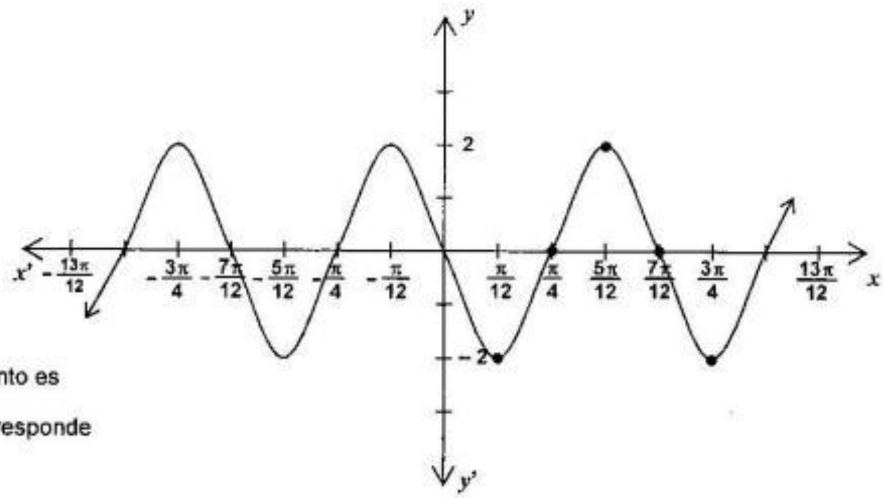
Trazando la gráfica y se tiene el Rango de f: $[-1, 1]$.

g) $f(x) = -2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \le 3x - \dfrac{\pi}{4} \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

$\dfrac{\pi}{12} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$ resolviendo.



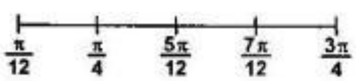
Dominio de f = R

Amplitud: $|-2| = 2$

Período: $\dfrac{2\pi}{|3|} = \dfrac{2\pi}{3}$

Corrimiento: $\dfrac{\pi}{12}$ (nótese que el corrimiento es el extremo izquierdo del intervalo donde corresponde un ciclo de la función).

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = -2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = -2\cos\left(3\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos(0) = -2;$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(3\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

$f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = -2\cos\left(3\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos(\pi) = 2;$ $\quad f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -2\cos\left(3\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -2\cos\left(3\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos(2\pi) = -2$

Trazando la gráfica mostrada.

Rango de f: $[-2, 2]$

h) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(-2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$

Cuando se tiene el caso que $b < 0$, es preferible escribir la función de forma equivalente (no es obligación), si no considera este hecho, su gráfica la verá reflejada un ciclo a la izquierda y el desfase no le coincidirá cuando le aplique la fórmula, pues ésta estará desfasado a la izquierda.

Véase:

$f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(-2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$ función dada.

$= \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left[-\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] - 1$ extrayendo el signo negativo del argumento como factor común.

$= -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$ aplicando identidad $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$. **Esta es su equivalente.**

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la función equivalente.

$0 \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ resolviendo.

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la función dada.

$0 \leq -2x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función dada.

$-\frac{\pi}{3} \leq -2x \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$ sumando $-\frac{\pi}{3}$ en cada lado de la igualdad.

$-\frac{\pi}{3} \leq -2x \leq \frac{5\pi}{3}$ simplificando.

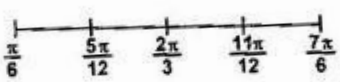
$-\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ dividiendo por -2 ambos lados de la desigualdad. Recuérdese propiedades de la desigualdad.

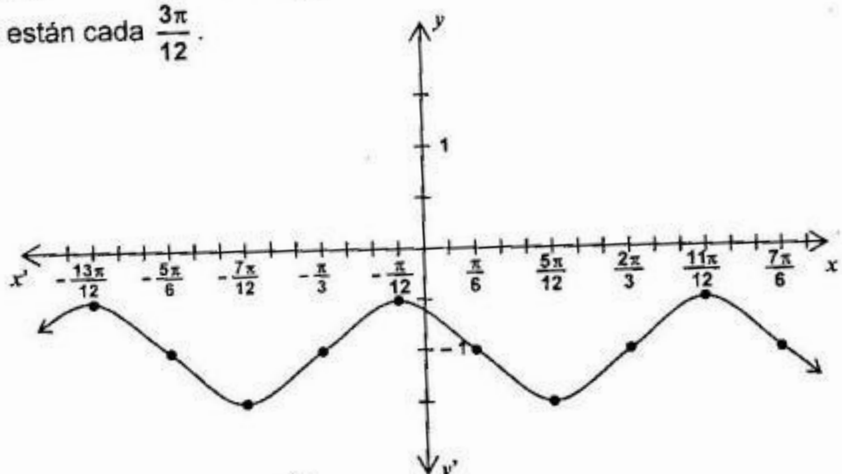
Este hecho, lo vuelve un poco más complejo, si se considera la función cuando $b < 0$.

Dominio de $f = R$

Amplitud: $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$; Periodo: $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$; Corrimiento o desfase: $-\frac{c}{b} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{-2} = \frac{\pi}{6}$

Tomando el intervalo de un ciclo de la función equivalente, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\frac{3\pi}{12}$.





Determinando algunas imágenes para $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(0) - 1 = -1;$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2};$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi) - 1 = -1;$

$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{11\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}(-1) - 1 = -\frac{1}{2};$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi) - 1 = -1$

Trazando la gráfica.

Rango de f: $\left[-\frac{1}{2}+(-1), \frac{1}{2}+(-1)\right] = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Nótese que el rango se puede determinar sin necesidad de trazar la gráfica. Retomando la función general, ya sea para la función seno o para la función coseno de la forma $f(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$ ó $f(x) = a \cos(bx + c) + d$, éste se determina utilizando el intervalo de la forma $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$.

i) $f(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

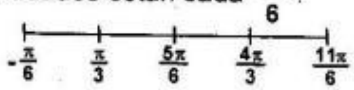
Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

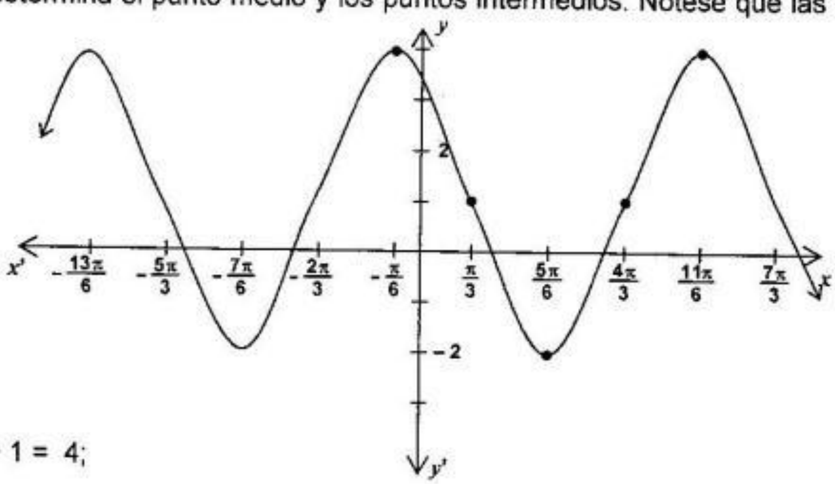
$0 \le x + \frac{\pi}{6} \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el valor del ángulo de la función.

$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ resolviendo.

Dominio de $f = R$; Amplitud: $|3| = 3$; Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$; Corrimiento: $-\frac{\pi}{6}$

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\frac{3\pi}{6}$.





Determinando algunas imágenes para:

$f(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos(0) + 1 = 4;$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 + 1 = 1;$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos(\pi) + 1 = -2;$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = 3(0) + 1 = 1;$

$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos(2\pi) + 1 = 4$

Trazando la gráfica.

Rango de f: en forma general, $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$ ó $[-3 + 1, 3 + 1] = [-2, 4]$. ■

Verifíquese que $I_y\left(0, \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$ y que para determinar los I_x, se debe resolver la ecuación $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}$. Se puede mostrar que para ésta no es posible determinar los valores exactos sino únicamente valores aproximados y haciendo uso de una calculadora científica.

Ejemplo 2 Para cada función dada, trazar un ciclo de su gráfica e indicar: amplitud, período, el desfase o corrimiento y el rango.

a) $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **b)** $f(x) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) - 2$ **c)** $f(x) = \cos(x + 2) + 1$

Solución:

a) $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

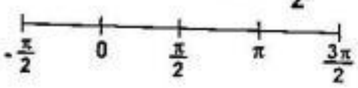
Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

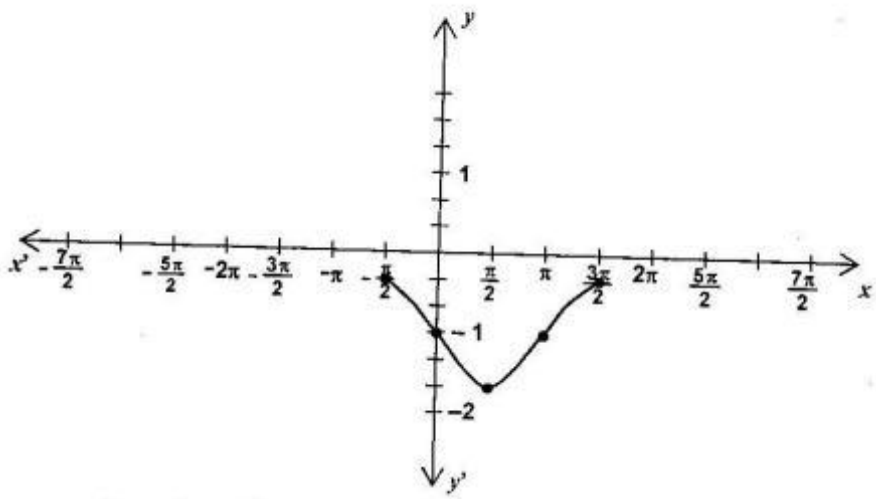
$0 \le x + \frac{\pi}{2} \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el valor del ángulo de la función.

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ resolviendo.

Dominio de $f = R$; Amplitud: $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$; Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$; Corrimiento: $-\frac{\pi}{2}$

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\frac{\pi}{2}$.





Determinando algunas imágenes para $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}\cos(0) - 1 = \frac{2}{3}(1) - 1 = -\frac{1}{3};$$

$$f(0) = \frac{2}{3}\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}(0) - 1 = -1;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}\cos(\pi) - 1 = \frac{2}{3}(-1) - 1 = -\frac{5}{3};$$

$$f(\pi) = \frac{2}{3}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}(0) - 1 = -1;$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{2}{3}\cos(2\pi) - 1 = \frac{2}{3}(1) - 1 = -\frac{1}{3}$$

Trazando la gráfica.

Rango de f: en forma general, $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$ ó $\left[-\frac{2}{3} - 1, \frac{2}{3} - 1\right] = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right]$.

b) $f(x) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) - 2$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \leq \frac{1}{2}x + \pi \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el valor del ángulo de la función.

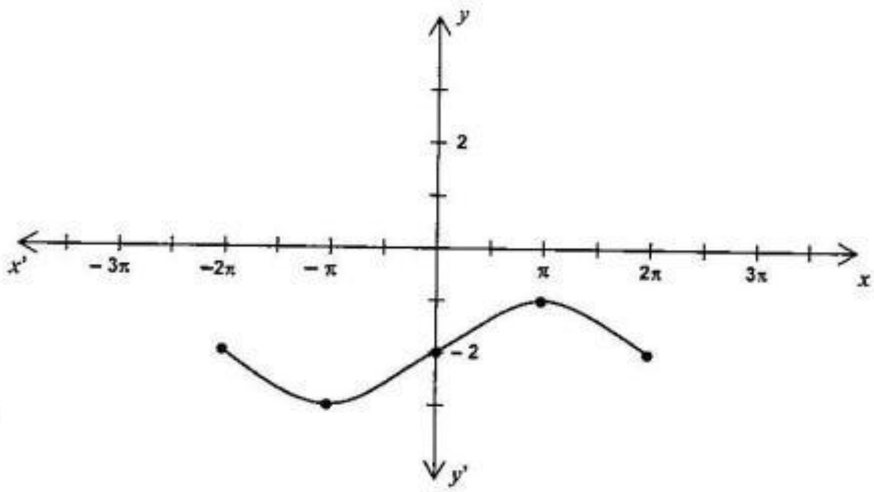
$-2\pi \leq x \leq 2\pi$ resolviendo.

Dominio de $f = R$

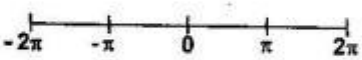
Amplitud: $|-1| = 1$

Período: $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

Corrimiento: -2π



Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada π.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) - 2$

$f(-2\pi) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}(-2\pi) + \pi\right) - 2 = -\text{sen}\,(0) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f(-\pi) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}(-\pi) + \pi\right) - 2 = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = -1 - 2 = -3;$

$f(0) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}(0) + \pi\right) - 2 = -\text{sen}\,(\pi) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f(\pi) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\pi) + \pi\right) - 2 = -\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -(-1) - 2 = -1;$

$f(2\pi) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}(2\pi) + \pi\right) - 2 = -\text{sen}\,(2\pi) - 2 = 0 - 2 = -2$

Trazando la gráfica.

Rango de f: en forma general, $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$ ó $\left[-1 - 2, 1 - 2\right] = \left[-3, -1\right]$.

c) $f(x) = \cos\,(x + 2) + 1$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \leq x + 2 \leq 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el valor del ángulo de la función.

$-2 \leq x \leq 2\pi - 2$ resolviendo.

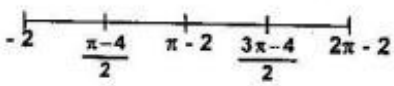
Dominio de $f = R$

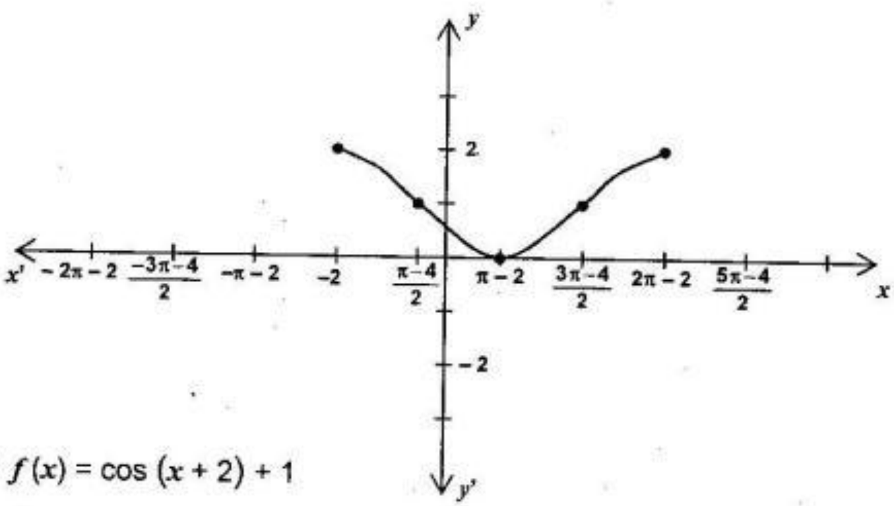
Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

Corrimiento: -2

Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\dfrac{\pi}{2}$.





Determinando algunas imágenes para $f(x) = \cos(x+2)+1$

$f(-2) = \cos(-2+2) + 1 = \cos(0) + 1 = 1 + 1 = 2;$

$f\left(\dfrac{\pi-4}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi-4}{2}+2\right) + 1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = (0) + 1 = 1;$

$f(\pi-2) = \cos(\pi-2+2) + 1 = \cos(\pi) + 1 = (-1) + 1 = 0;$

$f\left(\dfrac{3\pi-4}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi-4}{2}+2\right) + 1 = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + 1 = (0) + 1 = 1;$

$f(2\pi-2) = \cos(2\pi-2+2) + 1 = \cos(2\pi) + 1 = (1) + 1 = 2$

Trazando la gráfica mostrada anteriormente.

Rango de f: en forma general, $\left[-|a|+d, |a|+d\right]$ ó $[-1+1, 1+1] = [0, 2]$. ■

Ejemplo 3 Para cada función dada, trazar dos ciclos de su gráfica e indicar: amplitud, período, el desfase o corrimiento y el rango.

a) $f(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - 2$ **b)** $f(x) = -2\operatorname{sen}(x-\pi) - \dfrac{1}{2}$

Solución:

a) $f(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - 2$

Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \le x + \dfrac{\pi}{2} \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad, el argumento de la función.

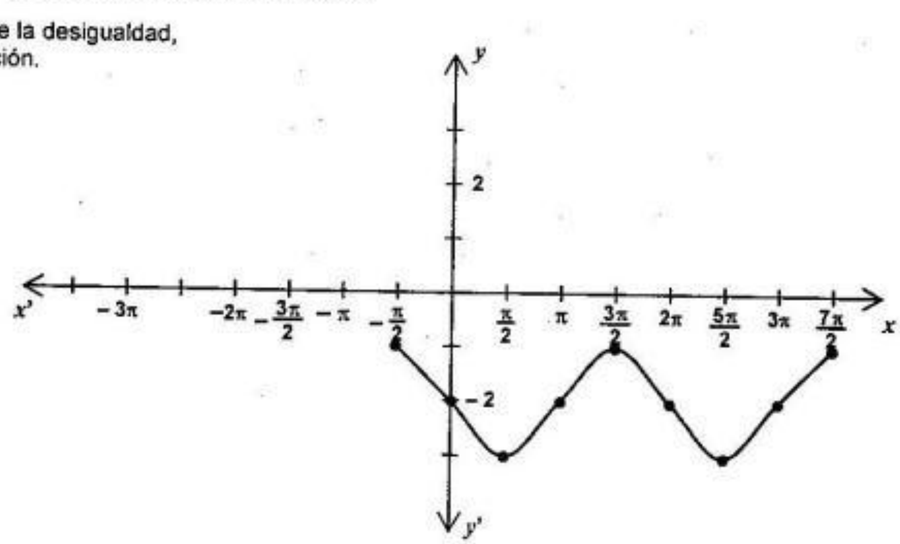
$-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$ resolviendo.

Dominio de $f = \boldsymbol{R}$

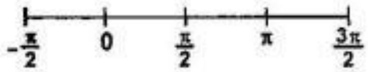
Amplitud: $|1| = 1$

Período: $\dfrac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

Corrimiento: $-\dfrac{\pi}{2}$



Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\frac{\pi}{2}$.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos(0) - 2 = 1 - 2 = -1;$

$f(0) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos(\pi) - 2 = -1 - 2 = -3;$

$f(\pi) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = 0 - 2 = -2;$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos(2\pi) - 2 = 1 - 2 = -1$

Observando la secuencia de las unidades y de las imágenes, se traza la gráfica (dos ciclos).

Rango de f: en forma general, $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$ ó $[-1 - 2, 1 - 2] = [-3, -1]$.

b) $f(x) = -2\text{sen}(x - \pi) - \frac{1}{2}$

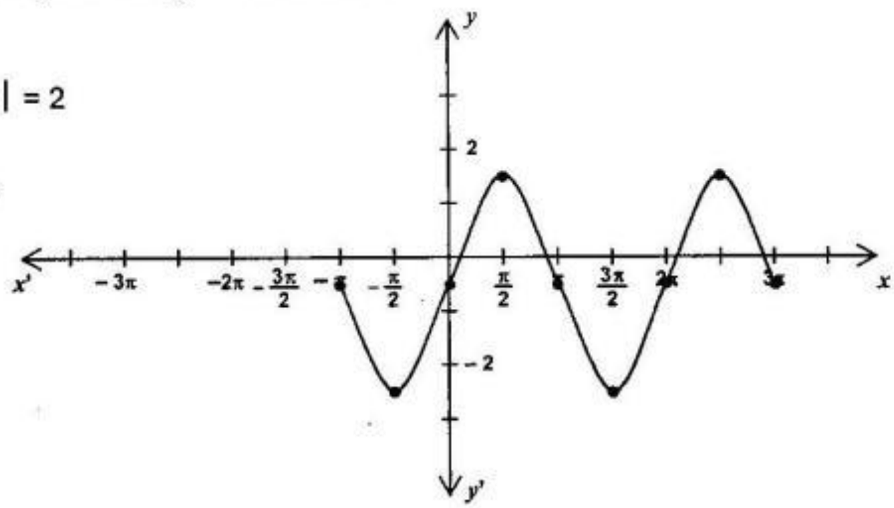
Determinando el intervalo donde se traza un ciclo de la misma.

$0 \le x - \pi \le 2\pi$ tomando en el centro de la desigualdad el argumento de la función.

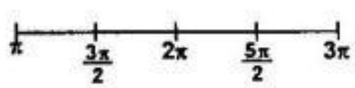
$\pi \le x \le 3\pi$ resolviendo.

Dominio de $f = \mathbb{R}$; Amplitud: $|-2| = 2$

Período: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$; Corrimiento: π



Tomando el intervalo de un ciclo, se determina el punto medio y los puntos intermedios. Nótese que las unidades están cada $\frac{\pi}{2}$.



Determinando algunas imágenes para $f(x) = -2\text{sen}(x - \pi) - \frac{1}{2}$

$f(\pi) = -2\text{sen}(\pi - \pi) - \frac{1}{2} = -2\text{sen}(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) - \frac{1}{2} = -2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2};$$

$$f(2\pi) = -2\text{sen}\ (2\pi - \pi) - \frac{1}{2} = -2\text{sen}\ (\pi) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2} - \pi\right) - \frac{1}{2} = -2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = -2(-1) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

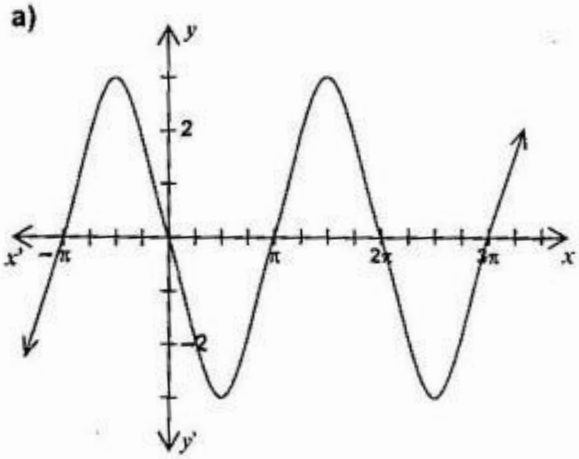
$$f(3\pi) = -2\text{sen}\ (3\pi - \pi) - \frac{1}{2} = -2\text{sen}\ (2\pi) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Trazando la gráfica, nótese la secuencia de las unidades.

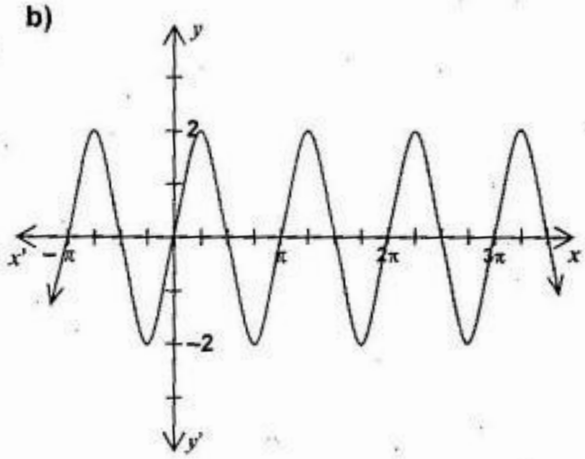
Rango de f: en forma general, $\left[-|a| + d, |a| + d\right]$ ó $\left[-2 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$. ■

Ejemplo 4 Para cada gráfica dada, determinar una ecuación de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$ y otra de la forma $y = a$ cos $(bx + c)$ de tal manera que: a y b sean positivos y que c, sea el mínimo número real positivo.

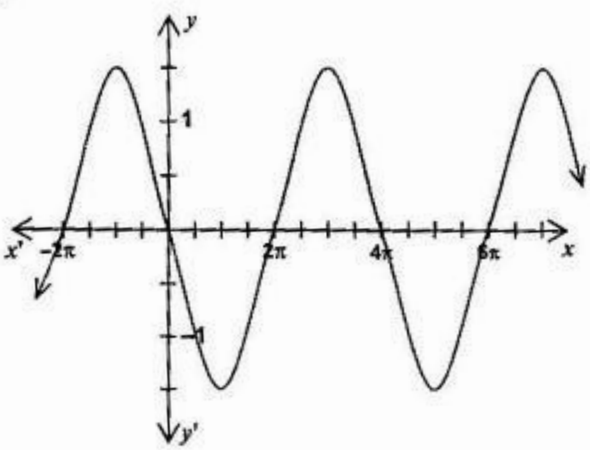
a)



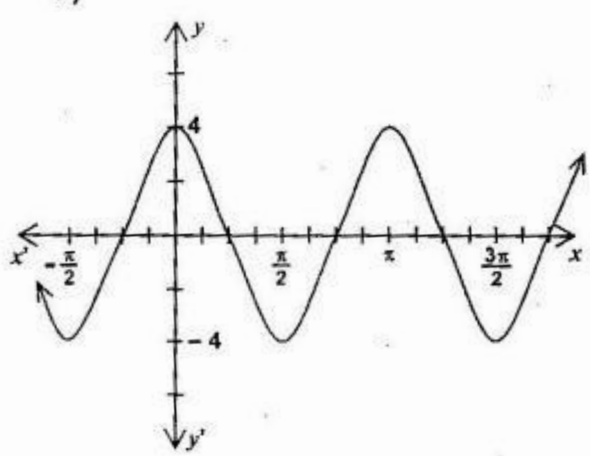
b)



c)



d)



Solución:

a) Determinado una ecuación de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$, con a y b positivos y c, el mínimo número real positivo.

Observando la gráfica del inciso **a)**, se tiene que la mayor imagen es 3 y la menor imagen es −3, esto significa que su amplitud es 3. Luego el valor para a es 3. Además se puede determinar que la longitud del intervalo donde está trazado un ciclo es 2π. Se conoce que en una función de la forma

$f(x) = a$ sen $(bx + c)$, tiene como período $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$. Luego $2\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$ ó $|b| = 1$, de donde $b = 1$, ya que se dice que debe ser positivo (nótese que si $|b| = 1$, entonces $b = \pm 1$). Hasta este momento se conoce el valor para a y el valor para b, falta por encontrar el valor para c. En la misma gráfica, si se observa un ciclo y se recuerda la forma de la función elemental $f(x) =$ sen x, ésta tiene un desfase de $-\pi$. En la función general se determinó que el desfase o corrimiento está dado por $-\dfrac{c}{b}$. Luego se tiene que $-\dfrac{c}{b} = -\pi$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\dfrac{c}{1} = -\pi$ ó $c = \pi$.

Se tiene entonces que **la ecuación buscada es** $y = 3\text{sen}\,(x + \pi)$.

Para determinar la ecuación de la forma $y = a\cos(bx + c)$, se utiliza el mismo procedimiento, donde la amplitud es 3 ($a = 3$), el período es 2π, ($b = 1$). Para encontrar el valor de c, en la misma gráfica, si se observa un ciclo y se recuerda la forma de la función elemental $f(x) = \cos x$, ésta tiene un desfase de $-\dfrac{\pi}{2}$. Luego se tiene que $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\pi}{2}$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\dfrac{c}{1} = -\dfrac{\pi}{2}$ ó $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Luego **la ecuación buscada es** $y = 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Nótese la similitud de la gráfica de una función seno y de una función coseno, lo que implica que dada una gráfica con estas características, se puede determinar una ecuación de la forma $y = a\cos(bx + c)$ o de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$.

b) Determinado una ecuación de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$, con a y b positivos y c, el mínimo número real positivo.

Observando la gráfica del inciso **b)**, se tiene que la mayor imagen es 2 y la menor imagen es -2, esto significa que su amplitud es 2. Luego el valor para a es 2. Además se puede determinar que la longitud del intervalo donde está trazado un ciclo es π. Se conoce que en una función de la forma $f(x) = a$ sen $(bx + c)$, tiene como período $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$. Luego $\pi = \dfrac{2\pi}{|b|}$ ó $|b| = 2$, de donde $b = 2$, ya que se dice que debe ser positivo (nótese que si $|b| = 2$, entonces $b = \pm 2$). Hasta este momento se conoce el valor para a y el valor para b, falta por encontrar el valor para c. En la misma gráfica, si se observa un ciclo y se recuerda la forma de la función elemental $f(x) =$ sen x, ésta no tiene desfase.

Luego $y = 2\text{sen}\,(2x)$.

Para determinar la ecuación de la forma $y = a\cos(bx + c)$, se utiliza el mismo procedimiento, donde la amplitud es 2 ($a = 2$), el periodo es π, y $b = 2$. Para encontrar el valor de c, en la misma gráfica, si se observa un ciclo y se recuerda la forma de la función elemental $f(x) = \cos x$, ésta tiene un desfase de $\dfrac{\pi}{4}$.

Luego se tiene que $-\dfrac{c}{b} = \dfrac{\pi}{4}$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\dfrac{c}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ ó $c = -\dfrac{\pi}{2}$.

Luego la ecuación buscada es $y = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Determinado una ecuación de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$, con a y b positivos y c, el mínimo número real positivo.

Observando la gráfica del inciso **c)**, se tiene que la mayor imagen es $\frac{3}{2}$ y la menor imagen es $-\frac{3}{2}$, esto significa que su amplitud es $\frac{3}{2}$, luego el valor para a es $\frac{3}{2}$. Determinando la longitud del intervalo donde está trazado un ciclo, el cual es 4π. Se tiene que si $P = \frac{2\pi}{|b|}$, entonces $4\pi = \frac{2\pi}{|b|}$ ó $|b| = \frac{1}{2}$, de donde $b = \frac{1}{2}$. En la misma gráfica, si se observa un ciclo, ésta tiene un desfase de -2π, luego $-\frac{c}{b} = -2\pi$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\frac{c}{\frac{1}{2}} = -2\pi$ ó $c = \pi$.

Se tiene entonces que la ecuación buscada es $y = \frac{3}{2}\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$.

Determinando la ecuación de la forma $y = a \cos (bx + c)$. Se tiene que la amplitud es $\frac{3}{2}\left(a = \frac{3}{2}\right)$, el período es 4π, $\left(b = \frac{1}{2}\right)$. Encontrando el valor de c, en la misma gráfica, se observa que hay un desfase de $-\pi$. Luego se tiene que $-\frac{c}{b} = -\pi$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\frac{c}{\frac{1}{2}} = -\pi$ ó $c = \frac{\pi}{2}$.

Se tiene entonces que la ecuación buscada es $y = \frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Determinado una ecuación de la forma $y = a$ sen $(bx + c)$, con a y b positivos y c, el mínimo número real positivo.

Observando la gráfica del inciso **d)**, se tiene que la mayor imagen es 4 y la menor imagen es -4, esto significa que su amplitud es 4. Luego el valor para a es 4. Determinando la longitud del intervalo donde está trazado un ciclo, éste es π. Se tiene que si $P = \frac{2\pi}{|b|}$, entonces $\pi = \frac{2\pi}{|b|}$ ó $|b| = 2$, de donde $b = 2$. En la misma gráfica, si se observa un ciclo, ésta tiene un desfase de $-\frac{\pi}{4}$, luego $-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$, en donde al asignarle el valor encontrado para b, y despejando para c se tiene que: $-\frac{c}{2} = -\frac{\pi}{4}$ ó $c = \frac{\pi}{2}$.

Se tiene entonces que la ecuación buscada es $y = 4\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Determinando la ecuación de la forma $y = a \cos (bx + c)$. Se tiene que la amplitud es 4 $(a = 4)$, el período es π, $(b = 2)$. Encontrando el valor de c, en la misma gráfica, se observa que no hay desfase.

Se tiene entonces que la ecuación buscada es $y = 4\cos(2x)$.

■

Ejercicios 5.1

1. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar: dominio, amplitud, periodo, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los eje coordenados (respuestas de los interceptos, se deja al lector).

a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x$ **b)** $f(x) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$ **c)** $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f(x) = -3\operatorname{sen}(2x + \pi) + \frac{1}{2}$ **e)** $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ **f)** $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

g) $f(x) = -\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) - 3$ **h)** $f(x) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ **i)** $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

j) $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) - 1$ **k)** $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}x + \pi\right) + 3$ **l)** $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 2) + 1$

2. Para cada función dada, trazar un ciclo de la gráfica e indicar: dominio, amplitud, periodo, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los eje coordenados (respuestas, se deja al lector).

a) $f(x) = \frac{4}{3}\operatorname{sen}(2x) + 1$ **b)** $f(x) = -3\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

d) $f(x) = -2\cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + 2$ **e)** $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$ **f)** $f(x) = -2\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) - 1$

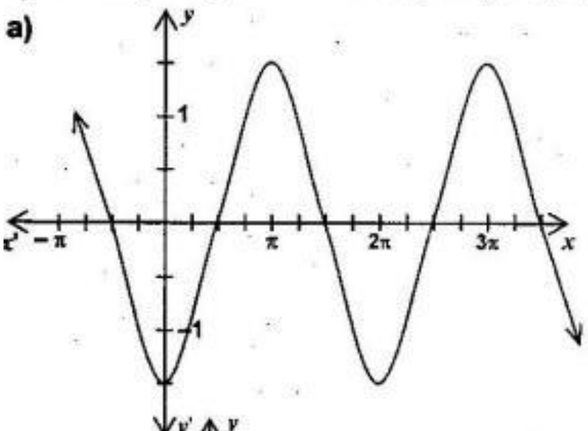
3. Para cada función dada, trazar dos ciclos de la gráfica e indicar: dominio, amplitud, periodo, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los eje coordenados (respuestas de los interceptos, se deja al lector).

a) $f(x) = -2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$ **b)** $f(x) = -\frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ **c)** $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

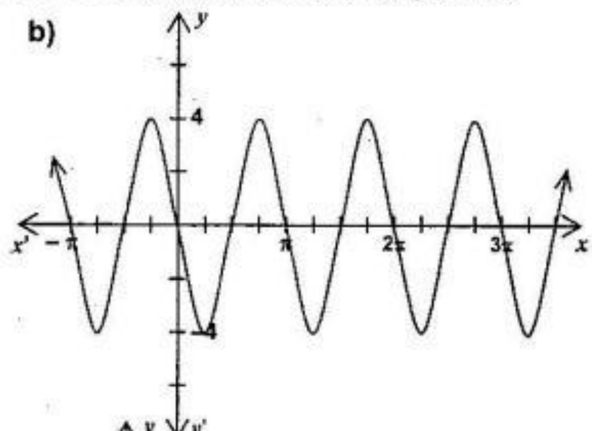
d) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x - \pi\right) - 3$ **e)** $f(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}x - \pi\right) + 2$ **f)** $f(x) = -2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) + 1$

4. Para cada gráfica dada, determinar una ecuación de la forma $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$, y otra de la forma $y = a\cos(bx + c)$ de tal manera que: a y b sean positivos y que c, sea el mínimo número real positivo.

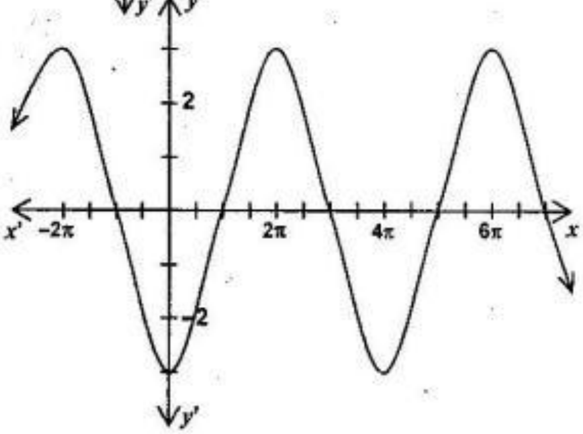
a)



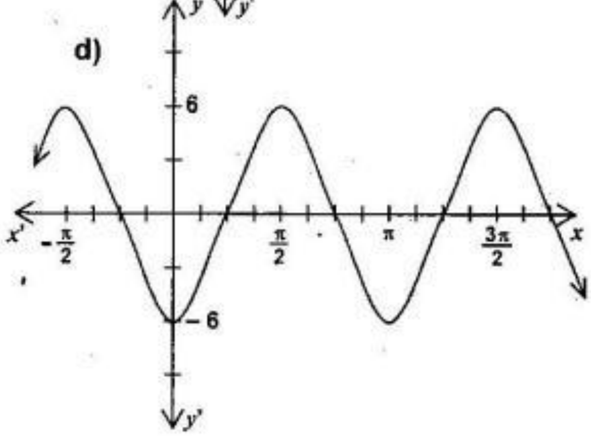
b)



c)



d)



5.2 FUNCION TANGENTE Y FUNCION COTANGENTE

El procedimiento a seguir para trazar la gráfica de una función tangente y cotangente, es similar al de la sección 5.1. Si se recuerda el hecho que, $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y que $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, esto facilitará el trazo y el análisis de estas funciones, así como también las que se definirán en la próxima sección.

En ésta sección se aprenderá a trazar las gráficas de la función tangente y la función cotangente debido a que sus características son muy similares. Los tipos de funciones que se considerarán en esta sección se describen en el siguiente cuadro.

Función tangente	Función cotangente
$f(x) = \tan x$	$f(x) = \cot x$
$f(x) = a \tan x$	$f(x) = a \cot x$
$f(x) = a \tan bx$	$f(x) = a \cot bx$
$f(x) = a \tan (bx + c)$	$f(x) = a \cot (bx + c)$
$f(x) = a \tan (bx + c) + d$	$f(x) = a \cot (bx + c) + d$

cuadro 1

Se comienza trazando las gráficas de la función tangente y de la función cotangente elemental. Véase las siguientes gráficas fig. 1 y fig. 2 que con auxilio de la tabla 1 se grafica la función tangente, en un subconjunto de su dominio (fig.1) y luego en un intervalo (fig. 2). Recordando que la función tangente y la función cotangente tienen un período de π (el valor de la función tangente o de la función cotangente se repite infinitas veces). En estas funciones hay otro detalle, tanto para la función tangente como la función cotangente, existen infinitos valores para los cuales no están definidas dichas funciones. Esto implica que tanto la función tangente como la función cotangente no tienen como dominio el conjunto de los números reales.

Trazando gráfica de la función $f(x) = \tan x$

Por facilidad, se expresa $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, nótese que esta función está definida para cualquier número real excepto donde $\cos x = 0$.

Determinando los valores donde $\cos x = 0$, se tiene que $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ó $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2}$ para $k \in Z$.

Esto implica que el dominio de $f(x) = \tan x$ es: $R - \left\{\dfrac{\pi + 2k\pi}{2},\ k \in Z\right\}$

Recordando del álgebra, acerca de las funciones racionales, por las características de la misma, estos valores prohibidos encontrados en esta función los cuales son infinitos, determinan asíntotas verticales, las cuales se generalizan de la siguiente forma: $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2}$ con $k \in Z$.

Asignándole valores consecutivos a k, se determinan algunas asíntotas verticales consecutivas. Véase: $x = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, entre otras.

La tabla 1 muestra algunos valores asignados a x para obtener valores de y (imágenes y preimágenes) en el $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Nótese que los valores que se obtienen para y, están en $\left]-\infty, +\infty\right[$, lo que implica que el rango de la función tangente es $\boldsymbol{R}$.

$f(x) = \tan x$

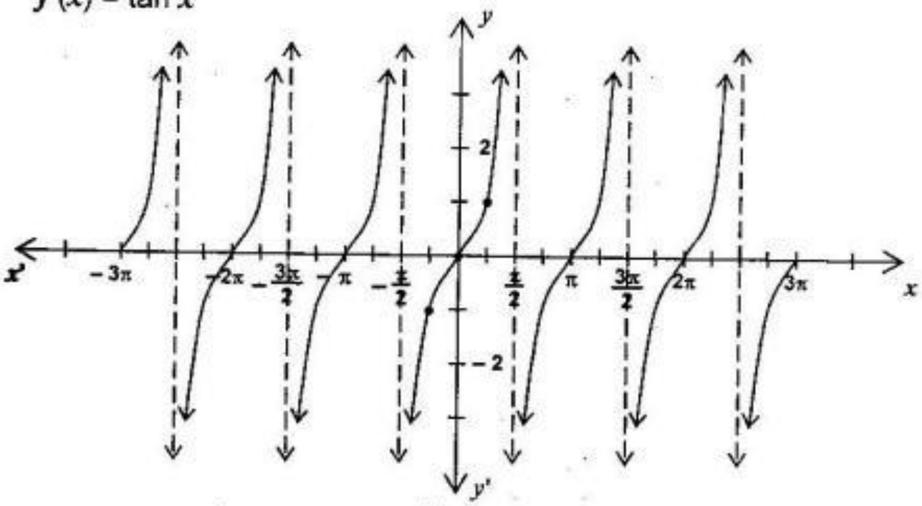
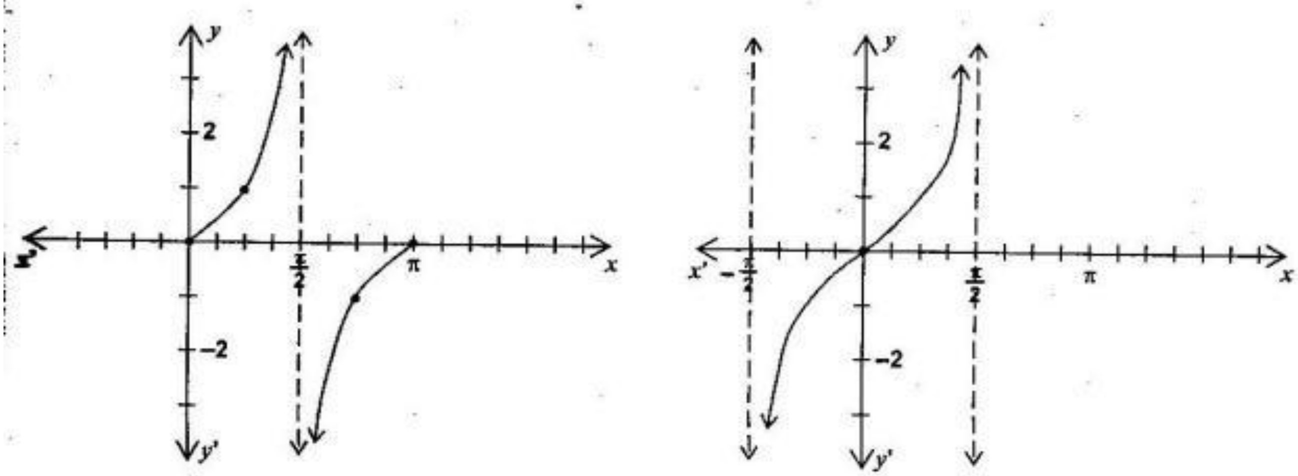


fig .1

x	$f(x)$
$-\frac{5\pi}{4}$	-1
$-\pi$	0
$-\frac{3\pi}{4}$	1
$-\frac{\pi}{4}$	-1
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	1

tabla 1

Las siguientes, figuras muestran un ciclo de $f(x) = \tan x$. En el inciso **a)** se traza en el $[0, \pi]$ y en el inciso **b)**, en el $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ que es lo más usual, cuando se pide trazar un ciclo de la misma. Nótese que al trazar un ciclo de la gráfica de esta función, en ésta se extienden las flechas en ambos extremos de la curva. Este hecho, no implica que esa sea toda su gráfica. Comparando con la gráfica de la función seno y coseno, se ha dicho que es suficiente el trazo de un ciclo y agregar flechas en ambos lados de la curva. En el caso de la función tangente y cotangente, es conveniente, trazar por lo menos dos ciclos, a menos que pida lo contrario.



a) b)

fig .2

Para trazar la gráfica de $f(x) = \cot x$, se sigue el mismo procedimiento que para $f(x) = \tan x$. Véase, que $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, nótese que esta función está definida para cualquier número real excepto donde $\operatorname{sen} x = 0$.

Determinando los valores donde sen $x = 0$, se tiene que $x = k\pi$, para $k \in Z$.
Esto implica que el dominio de $f(x) = \cot x$ es: $R - \{k\pi,\ k \in Z\}$

Luego el conjunto de asíntotas verticales, están dadas por: $x = k\pi$, con $k \in Z$.

Asignándole valores consecutivos a k, se determinan algunas asíntotas verticales (A. V.). Véase $x = -2\pi$, $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, entre otras.

La tabla 2 muestra algunos valores asignados a x para obtener valores de y (imágenes y preimágenes) en el $]-\pi, \pi[$. Nótese que los valores que se obtienen para y, están en $]-\infty, +\infty[$, lo que implica que el rango de la función cotangente es R. Además la función tangente crece en todo su dominio, mientras que la función cotangente, decrece en todo su dominio.

$f(x) = \cot x$

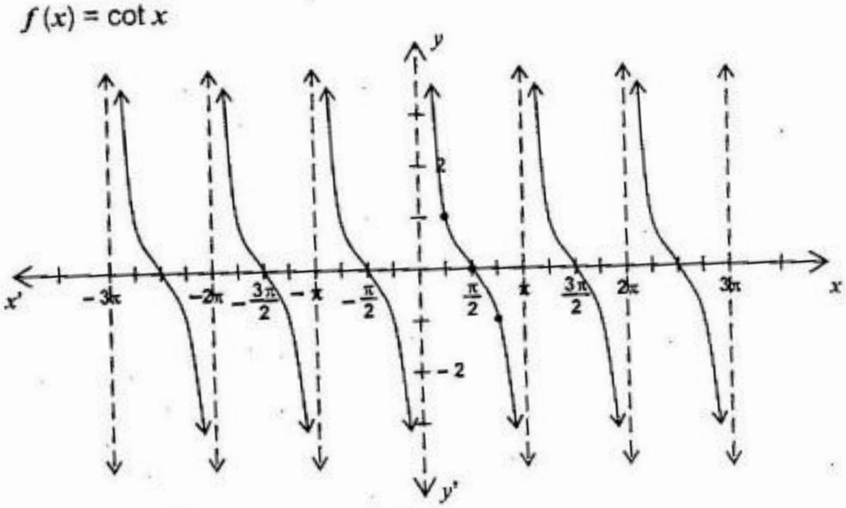
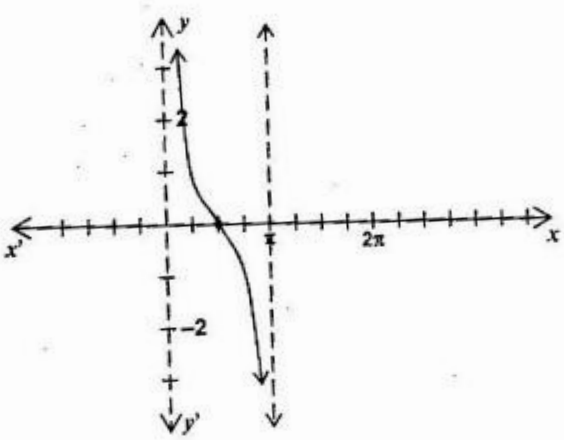


fig .2

x	$f(x)$
$-\frac{3\pi}{4}$	1
$-\frac{\pi}{2}$	0
$-\frac{\pi}{4}$	–1
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	–1

tabla 2

La siguiente figura muestra un ciclo de $f(x) = \cot x$, en el $]0, \pi[$.



Se procede a analizar y trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = a\tan(bx + c) + d$ ó $f(x) = a\cot(bx + c) + d$.

La siguiente propiedad indica el efecto que tienen las constantes (reales) a, b, c y d, en cada una de las ecuaciones que representan la función tangente y cotangente, que es muy similar al enunciado para la función seno y para la función coseno.

Propiedad 1 Si $f(x) = a \tan(bx + c) + d$ o $f(x) = a \cot(bx + c) + d$, para números reales a, b, c y d, con a y b diferentes de cero, la gráfica tiene un período de $\frac{\pi}{|b|}$ y un desfase o corrimiento en $-\frac{c}{b}$. El valor para d se ve reflejado en el punto donde se da el cambio de concavidad. El rango es el conjunto de los números reales (R).

En estas funciones, a indica si la función crece o decrece. Para el caso si $a > 0$, la función tangente crece en todo su dominio, mientras que la función cotangente decrece. Ahora si $a < 0$, la función tangente decrece y la cotangente crece. Se habrá notado que para trazar la gráfica de una de estas funciones, es prioridad determinar el dominio, pues esos valores para los cuales no está definida la función, son los que permiten expresar las ecuaciones generales de las asíntotas verticales existentes. Una vez que se tiene algunas asíntotas verticales consecutivas, se procede a encontrar el punto medio y los puntos intermedios de dos asíntotas consecutivas, para proceder a encontrar las imágenes. Si no se pide lo contrario, será suficiente determinar tres asíntotas consecutivas para trazar dos ciclos de su gráfica.

Ejemplo 1 Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar: dominio, ecuaciones generales de las asíntotas verticales, período, el desfase o corrimiento y el rango.

a) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ **b)** $f(x) = -3\tan 2x$ **c)** $f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

d) $f(x) = -2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ **e)** $f(x) = -\frac{1}{2}\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ **f)** $f(x) = -\frac{2}{3}\cot\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Solución:

a) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

Determinando el dominio de f

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$$ expresándolo en términos de seno y coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0\right)$

$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$

$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ recuérdese que el coseno se hace cero en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in Z$.

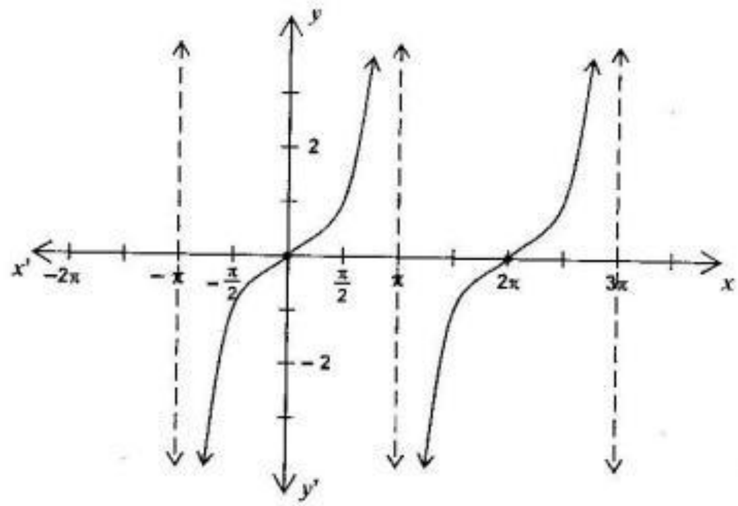
$x = \pi + 2k\pi$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de f** es: $R - \{\pi + 2k\pi, \text{ con } k \in Z\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales esta dada por:

$x = \pi + 2k\pi$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi$; **Desfase o corrimiento**: $-\frac{c}{b} = -\frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$.

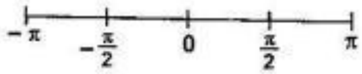


Encontrando elementos para trazar la gráfica

Si $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in Z$, entonces, algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\pi$; si $k = -1$, $\quad x = \pi$; si $k = 0$,
$x = 3\pi$; si $k = 1$

Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$f(0) = \tan(0) = \frac{\mathbf{sen(0)}}{\mathbf{cos(0)}} = \frac{0}{1} = 0; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\mathbf{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Nótese que es suficiente determinar las imágenes anteriores y quizá sea suficiente dos (la del punto medio y la de uno de los puntos intermedios) y luego se repiten los valores entre cada dos asíntotas verticales consecutivas. Recuérdese que el punto medio y su imagen, determinan el punto donde hay un cambio de concavidad en dicha gráfica (punto de inflexión) y que entre cada dos asíntotas verticales consecutivas, la forma de la gráfica se repite.

Nuevamente, por práctica se determinan los interceptos con los ejes coordenados.

Determinando $\mathbf{I}_y$; haciendo $x = 0$

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\mathbf{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{y} \quad f(0) = \frac{\mathbf{sen(0)}}{\mathbf{cos(0)}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ obteniendo que } I_y(0, 0).$$

Determinando $\mathbf{I}_x$; haciendo $y = 0$

$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ ó $\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$.

$\tan\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ ecuación obtenida.

$\dfrac{\mathbf{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{1}{2}x\right)} = 0$ expresando en término de seno y coseno. Nótese que esta igualdad es válida únicamente si $\mathbf{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$.

$\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$, sí $\frac{1}{2}x = k\pi$ ó $x = 2k\pi$ (despejando para x).

Luego, $I_x(2k\pi, 0)$ con $k \in Z$. El **Rango de** $f = R$.

b) $f(x) = -3\tan 2x$

Determinando el dominio de f

$f(x) = -3\tan 2x = -3\dfrac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}$ expresándolo en términos de seno y coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $(\cos(2x) = 0)$

$\cos(2x) = 0$

$2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ recuérdese que el coseno se hace cero en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in Z$.

$x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

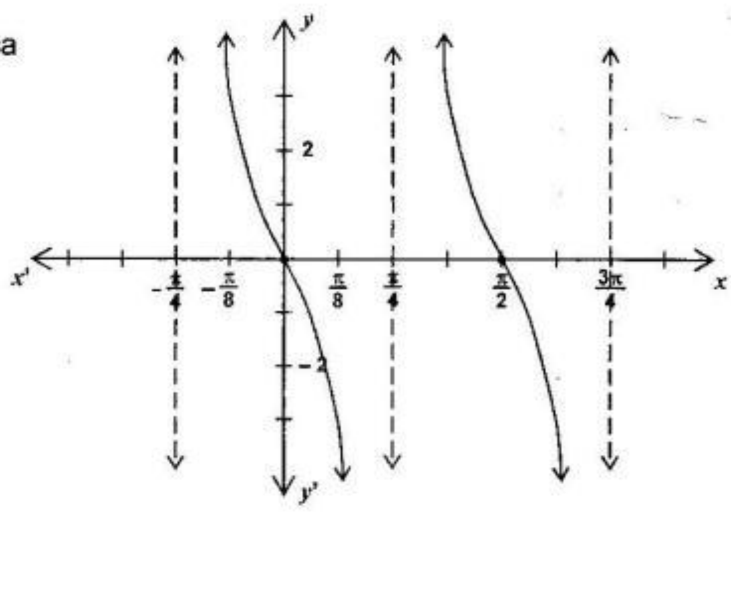
Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{ \dfrac{\pi+2k\pi}{4}, \text{ con } k \in Z \right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales esta dada por:

$x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{|2|} = \dfrac{\pi}{2}$; **Desfase o corrimiento**: $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{0}{2} = 0$.

Encontrando elementos para trazar la gráfica



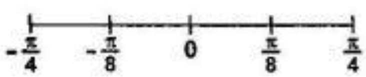
Si $x = \dfrac{\pi+2k\pi}{4}$ con $k \in Z$, entonces:

Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\dfrac{\pi}{4}$; si $k = -1$, $x = \dfrac{\pi}{4}$; si $k = 0$,

$x = \dfrac{3\pi}{4}$; si $k = 1$

Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = -3\tan 2x$

$$f(0) = -3\tan 2(0) = -3\frac{\text{sen}(2(0))}{\cos(2(0))} = -3\frac{\text{sen}(0)}{\cos(0)} = -3\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3\tan\left(2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = -3\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -3\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -3(1) = -3$$

$$f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -3\tan\left(2\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = -3\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 3\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 3$$

Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$f(x) = -3\tan 2x = -3\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}$ y $f(0) = -3\frac{\text{sen}(0)}{\cos(0)} = -3\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ obteniendo que $I_y(0, 0)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$f(x) = -3\tan 2x$ ó $-3\tan 2x = 0$ ó $\tan 2x = 0$.

$\tan 2x = 0$ ecuación obtenida.

$\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)} = 0$ expresando en término de seno y coseno. Nótese que esta igualdad es válida únicamente si $\text{sen}(2x) = 0$.

$\text{sen}(2x) = 0$, sí $2x = k\pi$ ó $x = \frac{k\pi}{2}$ (despejando para x).

Luego, $I_x\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ con $k \in Z$.

El **Rango de** $f = R$.

c) $f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

Determinando el dominio de f

$f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 2$ expresándolo en términos de seno y coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\right)$

$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$x - \frac{\pi}{4} = k\pi$ recuérdese que el seno se hace cero en cada $k\pi$, con $k \in Z$.

$x = \frac{\pi + 4k\pi}{4}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{\frac{\pi + 4k\pi}{4}, \text{ con } k \in Z\right\}$

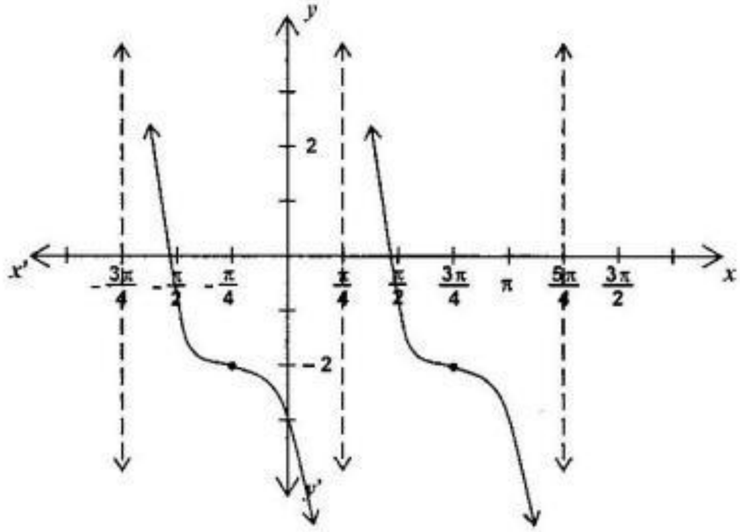
Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales están dadas por:

$x = \frac{\pi + 4k\pi}{4}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|1|} = \pi$; **Desfase o corrimiento:** $-\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$.

Encontrando elementos para trazar la gráfica

Si $x = \dfrac{\pi + 4k\pi}{4}$ con $k \in Z$, entonces:

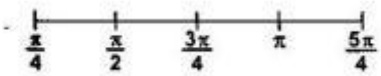


Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\dfrac{3\pi}{4}$; si $k = -1$, $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$; si $k = 0$,

$x = \dfrac{5\pi}{4}$; si $k = 1$

Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = \cot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 2 = \frac{0}{1} - 2 = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(\pi) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 2 = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} - 2 = -1 - 2 = -3$$

Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$$f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 2 \ \text{ y } \ f(0) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - 2 = -1 - 2 = -3. \text{ Luego, } I_y(0, -3).$$

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$$f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \ \text{ ó } \ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = 0 \ \text{ ó } \ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$\cot\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ ecuación obtenida.

$x - \dfrac{\pi}{4} = \cot^{-1}(2)$ Recuérdese que la cotangente es positiva en el primer y tercer cuadrante y que su periodo es π. Además, para esta ecuación sus soluciones no son exactas.

$x - \dfrac{\pi}{4} = \cot^{-1}(2)$ ó $x = \cot^{-1}(2) + \dfrac{\pi}{4}$ (despejando para x).

Luego, $I_x\left(\cot^{-1}(2) + \dfrac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$ con $k \in Z$.

Rango de $f = R$

d) $f(x) = -2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Determinando el dominio de f

$$f(x) = -2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\frac{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$$ expresándolo en términos de seno y coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\right)$

$\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$3x - \frac{\pi}{4} = k\pi$ recuérdese que el seno se hace cero en cada $k\pi$, con $k \in Z$.

$x = \frac{\pi + 4k\pi}{12}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

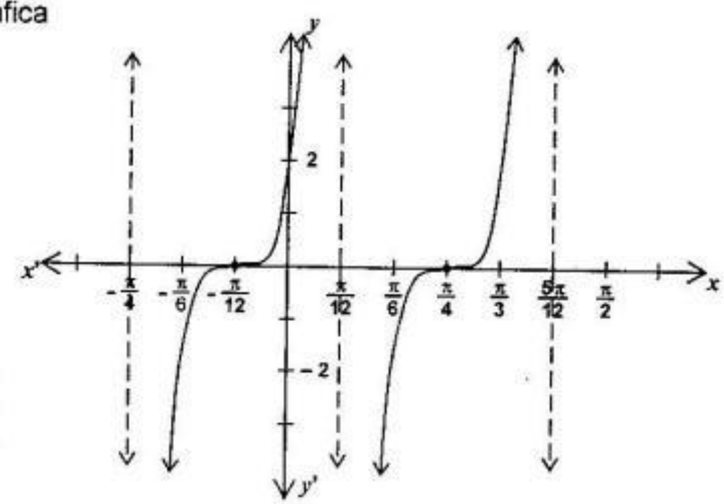
Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{\frac{\pi + 4k\pi}{12}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales están dadas por:

$x = \frac{\pi + 4k\pi}{12}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$; **Desfase o corrimiento**: $-\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{12}$.

Determinando elementos para trazar la gráfica



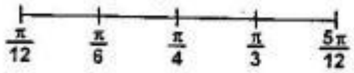
Si $x = \frac{\pi + 4k\pi}{12}$ con $k \in Z$, entonces:

Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\frac{\pi}{4}$; si $k = -1$, $x = \frac{\pi}{12}$; si $k = 0$,

$x = \frac{5\pi}{12}$; si $k = 1$

Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = -2\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cot\left(3\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -2(1) = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\cot\left(3\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -2\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = (-2)(-1) = 2$$

Rango de $f = R$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - 1$

Determinando el dominio de f

$$f(x) = -\frac{1}{2}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\frac{\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)} - 1$$ expresándolo en términos de seno y coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 0\right)$

$$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ recuérdese que el coseno se hace cero en cada $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in Z$.

$x = \frac{5\pi+6k\pi}{12}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{\frac{5\pi+6k\pi}{12}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales están dadas por:

$x = \frac{5\pi+6k\pi}{12}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales

Período: $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$; **Desfase o corrimiento**: $-\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

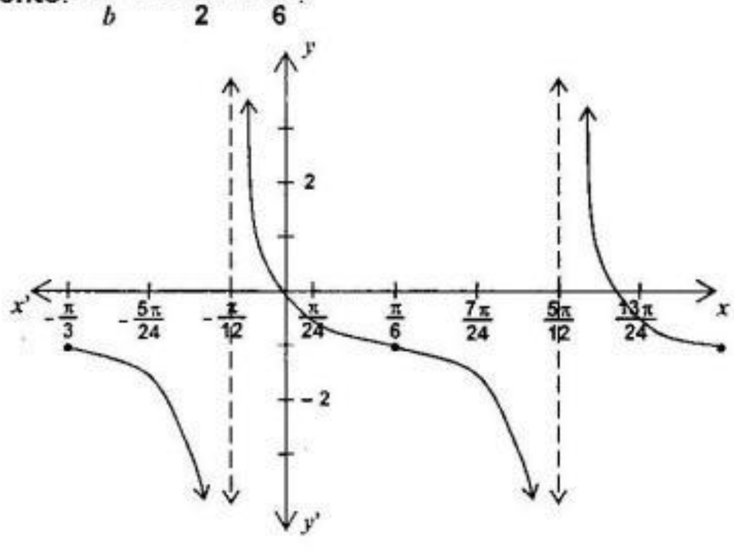
Determinando elementos para trazar la gráfica

Si $x = \frac{5\pi+6k\pi}{12}$ con $k \in Z$, entonces:

Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\frac{\pi}{12}$; si $k = -1$, $x = \frac{5\pi}{12}$; si $k = 0$,

$x = \frac{11\pi}{12}$; si $k = 1$



Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.

$$-\frac{\pi}{12} \quad \frac{\pi}{24} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{7\pi}{24} \quad \frac{5\pi}{12}$$

Determinando las imágenes para $f(x) = -\frac{1}{2}\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\tan(0) - 1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)} - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{0}{1}\right) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{24}\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(2\left(\frac{\pi}{24}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{24}\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(2\left(\frac{7\pi}{24}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{3}{2}$$

Rango de $f = R$

f) $f(x) = -\frac{2}{3}\cot\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Una función equivalente a esta es:

$f(x) = -\frac{2}{3}\cot\left((-1)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$ factorizando en el argumento.

$= -\left(-\frac{2}{3}\right)\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ aplicando propiedad del ángulo negativo.

$= \frac{2}{3}\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ equivalente a la original; en estos casos se trabaja con cualquiera de ellas.

Determinando el dominio de f

$f(x) = \frac{2}{3}\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \dfrac{2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{3\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 1$ en términos de seno y coseno y tomando la equivalente.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(3\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0\right)$

$3\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ nótese que se pudo haber tomado únicamente la expresión; $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

$x - \frac{\pi}{6} = k\pi$ recuérdese que el seno se hace cero en cada $k\pi$, con $k \in Z$.

$x = \frac{\pi + 6k\pi}{6}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

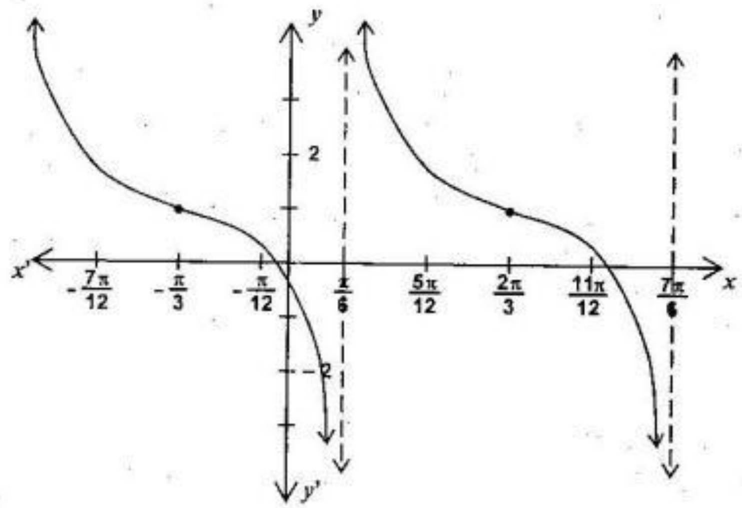
Luego el **dominio de f** es: $R - \left\{\frac{\pi + 6k\pi}{6}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales están dadas por:

$x = \dfrac{\pi + 6k\pi}{6}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\dfrac{\pi}{|1|} = \pi$

Desfase o corrimiento: $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{-\frac{\pi}{6}}{1} = \dfrac{\pi}{6}$.



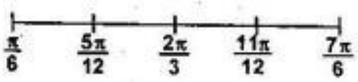
Determinando elementos para trazar la gráfica

Si $x = \dfrac{\pi + 6k\pi}{6}$ con $k \in Z$, entonces:

Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\dfrac{5\pi}{6}$; si $k = -1$, $x = \dfrac{\pi}{6}$; si $k = 0$,
$x = \dfrac{7\pi}{6}$; si $k = 1$

Tomando el intervalo entre dos asíntotas consecutivas, se determina el punto medio y los puntos intermedios y se calculan las imágenes de los mismos.



Determinando las imágenes para $f(x) = \dfrac{2}{3}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = \frac{2}{3}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{0}{1}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \frac{2}{3}(1) + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2}{3}\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 = \frac{2}{3}(-1) + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

Rango de $f = R$

Observación: En el caso de la función tangente y la función cotangente, las unidades se pueden obtener, determinando el punto medio y los puntos intermedios entre dos asíntotas consecutivas y observando la secuencia de los mismos. Cuando sea necesario, estas unidades se pueden extender tanto a la derecha como a la izquierda, dependiendo de la necesidad que se tenga. Una vez calculada la imagen del punto medio, será suficiente determinar la imagen de uno de los puntos intermedios; un tercer punto se puede obtener por simetría, recordando la forma de la función elemental tangente y cotangente. Para trazar más de un período, se toma como referencia el ciclo ya graficado.

Ejercicios 5.2

1. Para cada función dada, trazar dos ciclos de su gráfica e indicar: dominio, ecuación general de las asíntotas, periodo, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los eje coordenados (respuestas de los interceptos, se deja al lector).

a) $f(x) = \frac{1}{2}\tan 3x$

b) $f(x) = -2\cot\left(\frac{1}{3}x\right)$

c) $f(x) = 3\cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $f(x) = -3\tan(2x + \pi) + \frac{1}{2}$

e) $f(x) = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

f) $f(x) = -2\tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

g) $f(x) = -\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) - 3$

h) $f(x) = -\frac{3}{4}\tan\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

i) $f(x) = 2\cot\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

j) $f(x) = 3\cot\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 1$

k) $f(x) = -\frac{1}{3}\tan\left(-\frac{1}{4}x + \pi\right) + 3$

l) $f(x) = 2\cot\left(\frac{1}{3}x - \pi\right) - 3$

m) $f(x) = \frac{5}{2}\tan\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

n) $f(x) = -\cot\left(-\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$

o) $f(x) = -2\tan\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) + 2$

p) $f(x) = -\frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) + 2$

q) $f(x) = -2\cot\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) - 1$

r) $f(x) = 3\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

5.3 FUNCION SECANTE Y FUNCION COSECANTE

Una vez analizadas la función tangente y cotangente, será fácil determinar los elementos para la función secante y la función cosecante, dado que las cuatro se expresan como el cociente de las funciones seno y coseno. Cabe recordar que el procedimiento planteado en este material no es único, pero la idea es que se aplique el mismo análisis que en las anteriores. Recuérdese el hecho que, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

En ésta sección se aprenderá a trazar las gráficas de las funciones secante y cosecante, se notará que sus características son muy similares. Los tipos de funciones que se considerarán en esta sección se describen en el siguiente cuadro.

Función secante	Función cosecante
$f(x) = \sec x$	$f(x) = \csc x$
$f(x) = a\sec x$	$f(x) = a\csc x$
$f(x) = a\sec bx$	$f(x) = a\csc bx$
$f(x) = a\sec(bx + c)$	$f(x) = a\csc(bx + c)$
$f(x) = a\sec(bx + c) + d$	$f(x) = a\csc(bx + c) + d$

cuadro 1

Se inicia con el trazo de las gráficas de la función secante y de la función cosecante elemental. Véase la fig. 1 y fig. 2 que con auxilio de la tabla 1 se grafica la función secante, en un subconjunto de su dominio (fig 1) y luego en un intervalo (fig. 2) ya que la función secante tiene un período de 2π (el valor de la función secante se repite infinitas veces). También en estas funciones, existen infinitos valores para los cuales no están definidas dichas funciones. Esto implica que el dominio no es el conjunto de los números reales.

Trazando la función $f(x) = \sec x$

Por facilidad, se expresa $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, nótese que esta función está definida para cualquier número real excepto donde $\cos x = 0$.

Determinando los valores donde $\cos x = 0$, se tiene que $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ó $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2}$ para $k \in Z$.

Esto implica que el dominio de $f(x) = \sec x$ es: $R - \left\{\dfrac{\pi + 2k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

De donde se obtienen las ecuaciones generales que determinan las asíntotas verticales, dadas por: $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2}$ con $k \in Z$.

Asignándole valores consecutivos a k, se encuentran algunas asíntotas verticales. Véase:
$x = -\dfrac{3\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, entre otras.

La tabla 1 muestra algunos valores asignados a x para obtener valores de y (imágenes y preimágenes) en el $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Nótese que los valores que se obtienen para y, están en $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, lo que implica que el rango de la función secante es $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$f(x) = \sec x$

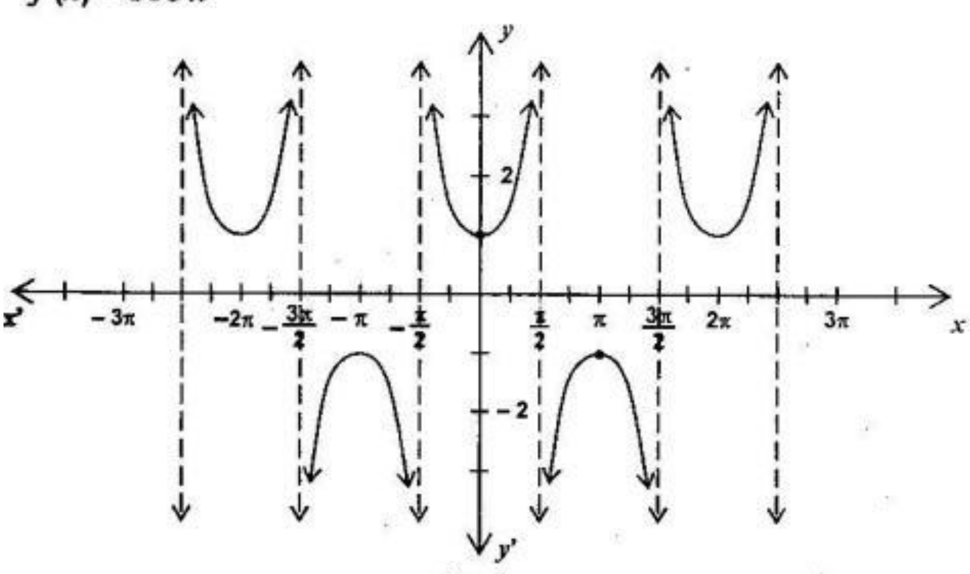


fig .1

x	$f(x)$
$-\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$-\pi$	-1
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
π	-1

tabla 1

La siguiente figura, muestran un ciclo de $f(x) = \sec x$. en el $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Nótese que si se desea obtener un ciclo de esta gráfica, es necesario determinar tres asíntotas verticales consecutivas.

Si se pide la gráfica de una función de este tipo, será suficiente trazar un ciclo y medio, a menos que se indique lo contrario.

Podrá notarse además que tiene período de 2π y que el rango es $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Recordar que lo dicho anteriormente es válido también para la función cosecante.

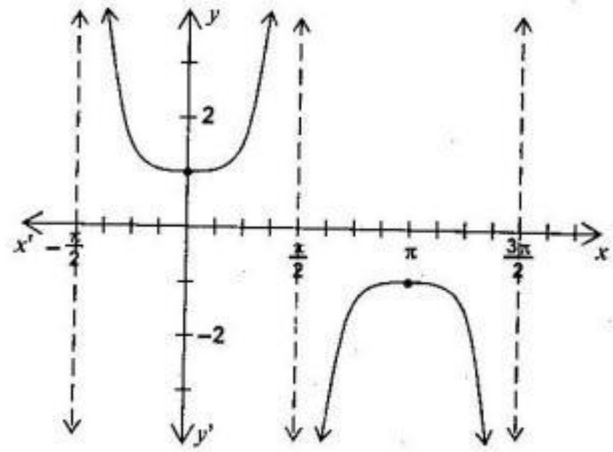


fig. 2

Para trazar la gráfica de $f(x) = \csc x$, se sigue el mismo procedimiento que para $f(x) = \sec x$. Véase: $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, nótese que esta función está definida para cualquier número real excepto donde $\operatorname{sen} x = 0$.

Determinando los valores donde $\operatorname{sen} x = 0$, se tiene que $x = k\pi$, para $k \in Z$.
Esto implica que el dominio de $f(x) = \csc x$ es: $R - \{k\pi,\ k \in Z\}$
Luego el conjunto de asíntotas verticales, están dadas por: $x = k\pi$, con $k \in Z$.

Asignándole valores consecutivos a k, se determinan algunas asíntotas verticales (A. V). Véase:
$x = -2\pi$, $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, entre otras.

La tabla 2 muestra algunos valores asignados a x para obtener valores de y (imágenes y preimágenes) en el $]-\pi, \pi[$. Nótese que los valores que se obtienen para y, están en el $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, lo que implica que el rango de la función cosecante es $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

$f(x) = \csc x$

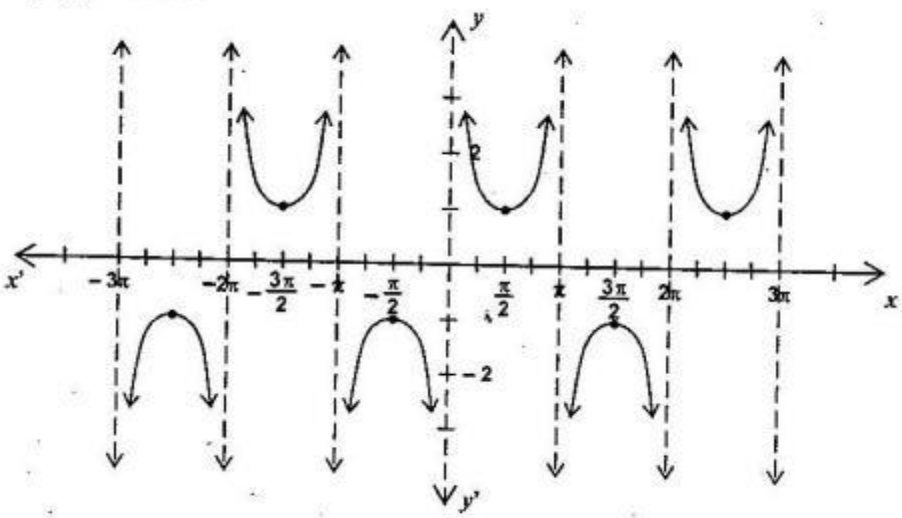
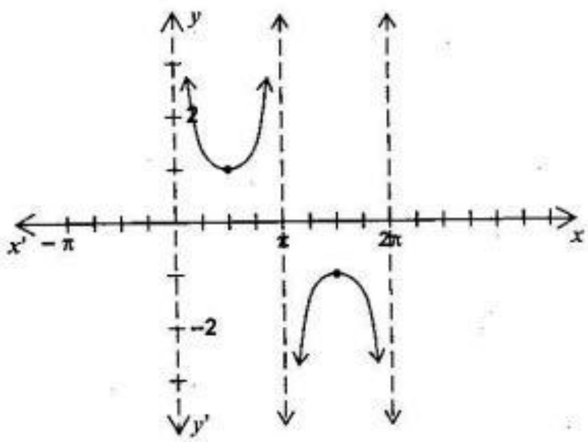


fig. 3

x	$f(x)$
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$-\frac{\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$

tabla 2

La siguiente, figura muestra un ciclo de $f(x) = \csc x$, en el $]0,2\pi[$.



Se procede a analizar y trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = a \sec(bx + c) + d$ ó $f(x) = a \csc(bx + c) + d$.

La siguiente propiedad, indica el efecto que tienen las constantes (números reales) a, b, c y d, en cada una de las ecuaciones que representan la función secante y cosecante.

Propiedad 1 Si $f(x) = a \sec(bx + c) + d$ o $f(x) = a \csc(bx + c) + d$, para números reales a, b, c y d, con a y b diferentes de cero, la gráfica tiene un período de $\frac{2\pi}{|b|}$ y un desfase o corrimiento en $-\frac{c}{b}$. El valor para d se ve reflejado en la menor imagen y en la mayor imagen de cada sección de la gráfica mostrada entre dos asíntotas verticales consecutivas. El rango se determina mediante la expresión $]-\infty, -|a| + d\,] \cup [\,|a| + d, +\infty[$.

Véase los siguientes ejemplos y nótese algunas similitudes en cuanto al análisis con respecto a la función tangente y cotangente.

Ejemplo 1 Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar: dominio, ecuaciones generales de las asíntotas verticales, período, el desfase o corrimiento y el rango.

a) $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **b)** $f(x) = -3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ **c)** $f(x) = -\frac{2}{3}\sec\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Solución:

a) $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

Determinando el dominio de f

$$f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 2$$ expresándolo en términos de coseno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\right)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ recuérdese que el coseno se hace cero en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in Z$.

$x = \frac{3\pi + 4k\pi}{4}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{\frac{3\pi + 4k\pi}{4}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales esta dada por:

$x = \frac{3\pi + 4k\pi}{4}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$; **Desfase o corrimiento**: $-\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$.

Encontrando elementos para trazar la gráfica

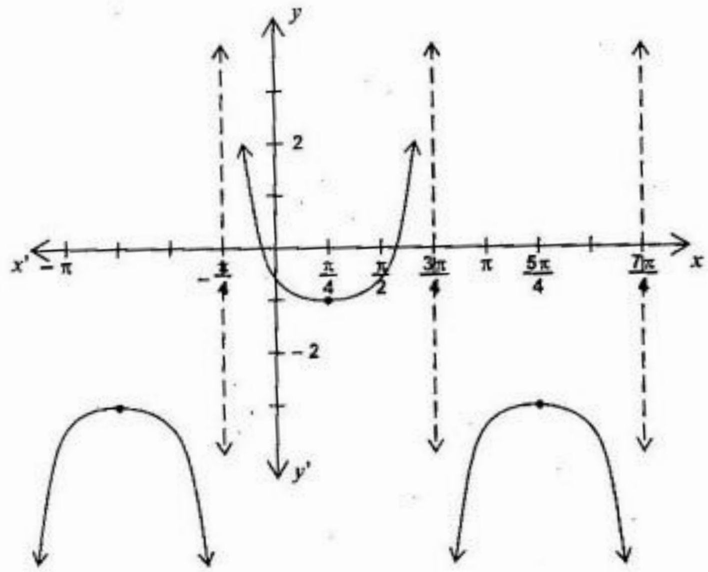
Si $x = \frac{3\pi + 4k\pi}{4}$ con $k \in Z$, entonces:

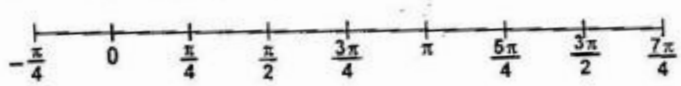
Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = -\frac{\pi}{4}$; si $k = -1$, $x = \frac{3\pi}{4}$; si $k = 0$,

$x = \frac{7k\pi}{4}$; si $k = 1$

Tomando tres asíntotas consecutivas (las cuales determinan un período), determinando los puntos medios entre cada dos asíntotas consecutivas y determinando un punto intermedio entre dos asíntotas consecutivas y calculando las imágenes de los mismos.





Determinando las imágenes para $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

$$f(0) = \sec\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - 2 = \sqrt{2} - 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{1}{\cos(0)} - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \frac{1}{\cos(\pi)} - 2 = -1 - 2 = -3$$

Nótese que para trazar las gráficas de las funciones, secante y cosecante, es suficiente determinar: la imagen del punto medio del segmento que separa dos asíntotas verticales consecutivas, la imagen de uno de los puntos intermedios de este mismos segmento y la imagen del punto medio del segmento que separa una de las asíntotas anteriores y otra consecutiva a ésta (ya sea a la derecha o a la izquierda). Recuérdese que la forma de la gráfica es una curva cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo entre tres asíntotas verticales consecutivas. Con estas tres imágenes determinadas, se notará en que intervalo está la región de la curva cóncava hacia abajo y donde la cóncava hacia arriba. A menos que se pida lo contrario, será suficiente trazar ciclo y medio en estas funciones, paro lo cual se necesitan cuatro asíntotas verticales.

Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = \dfrac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} - 2$ y $f(0) = \dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - 2 = \sqrt{2} - 2$. Luego, $I_y\left(0, \sqrt{2} - 2\right)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ ó $\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = 0$ ó $\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

$\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$ ecuación obtenida.

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ Recuérdese que la secante es positiva en el primer y tercer cuadrante y que su periodo es 2π.

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ (despejando para x).

$x = \dfrac{7\pi + 24k\pi}{12}$ ó $x = \dfrac{23\pi + 24k\pi}{12}$ simplificando.

Luego, $I_x\left(\dfrac{7\pi+24k\pi}{12}, 0\right), \left(\dfrac{23\pi+24k\pi}{12}, 0\right)$ con $k \in Z$.

Rango de $f = \left]-\infty, -|a| + d\right] \cup \left[|a| + d, +\infty\right[= \left]-\infty, -1 + (-2)\right] \cup \left[1 + (-2), +\infty\right[= \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-1, +\infty\right[$

b) $f(x) = -3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

Determinando el dominio de f

$f(x) = -3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = \dfrac{-3}{\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} - 1$ expresándolo en términos de seno.

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\right)$

$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ recuérdese que el seno se hace cero en $k\pi$ con $k \in Z$.

$x = \dfrac{\pi + 3k\pi}{6}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{\dfrac{\pi + 3k\pi}{6}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales esta dada por:

$x = \dfrac{\pi + 3k\pi}{6}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

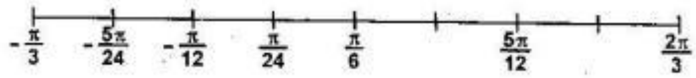
Período: $\dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$; **Desfase o corrimiento**: $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{-\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

Encontrando elementos para trazar la gráfica

Si $x = \dfrac{\pi + 3k\pi}{6}$ con $k \in Z$, entonces:

Algunas asíntotas verticales (A. V) son: $x = -\dfrac{5\pi}{6}$; si $k = -2$, $x = -\dfrac{\pi}{3}$; si $k = -1$, $x = \dfrac{\pi}{6}$; si $k = 0$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$; si $k = 1$.

Tomando tres asíntotas consecutivas (las cuales determinan un período), determinando los puntos medios entre cada dos asíntotas consecutivas y determinando un punto intermedio entre dos asíntotas consecutivas y calculando las imágenes de los mismos.

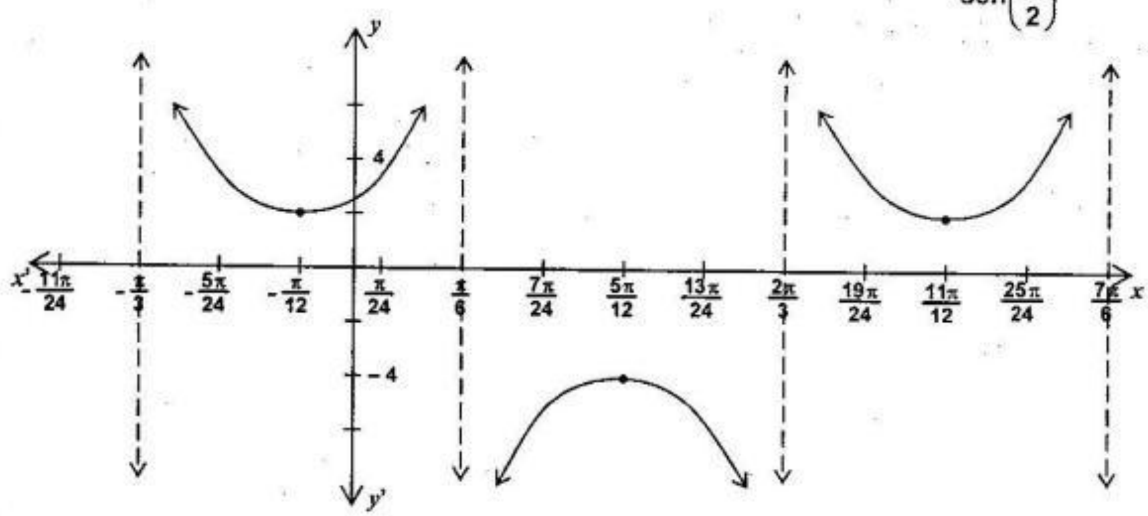


Determinando las imágenes para $f(x) = -3\csc\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1$

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -3\csc\left(2\left(-\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{-3}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} - 1 = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{24}\right) = -3\csc\left(2\left(\frac{\pi}{24}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{-3}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -3\csc\left(2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -3\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{-3}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 1 = -3 - 1 = -4$$



Determinando I_y; haciendo $x = 0$

$$f(x) = -3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \text{ y } f(0) = -3\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 3\csc\frac{\pi}{3} - 1 = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 1 = = 2\sqrt{3} - 1.$$

Luego, $I_y\left(0, 2\sqrt{3} - 1\right)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$f(x) = -3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ ó $-3\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ ó $\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. Nótese que esta ecuación no tiene solución, pues la cosecante está definida en $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, luego I_x, no existe.

Rango de f = $]-\infty,-|a|+d] \cup [|a|+d,+\infty[\ = \ ]-\infty,-3+(-1)] \cup [3+(-1),+\infty[\ = \ ]-\infty,-4] \cup [2,+\infty[$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}\sec\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Determinando el dominio de f

$f(x) = -\frac{2}{3}\sec\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \dfrac{-2}{3\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)} + 1$ expresándolo en términos de coseno.

Nótese que también se puede trabajar con la función equivalente

$$f(x) = -\frac{2}{3}\sec\left((-1)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1 = -\frac{2}{3}\sec\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = -\frac{2}{3}\sec\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{-2}{3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 1$$

Tomando la función dada

Encontrando los valores donde el denominador es cero $\left(3\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ ó } \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 0\right)$.

Nótese que si se toma la función equivalente, se determinaría donde $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Tomando, $\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, se tiene:

$\cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$-x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ recuérdese que el coseno se hace cero en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in Z$.

$x = -\frac{\pi + 3k\pi}{3}$ despejando para x, y con $k \in Z$.

Luego el **dominio de** f es: $R - \left\{-\frac{\pi + 3k\pi}{3}, \text{ con } k \in Z\right\}$

Las ecuaciones generales de las asíntotas verticales esta dada por:

$x = -\frac{\pi + 3k\pi}{3}$, con $k \in Z$ nótese que estas son infinitas rectas verticales.

Período: $\dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

Desfase o corrimiento: $-\dfrac{c}{b} = -\dfrac{\frac{\pi}{6}}{-1} = \dfrac{\pi}{6}$.

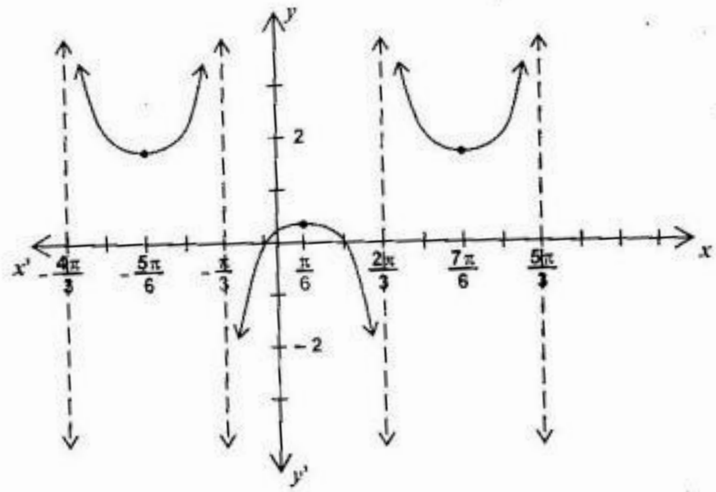
Encontrando elementos para trazar la gráfica

Si $x = -\dfrac{\pi + 3k\pi}{3}$ con $k \in Z$, entonces:

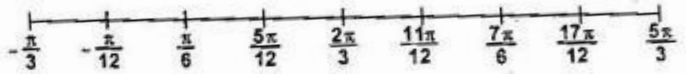
Algunas asíntotas verticales (A. V) son:

$x = \dfrac{5\pi}{3}$; si $k = -2$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$; si $k = -1$,

$x = -\dfrac{\pi}{3}$; si $k = 0$, $x = -\dfrac{4\pi}{3}$; si $k = 1$,



Tomando cuatro asíntotas consecutivas (las cuales determinan un período y medio), determinando los puntos medios entre cada dos asíntotas consecutivas y determinando un punto intermedio entre dos asíntotas consecutivas y calculando las imágenes de los mismos. Nótese la secuencia para determinar las unidades (cada $\dfrac{3\pi}{12}$).



Determinando algunas imágenes para $f(x) = -\dfrac{2}{3}\sec\left(-x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}\sec\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{-2}{3\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} + 1 = \frac{-2}{3\cos(-\pi)} + 1 = \frac{-2}{3(-1)} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{2}{3}\sec\left(-\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{-2}{3\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 = \frac{2\sqrt{2}+3}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{3}\sec\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{-2}{3\cos(0)} + 1 = \frac{-2}{3(1)} + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

Determinando $\mathbf{I}_y$; haciendo $x = 0$

$f(x) = -\dfrac{2}{3}\sec\left(-x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$	función dada.
$f(0) = -\dfrac{2}{3}\sec\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + 1$	haciendo $x = 0$.
$= -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) + 1$	determinando $\sec\frac{\pi}{6}$.
$= -\dfrac{4\sqrt{3}}{9} + 1$	multiplicando y racionalizando.

Luego $I_y\left(0, \dfrac{-4\sqrt{3}+9}{9}\right)$.

Determinando I_x; haciendo $y = 0$

$$f(x) = -\frac{2}{3}\sec\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)+1 \quad ó \quad -\frac{2}{3}\sec\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0 \quad ó \quad \sec\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}.$$

$$\sec\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2} \quad ó \quad \frac{1}{\cos\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{3}{2}$$ ecuación obtenida o su equivalente.

$$\cos\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$$ expresando de forma equivalente.

$$-x+\frac{\pi}{6} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi \quad ó$$

$$-x+\frac{\pi}{6} = 2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi$$

Recuérdese que la secante es positiva en el primer y cuarto cuadrante y que su período es 2π. Además el ángulo de referencia no es exacto, lo que implica que los interceptos con el eje de las x, son aproximaciones. El ángulo de referencia es $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, luego un ángulo es $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ y el otro $2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.

$$-x+\frac{\pi}{6} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi \quad ó \quad x=\frac{\pi-6\cos^{-1}(2/3)-12k\pi}{6}$$ (despejando para x).

$$-x+\frac{\pi}{6} = 2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi \quad ó \quad x=\frac{6\cos^{-1}(2/3)-11\pi-12k\pi}{6}$$ (despejando para x).

Luego, $I_x\left(\frac{\pi-6\cos^{-1}(2/3)-12k\pi}{6},0\right), \left(\frac{6\cos^{-1}(2/3)-11\pi-12k\pi}{6},0\right)$ con $k\in Z$.

Rango de f $= \left]-\infty,-|a|+d\right]\cup\left[|a|+d,+\infty\right[= \left]-\infty,-\frac{2}{3}+1\right]\cup\left[\frac{2}{3}+1,+\infty\right[= \left]-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$ ∎

Ejercicios 5.3

1. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar: dominio, ecuación general de las asíntotas, periodo, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los eje coordenados (respuestas de los interceptos, se deja al lector).

a) $f(x)=\frac{1}{2}\sec 3x$ **b)** $f(x)=-2\csc\left(\frac{1}{3}x\right)$ **c)** $f(x)=3\sec\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $f(x)=-3\csc(2x+\pi)+\frac{1}{2}$ **e)** $f(x)=\sec\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ **f)** $f(x)=-2\csc\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

g) $f(x)=-\sec\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-3$ **h)** $f(x)=-\frac{3}{4}\csc\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+2$ **i)** $f(x)=2\sec\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

j) $f(x)=3\csc\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1$ **k)** $f(x)=-\frac{1}{3}\sec\left(-\frac{\pi}{4}x+\pi\right)+3$ **l)** $f(x)=2\csc\left(\frac{\pi}{3}x-\pi\right)-3$

5.4 FUNCION SENO INVERSO Y FUNCION COSENO INVERSO

Para definir la función inversa (f^{-1}), de una función f, se requiere que f sea biunívoca o uno a uno.

Definición Una función f con dominio D y rango R, es una función **uno a uno o biunívoca o inyectiva** si satisface una de las siguientes condiciones:

a) Siempre que $a \neq b$ en D, entonces, $f(a) \neq f(b)$ en R.

b) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces, $a = b$ en D.

Una forma práctica para ver si una función f es uno a uno, es auxiliarse de su gráfica y verificar si toda recta horizontal corta la gráfica de f en a lo mas un punto.

Definición Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D, **es la inversa de** f, siempre que $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$, para toda x en D y para toda y en R.

Según la definición anterior, la función inversa intercambia las componentes. Es decir (x, y) pertenece a f, si y sólo si (y, x) pertenece a f^{-1}. Otra relación entre f y f^{-1}, es que el dominio de f es igual al rango f^{-1} y que el rango de f es igual al dominio f^{-1}.

Vale la pena mencionar que toda función f, tiene inversa pero no toda inversa determina una función. Pues ya de ha dicho que para que la inversa de una función sea función, la función dada debe ser uno a uno. En el caso que una función no sea uno a uno, se debe restringir el dominio, de tal manera que en algún intervalo esta función sí sea uno a uno.

+Si se recuerda la función seno y la función coseno, éstas **no son funciones uno a uno**, por lo que es necesario restringir el dominio de las mismas, para que lo sean y que la inversa de cada una de ellas sea una función.

Retomando las gráficas de las funciones seno y coseno elementales, analizadas en las secciones anteriores se observa que para $f(x) = \text{sen}\, x$, esta función **es uno a uno,** en uno de los siguientes intervalos: $\cdots, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \cdots$. Mientras que para $f(x) = \cos x$, esta función es **uno a uno,** en uno de los siguientes intervalos: $\cdots, [-2\pi, -\pi], [-\pi, 0], [0, \pi], [\pi, 2\pi], [2\pi, 3\pi], \cdots$

Para $f(x)$ = sen x, en donde se pretende que esta función sea uno a uno, por conveniencia se restringe el dominio, y se toma el $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Mientras que, para que $f(x) = \cos x$ sea una función uno a uno, se toma por conveniencia el $[0, \pi]$. Nótese la parte más gruesa en la gráfica de la fig. 1 y fig.2.

Gráfica de $f(x)$ = sen x

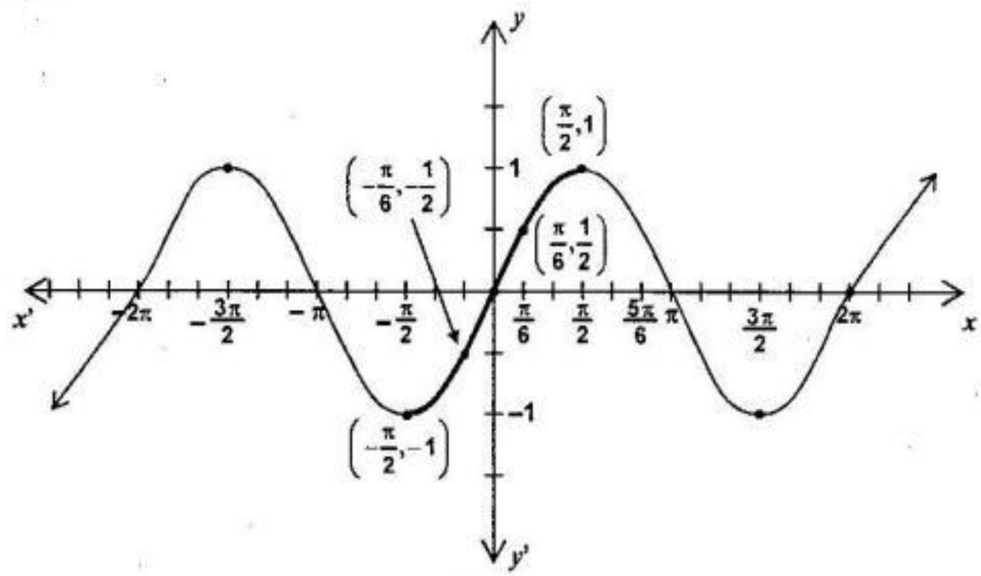


fig. 1

Gráfica de $f(x) = \cos x$

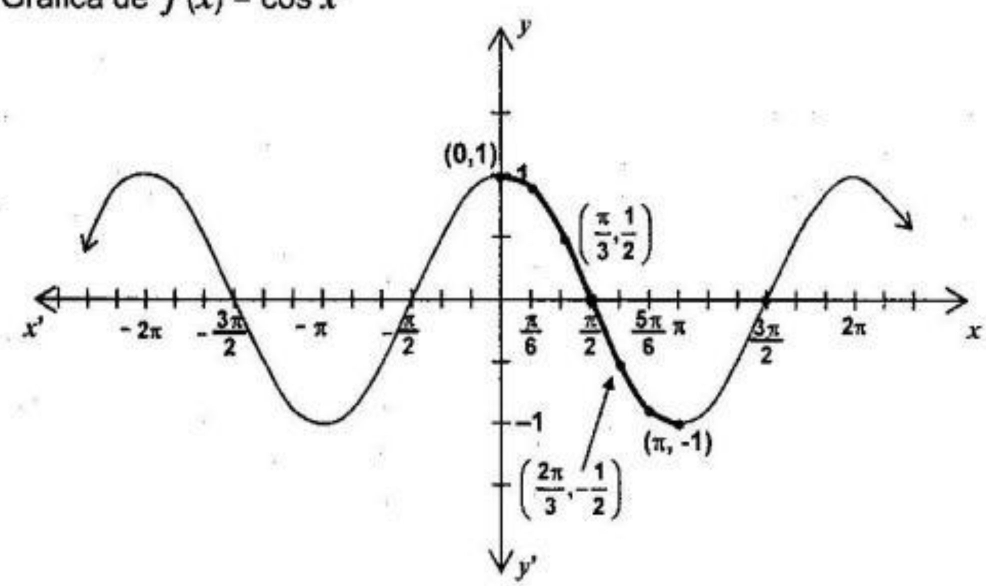


fig. 2

Aplicando el criterio anterior de intercambiar las componentes en cada función graficada anteriormente, se muestra la inversa para cada una de ellas.

Gráfica de la inversa de $f(x) = \text{sen } x$

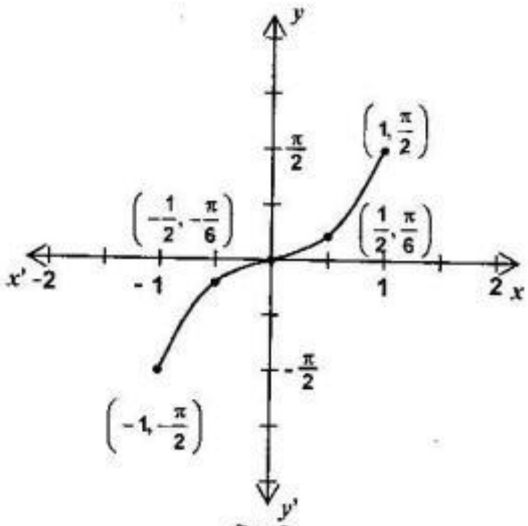


fig. 3

Gráfica de la inversa de $f(x) = \cos x$

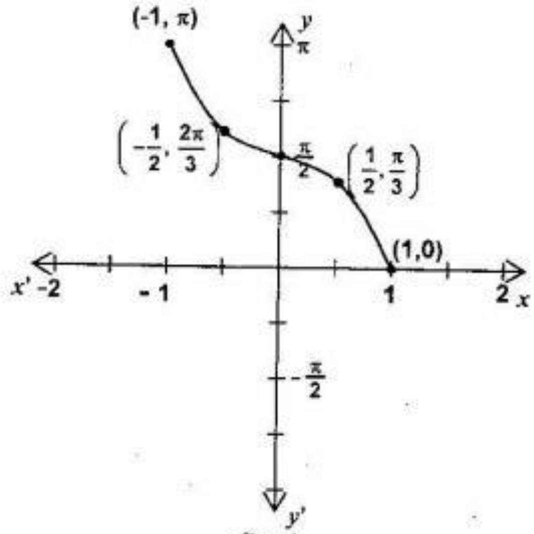


fig. 4

Nótese que: el dominio de la inversa de la función seno es el $[-1, 1]$ y que el rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, el dominio de la inversa de la función coseno es el $[-1, 1]$ y que el rango es $[0, \pi]$.

Se procede ahora a definir la función seno inverso y la función coseno inverso.

Definición La función **seno inverso** o **arcoseno**, representada por sen^{-1} ó arcsen se define de la siguiente forma:

$y = \text{sen}^{-1} x$ ó $\text{arcsen } x$ si y sólo si $x = \text{sen } y$ para $-1 \le x \le 1$ y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Definición La función **coseno inverso** o **arcocoseno**, representada por $\cos^{-1}$ ó arccos se define de la siguiente forma:

$y = \cos^{-1} x$ ó $\arccos x$ si y sólo si $x = \cos y$ para $-1 \le x \le 1$ y $0 \le y \le \pi$.

Según lo expuesto anteriormente, es importante tener en cuenta que tanto para $f(x) = \text{sen}^{-1} x$ como para $f(x) = \cos^{-1} x$, su dominio coincide el cual es el $[-1, 1]$. Mientras que el rango para ambas funciones es distinto. Para $f(x) = \text{sen}^{-1} x$, el rango es el $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y para $f(x) = \cos^{-1} x$ el rango es el $[0, \pi]$.

Para practicar al respecto, obsérvese el siguiente ejemplo, recordando que el $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ corresponde a ángulos (si no son cuadrantales) cuyo lado terminal está en el I o IV cuadrante, y para el $[0, \pi]$ a ángulos cuyo lado terminal está en el I ó II cuadrante (si no son cuadrales).

Ejemplo 1 Determinar el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}(1)$ **d)** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$

e) $\operatorname{sen}^{-1}(0)$ **f)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **g)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **h)** $\cos^{-1}(-1)$

i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **j)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **k)** $\cos^{-1}(0)$ **l)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

En este inciso, lo que se pregunta es: ¿para qué ángulo θ, el seno de este ángulo es igual a $\frac{1}{2}$?

Por facilidad se asume que $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Luego $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Recuérdese que **el seno es positivo** en el primer y segundo cuadrante, pero se descarta la posibilidad del segundo cuadrante ya que el rango de la función seno inverso, es el $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y el ángulo que está en el segundo cuadrante $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ está afuera de este intervalo. Luego el único valor que satisface esta condición es $\frac{\pi}{6}$, obteniéndose que $y = \frac{\pi}{6}$. Se concluye diciendo que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Recuérdese que cuando se estudiaron las ecuaciones trigonométricas se encontraban infinitas soluciones, pero en este caso, solamente se considera un valor por que la definición de la función seno inverso así lo exige.

Observación: para la comprensión de estos problemas, es importante que se recuerde el tema sobre las ecuaciones trigonométricas enunciado en secciones anteriores.

b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Asumiendo que $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

se tiene que $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Recuérdese que **el seno es negativo** en el tercer y cuarto cuadrante, para el caso si el ángulo está en el tercer cuadrante, el ángulo sería $\frac{7\pi}{6}$ y si el ángulo está en el cuarto cuadrante el ángulo sería $\frac{11\pi}{6}$, pero ambos ángulos no están en el rango de la función seno inverso. También se sabe que el $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ y este ángulo sí está en el rango de la función seno inverso (este ángulo está en el cuarto cuadrante). Luego el único valor que satisface esta condición es $-\frac{\pi}{6}$, y se tiene que $y = -\frac{\pi}{6}$ y se concluye que $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

c) $\text{sen}^{-1}(1)$

Asumiendo que $y = \text{sen}^{-1}(1)$

se tiene que $\text{sen}\, y = 1$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Recuérdese que **el seno de un ángulo es igual a uno**, si este ángulo es igual a $\frac{\pi}{2}$ y éste está en el rango de la función seno inverso. Luego $y = \frac{\pi}{2}$ y $\text{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.

d) $\text{sen}^{-1}(-1)$

Asumiendo que $y = \text{sen}^{-1}(-1)$

se tiene que $\text{sen}\, y = -1$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Recuérdese que el seno es **−1**, para el ángulo $\frac{3\pi}{2}$ pero este ángulo no está en el intervalo que determina el rango de la función seno inverso. El ángulo que satisface la definición es $-\frac{\pi}{2}$. Luego $y = -\frac{\pi}{2}$ y $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

e) $\text{sen}^{-1}(0)$

Asumiendo que $y = \text{sen}^{-1}(0)$

se tiene que $\text{sen}\, y = 0$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Recuérdese que el seno es **cero**, para el ángulo **0** el cual está en el intervalo que determina el rango de la función seno inverso. Luego $y = 0$ y $\text{sen}^{-1}(0) = 0$.

f) $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Asumiendo que $y = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

se tiene que $\text{sen}\, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por definición.

Nuevamente el ángulo que se debe tomar, está en el cuarto cuadrante y debe ser negativo para satisfacer la definición de la función seno inverso. El ángulo donde el seno es $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, es $-\frac{\pi}{3}$. Luego $y = -\frac{\pi}{3}$ y $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

g) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

El análisis en este caso, es muy similar a los incisos anteriores, la diferencia es que el rango para la función coseno inverso es el $[0, \pi]$.

Haciendo $y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

se tiene que $\cos y = -\frac{1}{2}$ y $0 \leq y \leq \pi$ por definición.

Recuérdese que el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante, pero se descarta la posibilidad del ángulo en el tercer cuadrante ya que este ángulo esta afuera del intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. El ángulo que satisface la definición es $\frac{2\pi}{3}$. Concluyendo que $y = \frac{2\pi}{3}$ y $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

h) $\cos^{-1}(-1)$

Haciendo $y = \cos^{-1}(-1)$

se tiene que $\cos y = -1$ y $0 \leq y \leq \pi$ por definición.

Recuérdese que el coseno es igual a **–1** para el ángulo π, y éste está en el intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. Se concluye que $y = \pi$ y $\cos^{-1}(-1) = \pi$.

i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Haciendo $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

se tiene que $\cos y = \frac{1}{2}$ y $0 \leq y \leq \pi$ por definición.

Téngase presente que el coseno es igual a $\frac{1}{2}$ para un ángulo de $\frac{\pi}{3}$; tomando el ángulo que pertenezca al intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. Luego se tiene que $y = \frac{\pi}{3}$ y $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

j) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Haciendo $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

se tiene que $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $0 \leq y \leq \pi$ por definición.

Recuérdese que el coseno es igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$, el cual está en el intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. Luego se tiene que $y = \frac{5\pi}{6}$ y $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

k) $\cos^{-1}(0)$

Haciendo $y = \cos^{-1}(0)$
se tiene que $\cos y = 0$ y $0 \le y \le \pi$ por definición.

Recuérdese que el coseno es 0, para el ángulo de $\frac{\pi}{2}$, el cual está en el intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. Luego se tiene que $y = \frac{\pi}{2}$ y $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

l) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Haciendo $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

se tiene que $\cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $0 \le y \le \pi$ por definición.

El coseno es igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, para un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$, el cual está en el intervalo que determina el rango de la función coseno inverso. Luego se tiene que $y = \frac{3\pi}{4}$ y $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. ∎

En el ejemplo dado anteriormente, es posible determinar el ángulo, dado que se tomaron valores especiales, pero por la definición de la inversa de una función es posible definir las siguientes propiedades.

Propiedades

1) $\operatorname{sen}\left(\mathbf{sen}^{-1} x\right) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

2) $\operatorname{sen}^{-1}(\mathbf{sen}\, y) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y$ si $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

3) $\cos\left(\mathbf{cos}^{-1} x\right) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

4) $\cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y$ si $0 \le y \le \pi$

Ejemplo 2 Determinar el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ **b)** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

d) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$ **e)** $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$ **f)** $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$

Solución:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Ya que $-1 \leq \frac{1}{3} \leq 1$, se tiene que $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$

b) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

Ya que $-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 1$, se tiene que $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$

c) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

Ya que $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$

d) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

Ya que $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = -\frac{\pi}{7}$

e) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$

Ya que $-1 \leq \frac{1}{8} \leq 1$, se tiene que $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{8}$

f) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)$

Ya que $0 \leq \frac{\pi}{9} \leq \pi$, se tiene que $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) = \frac{\pi}{9}$ ■

Con la práctica realizada en el ejemplo 1, se procede a trazar la gráfica de una función seno inverso y coseno inverso. Los tipos de funciones que se analizará se sintetizan en la siguiente tabla.

Función seno inverso	Función coseno inverso
$f(x) = \text{sen}^{-1} x$	$f(x) = \cos^{-1} x$
$f(x) = a\,\text{sen}^{-1} x$	$f(x) = a\cos^{-1} x$
$f(x) = a\,\text{sen}^{-1} bx$	$f(x) = a\cos^{-1} bx$
$f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c)$	$f(x) = a\cos^{-1}(bx + c)$
$f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$	$f(x) = a\cos^{-1}(bx + c) + d$

cuadro 1

Observación Para $f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$ o $f(x) = a\cos^{-1}(bx + c) + d$, para números reales a, b, c y d, con a y b diferentes de cero, el dominio está determinado por $-\frac{1+c}{b} \le x \le \frac{1-c}{b}$, si $b > 0$ ó $\frac{1-c}{b} \le x \le -\frac{1+c}{b}$, si $b < 0$. El rango para $f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$ está dado por $\frac{2d - \pi a}{2} \le y \le \frac{2d + \pi a}{2}$, si $a > 0$ ó $\frac{2d + \pi a}{2} \le y \le \frac{2d - \pi a}{2}$, si $a < 0$. El rango para $f(x) = a\cos^{-1}(bx + c) + d$ está dado por $a + d \le y \le \pi a + d$, si $a > 0$ ó $\pi a + d \le y \le a + d$, si $a < 0$.

Según la observación anterior, el dominio de las funciones trigonométricas inversas descritas en la misma, se determina desarrollando la siguiente inecuación $-1 \le bx + c \le 1$. Nótese que $bx + c$ es el argumento de la función $f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$. Para determinar el rango de $f(x) = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a\,\text{sen}^{-1}(bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\text{sen}^{-1}(bx + c) = \frac{y - d}{a}$, luego se resuelve la inecuación $-\frac{\pi}{2} \le \frac{y - d}{a} \le \frac{\pi}{2}$ considerando los casos, cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. De igual manera para determinar el rango de $f(x) = a\cos^{-1}(bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a\cos^{-1}(bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\cos^{-1}(bx + c) = \frac{y - d}{a}$, luego se resuelve la inecuación $0 \le \frac{y - d}{a} \le \pi$ considerando los casos cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. Véase en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, e indicar dominio y rango.

a) $f(x) = 2\text{sen}^{-1} x$ b) $f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$ c) $f(x) = \cos^{-1}(x-2)$

d) $f(x) = -3\text{sen}^{-1} x$ e) $f(x) = \cos^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$ f) $f(x) = \cos^{-1}(3x-1) + \frac{\pi}{4}$

g) $f(x) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right) - \frac{\pi}{6}$ h) $f(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Solución:

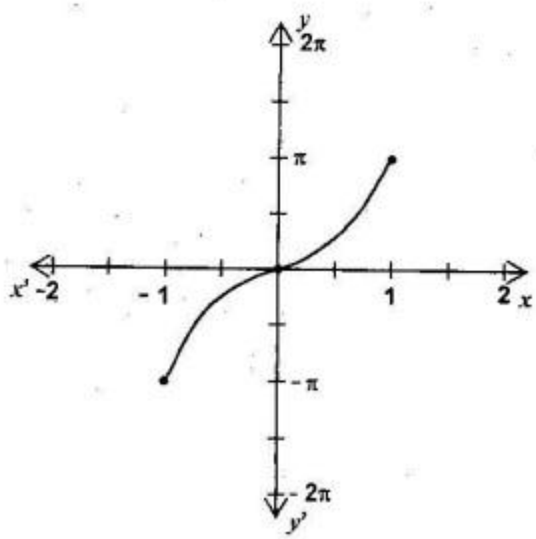
a) $f(x) = 2\text{sen}^{-1} x$

Determinando el dominio de f

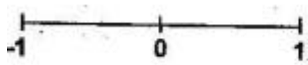
$-1 \leq x \leq 1$ nótese que $b=1$, $c=0$

Con este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Si se determina el rango (intervalo) antes de trazar la gráfica, será suficiente encontrar la imagen del punto medio del intervalo que determina el dominio y de uno de de los extremos del mismo, el otro punto se deduce según el rango que se ha obtenido.



Véase:



Intervalo del dominio.

Determinando estas tres imágenes para $f(x) = 2\text{sen}^{-1} x$

$f(0) = 2\text{sen}^{-1}(0)$

calculando $\text{sen}^{-1}(0)$

Sea $y = \text{sen}^{-1}(0)$; luego $\text{sen}\, y = 0$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(0) = 0$ y $f(0) = 2(0) = 0$.

$f(-1) = 2\text{sen}^{-1}(-1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(-1)$

Sea $y = \text{sen}^{-1}(-1)$; luego $\text{sen}\, y = -1$, lo que implica que $y = -\frac{\pi}{2}$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ y

$f(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

$f(1) = 2\text{sen}^{-1}(1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(1)$

Sea $y = \text{sen}^{-1}(1)$; luego $\text{sen}\, y = 1$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. Obteniendo que $\text{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

y $f(1) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \text{sen}^{-1} x$.

Rango de $f = [-\pi, \pi]$.

b) $f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$

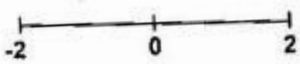
Determinando el dominio de f

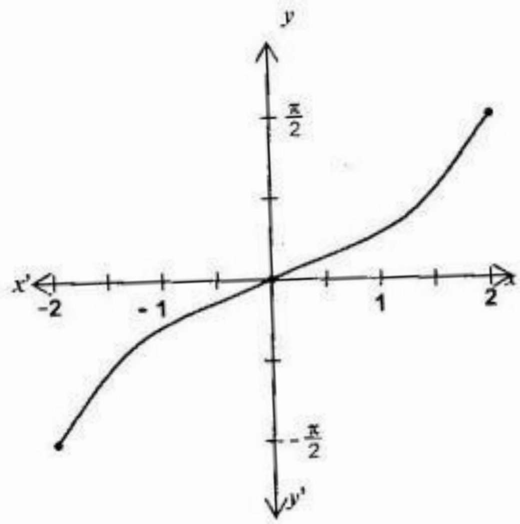
$-1 \leq \frac{1}{2}x \leq 1$ nótese que $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

$-2 \leq x \leq 2$ resolviendo.

Con este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase:





Determinando estas tres imágenes para $f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f(0) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}(0)\right) = \text{sen}^{-1}(0)$

Calculando $\text{sen}^{-1}(0)$
Sea $y = \text{sen}^{-1}(0)$; luego $\text{sen}\, y = 0$, lo que implica que $y = 0$, y $\text{sen}^{-1}(0) = 0$
Concluyendo que $f(0) = 0$.

$f(-2) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}(-2)\right) = \text{sen}^{-1}(-1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(-1)$
Sea $y = \text{sen}^{-1}(-1)$; luego $\text{sen}\, y = -1$, lo que implica que $y = -\frac{\pi}{2}$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

y $f(-2) = -\frac{\pi}{2}$

$f(2) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}(2)\right) = \text{sen}^{-1}(1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(1)$
Sea $y = \text{sen}^{-1}(1)$; luego $\text{sen}\, y = 1$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

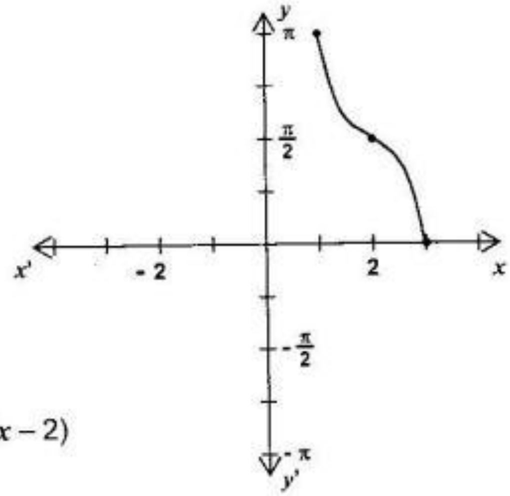
y $f(2) = \frac{\pi}{2}$.

Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \text{sen}^{-1} x$.
Rango de $f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) $f(x) = \cos^{-1}(x-2)$

Determinando el dominio de f

$-1 \le x - 2 \le 1$ nótese que $b = 1$, $c = -2$.
$1 \le x \le 3$ resolviendo.



Con este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase:

1 2 3

Determinando estas tres imágenes para $f(x) = \cos^{-1}(x-2)$

$f(2) = \cos^{-1}(2-2) = \cos^{-1}(0)$
calculando $\cos^{-1}(0)$
Sea $y = \cos^{-1}(0)$; luego $\cos y = 0$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

y $f(2) = \frac{\pi}{2}$.

$f(1) = \cos^{-1}(1-2) = \cos^{-1}(-1)$
Determinando $\cos^{-1}(-1)$
Sea $y = \cos^{-1}(-1)$; luego $\cos y = \pi$, lo que implica que $y = \pi$, y $\cos^{-1}(-1) = \pi$
Obteniendo que $f(1) = \pi$

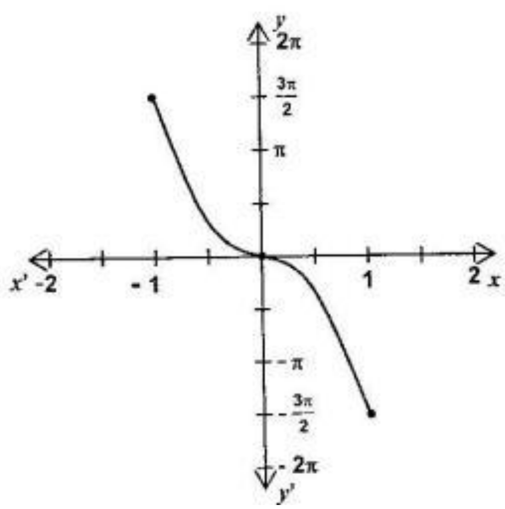
$f(3) = \cos^{-1}(3-2) = \cos^{-1}(1)$
Determinando $\cos^{-1}(1)$
Sea $y = \cos^{-1}(1)$; luego $\cos y = 1$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\cos^{-1}(1) = 0$
y $f(3) = 0$
Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \cos^{-1} x$.

Rango de $f = [0, \pi]$.

d) $f(x) = -3\text{sen}^{-1} x$

Determinando el dominio de f

$-1 \le x \le 1$ nótese que $b = 1$, $c = 0$.



Con este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase:

-1 0 1

Determinando estas tres imágenes para $f(x) = -3\text{sen}^{-1} x$

$f(0) = -3\text{sen}^{-1}(0)$

calculando $\text{sen}^{-1}(0)$

Sea $y = \text{sen}^{-1}(0)$; luego $\text{sen}\, y = 0$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(0) = 0$
y $f(0) = -3(0) = 0$.

$f(-1) = -3\text{sen}^{-1}(-1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(-1)$

Sea $y = \text{sen}^{-1}(-1)$; luego $\text{sen}\, y = -1$, lo que implica que $y = -\frac{\pi}{2}$. Se tiene que $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

y $f(-1) = -3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

$f(1) = -3\text{sen}^{-1}(1)$

Determinando $\text{sen}^{-1}(1)$

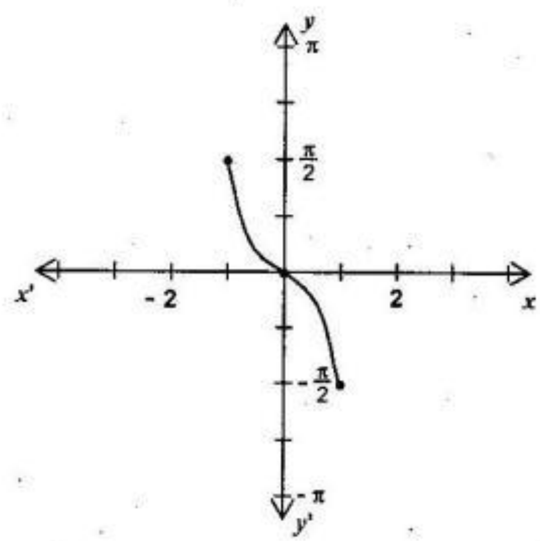
Sea $y = \text{sen}^{-1}(1)$; luego $\text{sen}\, y = 1$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\text{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

y $f(1) = -3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$.

Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \text{sen}^{-1} x$.

Rango de $f = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

e) $f(x) = \cos^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$

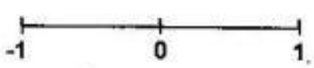


Determinando el dominio de f

$-1 \leq x \leq 1$ nótese que $b = 1$, $c = 0$

Con este intervalo encontrado, se determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio del mismo.

Véase:



Determinando estas tres imágenes de $f(x) = \cos^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}$

$f(0) = \cos^{-1}(0) - \frac{\pi}{2}$

calculando $\cos^{-1}(0)$

Sea $y = \cos^{-1}(0)$; luego $\cos y = 0$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$ y $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

luego $f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

$f(1) = \cos^{-1}(1) - \frac{\pi}{2}$

Determinando $\cos^{-1}(1)$
Sea $y = \cos^{-1}(1)$; luego $\cos y = 1$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\cos^{-1}(1) = 0$
y $f(1) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

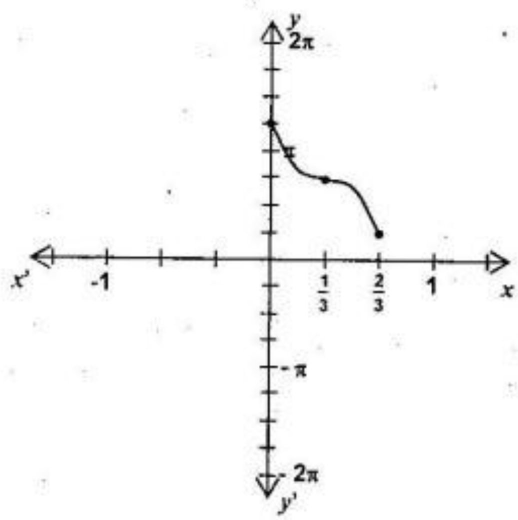
$f(-1) = \cos^{-1}(-1) - \frac{\pi}{2}$

Determinando $\cos^{-1}(-1)$
Sea $y = \cos^{-1}(-1)$; luego $\cos y = -1$, lo que implica que $y = \pi$. En conclusión $\cos^{-1}(-1) = \pi$
y $f(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \cos^{-1}x$.

Rango de f = $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

f) $f(x) = \cos^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$



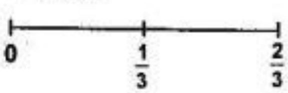
Determinando el dominio de f

$-1 \le 3x - 1 \le 1$ nótese que $b = 3$, $c = -1$

$0 \le x \le \frac{2}{3}$ resolviendo la desigualdad

Para este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase:



Determinando estas tres imágenes para $f(x) = \cos^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \cos^{-1}\left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right) + \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}(0) + \frac{\pi}{4}$

Calculando $\cos^{-1}(0)$

Sea $y = \cos^{-1}(0)$; luego $\cos y = 0$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

y $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$f(\mathbf{0}) = \cos^{-1}(3(\mathbf{0}) - 1) + \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}(-1) + \frac{\pi}{4}$

Determinando $\cos^{-1}(-1)$
Sea $y = \cos^{-1}(-1)$; luego $\cos y = \pi$, lo que implica que $y = \pi$. En conclusión $\cos^{-1}(-1) = \pi$

y $f(0) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cos^{-1}\left(3\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right) - 1) + \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}(1) + \frac{\pi}{4}$

Determinando $\cos^{-1}(1)$

Sea $y = \cos^{-1}(1)$; luego $\cos y = 1$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\cos^{-1}(1) = 0$

y $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Con estos tres puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \cos^{-1} x$.

Nótese que si se quiere determinar el rango sin necesidad de encontrar las imágenes es suficiente resolver la desigual $0 \leq y - \frac{\pi}{4} \leq \pi$ (despejando para el término trigonométrico inverso y luego acotándolo con el rango de la función elemental $f(x) = \cos^{-1} x$; $0 \leq y \leq \pi$).

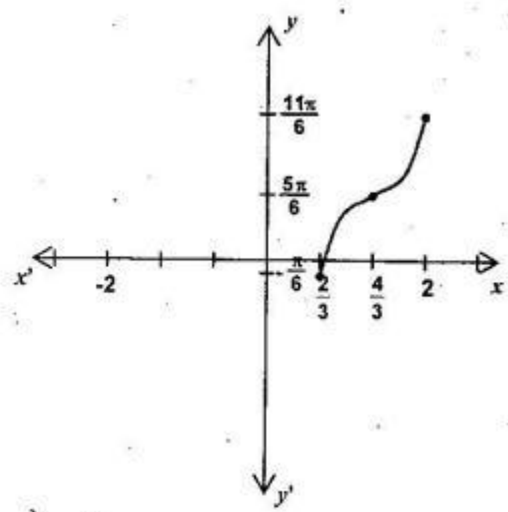
Rango de $f = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

g) $f(x) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$

Determinando el dominio de f

$-1 \leq -\frac{3}{2}x + 2 \leq 1$ nótese que $b = -\frac{3}{2}$, $c = 2$.

$\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ resolviendo.



Con este intervalo encontrado, se le determina el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase:

Determinando estas tres imágenes para $f(x) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right) + 2\right) - \frac{\pi}{6} = 2\cos^{-1}(0) - \frac{\pi}{6}$

calculando $\cos^{-1}(0)$

Sea $y = \cos^{-1}(0)$; luego $\cos y = 0$, lo que implica que $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

y $f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$f(2) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}(2) + 2\right) - \frac{\pi}{6} = 2\cos^{-1}(-1) - \frac{\pi}{6}$

Determinando $\cos^{-1}(-1)$

Sea $y = \cos^{-1}(-1)$; luego $\cos y = -1$, lo que implica que $y = \pi$. En conclusión $\cos^{-1}(-1) = \pi$ y $f(2) = 2(\pi) - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right) + 2\right) - \frac{\pi}{6} = 2\cos^{-1}(1) - \frac{\pi}{6}$$

Determinando $\cos^{-1}(1)$

Sea $y = \cos^{-1}(1)$; luego $\cos y = 1$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\cos^{-1}(1) = 0$ y $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2(0) - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$.

Para efectos de práctica, se determina el $\mathbf{I}_x$

$2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6} = 0$	función dada comparada con cero; $y = 0$.
$\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) = \frac{\pi}{12}$	despejando para el término trigonométrico inverso.
$-\frac{3}{2}x + 2 = \cos\frac{\pi}{12}$	definición de la función coseno inverso.
$-\frac{3}{2}x + 2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	encontrando el valor exacto de $\cos\frac{\pi}{12}$. Expresado $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$.
$-\frac{3}{2}x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - 2$	sumando -2 en ambos lados de la igualdad.
$x = \frac{8 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}$	despejando para x.

Luego $\mathbf{I}_x\left(\frac{8 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}, 0\right)$. Nótese que $\mathbf{I}_y$ no existe, ya que al hacer $x = 0$, $\cos^{-1}(2)$ no está definida.

Trazar la gráfica, siguiendo las mismas observaciones.

Determinando el rango sin tomar en cuenta las imágenes obtenidas anteriormente.

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso y sustituyendo $f(x)$ por y.

$$f(x) = 2\cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{y + \frac{\pi}{6}}{2} = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right)$$

Resolviendo la desigual $0 \le \frac{y + \frac{\pi}{6}}{2} \le \pi$ (acotándolo con el rango de la función elemental $f(x) = \cos^{-1} x$; $0 \le y \le \pi$), se obtiene:

Rango de $f = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

h) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2x+\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\pi}{3}$

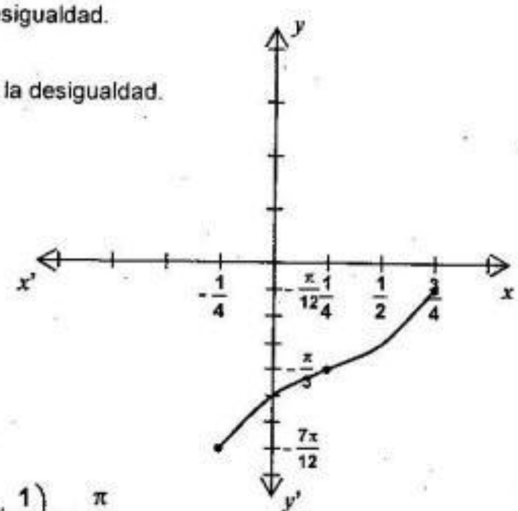
Determinando el dominio de f

$-1 \le -2x + \dfrac{1}{2} \le 1$ nótese que $b = -2,\ c = \dfrac{1}{2}$.

$-1 - \dfrac{1}{2} \le -2x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \le 1 - \dfrac{1}{2}$ sumando $-\dfrac{1}{2}$ en cada miembro de la desigualdad.

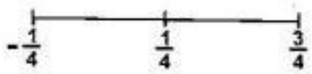
$-\dfrac{3}{2} \le -2x \le \dfrac{1}{2}$ efectuando la suma en cada miembro de la desigualdad.

$-\dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{3}{4}$ resolviendo.



Obteniendo, el punto medio y luego la imagen de éste y la de cada extremo.

Véase:



Determinando estas tres imágenes para $f(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2x+\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\pi}{3}$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(1) - \frac{\pi}{3}$$

Determinando $\operatorname{sen}^{-1}(1)$

Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}(1)$; luego $\operatorname{sen} y = 1$, lo que implica que $y = \dfrac{\pi}{2}$, luego $\operatorname{sen}^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{2}$

y $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(1) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{7\pi}{12}$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(0) - \frac{\pi}{3}.$$

Calculando $\operatorname{sen}^{-1}(0)$

Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}(0)$; luego $\operatorname{sen} y = 0$, lo que implica que $y = 0$. En conclusión $\operatorname{sen}^{-1}(0) = 0$

y $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(0) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\,(0) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(-1) - \frac{\pi}{3}$$

Determinando $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$

Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$; luego $\operatorname{sen} y = -1$, lo que implica que $y = -\dfrac{\pi}{2}$. Se tiene que $\operatorname{sen}^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

y $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(-1) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12}$.

Determinando $\mathbf{I}_y$

$y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2(0)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$ tomando la función y haciendo $x = 0$.

$y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$ simplificando.

$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}$ sustituyendo el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$y = -\frac{5\pi}{12}$ multiplicando y sumando

Luego $\mathbf{I}_y\left(0, -\frac{5\pi}{12}\right)$.

Con estos puntos se procede a graficar, recordando la forma de la gráfica de la función elemental $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$.

Determinando el rango sin tomar en cuenta las imágenes obtenidas anteriormente.

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$$f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{y+\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)$$

Resolviendo la desigualdad $-\frac{\pi}{2} \le \frac{y+\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}} \le \frac{\pi}{2}$ (acotándolo con el rango de la función elemental $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$; $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$), se obtiene

$-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \ge y + \frac{\pi}{3} \ge \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$ multiplicando por $-\frac{1}{2}$ cada miembro de la desigualdad. Nótese que éste es negativo.

$-\frac{\pi}{4} \le y + \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{4}$ simplificando en cada miembro de la desigualdad y escribiendo de forma equivalente.

$-\frac{7\pi}{12} \le y \le -\frac{\pi}{12}$ y Rango de $f = \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$. ■

Ejercicios 5.4

1. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar el dominio y el rango de la misma. Además determine los interceptos con los ejes coordenados si existen (las respuestas de los interceptos, se dejan al lector).

a) $f(x) = 2\cos^{-1}(x-1)$ **b)** $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x-2) - \frac{\pi}{8}$ **c)** $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x+2) + \pi$

d) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \pi$ **e)** $f(x) = 2\cos^{-1}(3x-1) - \frac{\pi}{4}$ **f)** $f(x) = -4\cos^{-1}(1-2x) - \frac{\pi}{3}$

g) $f(x) = -\cos^{-1}(4x-3) - \frac{\pi}{6}$ **h)** $f(x) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{\pi}{3}$ **i)** $f(x) = 2\cos^{-1}(3x+1) + \frac{\pi}{2}$

j) $f(x) = -2\operatorname{sen}^{-1}(2x+1) + \frac{\pi}{6}$ **k)** $f(x) = -\frac{1}{3}\cos^{-1}(-x+3) + \pi$ **l)** $f(x) = -3\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$

m) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}x + 2\right) - \pi$ **n)** $f(x) = 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}x - 2\right) - \pi$ **o)** $f(x) = \cos^{-1}\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$

p) $f(x) = -2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 2\pi$ **q)** $f(x) = 2\cos^{-1}\left(\frac{5}{2}x - 1\right) - \frac{\pi}{3}$ **r)** $f(x) = -2\cos^{-1}(3x+4) - \frac{\pi}{2}$

s) $f(x) = -2\cos^{-1}(3x-4) - \frac{\pi}{6}$ **t)** $f(x) = -\operatorname{sen}^{-1}(-2x+1) + \frac{\pi}{3}$ **u)** $f(x) = 3\cos^{-1}(2x+3) - 2\pi$

5.5 FUNCION TANGENTE INVERSA Y FUNCION COTANGENTE INVERSA

Para estas funciones, se hará un análisis similar al que se utilizó para $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ y para $f(x) = \cos^{-1} x$. Si se recuerda la función tangente y la función cotangente, estas **tampoco son funciones uno a uno** (ya que existen infinitos valores en el dominio de ésta, (valores para x) que tienen la misma imagen) por lo que de nuevo es necesario restringir el dominio de las mismas, para que sean funciones uno a uno y que la inversa de cada una de ellas sea una función.

Retomando las gráficas de las funciones tangente y cotangente elementales, analizadas en las secciones anteriores se observa que para $f(x) = \tan x$, esta función **es uno a uno,** en uno de los siguientes intervalos:

$$\cdots, \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[, \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[, \cdots.$$

Mientras que para $f(x) = \cot x$, esta función es **uno a uno,** en uno de los siguientes intervalos:

$$\cdots,]-2\pi, -\pi[,]-\pi, 0[,]0, \pi[,]\pi, 2\pi[,]2\pi, 3\pi[, \cdots.$$

Para $f(x) = \tan x$, en donde se pretende que esta función sea uno a uno, por conveniencia se restringe el dominio, y se toma el $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, además debe recordarse que el rango de ésta es $\boldsymbol{R}$. Mientras que para que $f(x) = \cot x$ sea una función uno a uno, se toma por conveniencia el $]0, \pi[$ y su rango es $\boldsymbol{R}$. Nótese la fig. 1 y la fig. 2, las cuales muestran un ciclo de la gráfica de cada una de ellas.

Gráfica de $f(x) = \tan x$

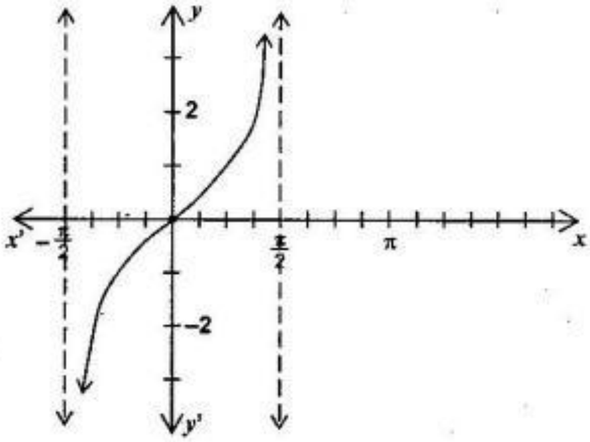


fig.1

Gráfica de $f(x) = \cot x$

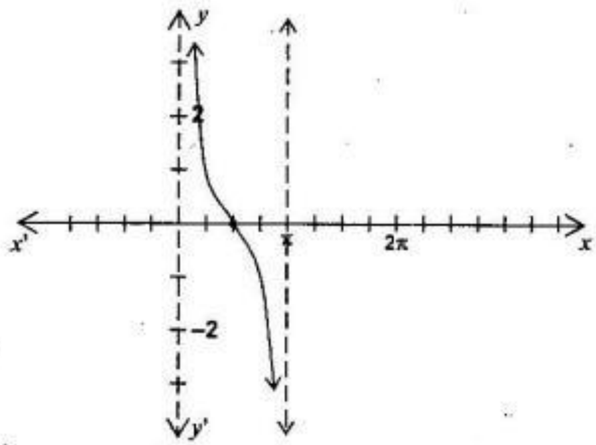


fig. 2

Tomando los criterios anteriores, para trazar la inversa de estas funciones (intercambiando las componentes se llega a las siguientes gráficas).

Gráfica de $f(x) = \tan^{-1} x$

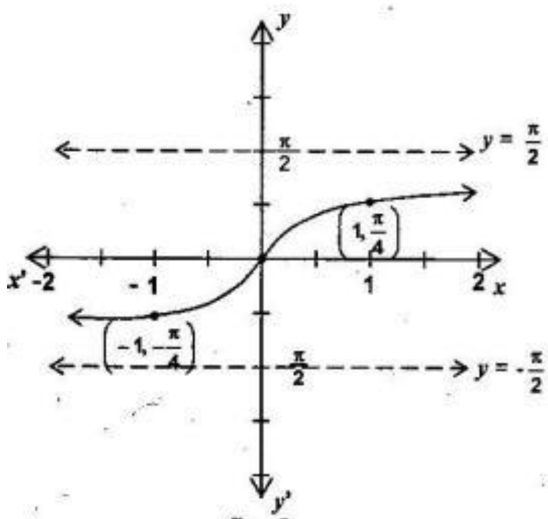


fig . 3

Gráfica de $f(x) = \cot^{-1} x$

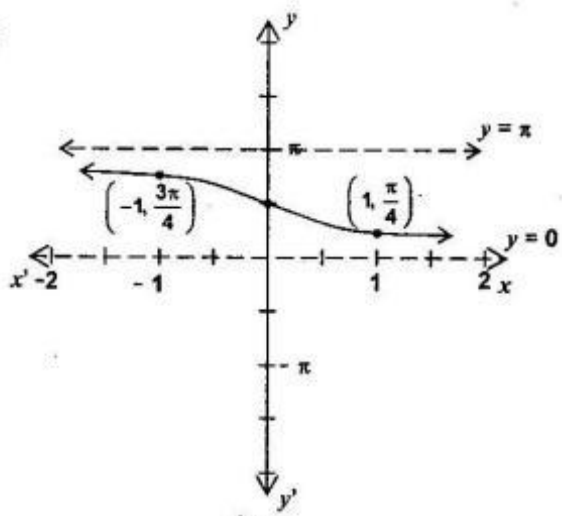


fig. 4

Nótese la diferencia entre la función tangente y su inversa, así como también, la función cotangente con su inversa.

En la tangente, su dominio (donde es una función uno a uno) es el $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, su rango es $\boldsymbol{R}$ y tiene dos asíntotas verticales; $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$. Ahora, su inversa tiene como dominio $\boldsymbol{R}$, su rango es $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y tiene dos asíntotas horizontales; $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.

En la cotangente, su dominio (donde es una función uno a uno) es el $]0, \pi[$, su rango es $\boldsymbol{R}$ y tiene dos asíntotas verticales; $x = 0$ y $x = \pi$. Ahora, su inversa tiene como dominio $\boldsymbol{R}$, su rango es $]0, \pi[$ y tiene dos asíntotas horizontales; $y = 0$ e $y = \pi$.

Véase las siguientes definiciones.

Definición La **función tangente inversa**, o función arcotangente, que se denota por $\tan^{-1}$ ó arctan, se define por $y = \tan^{-1} x = \arctan x$ si y sólo si $x = \tan y$, para cualquier número real x y para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Definición La **función cotangente inversa**, o función arcocotangente, que se denota por $\cot^{-1}$ ó arccot, se define por $y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$ si y sólo si $x = \cot y$, para cualquier número real x y para $0 < y < \pi$.

Una alternativa para trazar las gráficas de la función tangente inversa y la cotangente inversa, es:

1) Tomar el argumento de la función dada y acotarlo con el $[-1,1]$ ($-1 \le bx + c \le 1$; ver cuadro 1)
2) Encontrar el punto medio del mismo para determinar las imágenes de estos tres puntos (extremos y punto medio) esto da una idea, considerando siempre la forma de la función tangente inversa o cotangente inversa elemental.
3) Nótese el punto donde hay cambio de concavidad, éste es el punto medio del intervalo encontrado con su respectiva imagen.
4) Para determinar las asíntotas y el rango de $f(x) = a\tan^{-1}(bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a\tan^{-1}(bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\tan^{-1}(bx + c) = \frac{y-d}{a}$, luego se resuelve la inecuación $-\frac{\pi}{2} < \frac{y-d}{a} < \frac{\pi}{2}$ considerando los casos, cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. De igual manera para determinar las asíntotas y el rango de $f(x) = a\cot^{-1}(bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a\cot^{-1}(bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\cot^{-1}(bx + c) = \frac{y-d}{a}$, luego se resuelve la inecuación $0 < \frac{y-d}{a} < \pi$ considerando los casos cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$.
5) Las rectas y igual a los valores reflejados en cada extremo abierto de este intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} < \frac{y-d}{a} < \frac{\pi}{2}\right.$ ó $\left.0 < \frac{y-d}{a} < \pi\right)$, determinan las asíntotas horizontales en dichas gráficas y el intervalo obtenido, el rango respectivo.

Se trazará las gráficas de las funciones tangente inversa y cotangente inversa, que se describen en el siguiente cuadro. Véase el siguiente ejemplo.

Función tangente inversa	Función cotangente inversa
$f(x) = \tan^{-1} x$	$f(x) = \cot^{-1} x$
$f(x) = a\tan^{-1} x$	$f(x) = a\cot^{-1} x$
$f(x) = a\tan^{-1} bx$	$f(x) = a\cot^{-1} bx$
$f(x) = a\tan^{-1}(bx + c)$	$f(x) = a\cot^{-1}(bx + c)$
$f(x) = a\tan^{-1}(bx + c) + d$	$f(x) = a\cot^{-1}(bx + c) + d$

cuadro 1

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, e indicar dominio y rango.

a) $f(x) = -2\cot^{-1}(x-2)$ **b)** $f(x) = 2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right) - \frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = \tan^{-1}(3x-1) + \frac{\pi}{4}$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

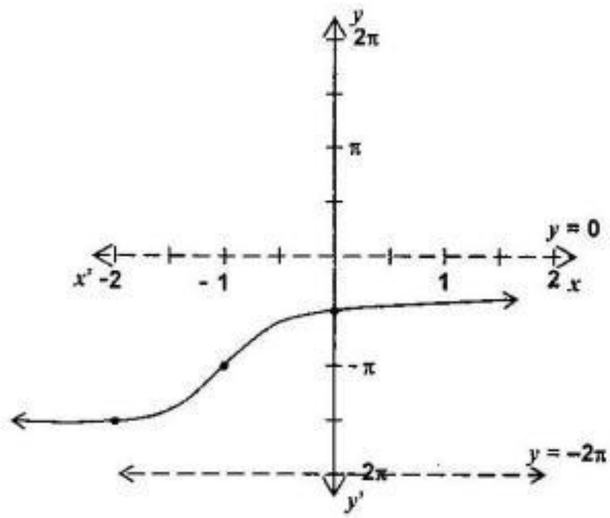
Solución:

a) $f(x) = -2\cot^{-1}(x+1)$

Dominio de $f = R$

Tomando el argumento de la función y acotándolo con el $[-1,1]$

$-1 \le x+1 \le 1$ nótese que $b = 1$, $c = 1$.
$-2 \le x \le 0$ resolviendo.

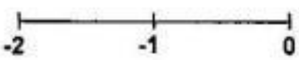


Nótese que este intervalo **no es** el dominio completo de la función, si no un auxilio para trazar la gráfica de la misma.

Calculando el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Ahora para trazar la gráfica, el hecho de determinar el rango (cuyos extremos son las asíntotas), facilita también el trazo de ésta.

Véase el intervalo antes encontrado



Determinando estas tres imágenes

Si $f(x) = -2\cot^{-1}(x+1)$, entonces

$f(-2) = -2\cot^{-1}(-2+1) = -2\cot^{-1}(-1)$

Calculando $\cot^{-1}(-1)$

Sea $y = \cot^{-1}(-1)$; luego $\cot y = -1$, esto implica que $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{3\pi}{4}$. En conclusión $\cot^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

Luego $f(-2) = -2\cot^{-1}(-1) = -2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2}$, así se obtiene el punto $\left(-2, -\frac{3\pi}{2}\right)$.

$f(-1) = -2\cot^{-1}(-1+1) = -2\cot^{-1}(0)$

Calculando $\cot^{-1}(0)$

Sea $y = \cot^{-1}(0)$; luego $\cot y = 0$, esto implica que $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = 0$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\cot^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Ahora se tiene que $f(-1) = -2\cot^{-1}(0) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$, así se obtiene el punto $(-1, -\pi)$.

$f(\mathbf{0}) = -2\cot^{-1}(0+1) = -2\cot^{-1}(1)$

Calculando $\cot^{-1}(1)$

Sea $y = \cot^{-1}(1)$; luego $\cot y = 1$, esto implica que $\cot y = \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \dfrac{\pi}{4}$. En conclusión $\cot^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Luego $f(\mathbf{0}) = -2\cot^{-1}(1) = -2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, así se obtiene el punto $\left(\mathbf{0}, -\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$. Nótese que este punto es el intercepto en el eje de las y.

Determinando el rango se obtienen las asíntotas horizontales.

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x) = -2\cot^{-1}(x+1)$

Por facilidad se escribe la función anterior de la siguiente forma:

$y = -2\cot^{-1}(x+1)$

Luego

$\dfrac{y}{-2} = \cot^{-1}(x+1)$

Resolviendo la desigualdad, $0 < \dfrac{y}{-2} < \pi$ (acotándola con el rango de la función elemental $f(x) = \cot^{-1} x;\ 0 < y < \pi$), se obtiene

$0 < \dfrac{y}{-2} < \pi$ tomando el lado izquierdo de la igualdad, donde se despeja el término trigonométrico inverso.

$0 > y > -2\pi$ ó $-2\pi < y < 0$ resolviendo la desigualdad y reescribiendo de forma equivalente.

Con el desarrollo de esta desigualdad, se obtiene que las asíntotas horizontales son las rectas $y = 0$ e $y = -2\pi$ y que **el rango de f es el $]-2\pi, 0[$**.

Con los tres puntos encontrados anteriormente, las asíntotas y recordando la gráfica de la función $f(x) = \cot^{-1} x$; se procede al trazo de la gráfica.

b) $f(x) = 2\tan^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}x + 2\right) - \dfrac{\pi}{6}$

Dominio de $f = R$

Tomando el argumento de la función y acotándolo con el $[-1,1]$

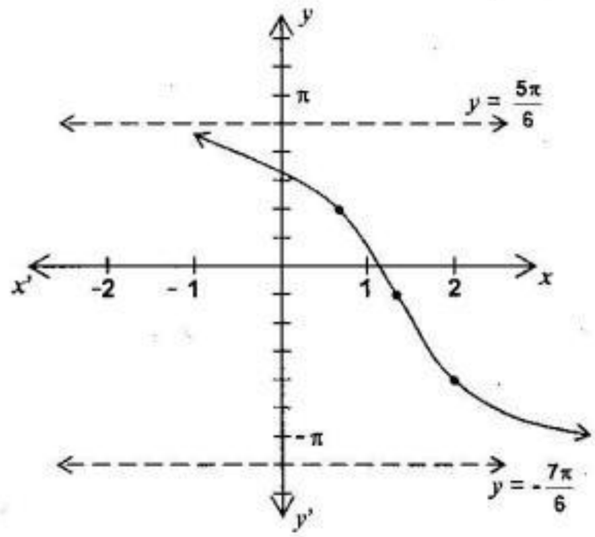
$-1 \le -\dfrac{3}{2}x + 2 \le 1$

$-3 \le -\dfrac{3}{2}x \le -1$ sumando -2 en cada miembro de la desigualdad.

$\dfrac{2}{3} \le x \le 2$ desarrollando.

Recuérdese que este intervalo no es el dominio de la función, si no un auxilio para trazar la gráfica de la misma. Se debe calcular el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio. Obsérvese que el punto (par ordenado) determinado por el punto medio del intervalo obtenido anteriormente, y su imagen, ocurre el punto de inflexión (hay un cambio de concavidad).

Determinando el rango (cuyos extremos permiten determinar las asíntotas), para facilitar el trazo de la gráfica.



Véase el intervalo antes encontrado

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ 2

Determinando estas tres imágenes

Si $f(x) = 2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$, entonces

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right) + 2\right) - \frac{\pi}{6}$$

$$= 2\tan^{-1}(-1 + 2) - \frac{\pi}{6} = 2\tan^{-1}(1) - \frac{\pi}{6}$$

Calculando $\tan^{-1}(1)$

Sea $y = \tan^{-1}(1)$; luego $\tan y = 1$, esto implica que $\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{4}$. En conclusión $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Luego $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right) + 2\right) - \frac{\pi}{6}$$

$$= 2\tan^{-1}(-2 + 2) - \frac{\pi}{6} = 2\tan^{-1}(0) - \frac{\pi}{6}$$

Calculando $\tan^{-1}(0)$

Sea $y = \tan^{-1}(0)$; luego $\tan y = 0$, esto implica que $\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 0$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = 0$. En conclusión $\tan^{-1}(0) = 0$.

Luego $f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\tan^{-1}(0) - \frac{\pi}{6} = (0) - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

$$f(2) = 2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}(2) + 2\right) + 2) - \frac{\pi}{6}$$

$$= 2\tan^{-1}(-3 + 2) - \frac{\pi}{6} = 2\tan^{-1}(-1) - \frac{\pi}{6}$$

Calculando $\tan^{-1}(-1)$

Sea $y = \tan^{-1}(-1)$; luego $\tan y = -1$, esto implica que $\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = -\frac{\pi}{4}$ (recuérdese el rango de ésta). En conclusión $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Luego $f(2) = 2\tan^{-1}(-1) - \frac{\pi}{6} = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$, así se obtiene el punto $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Determinando el I_x

$2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)-\frac{\pi}{6}=0$ función dada comparada con cero; $y=0$.

$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)=\frac{\pi}{12}$ despejando para el término trigonométrico inverso.

$-\frac{3}{2}x+2=\tan\frac{\pi}{12}$ definición de la función tangente inversa.

$-\frac{3}{2}x+2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ encontrando el valor exacto de $\tan\frac{\pi}{12}$. Exprese $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$.

$-\frac{3}{2}x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}-2$ sumando -2 en ambos lados de la igualdad.

$x=\frac{\sqrt{3}+6}{6}$ despejando para x.

Luego $I_x\left(\frac{\sqrt{3}+6}{6},0\right)$.

Determinando el I_y

Haciendo $x=0$ se tiene que $y=2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}(0)+2\right)-\frac{\pi}{6}$ ó $y=2\tan^{-1}(2)-\frac{\pi}{6}$. Luego $I_y\left(0,2\tan^{-1}(2)-\frac{\pi}{6}\right)$.

Observación: Para ubicar en la gráfica el intercepto en el eje y, se debe auxiliar de una calculadora científica y asegurarse que ésta esté en el modo de radianes.

Determinando el rango para obtener las asíntotas horizontales

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x)=2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)-\frac{\pi}{6}$

o $y=2\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)-\frac{\pi}{6}$

Luego

$$\left(\frac{y+\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)$$

Resolviendo la desigualdad, $-\frac{\pi}{2}<\frac{y+\frac{\pi}{6}}{2}<\frac{\pi}{2}$ (acotándola con el rango de la función elemental $f(x)=\tan^{-1}x$; $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$), se obtiene

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{y+\frac{\pi}{6}}{2}<\frac{\pi}{2}$$

$-\pi<y+\frac{\pi}{6}<\pi$ multiplicando por 2 cada miembro.

$-\pi - \frac{\pi}{6} < y < \pi - \frac{\pi}{6}$ sumando $-\frac{\pi}{6}$ en cada miembro.

$-\frac{7\pi}{6} < y < \frac{5\pi}{6}$ simplificando.

Luego, las asíntotas horizontales son las rectas $y = -\frac{7\pi}{6}$ e $y = \frac{5\pi}{6}$ y **el rango de** f **es** $\left]-\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$.

Con la información obtenida se procede a elaborar la gráfica, recordando la gráfica de la función $f(x) = \tan^{-1} x$.

c) $f(x) = \tan^{-1}(3x-1) + \frac{\pi}{4}$

Dominio de $f = R$

Tomando el argumento de la función y acotándolo con el $[-1,1]$

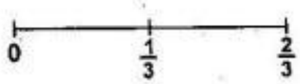
$-1 \le 3x - 1 \le 1$ acotando el argumento.

$0 \le 3x \le 2$ sumando 1 en cada miembro de la desigualdad.

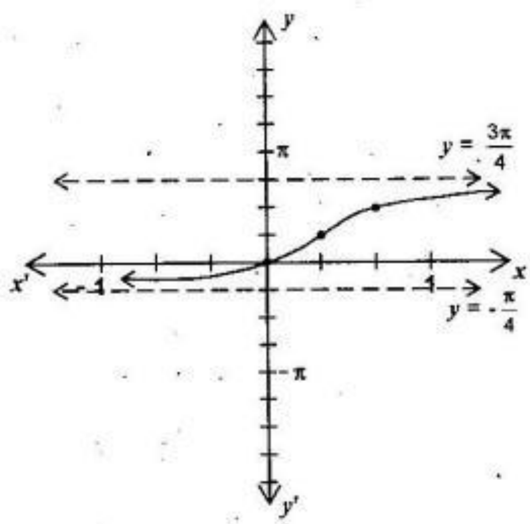
$0 \le x \le \frac{2}{3}$ dividiendo por 3 cada miembro de la desigualdad.

Calculando el punto medio para luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio.

Véase el intervalo antes encontrado



Determinando estas tres imágenes



Si $f(x) = \tan^{-1}(3x-1) + \frac{\pi}{4}$, entonces

$f(0) = \tan^{-1}(3(0)-1) + \frac{\pi}{4}$

$= \tan^{-1}(-1) + \frac{\pi}{4}$

Calculando $\tan^{-1}(-1)$

Sea $y = \tan^{-1}(-1)$; luego $\tan y = -1$,

esto implica que $\tan y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = -1$.

Lo anterior es cierto únicamente si $y = -\frac{\pi}{4}$.

En conclusión $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Luego $f(0) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$, así se obtiene el punto (0,0). Nótese que éste es intercepto tanto en el eje x como en eje y.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$= \tan^{-1}(1 - 1) + \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(0) + \frac{\pi}{4}$$

Calculando $\tan^{-1}(0)$

Sea $y = \tan^{-1}(0)$; luego $\tan y = 0$, esto implica que $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 0$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = 0$. En conclusión $\tan^{-1}(0) = 0$.

Luego $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \tan^{-1}(0) + \dfrac{\pi}{4} = 0 + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, así se obtiene el punto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \tan^{-1}\left(3\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$= \tan^{-1}(2 - 1) + \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) + \frac{\pi}{4}$$

Calculando $\tan^{-1}(1)$

Sea $y = \tan^{-1}(1)$; luego $\tan y = 1$, esto implica que $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \dfrac{\pi}{4}$. En conclusión $\tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Luego $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \tan^{-1}(1) + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, así se obtiene el punto $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Determinando el rango para obtener las asíntotas horizontales

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x) = \tan^{-1}(3x - 1) + \dfrac{\pi}{4}$

o $\quad y = \tan^{-1}(3x - 1) + \dfrac{\pi}{4}$

Luego $\quad y - \dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}(3x - 1)$

Resolviendo la desigualdad, $-\dfrac{\pi}{2} < y - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ (acotándola con el rango de la función elemental $f(x) = \tan^{-1} x$; $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$), se obtiene

$-\dfrac{\pi}{2} < y - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ sumando $\frac{\pi}{4}$ en cada miembro.

$-\dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad$ simplificando.

Luego, las asíntotas horizontales son las rectas $y = -\dfrac{\pi}{4}$ e $y = \dfrac{3\pi}{4}$ y **el rango de** f **es** $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Se procede a elaborar la gráfica, recordando la gráfica de la función $f(x) = \tan^{-1} x$.

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Dominio de f = R

Tomando el argumento de la función y acotándolo con el $[-1,1]$

$-1 \le -2x + \frac{1}{2} \le 1$

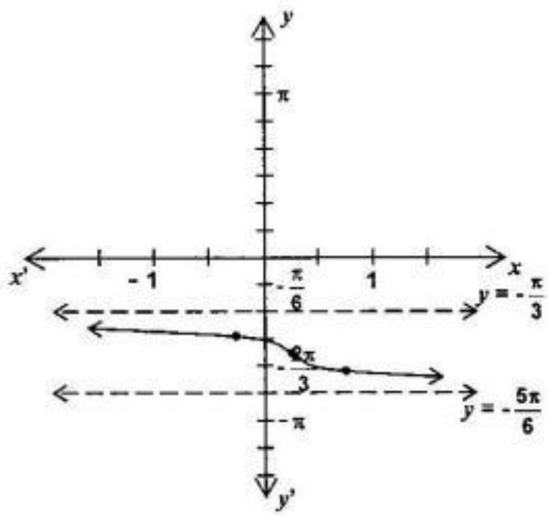
$-1 - \frac{1}{2} \le -2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2}$ sumando $-\frac{1}{2}$ en cada miembro de la desigualdad.

$-\frac{3}{2} \le -2x \le \frac{1}{2}$ simplificando.

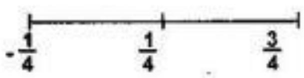
$\frac{3}{4} \ge x \ge -\frac{1}{4}$ dividiendo por -2 cada miembro de la desigualdad.

$-\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}$ escribiendo de forma equivalente.

Calculando el punto medio y luego obtener la imagen de cada extremo y la del punto medio, determinando el rango y las asíntotas se procede a trazar la gráfica.



Véase el intervalo antes encontrado



Determinando estas tres imágenes

Si $f(x) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$, entonces

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cot^{-1}(1) - \frac{\pi}{3}$$

Calculando $\cot^{-1}(1)$

Sea $y = \cot^{-1}(1)$; luego $\cot y = 1$, esto implica que $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{4}$. En conclusión $\cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Luego $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}(1) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{24}$ así se obtiene el punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{11\pi}{24}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cot^{-1}(0) - \frac{\pi}{3}$$

Calculando $\cot^{-1}(0)$

Sea $y = \cot^{-1}(0)$; luego $\cot y = 0$, esto implica que $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = 0$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{2}$. En conclusión $\cot^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

Luego $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}(0) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{1}{4}, -\frac{7\pi}{12}\right)$.

$f\left(\frac{3}{4}\right)=f(x)=-\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\cot^{-1}(-1)-\frac{\pi}{3}$

Calculando $\cot^{-1}(-1)$

Sea $y=\cot^{-1}(-1)$; luego $\cot y=-1$, esto implica que $\cot y=\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}=-1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y=\frac{3\pi}{4}$. En conclusión $\cot^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

Luego $f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cot^{-1}(-1)-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}=-\frac{17\pi}{24}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{3}{4},-\frac{17\pi}{24}\right)$.

Determinando el rango y las asíntotas horizontales

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x)=-\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{3}$ función dada.

Escribir la función anterior de la siguiente forma

$y=-\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{3}$

Luego $\dfrac{y+\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}}=\cot^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)$

Resolviendo la desigualdad, $0<\dfrac{y+\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}}<\pi$ (acotándola con el rango de la función elemental $f(x)=\cot^{-1}x$; $0<y<\pi$), se obtiene:

$0<\dfrac{y+\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}}<\pi$ tomando el lado izquierdo de la igualdad, donde se despeja el término trigonométrico inverso.

$0>y+\frac{\pi}{3}>-\frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}<y+\frac{\pi}{3}<0$ multiplicando por $-\frac{1}{2}$ cada miembro de la desigualdad.

$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}<y<-\frac{\pi}{3}$ sumando $-\frac{\pi}{3}$ ambos lados de la desigualdad.

$-\frac{5\pi}{6}<y<-\frac{\pi}{3}$ simplificando.

Con el desarrollo de esta desigualdad, se obtiene que las asíntotas horizontales son las rectas $y=-\frac{5\pi}{6}$ e $y=-\frac{\pi}{3}$ y que **el rango de f es** $\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right[$.

Con los tres puntos encontrados anteriormente, las asíntotas y recordando la gráfica de la función $f(x)=\cot^{-1}x$; se procede al trazo de la gráfica. ∎

Ejercicios 5.5

1. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar el dominio, asíntotas y el rango. Además determinar los interceptos con los ejes coordenados (las respuestas de los interceptos con los ejes coordenados se dejan al lector).

a) $f(x) = 2\cot^{-1}(x-1)$ **b)** $f(x) = \tan^{-1}(x-2) - \frac{\pi}{8}$ **c)** $f(x) = \cot^{-1}(3x+2) + \pi$

d) $f(x) = 3\tan^{-1}\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \pi$ **e)** $f(x) = 2\cot^{-1}(3x-1) - \frac{\pi}{4}$ **f)** $f(x) = -4\tan^{-1}(1-2x) - \frac{\pi}{3}$

g) $f(x) = -\cot^{-1}(4x-3) - \frac{\pi}{6}$ **h)** $f(x) = -\frac{3}{4}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{\pi}{3}$ **i)** $f(x) = 2\cot^{-1}(3x+1) + \frac{\pi}{2}$

j) $f(x) = -2\tan^{-1}(2x+1) + \frac{\pi}{6}$ **k)** $f(x) = -\frac{1}{3}\cot^{-1}(-x+3) + \pi$ **l)** $f(x) = -3\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$

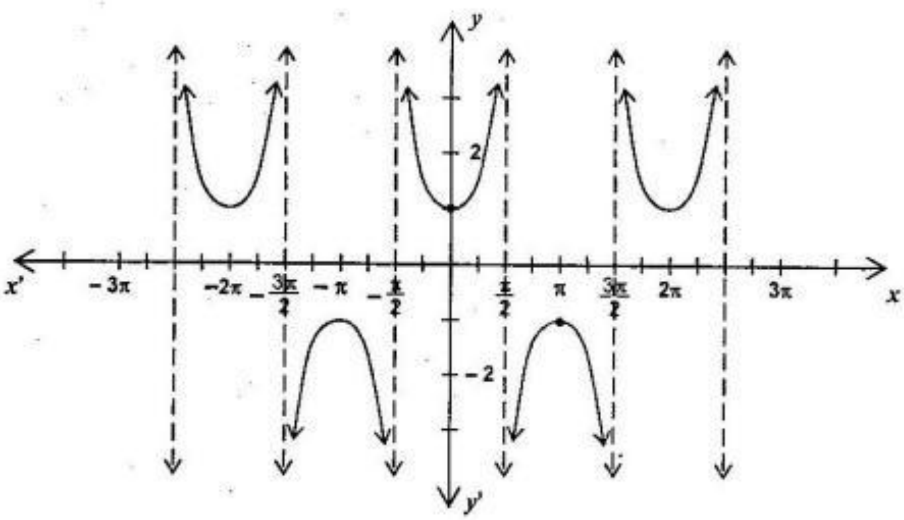
m) $f(x) = -\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(\frac{1}{4}x + 2\right) - \pi$ **n)** $f(x) = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}x - 2\right) - \pi$ **o)** $f(x) = \cot^{-1}\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$

5.6 FUNCION SECANTE INVERSA Y FUNCION COSECANTE INVERSA

Para estas dos funciones, el análisis es muy similar a las enunciadas en la sección anterior; función tangente inversa y función cotangente inversa. Se debe tomar un intervalo donde cada una de estas funciones sea uno a uno, de tal manera que la inversa de cada una de ellas determine una función.

Examínese las gráficas de las funciones elementales $f(x) = \sec x$ y $f(x) = \csc x$, y restrínjase el dominio de las mismas, de tal manera que sean uno a uno.

Para $f(x) = \sec x$ se tiene su gráfica y se observa que, para que esta función sea **uno a uno**,

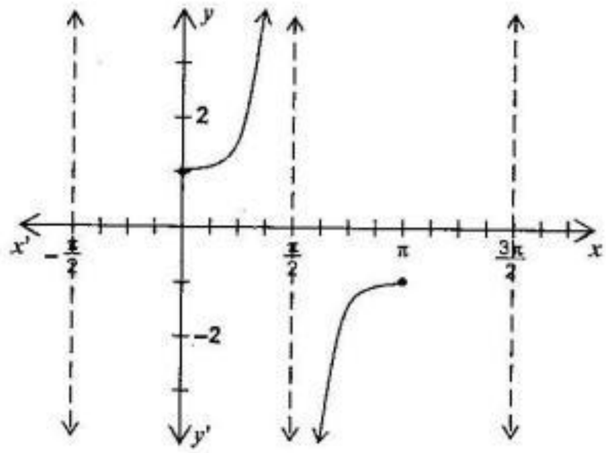


debe restringirse el dominio, a uno de los siguientes conjuntos (unión de intervalos):

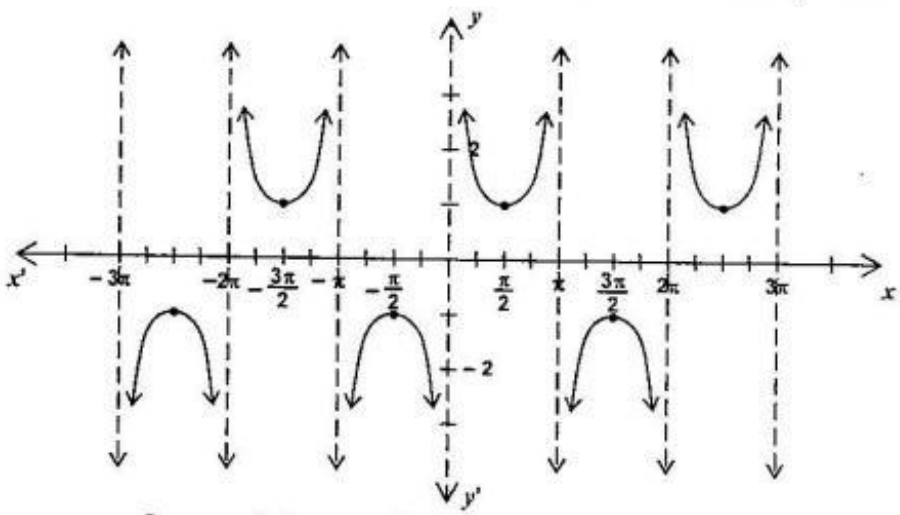
$\cdots, \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[, \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[, \cdots$ ó $\cdots, \left]-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right] \cup \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right], \cdots$ ó

$\cdots, \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right], \underline{\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}, \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \cdots$

Por conveniencia, para $f(x) = \sec x$, se toma como dominio el siguiente conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y se tiene la gráfica. Véase el rango de ésta.



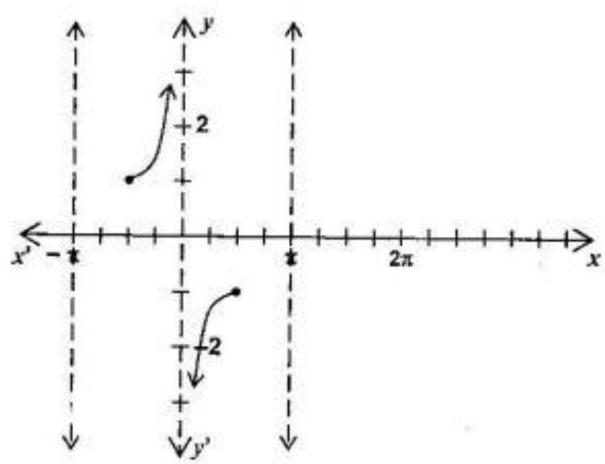
Ahora, para que $f(x) = \csc x$ sea una función **uno a uno,** ocurre en uno de los siguientes



conjuntos $\ldots, \left]-3\pi, -\frac{5\pi}{2}\right] \cup \left]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right], \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \ldots$ ó $\ldots, \left[-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right[\cup \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[, \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \ldots$ ó

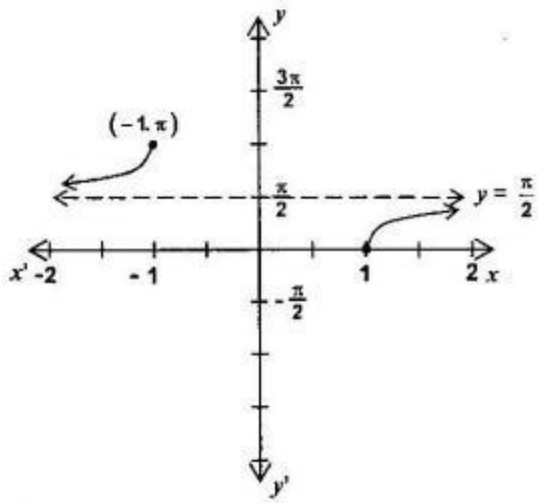
$$\ldots, \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[\cup \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \underline{\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\cup \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right], \ldots .$$

De igual manera, por conveniencia para $f(x) = \csc x$, se toma como dominio el siguiente conjunto $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ y se tiene la gráfica. Véase el rango de ésta.

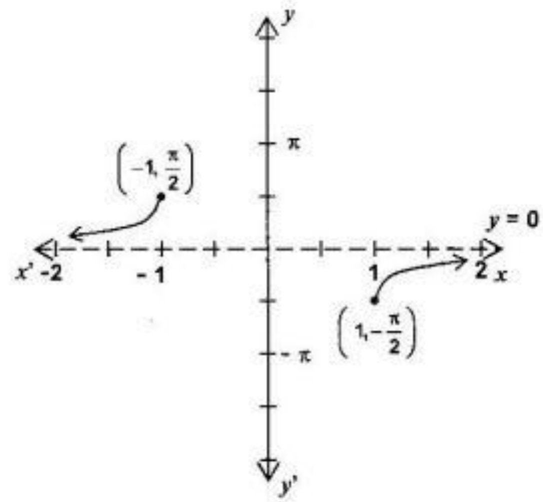


Tomando los criterios anteriores, para trazar la inversa de estas funciones se llega a las siguientes gráficas.

Gráfica de $f(x) = \sec^{-1} x$



Gráfica de $f(x) = \csc^{-1} x$



Nótese la diferencia entre la función secante y su inversa, así como también, la función cosecante con su inversa.

En la función secante, su dominio (donde es una función uno a uno) es el $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, su rango es $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ y tiene una asíntota vertical que es la recta; $x = \frac{\pi}{2}$. Ahora, su inversa tiene como dominio $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$, su rango es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = \frac{\pi}{2}$.

En la función cosecante, su dominio (donde es una función uno a uno) es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, su rango es $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ y tiene una asíntota vertical que es la recta $x = 0$. Ahora, su inversa tiene como dominio $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$, su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ y tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 0$.

Véase las siguientes definiciones.

Definición La **función secante inversa**, o función **arcosecante**, que se denota por $\sec^{-1}$ ó arcsec, se define por $y = \mathbf{sec}^{-1} x$ = arcsec x si y sólo si $x = \sec y$, si $x \le -1$ ó $x \ge 1$ y para $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2} < y \le \pi$.

Definición La **función cosecante inversa**, o función **arcocosecante**, que se denota por $\csc^{-1}$ ó arccsc, se define por $y = \mathbf{csc}^{-1} x$ = arccsc x si y sólo si $x = \csc y$, si $x \le -1$ ó $x \ge 1$ y para $-\frac{\pi}{2} \le y < 0$ ó $0 < y \le \frac{\pi}{2}$.

Observación: Otros autores consideran como rango de las funciones $f(x) = \sec^{-1} x$ y $f(x) = \csc^{-1} x$, los conjuntos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ y $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ respectivamente.

Se trazará las gráficas de las funciones descritas en el siguiente cuadro.

Función secante inversa	Función cosecante inversa
$f(x) = \sec^{-1} x$	$f(x) = \csc^{-1} x$
$f(x) = a \sec^{-1} x$	$f(x) = a \csc^{-1} x$
$f(x) = a \sec^{-1} bx$	$f(x) = a \csc^{-1} bx$
$f(x) = a \sec^{-1} (bx + c)$	$f(x) = a \csc^{-1} (bx + c)$
$f(x) = a \sec^{-1} (bx + c) + d$	$f(x) = a \csc^{-1} (bx + c) + d$

Una alternativa para trazar las gráficas descritas en el cuadro anterior es:

1) Tomar el argumento de la función dada y acotarlo con las desigualdades que determinan el dominio de la función elemental, según se indica en la definición; considere el caso general $f(x) = a \sec^{-1} (bx + c) + d$ ó $f(x) = a \csc^{-1} (bx + c) + d$ ($bx + c \leq -1$ ó $bx + c \geq 1$; ver cuadro anterior).
2) Los extremos conocidos, de estos dos intervalos se les determinan su respectiva imagen para obtener los pares ordenados (dos) los cuales ayudan a trazar la gráfica, recordando la forma de la gráfica de la función elemental (secante inversa o cosecante inversa).
3) Para determinar la asíntota y el rango de $f(x) = a \sec^{-1} (bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a \sec^{-1} (bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\sec^{-1} (bx + c) = \frac{y-d}{a}$, luego se resuelven las inecuaciones $0 \leq \frac{y-d}{a} < \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2} < \frac{y-d}{a} \leq \pi$ considerando los casos, cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. De igual manera para determinar la asíntota y el rango de $f(x) = a \csc^{-1} (bx + c) + d$, por conveniencia se escribe $y = a \csc^{-1} (bx + c) + d$, y se despeja para el término trigonométrico inverso, obteniendo que: $\csc^{-1} (bx + c) = \frac{y-d}{a}$, luego se resuelve la inecuación $\frac{\pi}{2} \leq \frac{y-d}{a} < 0$ ó $0 < \frac{y-d}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ considerando los casos cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. La recta y igual, al valor reflejado en el extremo abierto de cada intervalo obtenido, determina la asíntota horizontal en dicha gráfica y la unión de ambos intervalo obtenido, el rango respectivo.

Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, e indicar dominio, rango y asíntotas.

a) $f(x) = -2\csc^{-1} (x - 2)$ **b)** $f(x) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Solución:

a) $f(x) = -2\csc^{-1} (x - 2)$

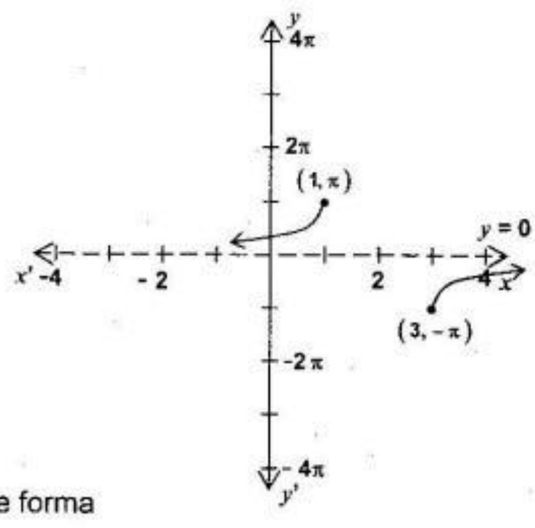
Para determinar el dominio de f, se toma el argumento de la función y desarrollando las desigualdades:

$x - 2 \leq -1$ ó $x - 2 \geq 1$

$x \leq 1$ ó $x \geq 3$ desarrollando ambas desigualdades.

Luego el dominio de f es: $]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

En estas funciones, es conveniente encontrar el rango, ya que facilita el trazo de su gráfica. Otro elemento importante que se encuentra al obtener el rango, es la asíntota horizontal la cual también es útil para el trazo de la misma.



Determinando el rango y la asíntota

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x) = -2\csc^{-1}(x-2)$

Por facilidad se escribe la función anterior de la siguiente forma

$y = -2\csc^{-1}(x-2)$, luego

$\dfrac{y}{-2} = \csc^{-1}(x-2)$

Recuérdese el rango de la función $f(x) = \csc^{-1}(x)$ que es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Luego resolviendo las desigualdades $-\frac{\pi}{2}\le\frac{y}{-2}<0$ ó $0<\frac{y}{-2}\le\frac{\pi}{2}$ se obtiene el rango de la función dada y la asíntota horizontal. Véase:

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{y}{-2}<0$	ó $0<\frac{y}{-2}\le\frac{\pi}{2}$	desigualdades obtenidas.
$\pi\ge y>0$	ó $0>y\ge-\pi$	multiplicando por -2, cada parte de la desigualdad.
$0<y\le\pi$	ó $-\pi\le y<0$	expresando de forma equivalente.

Con el desarrollo de estas desigualdades, se obtiene que la asíntota horizontal es la recta $y=0$ (nótese el extremo abierto en ambos intervalos) y que **el rango de f es** $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$.

Encontrando la imagen de cada extremo conocido en cada intervalo que forma el dominio, con el trazo de la asíntota horizontal y recordando la forma de la gráfica de la función elemental, $f(x)=\csc^{-1}x$, se procede al trazo de la gráfica.

Determinando las imágenes de los extremos de los intervalos que forman el dominio

Si $f(x) = -2\csc^{-1}(x-2)$, entonces

$f(1) = -2\csc^{-1}(-1)$

Calculando $\csc^{-1}(-1)$

Sea $y=\csc^{-1}(-1)$; luego $\csc y=-1$, esto implica que $\csc y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y=-\frac{\pi}{2}$ (recuérdese el rango de $f(x)=\csc^{-1}x$, el cual es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$). En conclusión

$f(1) = -2\csc^{-1}(-1) = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, así se obtiene el punto $(1,\pi)$.

$f(3) = -2\csc^{-1}(1)$

Calculando $\csc^{-1}(1)$

Sea $y = \csc^{-1}(1)$; luego $\csc y = 1$, esto implica que $\csc y = \dfrac{1}{\text{sen}\, y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \dfrac{\pi}{2}$ (el rango de $f(x) = \csc^{-1} x$, es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$). En conclusión $f(3) = -2\csc^{-1}(1) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$, así se obtiene el punto $(3, -\pi)$.

También puede ser útil en este momento, determinar otro punto que esté en la gráfica, por ejemplo el intercepto en el eje y (I_y).

Determinando el I_y

Haciendo $x = 0$, se tiene que $f(0) = -2\csc^{-1}(-2)$

Calculando $\csc^{-1}(-2)$

Sea $y = \csc^{-1}(-2)$; luego $\csc y = -2$, esto implica que $\csc y = \dfrac{1}{\text{sen}\, y} = -2$ ó $\text{sen}\, y = -\dfrac{1}{2}$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = -\dfrac{\pi}{6}$ (recuérdese el rango de $f(x) = \csc^{-1} x$, el cual es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$). En conclusión $f(0) = -2\csc^{-1}(-2) = -2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$, así se obtiene el punto $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $f(x) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$

Determinar el dominio de f

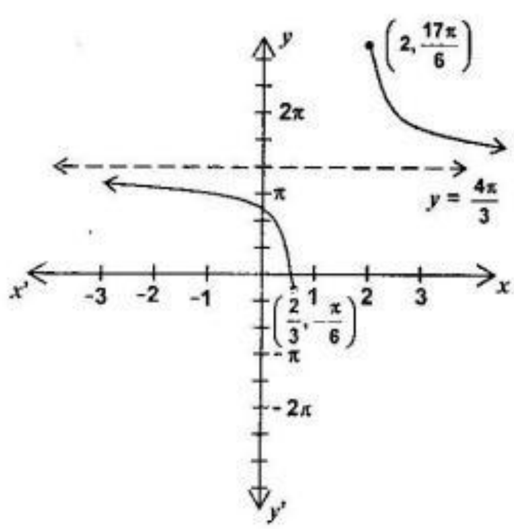
Tomando el argumento de la función y desarrollando las desigualdades:

$-\frac{3}{2}x + 2 \le -1$ ó $-\frac{3}{2}x + 2 \ge 1$

$-\frac{3}{2}x \le -3$ ó $-\frac{3}{2}x \ge -1$ sumando –2 en ambos lados de la desigualdad.

$x \ge 2$ ó $x \le \frac{2}{3}$ desarrollando ambas desigualdades.

Luego el dominio de f es: $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty[$



Determinando el rango y la asíntota

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) - \frac{\pi}{6}$

Reescribiendo la función anterior de la siguiente forma:

$y = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right) - \frac{\pi}{6}$, luego

$$\frac{y+\frac{\pi}{6}}{3} = \sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right)$$

Recuérdese el rango de la función $f(x) = \sec^{-1}(x)$ que es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Luego resolviendo las desigualdades $0 \le \frac{y+\frac{\pi}{6}}{3} < \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2} < \frac{y+\frac{\pi}{6}}{3} \le \pi$ se obtiene el rango de la función dada y la asíntota horizontal. Véase:

$0 \le \frac{y+\frac{\pi}{6}}{3} < \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2} < \frac{y+\frac{\pi}{6}}{3} \le \pi$	desigualdades obtenidas.
$0 \le y+\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2} < y+\frac{\pi}{6} \le 3\pi$	multiplicando por 3 cada miembro de cada desigualdad.
$-\frac{\pi}{6} \le y < \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ó $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} < y \le 3\pi - \frac{\pi}{6}$	sumando $-\frac{\pi}{6}$ en cada miembro de cada desigualdad.
$-\frac{\pi}{6} \le y < \frac{4\pi}{3}$ ó $\frac{4\pi}{3} < y \le \frac{17\pi}{6}$	simplificando.

Con el desarrollo de estas desigualdades, se obtiene que la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{4\pi}{3}$ y que **el rango de f es** $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}\right]$.

Encontrando la imagen de cada extremo conocido en cada intervalo que forma el dominio, con el trazo de la asíntota horizontal y recordando la forma de la gráfica de la función elemental, $f(x) = \sec^{-1} x$; se procede al trazo de la gráfica.

Determinando las imágenes de los extremos de los intervalos que forman el dominio

Si $f(x) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}x+2\right) - \frac{\pi}{6}$, entonces

$$f(2) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}(2)+2\right) - \frac{\pi}{6} = 3\sec^{-1}(-1) - \frac{\pi}{6}$$

Calculando $\sec^{-1}(-1)$

Sea $y = \sec^{-1}(-1)$; luego $\sec y = -1$, esto implica que $\sec y = \frac{1}{\cos y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \pi$ (recuérdese el rango de $f(x) = \sec^{-1} x$, el cual es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$). En conclusión

$f(2) = 3\sec^{-1}(-1) - \frac{\pi}{6} = 3(\pi) - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$, así se obtiene el punto $\left(2, \frac{17\pi}{6}\right)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+2\right) - \frac{\pi}{6} = 3\sec^{-1}(1) - \frac{\pi}{6}$$

Calculando $\sec^{-1}(1)$

Sea $y = \sec^{-1}(1)$; luego $\sec y = 1$, esto implica que $\sec y = \frac{1}{\cos y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = 0$ (recuérdese el rango de $f(x) = \sec^{-1} x$, el cual es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$).

En conclusión $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sec^{-1}(1) - \frac{\pi}{6} = 3(0) - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

Nótese que las imágenes de los extremos de los intervalos que determinan el dominio, coinciden con los extremos de los intervalos que determinan el rango de la función analizada.

Determinando el I_y

Haciendo $x = 0$, se tiene que $f(0) = 3\sec^{-1}\left(-\frac{3}{2}(0) + 2\right) - \frac{\pi}{6} = 3\sec^{-1}(2) - \frac{\pi}{6}$.

Calculando $\sec^{-1}(2)$

Sea $y = \sec^{-1}(2)$; luego $\sec y = 2$, esto implica que $\sec y = \frac{1}{\cos y} = 2$ ó $\cos y = \frac{1}{2}$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{3}$ (recuérdese el rango de $f(x) = \sec^{-1} x$, el cual es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$). En conclusión $f(0) = 3\sec^{-1}(2) - \frac{\pi}{6} = 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, así se obtiene el punto $\left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$.

c) $f(x) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$

Determinar el dominio de f

Tomando el argumento de la función y desarrollando las desigualdades:

$3x - 1 \leq -1$	ó	$3x - 1 \geq 1$	acotando el argumento según el dominio de la función elemental.
$3x \leq 0$	ó	$3x \geq 2$	sumando 1 en ambos lados de cada desigualdad.
$x \leq 0$	ó	$x \geq \frac{2}{3}$	dividiendo por 3 ambos lados de cada desigualdad.

Luego el dominio de f es: $\left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

Determinando el rango y la asíntota

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

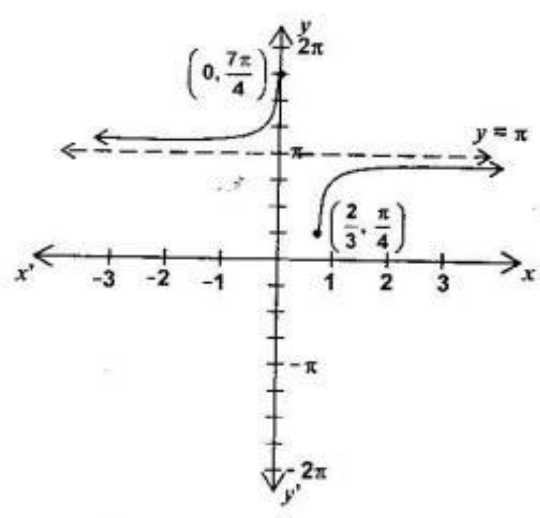
$f(x) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$

Reescribiendo la función anterior de la siguiente forma:

$y = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3x - 1) + \frac{\pi}{4}$, luego

$$\frac{y - \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}} = \sec^{-1}(3x - 1)$$

Recuérdese el rango de la función $f(x) = \sec^{-1}(x)$ que es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Luego resolviendo las



desigualdades $0 \leq \dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}} < \dfrac{\pi}{2}$ ó $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}} \leq \pi$

se obtiene el rango de la función dada y la asíntota horizontal. Véase

$0 \leq \dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}} < \dfrac{\pi}{2}$ ó $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{3}{2}} \leq \pi$	desigualdades obtenidas.
$0 \leq y-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$ ó $\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}\right) < y-\frac{\pi}{4} \leq \pi\left(\frac{3}{2}\right)$	multiplicando por $\left(\frac{3}{2}\right)$ cada miembro de cada desigualdad.
$0 \leq y-\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ó $\frac{3\pi}{4} < y-\frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$	efectuando los productos planteados en cada desigualdad.
$0+\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ ó $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} < y \leq \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	sumando $\frac{\pi}{4}$ en cada miembro de cada desigualdad.
$\frac{\pi}{4} \leq y < \pi$ ó $\pi < y \leq \frac{7\pi}{4}$	simplificando.

Con el desarrollo de estas desigualdades, se obtiene que la asíntota horizontal es la recta $y = \pi$ y **que el rango de f es** $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Encontrando la imagen de cada extremo conocido en cada intervalo que forma el dominio, con el trazo de la asíntota horizontal y recordando la forma de la gráfica de la función elemental, $f(x) = \sec^{-1} x$; se procede al trazo de la gráfica.

Determinando las imágenes de los extremos de los intervalos que forman el dominio

Si $f(x) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3x-1) + \frac{\pi}{4}$, entonces

$f(0) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(3(0)-1) + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sec^{-1}(-1) + \frac{\pi}{4}$

Calculando $\sec^{-1}(-1)$

Sea $y = \sec^{-1}(-1)$; luego $\sec y = -1$, esto implica que $\sec y = \dfrac{1}{\cos y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \pi$ (recuérdese el rango de $f(x) = \sec^{-1} x$, el cual es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$). En conclusión

$f(0) = \frac{3}{2}(\pi) + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, así se obtiene el punto $\left(0, \frac{7\pi}{4}\right)$.

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\sec^{-1}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)-1\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sec^{-1}(1) + \frac{\pi}{4}$

Calculando $\sec^{-1}(1)$

Sea $y = \sec^{-1}(1)$; luego $\sec y = 1$, esto implica que $\sec y = \dfrac{1}{\cos y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = 0$ (recuérdese el rango de $f(x) = \sec^{-1} x$, el cual es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$).

En conclusión $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\sec^{-1}(1) + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}(0) + \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Nótese que las imágenes de los extremos de los intervalos que determinan el dominio, coinciden con los extremos de los intervalos que determinan el rango de la función analizada.

Con estos dos puntos encontrados y considerando el rango, se procede al trazo de la gráfica.

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Determinar el dominio de f

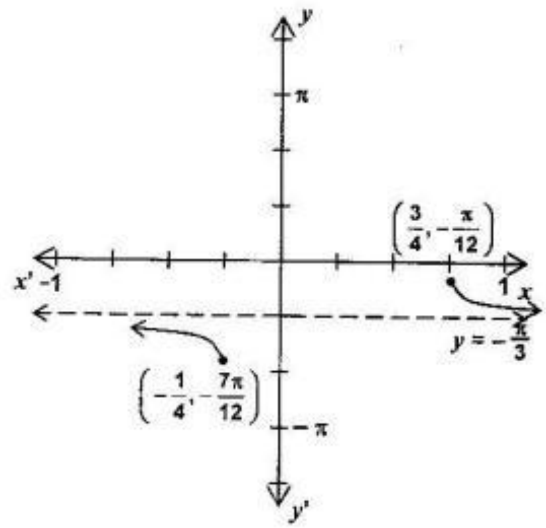
$-2x+\frac{1}{2} \le -1$ ó $-2x+\frac{1}{2} \ge 1$ desigualdad obtenida.

$-2x \le -1-\frac{1}{2}$ ó $-2x \ge 1-\frac{1}{2}$ sumando $-\frac{1}{2}$ en cada miembro de las desigualdades.

$-2x \le -\frac{3}{2}$ ó $-2x \ge \frac{1}{2}$ efectuando las sumas en cada desigualdad.

$x \ge \frac{3}{4}$ ó $x \le -\frac{1}{4}$ despejando para x.

Luego el dominio de f es: $\left]-\infty,-\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4},+\infty\right[$



Determinando el rango de la función y la asíntota horizontal para facilitar el trazo de la misma.

Determinando rango y la asíntota

Tomando la función y despejando para el término trigonométrico inverso.

$f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Escribiendo la función anterior de la siguiente forma:

si $y = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$, luego

$y + \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)$

ó $-2\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = \csc^{-1}\left(-2x+\frac{1}{2}\right)$

Recuérdese, el rango de la función $f(x) = \csc^{-1}(x)$ que es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Luego resolviendo las desigualdades $-\frac{\pi}{2} \le -2\left(y+\frac{\pi}{3}\right) < 0$ ó $0 < -2\left(y+\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\pi}{2}$ se obtiene el rango de la función dada y la asíntota horizontal. Véase:

$-\frac{\pi}{2} \le -2\left(y+\frac{\pi}{3}\right) < 0$ ó $0 < -2\left(y+\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\pi}{2}$ desigualdades obtenidas.

$-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge -\frac{1}{2}\left(-2\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right) > 0\left(-\frac{1}{2}\right)$ ó $-\frac{1}{2}(0) > -\frac{1}{2}\left(-2\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right) \ge \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$ multiplicando por $-\frac{1}{2}$, cada parte de las desigualdades.

$\frac{\pi}{4} \ge y+\frac{\pi}{3} > 0$ ó $0 > y+\frac{\pi}{3} \ge -\frac{\pi}{4}$ efectuando los productos y simplificando.

$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \ge y+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3} > -\frac{\pi}{3}$ ó $-\frac{\pi}{3} > y+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3} \ge -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$ sumando $-\frac{\pi}{3}$ en cada parte del a desigualdad.

$-\frac{\pi}{12} \ge y > -\frac{\pi}{3}$ ó $-\frac{\pi}{3} > y \ge -\frac{7\pi}{12}$ efectuando las sumas.

$-\frac{\pi}{3} < y \le -\frac{\pi}{12}$ ó $-\frac{7\pi}{12} \le y < -\frac{\pi}{3}$ expresando de forma equivalente.

Con el desarrollo de estas desigualdades, se obtiene que la asíntota horizontal es la recta $y = -\frac{\pi}{3}$ y que **el rango de f es** $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{12}\right]$.

Encontrando la imagen de cada extremo conocido en cada intervalo que forma el dominio, con el trazo de la asíntota horizontal y recordando la forma de la gráfica de la función elemental, $f(x) = \csc^{-1} x$; se procede al trazo de la gráfica.

Determinando las imágenes de los extremos de los intervalos que forman el dominio

Si $f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$, entonces

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}(1) - \frac{\pi}{3}$$

Calculando $\csc^{-1}(1)$

Sea $y = \csc^{-1}(1)$; luego $\csc y = 1$, esto implica que $\csc y = \frac{1}{\operatorname{sen} y} = 1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = \frac{\pi}{2}$ (recuérdese el rango de $f(x) = \csc^{-1} x$, el cual es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

En conclusión $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}(1) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$, así se obtiene el punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7\pi}{12}\right)$.

Ahora,

Si $f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$, entonces

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}(-1) - \frac{\pi}{3}$$

Calculando $\csc^{-1}(-1)$

Sea $y = \csc^{-1}(-1)$; luego $\csc y = -1$, esto implica que $\csc y = \frac{1}{\operatorname{sen} y} = -1$. Lo anterior es cierto únicamente si $y = -\frac{\pi}{2}$ (el rango de $f(x) = \csc^{-1} x$, es $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

En conclusión $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}(-1) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$, así se obtiene el punto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{12}\right)$.

También puede ser útil, determinar otro punto que esté en la gráfica, por ejemplo el intercepto en el eje y ($\mathbf{I}_y$), si éste existe.

Determinando el I_y

Haciendo $x = 0$, se tiene que $f(0) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(-2x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$

Calculando $\csc^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Sea $y = \csc^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; luego $\csc y = \frac{1}{2}$, esto implica que $\csc y = \frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{1}{2}$ ó $\operatorname{sen} y = 2$. Este último resultado, es una contradicción, lo cual indica que no hay intercepto en el eje y, para esta función.

Nótese que, en este caso solamente se tienen dos puntos determinados, pero con el trazo de la asíntota horizontal, el dominio y el rango, se puede hacer un bosquejo de la gráfica. ■

Ejercicios 5.6

1. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar el dominio, asíntotas y el rango. Además determine los interceptos con los ejes coordenados (las respuestas de los interceptos con los ejes coordenados se dejan al lector).

a) $f(x) = 2\csc^{-1}(x-1)$ **b)** $f(x) = \sec^{-1}(x-2) - \frac{\pi}{8}$ **c)** $f(x) = \csc^{-1}(3x+2) + \pi$

d) $f(x) = 3\sec^{-1}\left(2x + \frac{1}{2}\right) - \pi$ **e)** $f(x) = 2\csc^{-1}(3x-1) - \frac{\pi}{4}$ **f)** $f(x) = -4\sec^{-1}(1-2x) - \frac{\pi}{3}$

g) $f(x) = -\csc^{-1}(4x-3) - \frac{\pi}{6}$ **h)** $f(x) = -\frac{3}{4}\sec^{-1}\left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{\pi}{3}$ **i)** $f(x) = 2\csc^{-1}(3x+1) + \frac{\pi}{2}$

j) $f(x) = -2\sec^{-1}(2x+1) + \frac{\pi}{6}$ **k)** $f(x) = -\frac{1}{3}\csc^{-1}(-x+3) + \pi$ **l)** $f(x) = -3\sec^{-1}\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$

m) $f(x) = -\frac{1}{2}\csc^{-1}\left(\frac{1}{4}x + 2\right) - \pi$ **n)** $f(x) = 2\sec^{-1}\left(\frac{1}{3}x - 2\right) - \pi$ **o)** $f(x) = \csc^{-1}\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO V

1. Determinar el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **d)** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\cos^{-1}(1)$ **f)** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **g)** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ **h)** $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right)$

i) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)\right)$ **j)** $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{19}\right)\right)$ **k)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{17}\right)\right)$ **l)** $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{19}{20}\right)\right)$

m) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$ **n)** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ **o)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right)$ **p)** $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{18\pi}{19}\right)\right)$

2. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar dominio, amplitud, período, el desfase o corrimiento y el rango. Además determine los interceptos con los ejes coordenados (las respuestas de los interceptos con los ejes coordenados se dejan al lector).

a) $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ b) $f(x) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2$

d) $f(x) = -3\cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) - 1$ e) $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ f) $f(x) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) - 2$

g) $f(x) = -\frac{4}{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ h) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3}$ i) $f(x) = \frac{5}{2}\cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

3. Para cada función dada, trazar la gráfica e indicar dominio, ecuación general de las asíntotas, período y el rango. Además determine los interceptos con los ejes coordenados (las respuestas de los interceptos con los ejes coordenados se dejan al lector).

a) $f(x) = -\tan(x - \pi) + \frac{1}{2}$ b) $f(x) = -2\csc(2x - \pi) + \frac{1}{2}$ c) $f(x) = -\tan\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

d) $f(x) = 3\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{4}$ e) $f(x) = 2\cot\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ f) $f(x) = -2\sec\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

g) $f(x) = 2\cot\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - 1$ h) $f(x) = -\frac{5}{2}\csc\left(-\frac{2}{3}x + \pi\right)$ i) $f(x) = -\frac{1}{3}\cot(x + \pi) + 2$

j) $f(x) = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ k) $f(x) = -\frac{1}{2}\cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$ l) $f(x) = 2\sec\left(\frac{1}{3}x - \pi\right) - 1$

m) $f(x) = \frac{1}{3}\sec\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ n) $f(x) = -\frac{1}{3}\tan\left(\frac{1}{4}x - \pi\right) + 2$ o) $f(x) = -2\csc\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) + 2$

p) $f(x) = -\frac{1}{2}\csc\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) + 2$ q) $f(x) = -2\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 2$ r) $f(x) = 3\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$

4. Para cada función dada, trazar su gráfica e indicar el dominio y el rango de la misma. Además determine los interceptos con los ejes coordenados (las respuestas de los interceptos con los ejes coordenados se dejan al lector).

a) $f(x) = 2\cos^{-1}(x + 1)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x + 2) - \frac{\pi}{8}$ c) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x - 2) + \pi$

d) $f(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \pi$ e) $f(x) = -2\cos^{-1}(3x + 1) - \frac{\pi}{6}$ f) $f(x) = -2\cos^{-1}(3 - 2x) - \frac{\pi}{3}$

g) $f(x) = -\tan^{-1}(2x + 3) - \frac{\pi}{6}$ h) $f(x) = -\cot^{-1}\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) + \frac{\pi}{3}$ i) $f(x) = \frac{3}{4}\cot^{-1}(2x + 1) - \frac{\pi}{4}$

j) $f(x) = -2\cot^{-1}(4x + 1) + \frac{\pi}{6}$ k) $f(x) = -\frac{1}{3}\tan^{-1}(-2x + 3) + \pi$ l) $f(x) = -3\cot^{-1}\left(-\frac{1}{3}x + 2\right) - \pi$

m) $f(x) = -3\csc^{-1}\left(\frac{1}{4}x + 1\right) - \pi$ n) $f(x) = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{1}{3}x - 1\right) - \pi$ o) $f(x) = 2\csc^{-1}\left(x - \frac{5}{3}\right) + \frac{\pi}{6}$

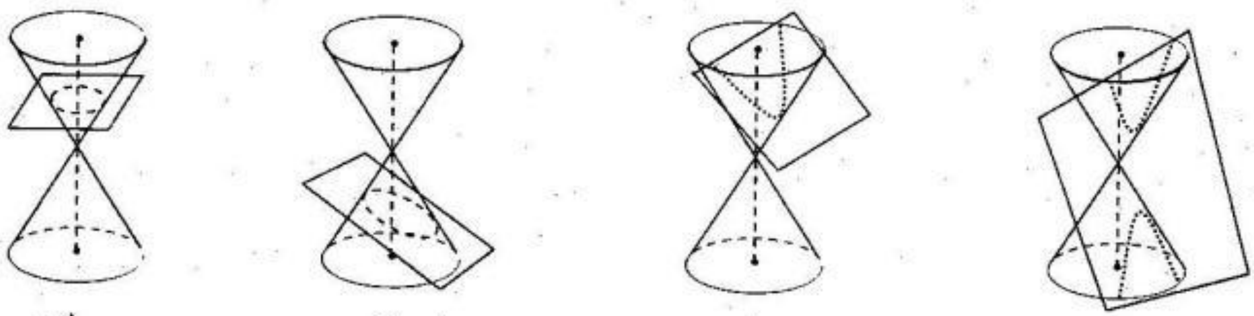
p) $f(x) = -\csc^{-1}\left(\frac{1}{2}x - 4\right) - \pi$ q) $f(x) = 2\sec^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$ r) $f(x) = \csc^{-1}(3x + 3) - \frac{2\pi}{3}$

CAPITULO VI LAS CONICAS

GENERALIDADES DE LAS CONICAS

Las curvas conocidas como **circunferencia, parábola, elipse e hipérbola**, se les llama frecuentemente **secciones cónicas** o simplemente **cónicas,** ya que todas ellas pueden obtenerse como secciones de dos conos circulares rectos intersecados en sus vértices y cortados por un plano.

Véase la siguiente figura.



a) circunferencia b) elipse c) parábola d) hipérbola

fig. 1

Del análisis que se hace en la fig. 1, con los dos conos circulares rectos intersecados en su vértice y el plano en mención, se observa que:

1. Si el plano que corta a uno de los conos en su totalidad (no en su vértice), **es paralelo** al plano que contiene la base de uno de los conos, entonces a la curva de intersección se le llama **circunferencia** (ver fig. 1 a)).
2. Si el plano que corta a uno de los conos en su totalidad (no en su vértice), no es paralelo al plano que contiene la base de uno de los conos, entonces a la curva de intersección se le llama **elipse** (ver fig. 1 b)).
3. Si el plano corta a uno de los conos pero no en su totalidad, entonces a la curva de intersección se le llama **parábola** (ver fig. 1c)).
4. Si el plano corta ambos conos rectos, pero no pasa por el vértice, entonces a la curva de intersección resultante se le llama **hipérbola** (ver fig. 1d)).

En el caso que el **plano pase por el vértice** del cono, se produce una **cónica degenerada** (un punto, una recta o dos rectas paralelas; en su momento se ejemplificará).

El interés en este capítulo acerca de las cónicas es, determinar y visualizar algunos de sus elementos, así como también el trazo de las curvas en el plano cartesiano.

La ecuación cuadrática en dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B y C no son todas cero y D, E y F números reales, determina una cónica o una cónica degenerada.

En este capítulo se analizará la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $B = 0$, para simplificar el análisis.

Retomando la ecuación de interés en este momento $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C no son ceros simultáneamente, se inicia con la primera cónica; **la circunferencia**.

6.1 LA CIRCUNFERENCIA

En geometría se estudia la circunferencia como una figura geométrica y en donde se enuncia algunos de sus elementos (centro, radio, diámetro, secante, cuerda, tangente, entre otros). Ahora lo que interesa es conocer la ecuación que la determina, graficarla en el plano cartesiano, así como identificar algunos elementos de la misma que facilite el trazo de su gráfica. Además se utilizarán algunos elementos estudiados en el álgebra, que en su momento se recordarán.

Todas las cónicas tienen un análisis muy similar, por lo que se les pide que vean detenidamente el análisis que se irá presentando en cada una de ellas, para que en las subsiguientes se les haga más fácil su aprendizaje.

Recordatorios

Fórmula de la distancia entre dos puntos del plano y punto medio del segmento de recta, determinado por dichos puntos

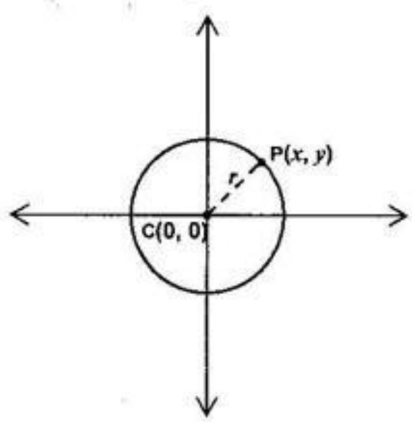
La **distancia entre los puntos** $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano está determinada por la siguiente fórmula: $d\,(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

El punto medio *M* del segmento de recta que contiene como extremos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dado por $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

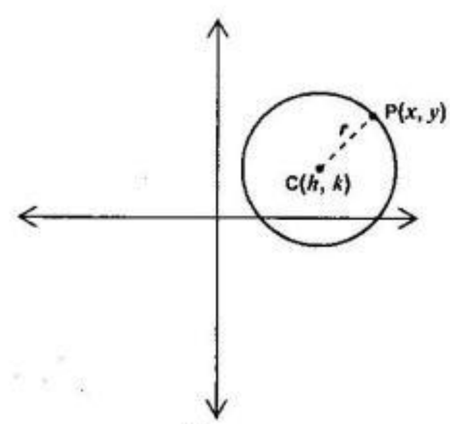
Véase la siguiente definición:

Definición La **circunferencia** es la gráfica, formada por todos los puntos P en el plano, tal que la distancia a un punto fijo es constante. El punto fijo se llama centro C y la distancia constante al centro de la circunferencia se llama el radio (r) donde $r > 0$.

Trazando una circunferencia de radio r y con centro en el origen en el plano cartesiano y otra con centro en (h, k) y con radio r, se observan las siguientes figuras.



a)



b)

fig. 2

Obsérvese la fig. 2 y aplíquese la definición de la circunferencia. En la fig. 2 a) (circunferencia con centro en el origen) se observa que CP = r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ (aplicando la fórmula de la distancia) ó

$r^2 = x^2 + y^2$. En la fig. 2 b) (con centro en el punto (h, k)), se observa que CP = $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ (aplicando la fórmula de distancia) ó $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$.

Esta última ecuación es llamada **forma canónica de la circunferencia.**

Véase:

FORMA CANONICA O ESTANDAR DE LA ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y CON CENTRO EN EL PUNTO (h, k)

Con centro en el origen $x^2 + y^2 = r^2$

Con centro en el punto (h, k) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Si se desarrollan los binomios en la segunda ecuación, se obtiene una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A = C. Si la ecuación tiene esta característica, se le llama **forma general de la circunferencia**. Recuérdese que también se puede tener una circunferencia degenerada.

Los problemas que se pueden plantear en este tema son: determinar el centro y radio, trazar la gráfica de una ecuación dada si ésta existe (ésta puede estar dada en forma canónica o en forma general). Además se puede pedir que se encuentre la ecuación de la circunferencia, dando algunas condiciones.

Véase los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la circunferencia, que satisfaga las siguientes condiciones.

a) Centro (C) en el origen y radio $(r) = \frac{1}{2}$ **b)** C(1, 2) y $r = 3$

c) C(−2, 3) y $r = 1$ **d)** C(−3, −1) y $r = \frac{3}{2}$ **e)** C(0, −1) y $r = \sqrt{5}$

f) Tiene un diámetro con extremos A(−1, 1) y B(1, −3).

g) Pasa por el punto A(2, −1) y con centro C(4,2).

h) Con C(2, −3) y tangente al eje x.

i) Con C(−4, 5) y tangente al eje y.

j) Tangente al eje x en A(4,0) y tangente al eje y en B(0, −4).

k) Con C(1, −2) y que es tangente a la recta l con ecuación $x - y = 1$.

Solución:

a) centro (C) en el origen y radio $(r) = \frac{1}{2}$

Se indica que el centro es el origen, por lo que se tiene C(0, 0) y $r = \frac{1}{2}$. Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Simplificando se tiene que $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ó de forma equivalente, $4x^2 + 4y^2 = 1$.

b) C(1, 2) y $r = 3$

Se tiene que el centro es C(1, 2) y $r = 3$. Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene que $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Desarrollando los binomios y simplificando se obtiene que $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

c) C(−2, 3) y $r = 1$

Se tiene el C(−2, 3) y $r = 1$. Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = 1^2$ ó $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1^2$. Desarrollando los binomios y simplificando se tiene que $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

d) C(−3, −1) y $r = \frac{3}{2}$

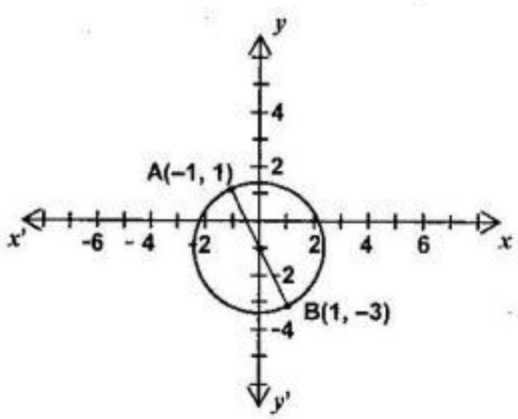
Se tiene el C(−3, −1) y $r = \frac{3}{2}$. Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-(-3))^2 + (y-(-1))^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ ó $(x+3)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.
Desarrollando los binomios y simplificando; $4x^2 + 4y^2 + 24x + 8y + 31 = 0$.

e) C(0, −1) y $r = \sqrt{5}$

Se tiene que C(0, −1) y $r = \sqrt{5}$. Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ ó $x^2 + (y+1)^2 = 5$.

Desarrollando el binomios y simplificando; $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$.

f) Tiene un diámetro con extremos A(−1, 1) y B(1, −3).



Para encontrar la ecuación de la circunferencia, es necesario conocer el centro y el radio. Para visualizar lo enunciado, se procede a elaborar una figura. Recuérdese que todo diámetro (D) contiene el centro de la circunferencia, que D = $2r$ (diámetro es igual a dos radios) y que el punto medio de un diámetro coincide con el centro de la misma.

Calculando el punto medio M del segmento que determina un diámetro, se tiene:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (0, -1).$$

Luego C(0, −1) es el centro y para determinar el radio, se puede encontrar la longitud del diámetro dado y la mitad de esta longitud, es el radio. Otra forma de encontrar el radio, es determinando la distancia del centro a uno de los puntos extremos del diámetro.

Determinando la distancia del centro C(0, –1) a A(–1, 1) (uno de los extremos del diámetro).

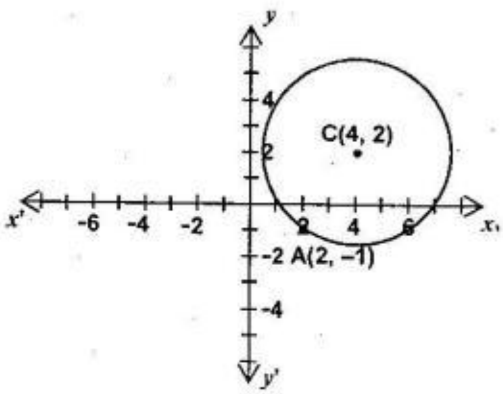
$d(C, A) = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Luego $r = \sqrt{5}$ y C(0, –1)

Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ ó $x^2 + (y+1)^2 = 5$.

Desarrollando el binomio y simplificando; $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$.

g) Pasa por el punto A(2, –1) y con centro C(4,2).



En este caso se conoce únicamente el centro, pero con los datos que se dan se puede encontrar el radio. Ubicando los puntos dados en el plano cartesiano y con el auxilio de un compás se traza una figura; con ésta se tiene una mejor idea y facilita el análisis. Recuérdese que el radio es la distancia del centro a un punto de la circunferencia. Para determinar el radio de esta circunferencia, se calcula la distancia del centro al punto que se dice pasa la circunferencia (d(A, C)).

Luego $d(A,C) = r = \sqrt{(4-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Se tiene entonces que $r = \sqrt{13}$ y C(4, 2) (el centro de la circunferencia).

Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-4)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$ ó $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$.

Desarrollando los binomios y simplificando; $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$.

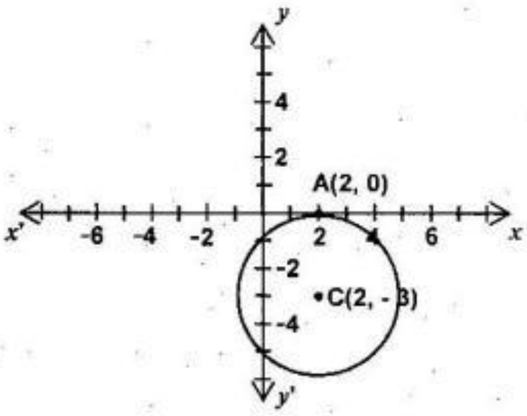
Otra forma para encontrar el valor para *r*, es:

Conociendo el centro el cual es el punto C(4, 2), tomando la ecuación canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, sustituyendo los valores de h y k en ésta última y sustituyendo el punto que está en la circunferencia (si un punto está en una curva, entonces dicho punto satisface la ecuación que le corresponde a dicha curva) en esta última ecuación se tiene.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	ecuación canónica de la circunferencia con centro $C(h, k)$.
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = r^2$	sustituyendo el valor de h y k en la ecuación en forma canónica.
$(2-4)^2 + (-1-2)^2 = r^2$	sustituyendo el punto (2, –1) en la ecuación en forma canónica.
$(-2)^2 + (-3)^2 = r^2$	simplificando; nótese que se obtiene una ecuación cuadrática.
$13 = r^2$	simplificando.
$\sqrt{13} = r$	encontrando el valor para r.

Conociendo el centro y el radio se procede a sustituir estos valores en la ecuación de forma canónica.

h) Con C(2, –3) y tangente al eje x.



En este caso se conoce únicamente el centro, pero con los datos que se dan se puede encontrar el radio. Trazando una circunferencia con las condiciones dadas, se tiene la figura de la izquierda. Nótese que si la circunferencia es tangente al eje x, el punto A(2,0), está en la circunferencia (tomando el segmento desde el centro de la misma, perpendicular al eje x) y se determina que el radio es 3. Recuérdese que el radio, es la longitud del centro a un punto de la circunferencia y se determina, calculando la distancia del centro al punto A.

Luego d(A, C) = $r = \sqrt{(2-2)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{3^2} = 3$.

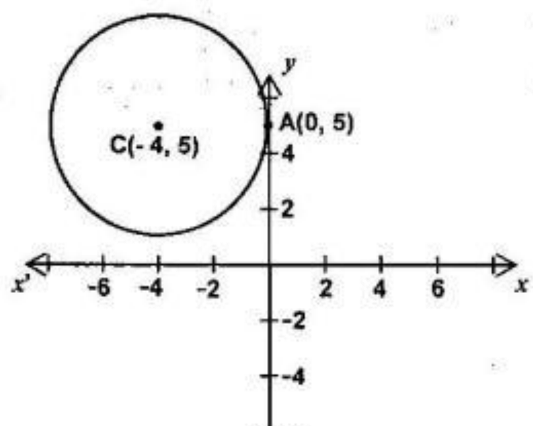
Nótese que el segmento AC (radio de la circunferencia) es paralelo al eje y, luego se puede determinar que AC = $r = |-3-0| = 3$.

Se tiene entonces que $r = 3$ y C(2, –3) (el centro de la circunferencia).

Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 3^2$ ó $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$.

Desarrollando el binomio y simplificando se tiene $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

i) Con C(– 4, 5) y tangente al eje y.



En este caso también se conoce únicamente el centro, pero con los datos que se dan se puede encontrar el radio. Trazando una circunferencia con las condiciones dadas, se tiene la figura de la izquierda. Nótese que si la circunferencia es tangente al eje y, el punto A(0,5) está en la circunferencia (tomando el segmento desde el centro de la misma, perpendicular al eje y) y se determina que el radio es 4. Recuérdese que el radio, es la longitud del centro a un punto de la circunferencia y se determina, calculando la distancia del centro al punto de tangencia A, en el eje y.

Luego d(A, C) = $r = \sqrt{(-4-0)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{4^2} = 4$.

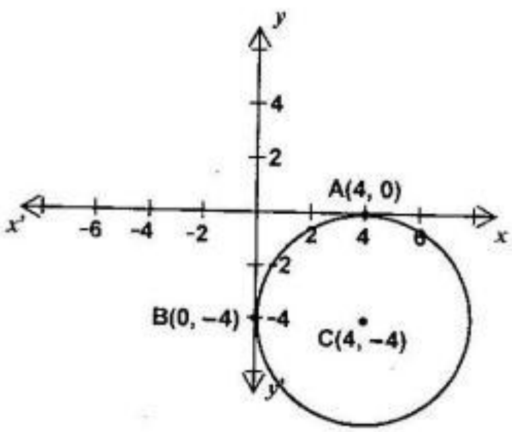
El segmento AC (radio de la circunferencia) es paralelo al eje x, luego se puede determinar que AC = $r = |-4-0| = 4$.

Se tiene entonces que $r = 4$ y C(– 4, 5) (el centro de la circunferencia).

Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-(-4))^2 + (y-5)^2 = 4^2$ ó $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 4^2$.

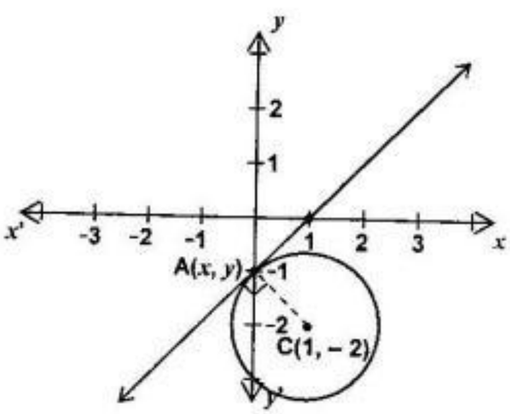
Desarrollando el binomio y simplificando; $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 25 = 0$.

j) Tangente al eje x en A(4,0) y tangente al eje y en B(0, −4).



En este caso no se conoce el centro, ni el radio pero con los datos que se dan, se puede encontrar el radio. Trazando una circunferencia con las condiciones dadas, se tiene la figura de la izquierda. Nótese que si la circunferencia es tangente al eje y, y al eje x en los puntos B(0,− 4) y A(4,0) respectivamente, se determina que AC = AB = 4 (tomando el punto de intersección del segmento perpendicular que corta al eje x en el punto A y el segmento perpendicular que corta al eje y en el punto B), luego el radio de la circunferencia es 4 y el centro es C(4, − 4). Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-4)^2 + (y-(-4))^2 = 4^2$ ó $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 4^2$. Desarrollando el binomio y simplificando se tiene que $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$.

k) Con C(1, −2) y que es tangente a la recta $\boldsymbol{l}$ con ecuación $x - y = 1$.



Trazando la recta según la ecuación dada y trazando una circunferencia con las condiciones enunciadas, se tiene la figura de la izquierda. Se conoce únicamente el centro, pero con los datos que se dan se puede encontrar el radio.
Encontrando los interceptos con los ejes coordenados para trazar la recta se tiene que $I_x(1, 0)$ e $I_y(0, -1)$. Nótese que si la circunferencia es tangente a la recta con ecuación $x - y = 1$, el segmento que va del centro al punto de tangencia (el radio) es perpendicular a la recta, la cual es tangente a la circunferencia. Para encontrar el punto de tangencia, se debe encontrar la ecuación de la recta que contiene al segmento AC (el radio) y luego encontrar el punto donde se intersecan dichas rectas.

Retomando la ecuación $x - y = 1$ o su equivalente, $y = x - 1$ se tiene que su pendiente es 1. Luego la pendiente de la recta que contiene al radio y que es perpendicular a la recta dada es −1.

Utilizando la ecuación punto y pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $P_0(1, -2)$ y $m = -1$ y sustituyendo en la ecuación antes mencionada, se tiene que $y - (-2) = -1(x - 1)$ ó $y = -x - 1$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$

se tiene (aplicando el método de igualación) que $x - 1 = -x - 1$ ó $x = 0$, luego $y = -1$. Concluyendo que el punto A(0, −1) es el punto de tangencia y es un punto que está en la circunferencia. El radio se calcula, encontrando d(A, C) = $r = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Obteniendo entonces que $r = \sqrt{2}$ y C(1, −2) (el centro de la circunferencia).

Utilizando la forma canónica o estándar $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y sustituyendo los valores para h, k y r se tiene $(x-1)^2 + (y-(-2))^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ ó $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$.

Desarrollando el binomio y simplificando se tiene $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$. ■

Ejemplo 2 Para cada ecuación, determinar si es posible, el centro, radio y trazar su gráfica.

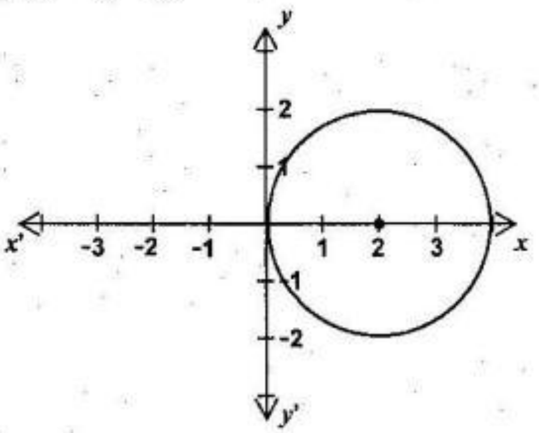
a) $(x-2)^2+y^2 = 4$ **b)** $(x+1)^2+(y-1)^2 = \frac{1}{4}$ **c)** $(x+1)^2+(y+1)^2 = 8$

d) $x^2+y^2-4x = 1$ **e)** $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ **f)** $9x^2+9y^2-6x-6y-79=0$

g) $2x^2+2y^2+8x-12y+26=0$ **h)** $x^2+y^2-2x+4y+9=0$

Solución:

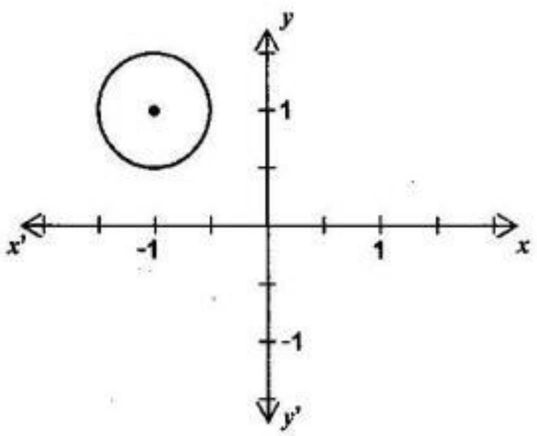
a) $(x-2)^2+y^2 = 4$



La ecuación dada, expresada en su forma canónica es $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$. Esto implica que el centro es C(2, 0) y el radio $r = 2$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano, y se traza un punto a dos unidades del centro (se puede tomar en forma horizontal o vertical) y con la ayuda de un compás ubicado en el C(2, 0) y con una abertura de 2 unidades se procede al trazo de la gráfica (circunferencia).

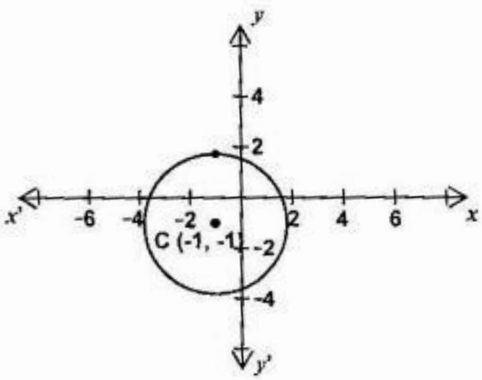
b) $(x+1)^2+(y-1)^2 = \frac{1}{4}$



La ecuación dada es $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$, y en su forma canónica se tiene $(x-(-1))^2+(y-1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ lo que implica que el centro es C(−1, 1) y el radio $r=\frac{1}{2}$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano, y un punto a $\frac{1}{2}$ unidades del centro (se puede tomar en forma horizontal o vertical). Es decir con la ayuda de un compás ubicado en el C(−1, 1) y con una abertura de $\frac{1}{2}$ unidades se procede al trazo de la gráfica (circunferencia).

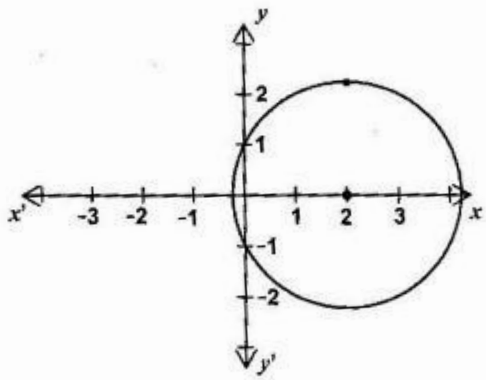
c) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$



La ecuación dada es $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$, que expresada en su forma canónica se tiene $(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2$. Luego el centro es C (−1, −1) y el radio $r = \sqrt{8}$.

Se traza la gráfica ubicando el centro en el plano cartesiano, y un punto que se encuentre a $\sqrt{8}$ unidades del centro. Con la ayuda de un compás ubicado en el centro y con una abertura de $\sqrt{8}$ unidades se procede al trazo de la gráfica (circunferencia).

d) $x^2 + y^2 - 4x = 1$



La ecuación dada $x^2 + y^2 - 4x = 1$, corresponde a la de una circunferencia ya que A = C y la misma no está dada en la forma canónica. Para llevarla a dicha forma, se procede a la completación de cuadrados; en este caso únicamente para la variable x. Véase:

$x^2 + y^2 - 4x = 1$ ecuación dada.

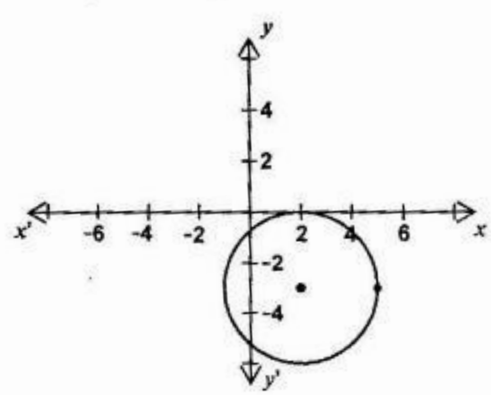
$(x^2 - 4x + 4) + (y - 0)^2 = 1 + 4$ completando cuadrados para la variable x y sumando este valor en ambos lados de la ecuación. Nótese que $b = -4$, $\frac{b}{2} = -2$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4$. En el caso que b sea negativo, por estar elevado al cuadrado, no es necesario tomar el signo.

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 5$ factorizando y simplificando.

Esto implica que el centro es C(2, 0) y el radio $r = \sqrt{5}$.

Para trazar la gráfica, se ubica el centro en el plano cartesiano, y un punto a $\sqrt{5}$ unidades del centro y con la ayuda de un compás ubicado en el centro y con una abertura de $\sqrt{5}$ unidades se procede al trazo de la gráfica (circunferencia).

e) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$



La ecuación dada $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$, es la ecuación de una circunferencia, ya que A = C y la misma no está dada en la forma canónica. Para llevarla a la forma canónica, se procede a la completación de cuadrados, con respecto a las variables x e y. Véase:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ecuación dada.

$(x^2 - 4x \quad) + (y^2 + 6y \quad) = -4$ asociando los términos con variable x y con la variable y, y transponiendo el o los término sin variable.

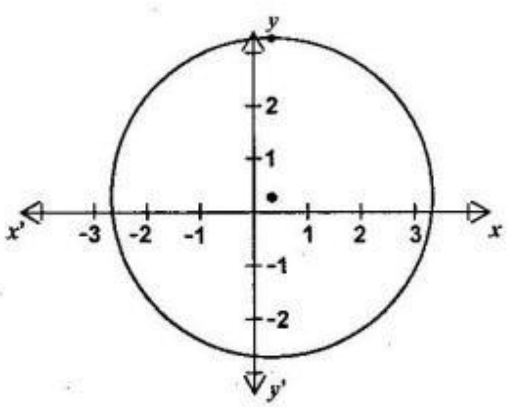
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = -4 + 4 + 9$ completando cuadrados $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en cada agrupación y sumando estos valores en ambos lados de la ecuación. Nótese que en la primera agrupación, $b = -4$, $\frac{b}{2} = -2$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4$ y en la segunda, $b = 6$, $\frac{b}{2} = 3$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9$.

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ factorizando y simplificando.

Esto implica que el centro es C(2, −3) y el radio $r = 3$.

Para trazar la gráfica, se ubica el centro en el plano cartesiano, y se toma un punto a 3 unidades del centro.

f) $9x^2 + 9y^2 - 6x - 6y - 79 = 0$



La ecuación dada $9x^2 + 9y^2 - 6x - 6y - 79 = 0$, corresponde a una circunferencia, ya que A = C. Por facilidad, se debe llevar a la forma general donde A = C = 1. Luego para llevarla a la forma canónica, se debe aplicar completación de cuadrado con respecto a las dos variables.

Para lograr que A = C = 1 se debe dividir por 9 ambos lados de la ecuación o multiplicar por $\frac{1}{9}$ tal como se muestra.

$\frac{1}{9}(9x^2 + 9y^2 - 6x - 6y - 79) = \frac{1}{9}(0)$ multiplicando.

$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{79}{9} = 0$ simplificando.

$\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) = \frac{79}{9}$ asociando y transponiendo término.

$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = \frac{79}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ completando cuadrados $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en cada agrupación y sumando estos valores en ambos lados de la ecuación. Nótese que en la primera agrupación, $b = -\frac{2}{3}$, $\frac{b}{2} = -\frac{1}{3}$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}$ y en la segunda, $b = -\frac{2}{3}$, $\frac{b}{2} = -\frac{1}{3}$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

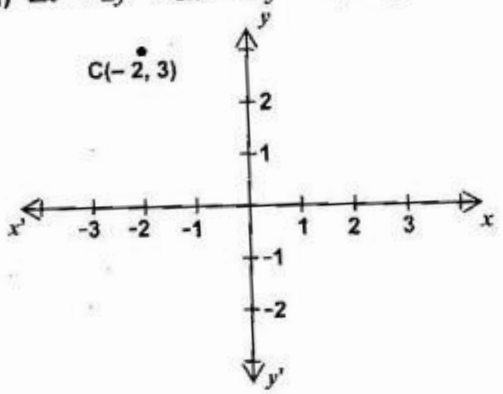
$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = 9$ efectuando la suma en el miembro de la derecha.

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 9$ factorizando.

Esto implica que el centro es $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y el radio $r = 3$.

Ubicando el centro en el plano cartesiano, y con radio 3 unidades a partir del centro, se procede a trazar la gráfica.

g) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 26 = 0$



La ecuación dada $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 26 = 0$, corresponde a una circunferencia, ya que A = C. Llevándola a la forma general donde A = C = 1 y luego a la forma canónica, se tiene:

$\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 26 = 0) = \frac{1}{2}(0)$ multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos lados de la ecuación.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ simplificando.

$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = -13$ asociando.

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -13 + 4 + 9$ completando cuadrados $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en cada agrupación y sumando estos valores en ambos lados de la ecuación. Nótese que en la primera agrupación, $b = 4$, $\frac{b}{2} = 2$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4$ y en la segunda, $b = -6$, $\frac{b}{2} = -3$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9$.

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0$ efectuando la suma en el miembro de la derecha.

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ factorizando.

Obteniendo que el centro es C (–2, 3) y el radio $r = 0$.

Esta ecuación representa una circunferencia degenerada ya que el radio es cero y el único punto que satisface dicha ecuación es el centro. Lo que significa que no existe tal circunferencia, sino únicamente un punto.

h) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$

La ecuación dada $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$, corresponde a una circunferencia, ya que A = C. Llevándola a la forma canónica, se tiene:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$ ecuación dada.

$(x^2 - 2x\ ) + (y^2 + 4y\ ) = -9$ asociando.

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -9 + 1 + 4$ completando cuadrados $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en cada agrupación y sumando estos valores en ambos lados de la ecuación. Nótese que en la primera agrupación, $b = -2$, $\frac{b}{2} = -1$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1$ y en la segunda, $b = 4$, $\frac{b}{2} = 2$ y $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4$.

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -4$ factorizando y simplificando.

Nótese que el radio es negativo, lo que implica que para esta ecuación, no existe punto que satisfaga dicha ecuación. Se dice que la ecuación corresponde a una circunferencia degenerada y en este caso no existe gráfica.

Ejercicios 6.1

1. Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la circunferencia que satisfaga las siguientes condiciones.

a) Centro (C) en el origen y radio (r) = $\frac{3}{2}$ **b)** C(−1, 1) y $r = 3$ **c)** C(−2, 1) y $r = \sqrt{2}$

d) C(−2, 1) y $r = 2$ **e)** C(0, −1) y $r = \sqrt{5}$ **f)** Tiene un diámetro con extremos A(−2, 1) y B(1, −2).

g) Tiene un diámetro con extremos A(−2, 3) y B(4, −2). **h)** Pasa por el punto A(4, −2) y tiene centro C(2,1).

i) Pasa por el punto A(3, 1) y tiene centro C(−1,1). **j)** Con C(1, −2) y tangente al eje x.

k) Con C(2, −3) y tangente al eje x. **l)** Con C(−3, 1) y tangente al eje y.

ll) Con C(−2, 2) y tangente al eje y. **m)** Tangente al eje x en A$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y tangente al eje y en B$\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

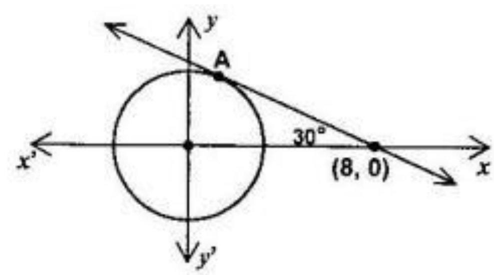
n) Con C(3, 1) y que es tangente a la recta l con ecuación $2x + y = 1$.

o) Con C(2, 3) y que es tangente a la recta l con ecuación $3x + 4y + 2 = 0$.

p) Tangente a los dos ejes, radio 3 y está en el segundo cuadrante.

q) Tangente a los dos ejes, radio 2 y está en el tercer cuadrante.

r) Con C(0, 0) y tangente en A, a la recta l. Además determinar las coordenadas del punto A. Ver figura.



gráfica inciso r)

2. Para cada ecuación, determinar si existe, el centro, radio y trazar su gráfica.

a) $x^2 + (y-3)^2 = 4$ **b)** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9}$ **c)** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$

d) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **e)** $x^2 + y^2 + 2y = 3$ **f)** $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

g) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$ **h)** $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$ **i)** $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$

j) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = 11$ **k)** $9x^2 + 9y^2 + 36x - 6y + 28 = 0$ **l)** $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

6.2 LA PARABOLA

La siguiente cónica por analizar es **la parábola**, para lo cual se enuncia la siguiente definición.

Definición Una **parábola** es la gráfica definida por el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D. El punto F es llamado **foco de la parábola**; la recta D es **la directriz de la parábola**. Es decir una parábola es la gráfica determinada por todos los puntos **P** tal que $d(F, \text{P}) = d(\text{P}, D)$. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se le llama **eje de simetría** y el punto medio del segmento determinado por el foco y el punto de intersección de estas dos rectas se le llama **vértice de la parábola**.

La siguiente figura muestra lo dicho en la definición.

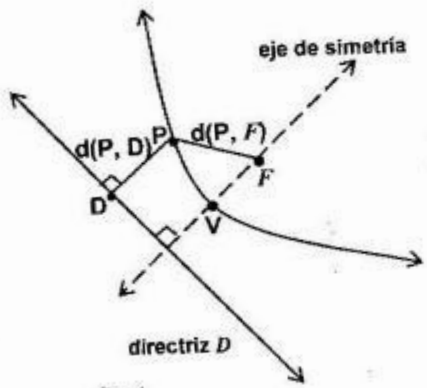


fig .1

Obsérvese la fig. 1. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz D es el eje de simetría, el punto de intersección de la parábola con su eje de simetría se llama vértice V. Como el vértice es un punto de la parábola, éste debe satisfacer la ecuación dada en la definición de la parábola, es decir $d(F, \mathrm{V}) = d(\mathrm{V}, \mathrm{D})$. Dicho de otra forma, el vértice es el punto medio del segmento perpendicular que va del foco al punto de intersección con la directriz D. Si ahora se ubica esta parábola en el plano cartesiano, se deduce la ecuación de la misma.

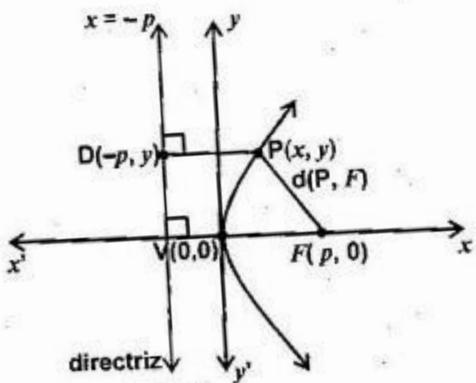


fig. 2

Véase la fig. 2. Por facilidad se ubica el vértice, foco y la directriz como se muestra en la misma. Si se toma el vértice en el origen (0,0), el foco se puede colocar en el eje x, o en el eje y. Tomando el foco sobre el eje x positivo, se tiene lo mostrado en la fig. 2. Nótese que la distancia del foco (F) al vértice (V) es p, las coordenadas de F son $(p, 0)$ con $p > 0$. De igual manera, la distancia desde V a la directriz D, también es p y como la recta D debe ser perpendicular al eje x (ya que es el eje de simetría de la parábola con vértice en el origen), la ecuación de la directriz D, debe ser $x = -p$. Ahora si $\mathrm{P}(x, y)$ es un punto en la parábola, entonces éste satisface la ecuación $d(F, \mathrm{P}) = d(\mathrm{P}, \mathrm{D})$.

De esta manera se tiene que:

$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$ aplicando la fórmula de la distancia. Nótese que el segmento PD es horizontal.

$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$ elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad y simplificando.

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$ desarrollando los binomios.

$y^2 = 4px$ simplificando.

Del último resultado, se concluye que la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0), foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$, con $p > 0$ **es** $y^2 = 4px$.

En la fig. 2, se decidió ubicar el foco sobre el eje x positivo. Si el foco se coloca en el eje x negativo ó en el eje y positivo ó en el eje y negativo, se obtiene una forma diferente de la ecuación para la parábola.

Las siguientes figuras muestran las distintas posibilidades que tiene la gráfica de una parábola con vértice en el origen, así como también la ecuación que le corresponde a cada una de ellas. Obsérvese en cada una de ellas, las componentes del foco, el eje de simetría y la ecuación de la directriz.

Considérese $p > 0$.

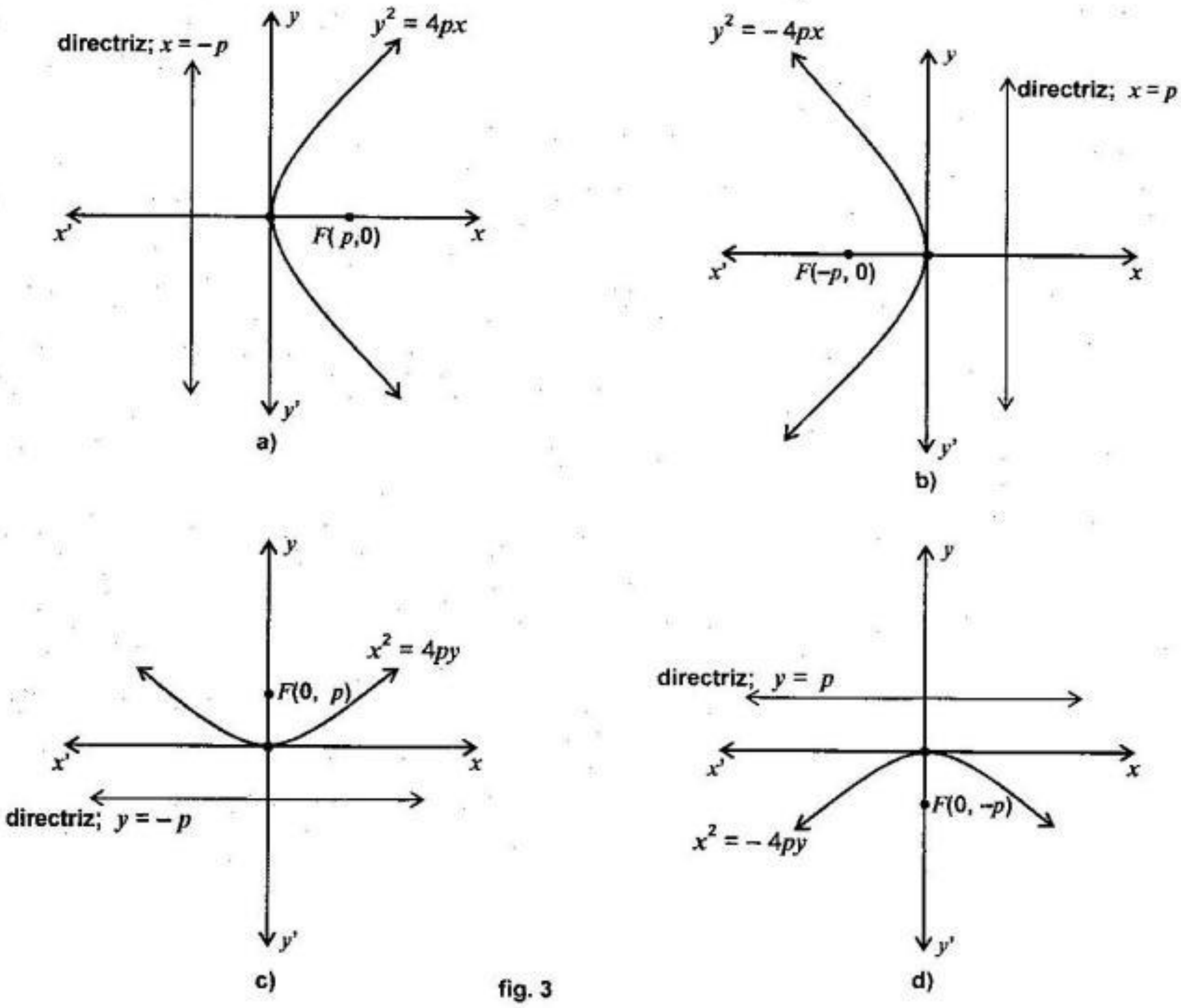


fig. 3

Aunque se indique una ecuación para cada gráfica, éstas se pueden sintetizar en dos. La fig. 3 a) y b) cuyo eje de simetría es el eje x, puede representarse por la ecuación $y^2 = 4px$, considerando que si $p > 0$, entonces la gráfica abre hacia la derecha y si $p < 0$, entonces la gráfica abre hacia la izquierda. De igual manera para la fig. 3 c) y d), cuyo eje de simetría es el eje y, puede representarse por la ecuación $x^2 = 4py$, considerando que si $p > 0$, entonces la gráfica abre hacia arriba y si $p < 0$, entonces la gráfica abre hacia abajo y conociendo como es p, se determina la ecuación de la directriz según sea el caso.

Ahora, si una de las gráficas mostradas en la fig. 3, las cuales tienen vértice en el origen y con eje de simetría en uno de los ejes coordenados, se desplaza h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, se obtiene una parábola con vértice en el punto (h, k) y con eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados. Las ecuaciones de dichas parábolas tienen la misma forma de las descritas anteriormente, pero con x sustituida por $x - h$ e y sustituida por $y - k$.

Obsérvese la fig. 4 y considere $p > 0$, $h > 0$, $k > 0$ y el eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados.

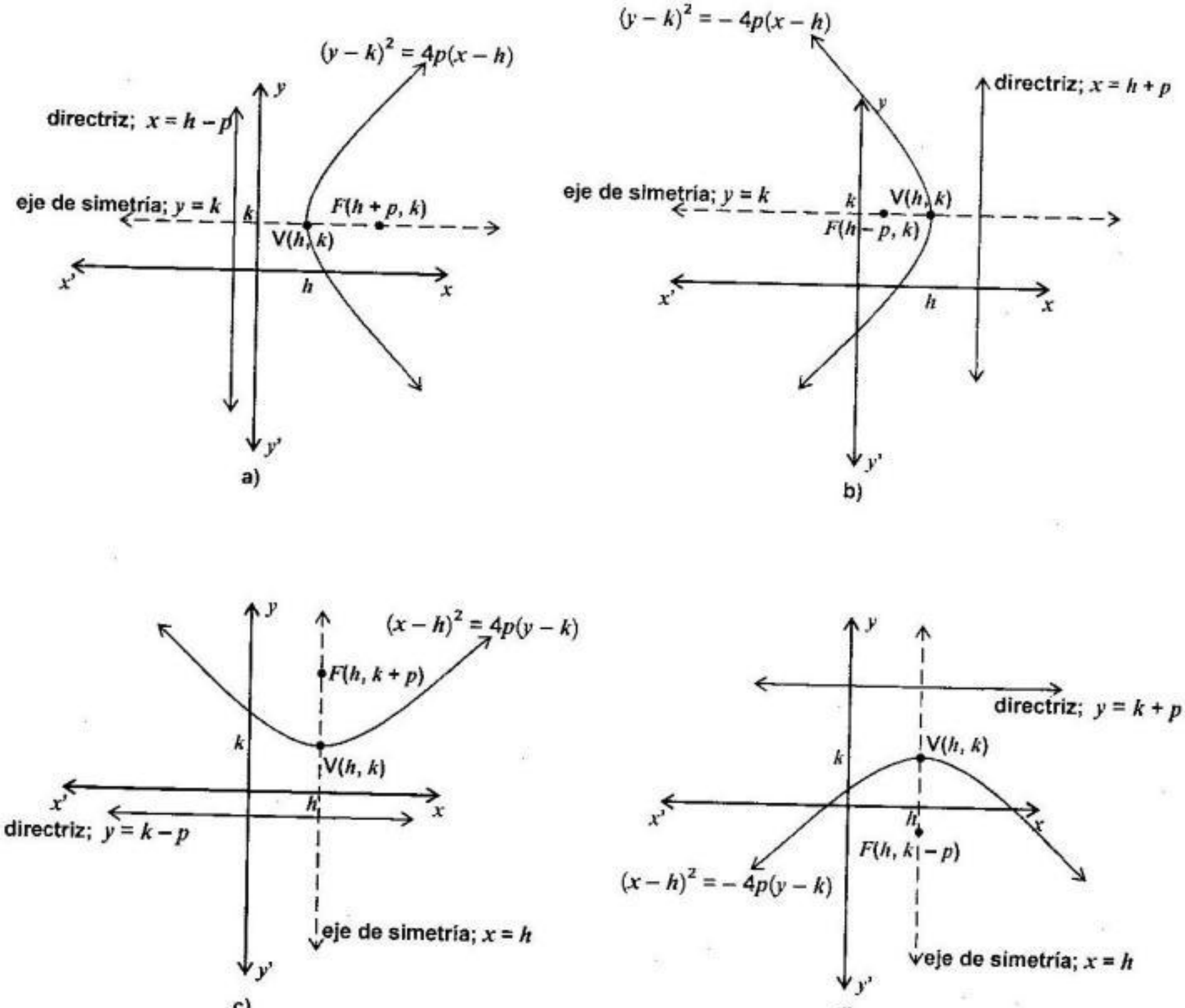
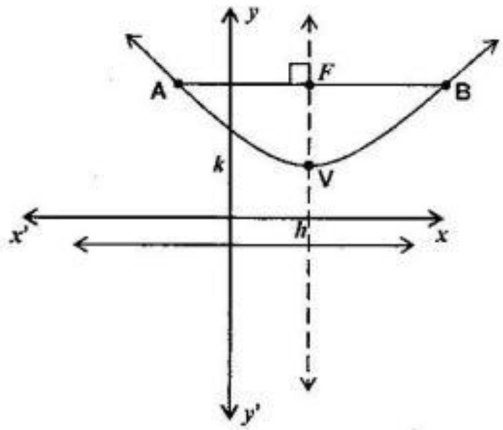


fig. 4

De igual forma que lo dicho anteriormente, las gráficas mostrados en la fig. 4, se pueden sintetizar en dos únicamente. Considerando que para la gráfica de la fig. 4 a) y b) se toma la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y si p es positivo la gráfica abre hacia la derecha y si p es negativo, la gráfica abre hacia la izquierda. Los otros elementos como ser el foco y la directriz, se encuentran asignándole el valor a p, ya sea positivo o negativo. De igual manera para la gráfica de la fig.4 c) y d) se toma la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y si p es positivo la gráfica abre hacia arriba y si p es negativo, la gráfica abre hacia abajo. Al desarrollar el binomio de cada una de las ecuaciones descritas anteriormente, se notará que en la ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A = 0$ ó bien $C = 0$, que es la condición que cumple dicha ecuación cuando se tiene una parábola ($AC = 0$).

Otro elemento de la parábola es la **cuerda focal o lado recto**. Véase la siguiente figura.



Nótese el segmento AB, éste pasa por el foco, es perpendicular al eje de simetría y contiene dos puntos de la parábola. A este segmento se le llama **cuerda focal o lado recto**. La longitud de esta cuerda focal es $|4p|$. Los ejemplos sobre esta cónica (parábola) son muy similares a los dados en la circunferencia. Se dará una ecuación en su forma canónica o en forma general y se pedirá que se encuentre sus elementos y que se trace su gráfica. Así mismo se darán condiciones y se pedirá que se encuentre la ecuación de la parábola. Véase los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1 Para cada ecuación, determinar las componentes o coordenadas del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y trazar su gráfica.

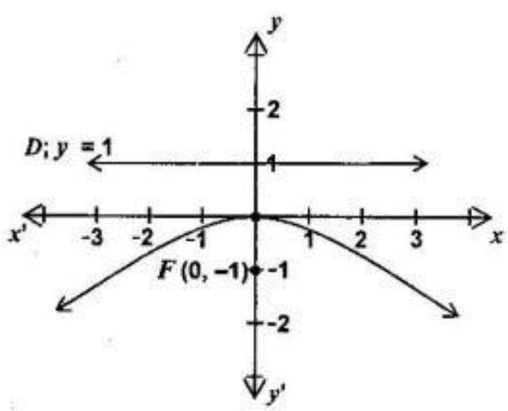
a) $x^2 = -4y$ **b)** $y^2 = \frac{1}{4}x$ **c)** $(y-1)^2 = -4(x-2)$

d) $(x+1)^2 = 8(y-2)$ **e)** $(x-3)^2 = -y-1$ **f)** $x^2 + 8x = 4y - 8$

g) $2y^2 - 4y = x - 2$ **h)** $4x^2 + 3y - 16x + 19 = 0$ **i)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Solución:

a) $x^2 = -4y$



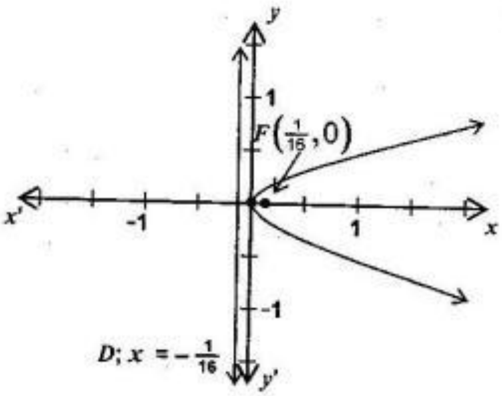
La ecuación dada $x^2 = -4y$, escrita en su forma canónica es $(x-0)^2 = -4(y-0)$, por las características de la misma, ésta corresponde a una parábola que abre hacia abajo. Nótese que $4p = -4$ (según la ecuación de la parábola), por lo tanto $p = -1$. Con el valor encontrado para p, se determina la ecuación de la directriz y el foco, además se puede hacer un bosquejo de la gráfica.

Determinando los elementos de la parábola: V(0, 0), F (0, p), directriz (D); $y = -p$.

Sustituyendo el valor para p en cada enunciado anteriormente se tiene que: F (0, −1), directriz (D); $y = -(-1) = 1$.

Nótese que lo que se tiene es un bosquejo de la gráfica. Si se quiere tener una mejor aproximación de ésta, se sugiere asignarle un (algunos) valor (es), ya sea a x o a y, y encontrar el valor para la otra variable sustituyendo este valor en la ecuación que le corresponde a dicha gráfica. Otros puntos que pueden ser útiles son los interceptos con lo ejes coordenados (I_x e I_y) si existen. También se puede (n) obtener otro (s) punto (s) por simetría. Por ejemplo, si $x = 1$; $(1)^2 = -4y$ e $y = -\frac{1}{4}$, así se obtiene el punto $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$.

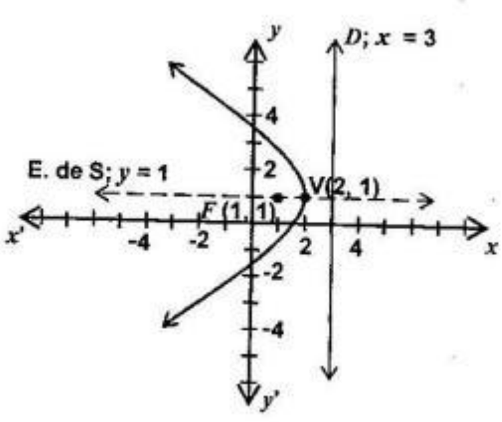
b) $y^2 = \frac{1}{4}x$



La ecuación dada $y^2 = \frac{1}{4}x$, escrita en su forma canónica es $(y-0)^2 = \frac{1}{4}(x-0)$, por las características de la misma, ésta corresponde a una parábola que abre a la derecha (nótese que p es positivo y con eje de simetría paralela al eje x). Se tiene que $4p = \frac{1}{4}$ (según la ecuación de la parábola), por lo tanto $p = \frac{1}{16}$. Luego, la directriz, el foco y el vértice son $x = -p = -\frac{1}{16}$, $F\left(\frac{1}{16}, 0\right)$ y $V(0, 0)$ respectivamente.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $x = 1$, se tiene que $y = \pm\frac{1}{2}$ obteniendo los puntos $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

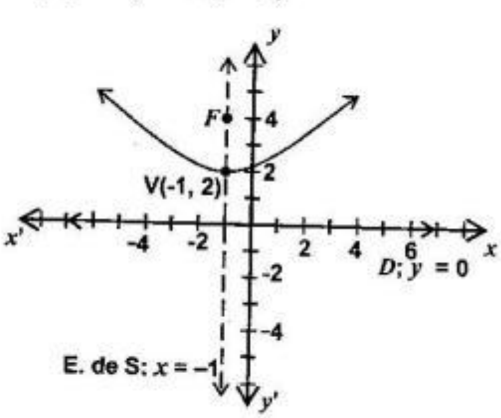
c) $(y-1)^2 = -4(x-2)$



La ecuación dada $(y-1)^2 = -4(x-2)$, está escrita en su forma canónica, por lo que su vértice es $(2, 1)$. Nótese que $h = 2$, $k = 1$ y $4p = -4$ ó $p = -1$. Por las características de la ecuación se tiene una parábola que abre a la izquierda con eje de simetría paralelo al eje x. Indicando los elementos de esta parábola se tiene que $V(2, 1)$, $F(h+p, k) = (2 + (-1), 1) = (1, 1)$, directriz ($D$); $x = h - p = 2 - (-1) = 3$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $x = 0$, en la ecuación $(y-1)^2 = -4(x-2)$ y despejando para y se obtienen tiene que $y = 1 \pm 2\sqrt{2}$ obteniendo los puntos $\left(0, 1-2\sqrt{2}\right)$ y $\left(0, 1+2\sqrt{2}\right)$, los cuales son I_y.

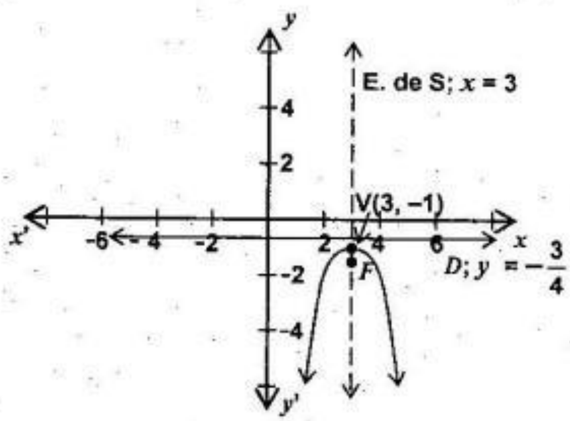
d) $(x+1)^2 = 8(y-2)$



La ecuación dada $(x+1)^2 = 8(y-2)$, está escrita en su forma canónica, por lo que su vértice es $(-1, 2)$. Nótese que $h = -1$, $k = 2$ y $4p = 8$ ó $p = 2$. Además p es positivo y la variable que está elevado al cuadrado es x, razón por la cual la ecuación dada determina una parábola que abre hacia arriba y con eje de simetría paralelo al eje y. Véase los elementos de esta parábola: $V(-1, 2)$, $F(h, k+p) = (-1, 2+2) = (-1, 4)$, directriz ($D$); $y = k - p = 2 - 2 = 0$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $x = 0$, en la ecuación $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ y despejando para y se tiene que $y = \frac{17}{8}$, formando el punto $\left(0, \frac{17}{8}\right)$. Otro punto si es necesario, se puede obtener por simetría o asignándole otro valor ya se a x ó a y.

e) $(x - 3)^2 = -y - 1$

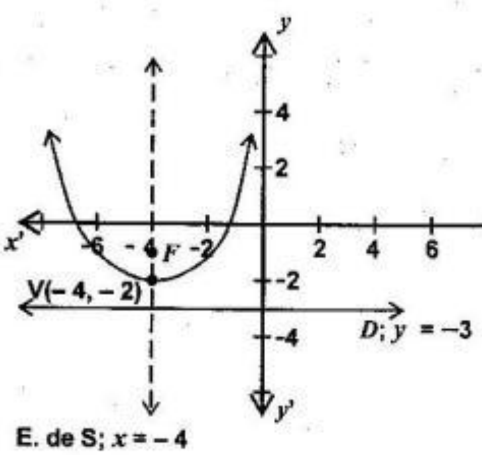


La ecuación dada $(x - 3)^2 = -y - 1$, no está escrita en su forma canónica. Llevándola a la forma canónica se tiene $(x - 3)^2 = -(y + 1)$, por lo que su vértice es $(3, -1)$. Nótese que $h = 3$, $k = -1$ y $4p = -1$ ó $p = -\frac{1}{4}$. Además, p es negativo y la variable que está al cuadrado es x, razón por la cual la ecuación dada determina una parábola que abre hacia abajo y con eje de simetría paralelo al eje y.

Véase los elementos de ésta: V(3, –1), $F(h, k + p) = \left(3, -1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \left(3, -\frac{5}{4}\right)$, directriz (D); $y = k - p = -1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $x = 2$, en la ecuación $(x - 3)^2 = -y - 1$ y despejando para y se tiene que $y = -2$, formando el punto $(2, -2)$. Otro punto si es necesario, se puede obtener por simetría.

f) $x^2 + 8x = 4y - 8$



La ecuación dada $x^2 + 8x = 4y - 8$, no está escrita en su forma canónica. Para llevarla a esta forma se debe completar el trinomio cuadrático con respecto a la variable x (completación de cuadrados). Véase:

$$x^2 + 8x = 4y - 8 \qquad \text{ecuación dada.}$$

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4y - 8 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \qquad \text{completación de cuadrado.}$$

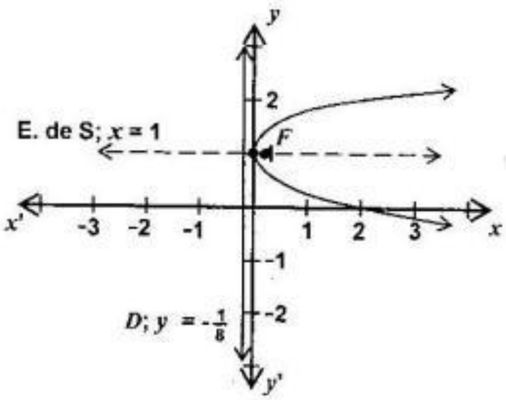
$$x^2 + 8x + 16 = 4y - 8 + 16 \qquad \text{simplificando.}$$

$$(x + 4)^2 = 4(y + 2) \qquad \text{simplificando y factorizando.}$$

De la última se tiene: V(–4, –2), $h = -4$, $k = -2$ y $4p = 4$ ó $p = 1$. Nótese que p es positivo y que la variable que está al cuadrado es x, razón por la cual la ecuación dada determina una parábola que abre hacia arriba y con eje de simetría paralelo al eje y. Luego los elementos de la parábola son: V(– 4, –2), $F(h, k + p) = (-4, -2 + 1) = (-4, -1)$, directriz (D); $y = k - p = -2 - 1 = -3$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $y = 0$, en la ecuación $(x + 4)^2 = 4(y + 2)$ y despejando para x se tiene que $x = -4 + 2\sqrt{2}$ ó $x = -4 - 2\sqrt{2}$, formando los puntos $\left(-4 + 2\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(-4 - 2\sqrt{2}, 0\right)$.

g) $2y^2 - 4y = x - 2$



La ecuación dada $2y^2 - 4y = x - 2$, no está escrita en su forma canónica, pero por facilidad, primero es necesario eliminar el coeficiente del término cuadrático. Para llevarla a la forma canónica se debe aplicar completación de cuadrados con respecto a la variable y. Véase:

$2y^2 - 4y = x - 2$ ecuación dada.

$\frac{1}{2}(2y^2 - 4y) = \frac{1}{2}(x - 2)$ multiplicando por $\frac{1}{2}$.

$y^2 - 2y = \frac{1}{2}x - 1$ simplificando.

$y^2 - 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x - 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$ completación de cuadrados.

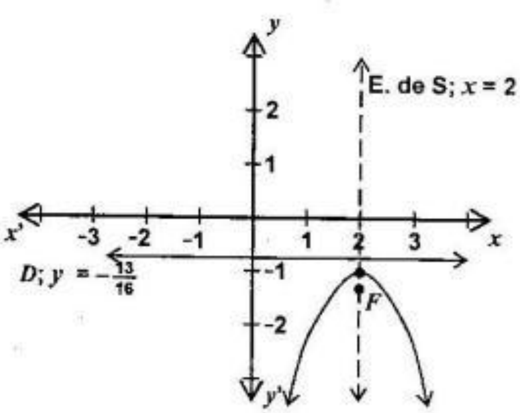
$y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{2}x - 1 + 1$ simplificando.

$(y - 1)^2 = \frac{1}{2}(x - 0)$ simplificando y factorizando.

De la última se tiene: V(0, 1), $h = 0$, $k = 1$ y $4p = \frac{1}{2}$ ó $p = \frac{1}{8}$. Nótese que p es positivo y que la variable que está al cuadrado es y, luego la ecuación dada determina una parábola que abre hacia la derecha y con eje de simetría paralelo al eje x. Los elementos de esta parábola son: V(0, 1), $F(h + p, k) = \left(0+\frac{1}{8},1\right) = \left(\frac{1}{8},1\right)$, directriz ($D$); $x = h - p = 0 - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $y = 0$, en la ecuación $(y - 1)^2 = \frac{1}{2}(x - 0)$ y despejando para x se tiene que $x = 2$, formando el punto (2, 0).

h) $4x^2 + 3y - 16x + 19 = 0$



La ecuación dada $4x^2 + 3y - 16x + 19 = 0$, no está escrita en su forma canónica. Expresándola en su forma canónica (completación de cuadrados con respecto a la variable x). Véase:

$4x^2 + 3y - 16x + 19 = 0$ ecuación dada.

$4x^2 - 16x = -3y - 19$ transponiendo términos

$\frac{1}{4}(4x^2 - 16x) = \frac{1}{4}(-3y - 19)$ multiplicando por $\frac{1}{4}$.

$x^2 - 4x = -\frac{3}{4}y - \frac{19}{4}$ simplificando.

$x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}y - \frac{19}{4} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$ completación de cuadrados.

$x^2 - 4x + 4 = -\frac{3}{4}y - \frac{19}{4} + 4$ simplificando.

$x^2 - 4x + 4 = -\frac{3}{4}y - \frac{3}{4}$ simplificando

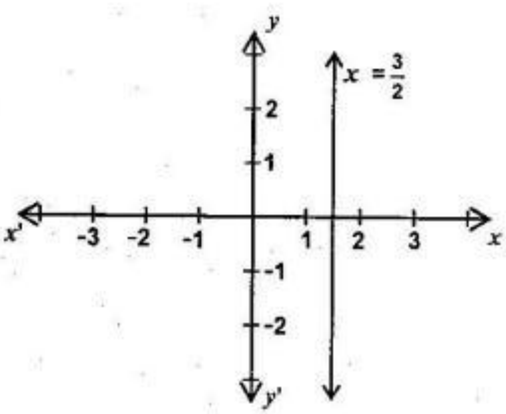
$(x - 2)^2 = -\frac{3}{4}(y + 1)$ simplificando y factorizando.

En esta última ecuación, es necesario extraer como factor común el coeficiente principal del miembro que no está elevado al cuadrado (expresar de forma equivalente). De la última se tiene: V(2, −1), $h = 2$, $k = -1$ y $4p = -\frac{3}{4}$ ó $p = -\frac{3}{16}$.

Nótese que p es negativo y que la variable que está al cuadrado es x, por lo que la ecuación dada determina una parábola que abre hacia abajo y con eje de simetría paralelo al eje y. Identificando los elementos de esta parábola: V(2, −1), $F(h,\ k+p) = \left(2,\ -1+\left(-\frac{3}{16}\right)\right) = \left(2,\ -\frac{19}{16}\right)$, directriz ($D$); $y = k - p = -1 - \left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{13}{16}$.

Mostrando un bosquejo de la gráfica; haciendo $x = 1$, en la ecuación $(x-2)^2 = -\frac{3}{4}(y+1)$ y despejando para y se tiene que $y = -\frac{7}{3}$, formando el punto $\left(1, -\frac{7}{3}\right)$.

i) $4x^2 - 12x + 9 = 0$



La ecuación dada $4x^2 - 12x + 9 = 0$, no está escrita en su forma canónica. Para llevarla a la misma, se aplica completación de cuadrados con respecto a la variable x. Véase:

$4x^2 - 12x + 9 = 0$	ecuación dada.
$\frac{1}{4}(4x^2 - 12x + 9) = \frac{1}{4}(0)$	multiplicando por $\frac{1}{4}$.
$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$	simplificando.
$x^2 - 3x = -\frac{9}{4}$	transponiendo término
$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$	completación de cuadrados.
$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{9}{4}$	simplificando.
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$	simplificando y factorizando
$x = \frac{3}{2}$	despejando para x.

Nótese que esta última ecuación, al llevarla a la forma canónica, está comparada con cero, que la variable que está elevada al cuadrado es x y que la variable y no se observa. Esto indica que no existe parábola, pero la ecuación satisface las condiciones de la parábola ya que AC = 0. Entonces, lo que existe es una parábola degenerada, ya que lo que se tiene es una recta vertical $x = \frac{3}{2}$.

Se debe tener en cuenta, que la ecuación general de la parábola, es una de las siguientes $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ ó $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, pero en el caso que E, en la primera ecuación ó D en la segunda sean 0, se tendrá una parábola degenerada que puede ser una recta vertical o una horizontal respectivamente o tenerse una ecuación que ningún punto la satisfaga, es decir que la solución sea vacía. ■

Ejemplo 2 Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la parábola, que satisfaga las siguientes condiciones.

a) Foco (F) en (2,0) y vértice (V) en el origen.

b) $F(0, -3)$ y directriz la recta $y = 3$.

c) Directriz la recta $x = -\frac{3}{2}$ y V(0, 0).

d) V(2, −3) y $F(2, -5)$.

e) $F(-2, 4)$ y directriz la recta $y = 2$.

f) $F(-3, -2)$ y directriz la recta $x = 1$.

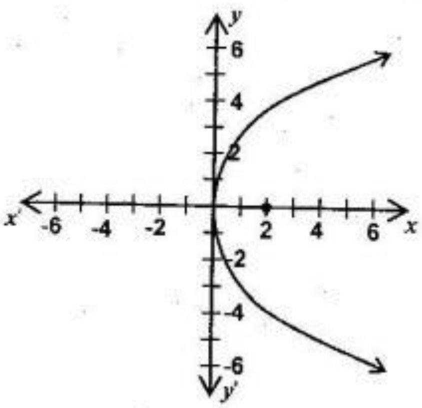
g) V(0, 0), pasa por el punto (2, 3) y eje de simetría el eje y.

h) V(2, 1), eje de simetría paralelo al eje x y pasa por el punto (1, 0).

i) V(−1, −2), abre a la izquierda y el lado recto con longitud de 3 unidades.

Solución:

a) Foco (F) en (2,0) y vértice (V) en el origen.



Por facilidad, es preferible que se elabore un bosquejo de la gráfica para tener una idea de la misma. Recuérdese que depende de su forma, para tomar la única ecuación que le corresponde.

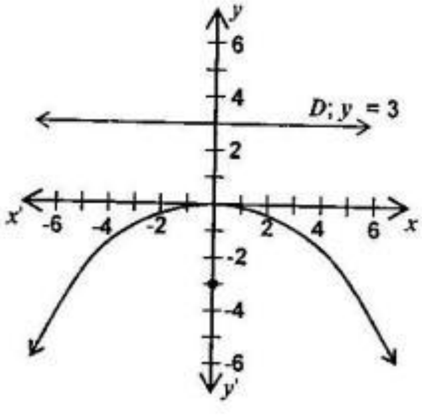
Según las condiciones dadas, la parábola abre a la derecha por lo que la ecuación que le corresponde es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ con $p > 0$. Como el vértice esta en el origen, esto indica que V(0,0), donde $h = 0$ y $k = 0$. Además el foco es de la forma $F(h + p, k)$, lo cual indica que $F(0 + p, 0) = F(2, 0)$, por lo que $p = 2$ (valor que se necesita para encontrar la ecuación).

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$ y se encuentra la ecuación solicitada en forma canónica, luego desarrollando el binomio, simplificando y comparando con cero se obtiene la ecuación general.

Véase:

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$	ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.
$(y - 0)^2 = 4(2)(x - 0)$	sustituyendo el valor de h, k y p.
$y^2 = 8x$	simplificando y se obtiene la forma canónica o estándar de la ecuación.
$y^2 - 8x = 0$	comparando con cero y se obtiene la ecuación general.

b) $F(0, -3)$ y directriz la recta $y = 3$.



Ubicando las condiciones dadas (foco y directriz) en el plano se tiene la figura de la izquierda. Nótese que con estas condiciones, la parábola abre hacia abajo, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea negativo. Aplicando la definición de la parábola, se tiene que el vértice está dado por el punto medio del segmento que tiene como extremos el foco y el punto de intersección del eje de la parábola y la directriz que es (0,3). Se obtiene entonces que el punto medio es (0,0) y por tanto V(0,0).

La ecuación que le corresponde a ésta es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ con $p < 0$. Como el vértice esta en el origen, esto indica que V(0,0), donde $h = 0$, $k = 0$ y además el foco es de la forma $F(h, k + p)$.

Esto indica que $F(0, 0 + p) = F(0, -3)$, por lo que $p = -3$.

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación que le corresponde $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Véase:

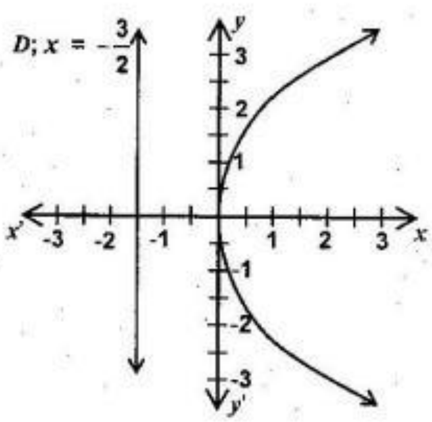
$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$ ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.

$(x - 0)^2 = 4(-3)(y - 0)$ sustituyendo el valor de h, k y p.

$x^2 = -12y$ simplificando y se obtiene la forma canónica o estándar.

$x^2 + 12y = 0$ comparando con cero, se obtiene la ecuación general.

c) Directriz la recta $x = -\frac{3}{2}$ y V(0, 0).



Elaborando una gráfica con las condiciones dadas (vértice y directriz) se tiene la figura de la izquierda. Nótese que con estas condiciones, la parábola abre hacia la derecha, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea positivo.

La ecuación que le corresponde a ésta es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ con $p > 0$. Como el vértice es el origen, esto indica que V(0,0), donde $h = 0$ y $k = 0$. Además la directriz esta dada por la ecuación $x = h - p$, lo cual indica que $x = 0 - p$ ó $x = -p$ ó $-p = -\frac{3}{2}$ ó $p = \frac{3}{2}$.

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Véase:

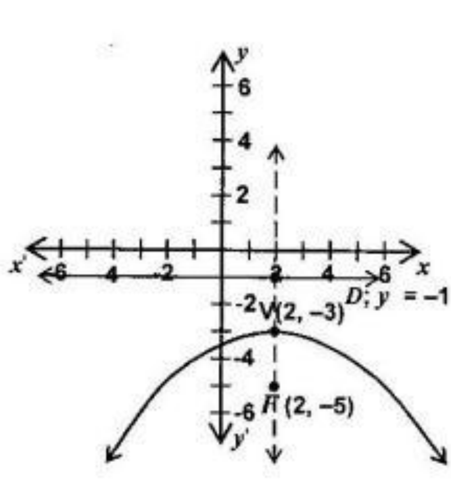
$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$ ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.

$(y - 0)^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)(x - 0)$ sustituyendo el valor de h, k y p.

$y^2 = 6x$ simplificando y se obtiene la forma canónica o estándar.

$y^2 - 6x = 0$ comparando con cero se obtiene la ecuación general.

d) V(2, −3) y $F(2, -5)$.



Ubicando las condiciones dadas (foco y vértice) en el plano de ejes coordenados se tiene la figura de la izquierda. Nótese que con estas condiciones, la parábola abre hacia abajo, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea negativo. En este caso se conoce el vértice que es V(2, −3) y el foco $F(2, -5)$.

La ecuación que le corresponde a ésta es $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$ con $p < 0$. Como el vértice es el punto V(2, −3), esto indica que $h = 2$ y $k = -3$. Además el foco es de la forma $F(h, k + p)$, lo cual indica que $F(2, -3 + p) = F(2, -5)$, por lo que $-3 + p = -5$ ó $p = -2$ (dos pares ordenados son iguales si sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes son iguales).

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Véase:

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.

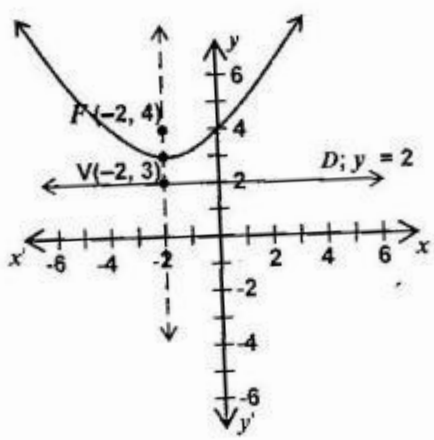
$(x-2)^2 = 4(-2)(y-(-3))$ sustituyendo el valor de h, k y p.

$(x-2)^2 = -8(y+3)$ simplificando y se obtiene la ecuación en forma canónica o estándar.

$x^2 - 4x + 4 = -8y - 24$ desarrollando el binomio y aplicando propiedad distributiva.

$x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$ simplificando y comparando con cero (ecuación general).

e) $F(-2, 4)$ y directriz la recta $y = 2$.



Según las condiciones dadas, la parábola abre hacia arriba, por lo que se espera que el valor encontrado para p sea positivo. En este caso se conoce el foco que es $F(-2, 4)$ y la directriz la recta $y = 2$.

La ecuación que le corresponde a ésta es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con $p > 0$. El vértice es el punto medio del segmento con extremos $F(-2, 4)$ y $(-2, 2)$ (intersección del eje de la parábola y la directriz), luego $V(-2, 3)$ con $h = -2$ y $k = 3$.

Como el foco es el punto $F(-2, 4)$ y por la forma que tiene la parábola, las coordenadas del foco en general son $F(h, k+p)$ esto indica que $F(-2, 3+p)$ y como $F(-2, 4)$, se tiene que $3 + p = 4$ ó $p = 1$ (dos pares ordenados son iguales si sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes son iguales).

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Véase:

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.

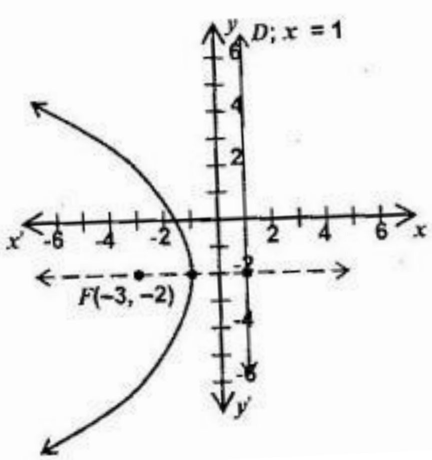
$(x-(-2))^2 = 4(1)(y-3)$ sustituyendo el valor de h, k y p.

$(x+2)^2 = 4(y-3)$ simplificando y se obtiene la ecuación en su forma canónica o estándar.

$x^2 + 4x + 4 = 4y - 12$ desarrollando el binomio y aplicando propiedad distributiva.

$x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$ simplificando y comparando con cero (ecuación general).

f) $F(-3, -2)$ y directriz la recta $x = 1$.

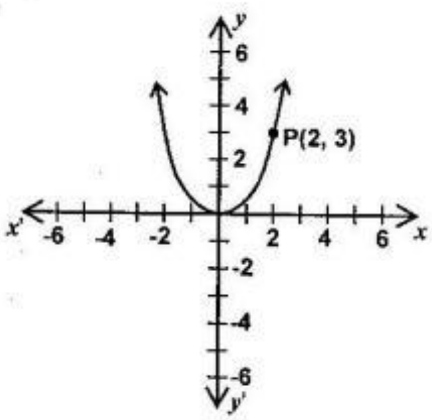


Según las condiciones dadas y trazando una gráfica, se observa que la parábola abre hacia la izquierda. Razón por la cual, le corresponde la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $p < 0$. El vértice está determinado por el punto medio del segmento con extremos el foco y el punto de intersección de la directriz y el eje de la parábola, el cual es $V(-1, -2)$, donde $h = -1$ y $k = -2$. Además el foco que le corresponde a ésta, está generalizado por $F(h+p,\ k)$ ó $F(-1+p,\ -2)$ y como se indica que $F(-3, -2)$, se tiene que $-1 + p = -3$ ó $p = -2$.

Conociendo el valor de h, k y p, se sustituyen en la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
Véase:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	ecuación que le corresponde a la parábola por la forma de la misma.
$(y-(-2))^2 = 4(-2)(x-(-1))$	sustituyendo el valor de h, k y p.
$(y+2)^2 = -8(x+1)$	simplificando y se obtiene la ecuación en forma canónica o estándar
$y^2 + 4y + 4 = -8x - 8$	desarrollando el binomio y aplicando propiedad distributiva.
$y^2 + 4y + 8x + 12 = 0$	simplificando y comparando con cero (ecuación general).

g) V(0, 0), pasa por el punto (2, 3) y eje de simetría el eje y.



Según las condiciones dadas, la parábola abre hacia arriba, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea positivo. Con los datos conocidos se tiene que V(0,0), eje de simetría $y = 0$ y la ecuación que le corresponde a la misma es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con $p > 0$.

Como el vértice es V(0,0), la ecuación se reduce a $x^2 = 4py$ con $p > 0$. Ahora si el punto (2,3) está en dicha parábola, este punto satisface la ecuación de la misma.

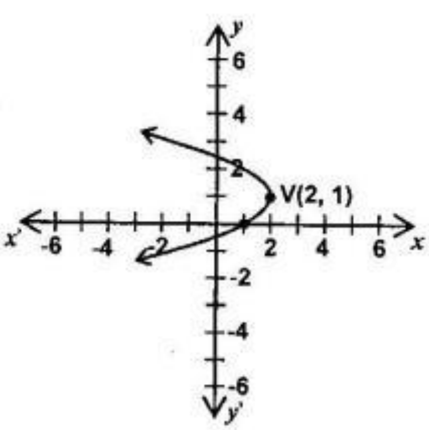
Luego retomando la ecuación $x^2 = 4py$ y sustituyendo el punto (2,3) en ésta, se obtiene el valor para p, que es lo que hace falta para obtener la ecuación solicitada.

Véase:

$x^2 = 4py$	ecuación que le corresponde a la curva.
$(2)^2 = 4p(3)$	sustituyendo el punto (2,3) en la ecuación.
$4 = 12p$	simplificando.
$\frac{1}{3} = p$	despejando para p.

Sustituyendo este valor para p, en la ecuación que le corresponde a la parábola antes indicada, se tiene que $x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$ ó $x^2 = \frac{4}{3}y$, en su forma canónica ó $3x^2 - 4y = 0$ (ecuación general).

h) V(2, 1), eje de simetría paralelo al eje x y pasa por el punto (1, 0).



Haciendo un bosquejo de la parábola, según las condiciones dadas, se observa que la parábola abre hacia la izquierda, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea negativo. Según los datos dados, se tiene el V(2,1), la ecuación de la directriz es de la forma $y = h - p$ y la ecuación que le corresponde a la parábola es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $p < 0$.

Como el vértice es V(2,1), la ecuación se transforma en $(y-1)^2 = 4p(x-2)$ con $p < 0$. Ahora si el punto (1,0) está en dicha parábola, este punto satisface la ecuación de la misma.

Luego retomando la ecuación $(y-1)^2 = 4p(x-2)$ y sustituyendo el punto (1,0) en ésta, se obtiene el valor para p, que es lo que hace falta para obtener la ecuación solicitada.

Véase:

$(y-1)^2 = 4p(x-2)$ ecuación que le corresponde a la curva.

$(0-1)^2 = 4p(1-2)$ sustituyendo el punto (1,0) en la ecuación.

$1 = 4p(-1)$ simplificando.

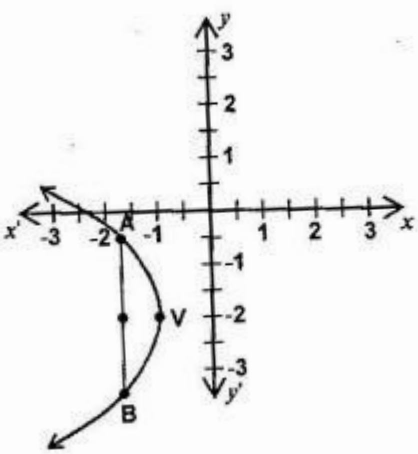
$-\frac{1}{4} = p$ despejando para p.

Sustituyendo este valor para p, en la ecuación que le corresponde a la ecuación de la parábola antes indicada, se tiene que:

$$(y-1)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) \quad \text{ó} \quad (y-1)^2 = -(x-2) \text{ (ecuación canónica)}$$

Desarrollando el binomio y simplificando, se llega a la ecuación general; $y^2 - 2y + x - 1 = 0$.

i) V(−1, −2), abre a la izquierda y el lado recto con longitud de 3 unidades.



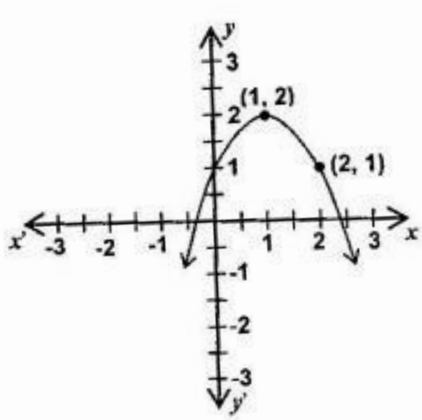
Haciendo un bosquejo de la parábola, según las condiciones dadas, se observa que la parábola abre hacia la izquierda, por lo que se espera que el valor por encontrar para p sea negativo. Según los datos dados, se tiene que V(−1, −2) y que AB = 3. Como la longitud de la cuerda focal es igual a $|4p|$, esto implica que $|4p| = 3$. De donde $4p = 3$ ó $4p = -3$. Despejando para p se tiene que $p = \frac{3}{4}$ ó $p = -\frac{3}{4}$. Antes se dijo que $p < 0$, luego la ecuación que le corresponde a la misma es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $p < 0$.

Sustituyendo los valores para h, k y p en la ecuación se tiene $(y-(-2))^2 = 4\left(-\frac{3}{4}\right)(x-(-1))$.

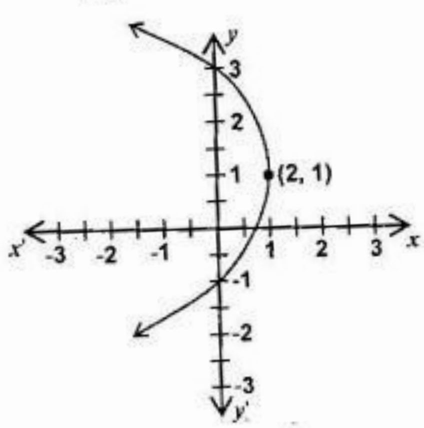
Simplificando se tiene $(y+2)^2 = -3(x+1)$; ecuación canónica. Desarrollando el binomio y simplificando, se obtiene la misma en forma general: $y^2 + 4y + 3x + 7 = 0$. ■

Ejemplo 3 Para cada gráfica indicada, determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) que le corresponde.

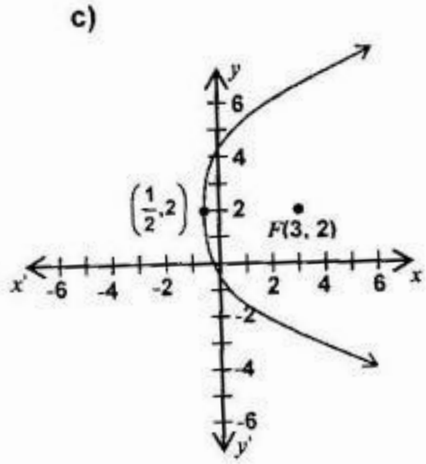
a)



b)

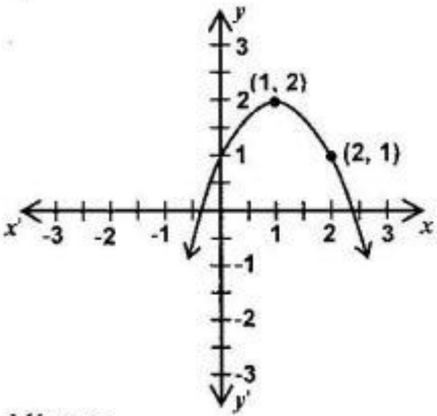


c)



Solución:

a)



Según la gráfica dada, se observa que la parábola abre hacia abajo. Según los datos dados, se tiene que el V(1,2), eje de simetría paralelo al eje y y la ecuación de la directriz de la forma $y = k - p$. Además la ecuación que le corresponde a la parábola es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con $p < 0$.

Como el vértice es V(1,2), se obtiene la ecuación al sustituir el valor de h y k; $(x-1)^2 = 4p(y-2)$ con $p < 0$. Ahora si el punto (2,1) está en dicha parábola, este punto satisface la ecuación de esta parábola.

Luego retomando la ecuación $(x-1)^2 = 4p(y-2)$ y sustituyendo el punto (2,1) en la misma, se obtiene el valor para p.

Véase:

$(x-1)^2 = 4p(y-2)$ ecuación que le corresponde a la curva.

$(2-1)^2 = 4p(1-2)$ sustituyendo el punto (2,1) en la ecuación.

$1 = 4p(-1)$ simplificando.

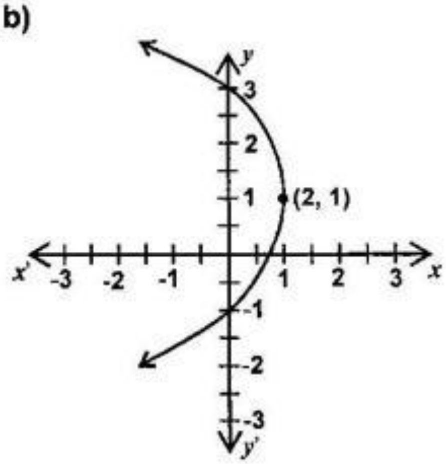
$-\dfrac{1}{4} = p$ despejando para p.

Sustituyendo este valor para p, en la ecuación que le corresponde a la parábola antes indicada, se tiene que:

$$(x-1)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(y-2) \quad \text{ó} \quad (x-1)^2 = -(y-2);$$ ecuación en forma canónica o estándar.

Desarrollando el binomio y simplificando, se obtiene la ecuación general $x^2 - 2x + y - 1 = 0$.

b)



Observando la gráfica dada, se nota que la parábola abre hacia la izquierda. Según los datos dados, se tiene el V(2,1), eje de simetría paralelo al eje x y la ecuación de la directriz de la forma $x = h - p$. Además la ecuación que le corresponde a la misma es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $p < 0$.

Como el vértice es V(2,1), se obtiene la ecuación $(y-1)^2 = 4p(x-2)$, al sustituir el valor de h y k; con $p < 0$. Ahora tomando uno de los puntos que muestra la grafica; (0,3) y sustituyendo el mismo en la ecuación $(y-1)^2 = 4p(x-2)$ se obtiene el valor para p.

Véase:

$(y-1)^2 = 4p(x-2)$ ecuación que le corresponde a la curva después de haber sustituido h y k.

$(3-1)^2 = 4p(0-2)$ sustituyendo el punto (0,3) en la ecuación.

$4 = 4p(-2)$ simplificando.

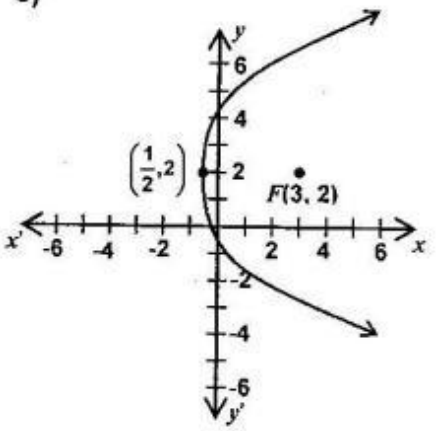
$-\dfrac{1}{2} = p$ despejando para p.

Sustituyendo este valor para p, en la ecuación que le corresponde a la parábola antes indicada, se tiene que:

$$(y-1)^2 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2) \quad \text{ó} \quad (y-1)^2 = -2(x-2);$$ ecuación canónica o estándar.

Desarrollando el binomio y simplificando, se tiene la ecuación general; $y^2 - 2y + 2x - 3 = 0$.

c)



Observando la gráfica dada, ésta abre a la derecha; por lo que $p > 0$, $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, eje de simetría paralelo de las x y ecuación de la directriz de la forma $x = h - p$, $F\ (3,2)$ y en forma general la siguiente $F(h + p,\ k)$. Según las condiciones dadas, la ecuación que le corresponde a esta parábola es $(y-k)^2 = 4p\ (x-h)$ con $p > 0$.

Como el vértice es $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, se obtiene la ecuación $(y-2)^2 = 4p\left(x - \frac{1}{2}\right)$, al sustituir el valor de h y k; con $p > 0$.

Ahora se indica el $F\ (3,2)$ y que en forma general corresponde a $F(h + p,\ k)$. Comparando estos dos pares ordenados que determinan el foco y sustituyendo los valores de h y k se tiene $F(3,2) = F\left(\frac{1}{2} + p, 2\right)$.

Recordando que dos pares ordenados son iguales si y sólo si sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes son iguales, se plantea entonces que $\frac{1}{2} + p = 3$ ó $p = \frac{5}{2}$. Sustituyendo los valores de h, k y p en la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ se tiene $(y-2)^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ó $(y-2)^2 = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$ obteniendo la ecuación en forma canónica o estándar.

Desarrollando el binomio y simplificando, se llega a la ecuación general; $y^2 - 4y - 10x + 9 = 0$. ■

Ejercicios 6.2

1. Para cada ecuación, encontrar si es posible, las componentes del vértice, del foco, la ecuación de la directriz y trazar su gráfica.

a) $y^2 = -6x$	b) $x^2 + 4y = 0$	c) $(x-2)^2 = 2y$
d) $(y+3)^2 = -\frac{1}{2}x$	e) $(y-2)^2 = -4(x+3)$	f) $(x+1)^2 = -3(y-2)$
g) $x^2 + 2y - 3x = -5$	h) $y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$	i) $y^2 - 3x + 2y + 4 = 0$
j) $2x^2 + 10x + 2y + 3 = 0$	k) $x^2 + 4x + 4 = 0$	l) $x^2 + x = 6$
m) $y^2 + 1 = 2y$	n) $3x^2 + 6x - 4y = 5$	o) $9x^2 + 6x + 2y = 5$
p) $y^2 + 4y + x + 7 = 0$	q) $4y^2 + 12y - x + 8 = 0$	r) $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$

2. Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la parábola, que satisfaga las condiciones indicadas.

a) Vértice (V) en el origen y directriz $y = 2$.

b) $F(-3, 0)$ y vértice en el origen.

c) Pasa por (2, 3), V(0,0) y con eje en el eje de las x.

d) Directriz la recta $x = \frac{5}{3}$ y V(0, 0) .

e) Lado recto mide 5 unidades, V(0, 0) y abre hacia abajo.

f) $F(-1, -2)$, directriz a recta $x = 3$ y pasa por $(0, -1)$.

g) V(2, –3) y $F(2, -5)$.

h) $F(-3, 4)$ y directriz la recta $y = 2$,

i) $F(-3, -2)$ y directriz $x = 1$.

j) $F(2, 4)$ y directriz la recta $x + 4 = 0$.

k) $F(-4, 4)$ y directriz $y + 2 = 0$.

l) V(–1, 1), eje vertical y pasa por (–3, 0)

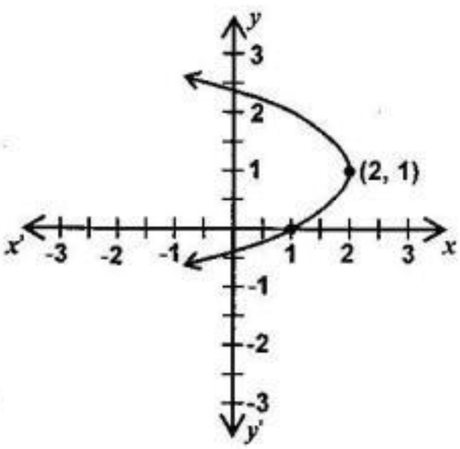
m) $F(-1, -1)$ y V(–2, –1).

n) V(–3, 2), eje horizontal y pasa por (–4, –1)

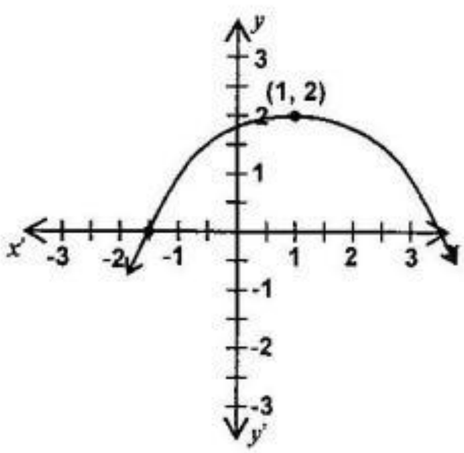
o) V(3, –2), cuerda focal con 4 unidades de longitud y abre a la derecha.

3. Para cada gráfica indicada, determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) que le corresponde.

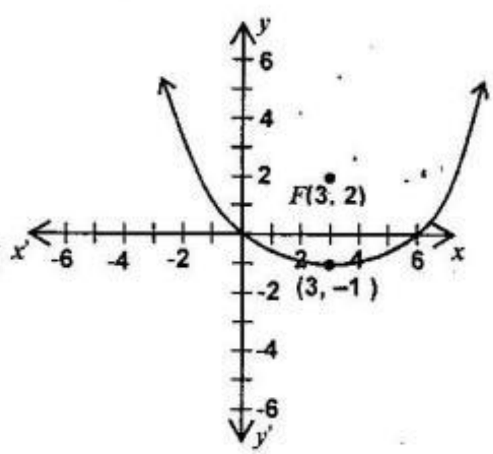
a)



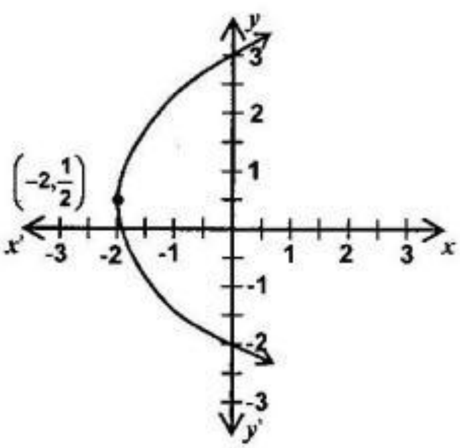
b)



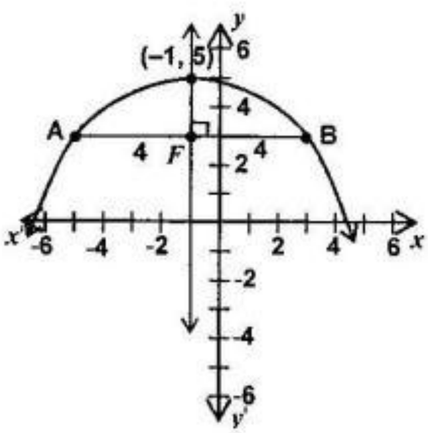
c)



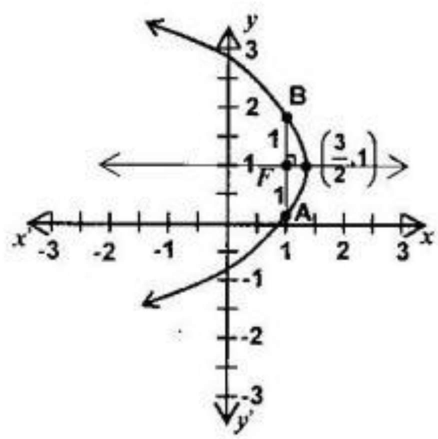
d)



e)



f)



6.3 LA ELIPSE

La siguiente cónica por analizar es la **elipse**. Véase la definición de la misma.

Definición Una **elipse** es la gráfica formada por todos los puntos P en el plano, tales que la suma de las distancias de P desde dos puntos fijos en el plano sea una constante. Los puntos fijos se llaman **focos**.

Para que esta definición tenga sentido, la constante (la suma de las distancias a los focos) debe ser mayor que la distancia entre los focos. Aplicando la definición, se traza una gráfica que representa dicha cónica. La interpretación geométrica, se muestra en las siguientes figuras, pues todas determinan una elipse, pero la fig. 1 b) y c), es una elipse dibujada en el plano cartesiano, que es de nuestro interés.

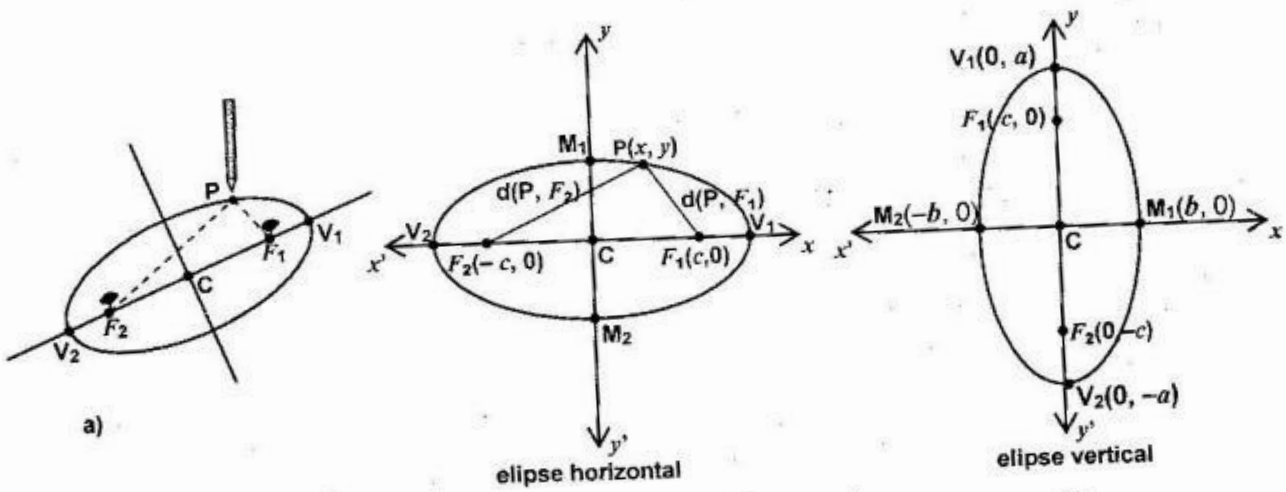


fig. 1

Una elipse se puede dibujar al tomar un pedazo de cuerda y fijando dos clavos en una superficie plana a una distancia menor que la longitud de la cuerda. Si en estos clavos, se atan los extremos de la cuerda, tensando dicha cuerda con un lápiz y además haciendo un recorrido alrededor de ambos clavos, manteniendo la cuerda tensa, se trazará la figura en mención (ver fig. 1 a)). Estos clavos, corresponden a la posición de cada foco de la elipse. Se debe tener claro que d(P, F_2) + d(P, F_1) es siempre una constante y esta constante se denomina $2a$.

Nótese que la definición es puramente geométrica y en ella no se habla de coordenadas ni de la ecuación, que también en ésta, resulta una ecuación cuadrática en dos variables. A continuación se presenta la deducción de la ecuación de la elipse.

Supóngase que la distancia entre los focos se denomina $2c$ ($c > 0$). Llámese F_1 y F_2 a los focos y ubíquense en puntos convenientes, para el caso F_1 en $(c, 0)$ y F_2 en $(-c, 0)$. Sea P(x, y) un punto de la elipse y sean d_1 la distancia de P a F_1 y d_2 la distancia de P a F_2 (ver fig. 1 b)). La definición dice que $d_1 + d_2$ es siempre una constante; considérese que esta constante es $2a$, la cual debe ser mayor que $2c$, o equivalente a decir que a es mayor que c.

Luego $d_1 + d_2 = 2a$.

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos del plano en la fig. 1 b) se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = 2a \qquad \text{aplicando la definición de distancia}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} \qquad \text{transponiendo términos}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2 \qquad \text{elevando al cuadrado}$$

$$(x-c)^2+(y-0)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + (x+c)^2+(y-0)^2 \qquad \text{simplificando}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 4a^2 + (x+c)^2 + \cancel{(y-0)^2} - (x-c)^2 - \cancel{(y-0)^2} \qquad \text{transponiendo términos}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 4a^2 + (x+c)^2 - (x-c)^2 \qquad \text{simplificando}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} + 2xc - \cancel{c^2} \qquad \text{desarrollando los binomios}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 4a^2 + 4xc \qquad \text{simplificando}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = a + \frac{c}{a}x \qquad \text{dividiendo por } 4a \text{ cada miembro}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 \qquad \text{elevando al cuadrado}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \qquad \text{desarrollando el binomio y simplificando}$$

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \qquad \text{desarrollando el binomio y simplificando}$$

$$x^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{transponiendo términos}$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-c^2)}x^2 + \frac{y^2}{a^2-c^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2-c^2} \qquad \text{dividiendo por } a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad \text{simplificando}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{haciendo } b=\sqrt{a^2-c^2} \text{ ya que } a > c$$

Esta última ecuación, corresponde a la de una elipse horizontal (ver fig. 1 b)).

Véase los elementos de una elipse, en la fig. 1 b): **dos vértices** $V_1(a, 0)$; $V_2(-a, 0)$, **dos focos** $F_1(c, 0)$; $F_2(-c, 0)$, **el centro** que es el punto medio del segmento que tiene como extremos los puntos fijos (focos) o el punto medio del segmento que contiene los vértices; en este caso es $C(0, 0)$. El $\overline{V_1V_2}$ es llamado **eje mayor**, el $\overline{M_1M_2}$ es llamado **eje menor**, $V_1V_2 = 2a$, $M_1M_2 = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Nótese que los extremos del eje mayor son los vértices y los extremos del eje menor son $M_1(0, b)$ y $M_2(0, -b)$. **La elipse puede ser horizontal** (con eje mayor paralelo al eje de las x; ver fig.1 b)) **o vertical** (con eje mayor paralelo al eje de las y; ver fig. 1 c)). Si la elipse es vertical, los vértices, focos y los extremos del eje menor son $V_1(0, a)$; $V_2(0, -a)$, focos $F_1(0, c)$; $F_2(0, -c)$ y $M_1(b, 0)$; $M_2(-b, 0)$ respectivamente (ver fig.1c).

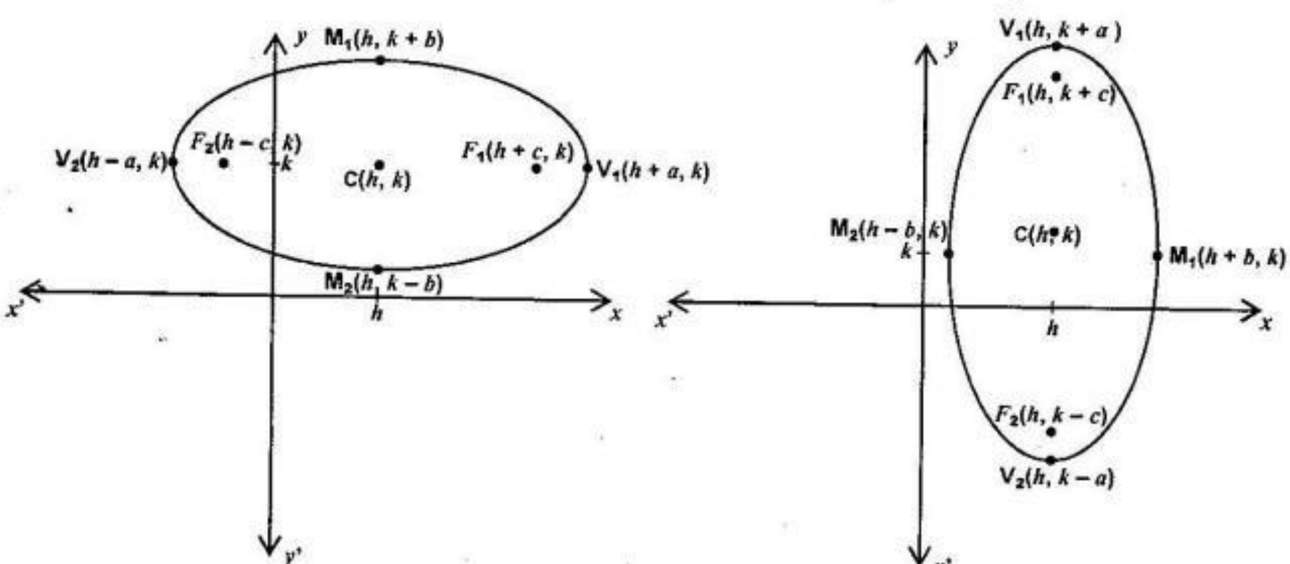
Si la elipse es vertical, la ecuación que le corresponde es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ con $a > b$. Antes se supuso que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, luego $b^2 = a^2 - c^2$ ó $c^2 = a^2 - b^2$ ó $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Nótese que c es una de las componentes del foco.

Otro elemento de la elipse es la **excentricidad** (e) la cual se define por $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$. Ya que $c < a$, la excentricidad e, toma valores entre cero y uno ($0 < e < 1$). Con la excentricidad se puede notar la "anchura o achatamiento" de una elipse. Si a se mantiene fijo y c tiene un valor "pequeño", entonces e se acerca a cero. Esto significa que los focos están muy cercanos entre sí, y la elipse **es casi una circunferencia** ver fig. 2 a). Por otro lado, si c tiene un valor muy cercano al valor de a, entonces el valor de e es muy cercano a 1 y la elipse es bastante "achatada" ver fig. 2 b). En otras palabras cuando $e \to 0$ (e tiende a 0) la elipse se asemeja a una circunferencia de radio a, y cuando $e \to 1$ (e tiende a 1), la elipse asemeja a un segmento de longitud $2a$.

a) fig. 2 b)

Una elipse puede estar desfasada y con centro en el punto (h, k). Véase la siguiente figura, la ecuación que le corresponde y los elementos de la misma. En cada caso $a > b$.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



a) fig. 3 b)

Nótese las condiciones de la ecuación para cada elipse dibujada anteriormente. Si la elipse es horizontal, el valor de a está bajo la variable x y si la elipse es vertical, el valor de a está bajo la variable y. En el caso que se conozca la ecuación, la forma de identificar si la elipse es vertical u horizontal, es observando el valor numérico que esta debajo de cada variable que tiene la ecuación. Si el valor mayor observado está bajo la variable x, la elipse es horizontal, o si el mayor valor está bajo la variable y, entonces es una elipse vertical.

Si se tiene una de las ecuaciones antes mencionadas y se desarrollan los binomios y se simplifica, se obtiene una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con A y C simultáneamente positivas o negativas, es decir $AC > 0$.

Ejemplo 1 Para cada ecuación, determinar el centro, vértices, extremos del eje menor, focos, excentricidad y trazar su gráfica.

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **c)** $25x^2 + 9y^2 = 225$ **d)** $4x^2 + 9y^2 = 1$

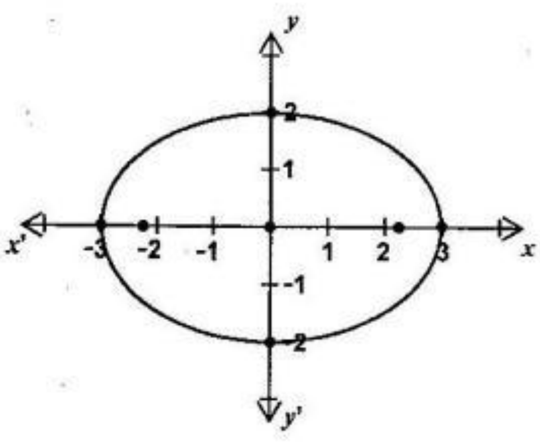
e) $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ **f)** $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$ **g)** $9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 1$

h) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ **i)** $-4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$

j) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 17 = 0$ **k)** $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 6 = 0$

Solución:

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$



La ecuación dada, está expresada en su forma canónica $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Esto implica que el centro es C(0, 0). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable x, lo que implica que la elipse es horizontal. Se determina que $a = 3$ y $b = 2$. Dado que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ se obtiene que $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

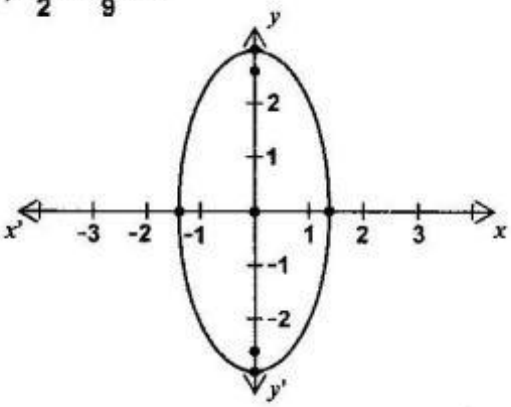
Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano y como la elipse es horizontal, a partir del centro se cuenta a unidades a la derecha y a unidades a la izquierda.

Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan b unidades hacia arriba y b unidades hacia abajo. Con estos cuatro puntos se procede a trazar la elipse recordando la forma de la misma.

Los focos se dibujan según los puntos obtenidos.

Nótese que los vértices son: $V_1(-3, 0)$; $V_2(3, 0)$, extremos del eje menor $M_1(0, 2)$; $M_2(0, -2)$, los focos: $F_1\left(-\sqrt{5},0\right)$; $F_2\left(\sqrt{5},0\right)$, excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1 V_2) = 2(3) = 6$ y la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(2) = 4$.

b) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$

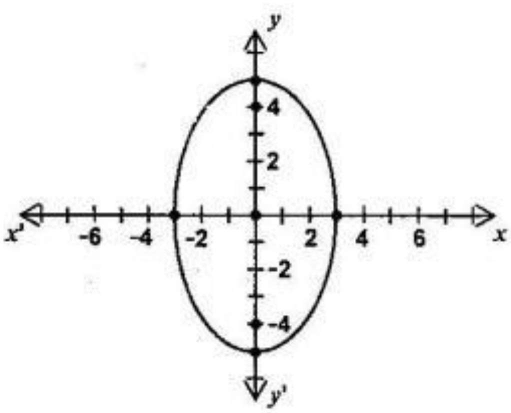


La ecuación dada, está expresada en su forma canónica $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$. Esto implica que el centro es C(0, 0). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está debajo de la variable y, lo que implica que la elipse es vertical. Se determina que $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$. Dado que $c=\sqrt{a^2-b^2}$ se obtiene que $c=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

Ubicando el centro en el plano cartesiano y como la elipse es vertical, a partir del centro se cuenta 3 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia abajo. Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan $\sqrt{2}$ unidades a la derecha y $\sqrt{2}$ unidades a la izquierda.

Con estos cuatro puntos se procede a trazar la elipse recordando la forma de la misma según la ecuación dada. Nótese que los vértices son: $V_1(0, -3)$; $V_2(0, 3)$, extremos del eje menor $M_1\left(-\sqrt{2},0\right)$; $M_2\left(\sqrt{2},0\right)$, los focos: $F_1\left(0,-\sqrt{7}\right)$; $F_2\left(0,\sqrt{7}\right)$ $\left(0,\sqrt{7}\right)$, excentricidad: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1V_2) = 2(3) = 6$, la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

c) $25x^2 + 9y^2 = 225$



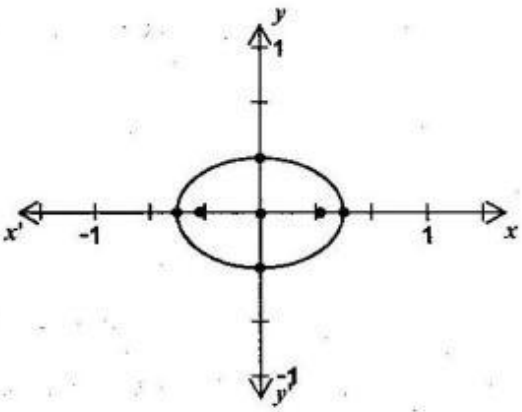
La ecuación dada $25x^2 + 9y^2 = 225$, no está expresada en su forma canónica. Para llevarla a esta forma se debe dividir ambos lados de la misma por 225, obteniendo $\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225}$ ó simplificando $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

Esto implica que el centro es C(0, 0). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable y, lo que implica que la elipse es vertical. Se observa que $a = 5$ y $b = 3$. Dado que $c=\sqrt{a^2-b^2}$ se obtiene que $c=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Ubicando el centro en el plano cartesiano y como la elipse es vertical, a partir del centro se cuenta 5 unidades hacia arriba y 5 unidades hacia abajo. Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan 3 unidades a la derecha y 3 unidades a la izquierda, ahora se procede a trazar la elipse.

Nótese que los vértices son: $V_1(0, -5)$; $V_2(0, 5)$, extremos del eje menor M_1 (3, 0); M_2 (–3,0), los focos: F_1 (0, – 4); F_2 (0, 4), excentricidad: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{4}{5}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1V_2) = 2(5) = 10$, la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(3) = 6$.

d) $4x^2 + 9y^2 = 1$



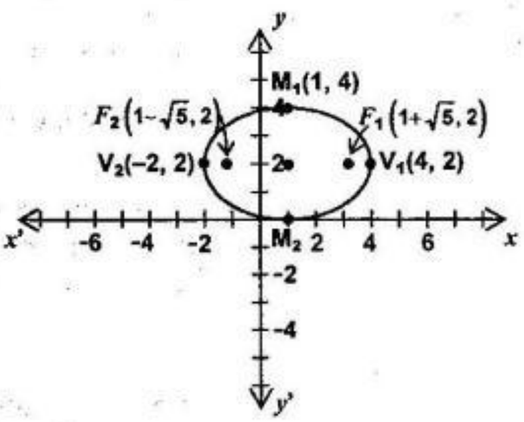
La ecuación dada $4x^2 + 9y^2 = 1$, no está dada en su forma canónica, pero el miembro de la izquierda ya está comparado con 1. Para llevarla a esta forma se debe expresar de forma equivalente, llegando a $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$.

Esto implica que el centro es C(0, 0), el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable x, lo que implica que la elipse es horizontal. Luego $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = \dfrac{1}{3}$. Dado que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ se obtiene que $c = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Ubicando el centro en el plano cartesiano y como la elipse es horizontal, a partir del centro se cuenta $\dfrac{1}{2}$ unidades a la derecha y $\dfrac{1}{2}$ unidades a la izquierda. Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan $\dfrac{1}{3}$ unidades hacia arriba y $\dfrac{1}{3}$ unidades hacia abajo, ahora se procede a trazar la elipse.

Nótese que los vértices son: $V_1\left(\dfrac{1}{2},0\right)$; $V_2\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$, extremos del eje menor $M_1\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$; $M_2\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$, los focos: $F_1\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6},0\right)$; $F_2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6},0\right)$, excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{6} \div \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1 V_2) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.

e) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$



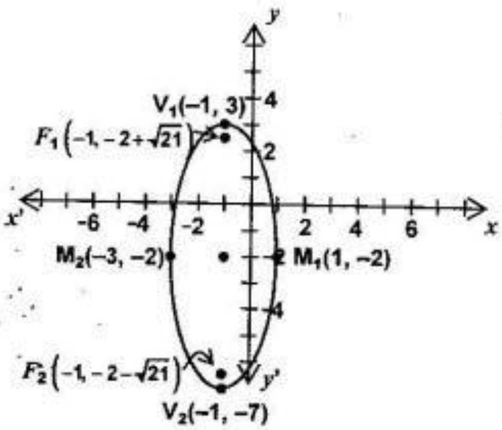
La ecuación dada, está expresada en su forma canónica $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$. Esto implica que el centro es C(1, 2). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable x, lo que implica que la elipse es horizontal. Se determina que $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano y como la elipse es horizontal, a partir del centro se toman 3 unidades a la derecha y 3 unidades a la izquierda.

Luego a partir del centro nuevamente, se toman 2 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia abajo. Con estos cuatro puntos se procede a trazar la elipse. Los focos se dibujan según los puntos obtenidos.

Nótese que los vértices son: $V_1(4, 2)$; $V_2(-2, 2)$, extremos del eje menor $M_1(1, 4)$; $M_2(1, 0)$, los focos: $F_1\left(1+\sqrt{5},2\right)$; $F_2\left(1-\sqrt{5},2\right)$, excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1V_2) = 2(3) = 6$, la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(2) = 4$.

f) $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$



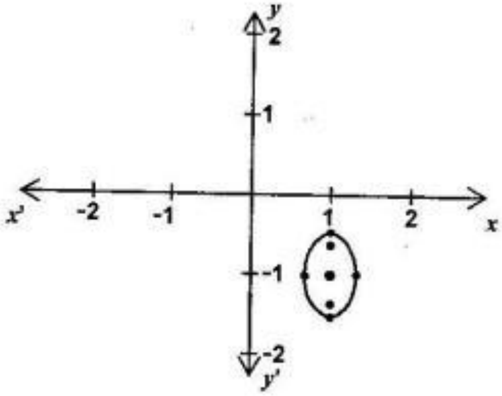
La ecuación dada escrita en su forma canónica se tiene $\dfrac{(x-(-1))^2}{4} + \dfrac{(y-(-2))^2}{25} = 1$. Esto implica que el centro es C(−1, −2). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable y, lo que implica que la elipse es vertical. Se tiene que $a = 5$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano y como la elipse es vertical, a partir del centro se cuenta 5 unidades hacia arriba y 5 unidades hacia abajo.

Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan 2 unidades a la derecha y 2 unidades a la izquierda. Con estos cuatro puntos se procede a trazar la elipse. Los focos se dibujan según los puntos obtenidos.

Nótese que los vértices son: $V_1(-1, 3)$; $V_2(-1, -7)$, extremos del eje menor $M_1(1, -2)$; $M_2(-3, -2)$, los focos: $F_1\left(-1,-2+\sqrt{21}\right)$; $F_2\left(-1,-2-\sqrt{21}\right)$, excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1V_2) = 2(5) = 10$ y la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(2) = 4$.

g) $9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 1$



La ecuación dada escrita en su forma canónica es $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{(y-(-1))^2}{\frac{1}{4}} = 1$. Esto implica que el centro es C(1, −1). Nótese que el valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable y, lo que implica que la elipse es vertical. Se determina que $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{3}$ y $c = \sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano y como la elipse es vertical, a partir del centro se cuenta $\dfrac{1}{2}$ unidades hacia arriba y $\dfrac{1}{2}$ unidades hacia abajo.

Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan $\dfrac{1}{3}$ unidades a la derecha y $\dfrac{1}{3}$ unidades a la izquierda. Se procede a trazar la elipse. Los focos se dibujan según los puntos obtenidos.

Nótese que los vértices son: $V_1\left(1,-\frac{1}{2}\right)$; $V_2\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, extremos del eje menor $M_1\left(\frac{4}{3},-1\right)$; $M_2\left(\frac{2}{3},-1\right)$, los focos: $F_1\left(1,\frac{-6+\sqrt{5}}{6}\right)$; $F_2\left(1,-\frac{6+\sqrt{5}}{6}\right)$, excentricidad: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Además la longitud del eje mayor $(V_1V_2)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$, la longitud del eje menor $(M_1M_2)=2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

h) $16x^2+25y^2-64x-50y-311=0$

La ecuación está dada en su forma general, para poder identificar sus elementos, se debe llevar a la forma canónica.

Véase el procedimiento:

$16x^2+25y^2-64x-50y-311=0$ — ecuación dada.

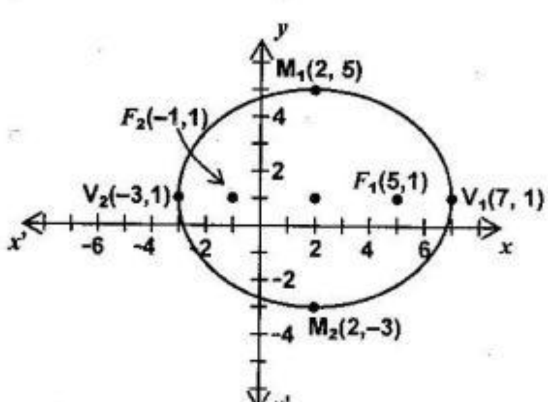
$(16x^2-64x\ )+(25y^2-50y\ )=311$ — asociando y transponiendo el término sin variable.

$16(x^2-4x+\mathbf{4})+25(y^2-2y+\mathbf{1})=311+64+25$ — extrayendo el valor de A y C como factor común en cada agrupación, completación de cuadrados y propiedad de la igualdad. Nótese que al lado izquierdo se sumó 16(4) = 64 y 25(1) = 25, razón por la cual se suma en el otro extremo los mismos valores.

$16(x-2)^2+25(y-1)^2=400$ — factorizando y simplificando.

$\frac{16(x-2)^2}{400}+\frac{25(y-1)^2}{400}=\frac{400}{400}$ — dividiendo por 400 ambos lados de la ecuación.

$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ — simplificando y se obtiene en su forma canónica.



Retomando la ecuación expresada en su forma canónica $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$. Esto implica que el centro es C(2,1). El valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable x, lo que implica que la elipse es horizontal. Se determina que $a=5$, $b=4$ y $c=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Para trazar la gráfica se ubica el centro en el plano cartesiano y como la elipse es horizontal, a partir del centro se cuenta 5 unidades a la derecha y 5 unidades a la izquierda.

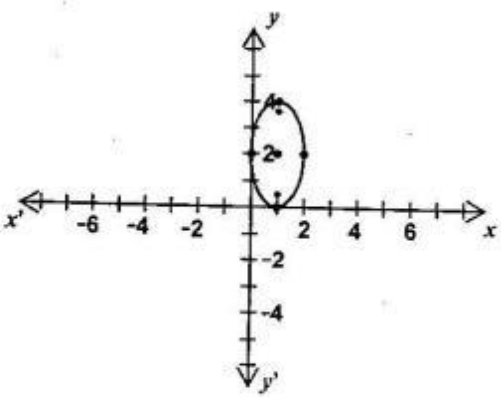
Luego a partir del centro nuevamente, se cuentan 4 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia abajo. Con estos cuatro puntos se procede a trazar la elipse. Los focos se dibujan según los puntos obtenidos.

Nótese que los vértices son: $V_1(7,1)$; $V_2(-3,1)$, extremos del eje menor $M_1(2,5)$; $M_2(2,-3)$, los focos: $F_1(5,1)$; $F_2(-1,1)$, excentricidad: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{3}{5}$. La longitud del eje mayor $(V_1V_2)=2(5)=10$, la longitud del eje menor $(M_1M_2)=2(4)=8$.

i) $-4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$

Esta ecuación está dada en su forma general (nótese A y C son negativas) y para llevarla a la forma canónica, es conveniente multiplicar por –1, ambos lados de la ecuación, obteniendo:

$(-1)(-4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4) = 0(-1)$	multiplicando por –1, ambos lados de la igualdad.
$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$	simplificando.
$(4x^2 - 8x\ ) + (y^2 + 4y\ ) = -4$	asociando y transponiendo el término sin variable.
$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 + 4$	factor común (A y C), completación de cuadrados y propiedad de la igualdad.
$4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$	factorizando y simplificando
$\dfrac{4(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = \dfrac{4}{4}$	dividiendo por 4 ambos lados de la ecuación.
$\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$	simplificando y se obtiene la forma canónica .



Retomando la ecuación expresada en su forma canónica $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$. Esto implica que el centro es C(1,2). El valor mayor observado en los denominadores en esta ecuación, está bajo la variable y, lo que implica que la elipse es vertical. Se determina que $a = 2$, $b = 1$ y $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Trazando la gráfica según las condiciones descritas en los ejemplos anteriores. Ubicando el centro se cuenta 2 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia abajo y a partir del centro nuevamente, se cuentan una unidad a la derecha y una unidad a la izquierda.

Nótese que los vértices son: $V_1(1, 4)$; $V_2(1, 0)$, extremos del eje menor $M_1(2, 2)$; $M_2(0, 2)$, los focos: $F_1\left(1, 2 + \sqrt{3}\right)$; $F_2\left(1, 2 - \sqrt{3}\right)$, excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. La longitud del eje mayor $(V_1V_2) = 2(2) = 4$, la longitud del eje menor $(M_1M_2) = 2(1) = 2$.

j) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 17 = 0$

La ecuación está dada en su forma general, para poder identificar sus elementos, se debe llevar a la forma canónica.

Véase el procedimiento:

$x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 17 = 0$	ecuación dada.
$(x^2 + 2x\ ) + (4y^2 - 16y\ ) = -17$	asociando y transponiendo el término sin variable.
$(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = -17 + 1 + 16$	completación de cuadrados y propiedad de igualdad.
$(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 0$	factorizando y simplificando.
$\dfrac{(x+1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 0$	expresando de forma equivalente.

Nótese que la ecuación anterior no es posible compararla con uno. Esto implica que se trata de **una elipse degenerada**. En esta ecuación solamente hay un punto que la satisface y éste es el centro. La gráfica que corresponde a esta ecuación es únicamente un punto (–1, 2).

k) $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 6 = 0$

La ecuación está dada en su forma general, para poder identificar sus elementos, se debe llevar a la forma canónica.

Véase el procedimiento:

$$4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 6 = 0 \qquad \text{ecuación dada.}$$

$$(4x^2 + 8x\ \ ) + (y^2 - 2y\ \ ) = -6 \qquad \text{asociando y transponiendo el término sin variable.}$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = -6 + 4 + 1 \qquad \text{completación de cuadrados y propiedad de igualdad.}$$

$$4(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -1 \qquad \text{factorizando y simplificando.}$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = -1 \qquad \text{expresando de forma equivalente.}$$

Nótese que la ecuación anterior no es posible compararla con uno. Esto implica que se trata de **una elipse degenerada**. En esta ecuación no hay ningún punto que satisfaga la misma, lo que implica que la solución es vacía y no existe gráfica. ■

Ejemplo 2 Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la elipse, que satisfaga las siguientes condiciones.

a) Vértices en $(-4, 0)$, $(4, 0)$ y focos en $(-3, 0)$, $(3, 0)$.

b) Vértices en $(0, \pm 4)$ y focos en $(0, \pm 3)$.

c) Vértices en $(0, \pm 10)$ y excentricidad $\frac{4}{5}$.

d) Focos en $(0, \pm 4)$ y excentricidad $\frac{2}{3}$.

e) Vértices en $(0, \pm 4)$ y pasa por el punto $(2, 3)$.

f) Tiene focos en $(1, 4)$, $(5, 4)$ y vértices en $(0, 4)$, $(6, 4)$.

g) Centro en $(-3, 1)$, un vértice en $(-3, 3)$ y un foco en $(-3, 0)$.

h) Focos en $(5, 1)$, $(-1, 1)$ y la longitud del eje mayor es 8.

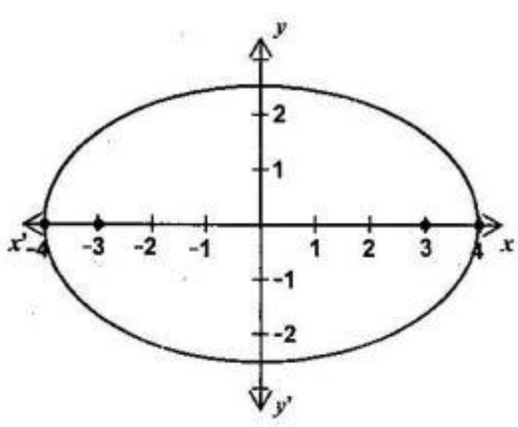
i) Centro en $(1, 2)$; un foco en $(1,4)$ y pasa por el punto $(2, 3)$.

j) El eje mayor está en la recta $y = -4$ y tiene longitud 4 unidades; el eje menor está en la recta $x = 3$ y tiene longitud 2 unidades.

k) Los ejes de la elipse tienen longitudes de 2 y 6 unidades, el eje mayor es vertical y el centro está en $(-3, 5)$.

Solución:

a) Vértices en $(-4, 0)$, $(4, 0)$ y focos en $(-3, 0)$, $(3, 0)$.



Para encontrar la ecuación de la elipse con las condiciones dadas, se debe auxiliar de una gráfica que muestre las condiciones dadas (**inicialmente no será posible trazar la gráfica correctamente, pero con una pequeña idea será de gran ayuda**). Recuérdese que los focos y los vértices están en el eje mayor y es lo que permite visualizar si la elipse es horizontal o vertical. Véase la misma, la cual indica que es una elipse horizontal. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los focos, o los vértices o bien el punto medio del eje menor.

Nótese que en este caso el punto medio de los segmentos que contienen los focos o los vértices es (0, 0) el cual es el centro de la elipse en mención. Esto implica que $h = 0$ y $k = 0$. Además, por ser una elipse horizontal, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

El valor de a, se determina encontrando la distancia del centro a uno de los vértices, el cual es 4 ($a = 4$). Como uno de los datos que se da son los focos, se determina el valor de c, calculando la distancia del centro al foco el cual es $c = 3$, ya que el centro es el punto (0, 0). Conociendo a y c se determina el valor de b.

Como $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que $b^2 = a^2 - c^2$ ó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Luego $b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Conociendo el valor de a, b, h y k se procede a sustituir en la ecuación antes identificada.

Véase:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ ecuación que le corresponde a la elipse, según las condiciones dadas.

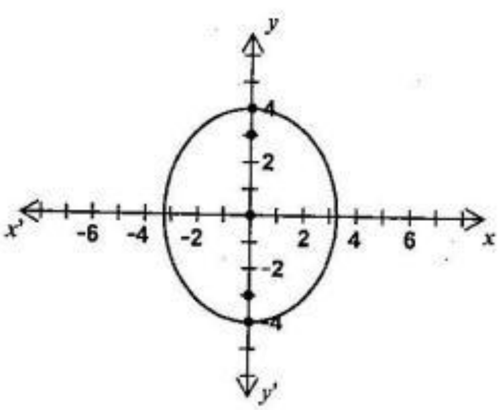
$$\frac{(x-0)^2}{4^2}+\frac{(y-0)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=1$$ sustituyendo el valor de a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$ simplificando. Nótese que ésta es la ecuación de la elipse en su forma canónica.

$$112\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}\right)=1(112)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$$ efectuando los productos y comparando con cero, se obtiene la ecuación general solicitada.

b) Vértices en (0, ±4) y focos en (0, ±**3**).



Auxiliándose de una gráfica que muestre las condiciones dadas se tiene. Véase la misma, la cual indica que es una elipse vertical. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos o bien los focos, o bien los vértices o bien el punto medio del eje menor. Nótese que en este caso el punto medio de los segmentos que contienen los focos o los vértices es (0, 0) el cual es el centro. Esto implica que $h = 0$ y $k = 0$. Además, por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

El valor de a, se determina encontrando la distancia del centro a uno de los vértices, y el cual es 4. Uno de los datos que se da son los focos, con los cuales es posible determina el valor de c, encontrando la distancia del centro al foco el cual es $c = 3$, ya que el centro es el punto (0, 0). Conociendo a y c se determina el valor de b. Como $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que $b^2 = a^2 - c^2$ ó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Luego $b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Conociendo el valor de a, b, h y k se procede a sustituir en la ecuación antes identificada.

Véase:

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ecuación que le corresponde a la elipse, según las condiciones dadas.

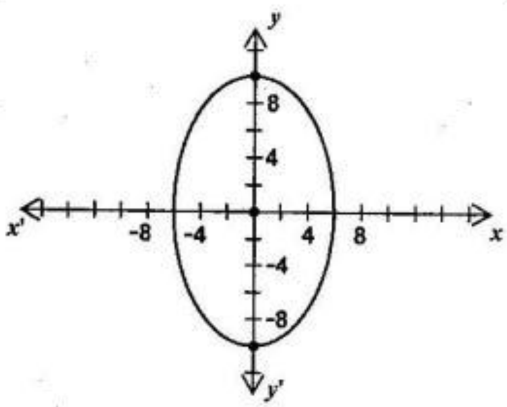
$\frac{(x-0)^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{(y-0)^2}{4^2}=1$ sustituyendo el valor de a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ simplificando. Nótese que ésta es la ecuación de la elipse en su forma canónica o estándar.

$112\left(\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}\right)=1(112)$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$16x^2+7y^2-112 = 0$ efectuando los productos y comparando con cero, se obtiene la ecuación general solicitada.

c) Vértices en (0, ±10) y excentricidad $\frac{4}{5}$.



Auxiliándose de una gráfica que muestre las condiciones dadas se determina la forma de la elipse que le corresponde. Véase la misma, la cual indica que es una elipse vertical. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices. Nótese que en este caso el punto medio del segmento que contienen los vértices es (0, 0) el cual es el centro de la elipse. Esto implica que h = 0 y k = 0. Además, por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

El valor de a, se determina encontrando la distancia del centro a uno de los vértices, y el cual es 10. Otro dato que se da es la excentricidad.

Ya que la excentricidad; $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, tiene que $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ ó $\frac{c}{10} = \frac{4}{5}$ ó $5c = 40$ ó $c = 8$.

Sabiendo que $a = 10$ y $c = 8$ se determina b. Teniendo que $b=\sqrt{a^2-c^2}$ ó $b = \sqrt{10^2-8^2} = 6$. Como el centro es el punto (0, 0), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada, se llega a:

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ecuación que le corresponde a la elipse, según las condiciones dadas.

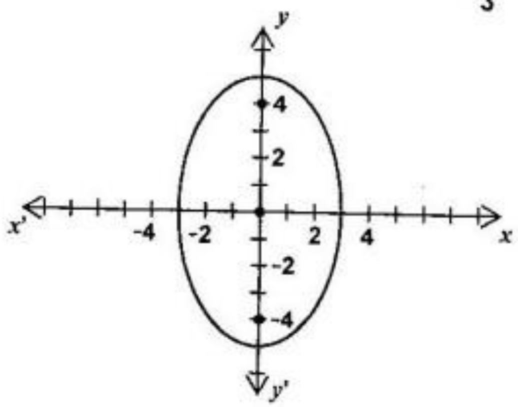
$\frac{(x-0)^2}{6^2}+\frac{(y-0)^2}{10^2}=1$ sustituyendo el valor de a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$ simplificando. Nótese que ésta es la ecuación de la elipse en su forma canónica o estándar.

$900\left(\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}\right)=1(900)$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$25x^2+9y^2-900=0$ efectuando los productos y comparando con cero, se obtiene la ecuación general solicitada.

d) Focos en (0, ±4) y excentricidad $\frac{2}{3}$.



Haciendo un bosquejo de la gráfica que muestra las condiciones dadas se tiene la siguiente figura. Esta indica que es una elipse vertical. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los focos. Nótese que en este caso el punto medio de dicho segmentos es (0, 0). Esto implica que $h = 0$ y $k = 0$. Además, por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Con los datos dados se determina el valor de c, el cual es 4 (determinando la distancia del centro a uno de los focos). Otro dato que se da es la excentricidad.

Ya que la excentricidad; $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, tiene que $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ ó $\frac{4}{a} = \frac{2}{3}$ ó $12 = 2a$ ó $a = 6$.

Sabiendo que $a = 6$, $c = 4$ se determina b, teniendo que $b = \sqrt{a^2-c^2}$ ó $b = \sqrt{6^2-4^2} = 2\sqrt{5}$. Como el centro es el punto (0, 0), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada, se llega a:

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ecuación que le corresponde a la elipse, según las condiciones dadas.

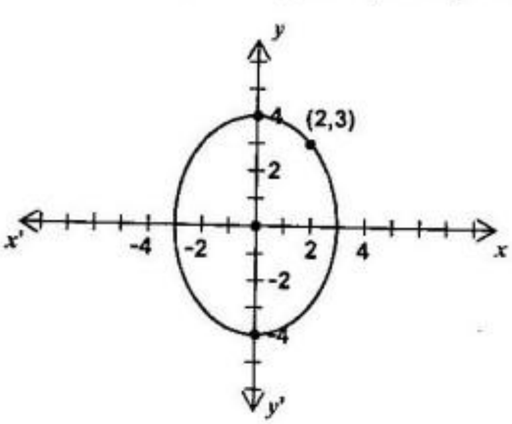
$\frac{(x-0)^2}{(2\sqrt{5})^2}+\frac{(y-0)^2}{6^2}=1$ sustituyendo el valor de a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$ simplificando. Nótese que ésta es la ecuación de la elipse en su forma canónica.

$180\left(\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}\right)=1(180)$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$9x^2+5y^2-180=0$ efectuando los productos y comparando con cero, se obtiene la ecuación general solicitada.

e) Vértices en (0, ±4) y pasa por el punto (2, 3)



Haciendo un bosquejo de la gráfica que muestra las condiciones dadas se tiene la siguiente figura. Esta indica que es una elipse vertical. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices. Nótese que en este caso el punto medio de dicho segmentos es (0, 0). Esto implica que $h = 0$ y $k = 0$. Además, por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Con los datos dados se determina el valor de a, el cual es 4 (determinando la distancia del centro a uno de los vértices). Otro dato que se da es un punto que está en la elipse, esto implica que dicho punto satisface la ecuación que le pertenece a la misma.

Ya que la ecuación que le corresponde a dicha elipse es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, el punto (2,3) satisface la misma. Como $h = 0$, $k = 0$ y $a = 4$, se tiene la ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, sustituyendo el punto (2,3) en ésta última se tiene $\frac{2^2}{b^2}+\frac{3^2}{4^2}=1$ ó $\frac{4}{b^2}+\frac{9}{16}=1$. Despejando para b se tiene que $\frac{4}{b^2}=1-\frac{9}{16}$ ó $\frac{4}{b^2}=\frac{7}{16}$ ó $4(16) = 7b^2$ ó $b^2=\frac{64}{7}$ ó $b=\frac{8\sqrt{7}}{7}$. Como el centro es el punto (0, 0), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada, se llega a:

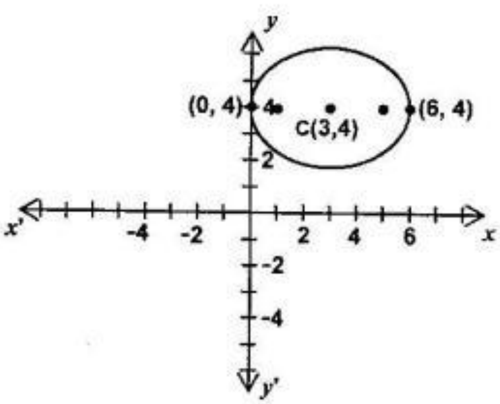
$$\frac{x^2}{\frac{64}{7}}+\frac{y^2}{16}=1$$ sustituyendo el valor de a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde. Nótese que ésta es la ecuación de la elipse en su forma canónica.

$$\frac{7x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$$ simplificando el término de la izquierda.

$$64\left(\frac{7x^2}{64}+\frac{y^2}{16}\right)=1(64)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$56x^2+4y^2-64=0$$ efectuando los productos y comparando con cero, se obtiene la ecuación general solicitada.

f) Tiene focos en (1, 4), (5, 4) y vértices en (0, 4), (6, 4).



Un bosquejo de la gráfica, muestra las condiciones dadas. Esta indica que es una elipse horizontal. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices o los focos. Nótese que en este caso el punto medio de dicho segmentos es $\left(\frac{0+6}{2},\frac{4+4}{2}\right)$ = (3,4). Esto implica que $h = 3$ y $k = 4$. Además, por ser una elipse horizontal, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Con los datos dados se determina el valor de a, el cual es 3 (determinando la distancia del centro a uno de los vértices), el valor de c, que es 2. Luego se calcula el valor de b; $b=\sqrt{a^2-c^2}$ ó $b=\sqrt{3^2-2^2}$ = $\sqrt{5}$. Como el centro es el punto (3, 4), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y-4)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$$ sustituyendo el valor de: a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

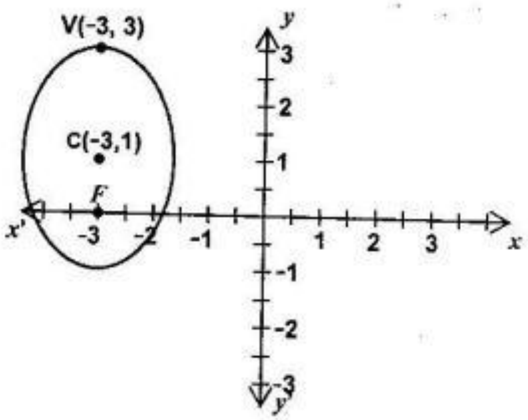
$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{5}=1$$ simplificando y obteniendo la ecuación en la forma canónica o estándar.

$$45\left(\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{5}\right)=1(45)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$5(x-3)^2+9(y-4)^2=45$$ simplificando.

$$5x^2+9y^2-30x-72y+144=0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

g) Centro en (–3, 1), un vértice en (–3, 3) y un foco en (–3, 0)



Este bosquejo de la gráfica, muestra las condiciones dadas. Esta nos indica que es una elipse vertical. Se dice que el centro es (–3,1) y como un vértice es (–3, 3), entonces a = 2 (determinando la distancia del centro al vértice). De igual manera c = 1 (determinando la distancia del centro al foco). Conociendo el valor de a y c, se encuentra el valor de b. Como $b = \sqrt{a^2-c^2}$, entonces $b = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$. Por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.

Como el centro es el punto (–3, 1), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-(-3))^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y-1)^2}{(2)^2}=1$$ sustituyendo el valor de: a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde.

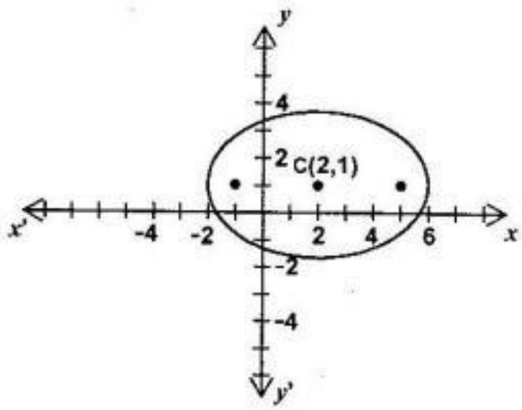
$$\frac{(x+3)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$ simplificando y ésta es la ecuación en su forma canónica o estándar.

$$12\left(\frac{(x+3)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}\right)=1(12)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$4(x+3)^2+3(y-1)^2=12$$ simplificando.

$$4x^2+3y^2+24x-6y+27=0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

h) Focos en (5, 1), (−1, 1) y la longitud del eje mayor es 8.



Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura dada. Esta nos indica que es una elipse horizontal. El centro se determina encontrando el punto medio del segmento que tiene como extremos los focos. Nótese que en este caso el punto medio de dicho segmentos es $\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{1+1}{2}\right) =$ (2,1). Esto implica que $h = 2$ y $k = 1$. Además, por ser una elipse horizontal, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Como la longitud del eje mayor es 8, el semieje mayor es 4, luego $a = 4$ ($2a = 8$). El valor para c es 3 (distancia del centro a uno de los focos) y el valor para b es: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ó $b = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Como el centro es el punto (2,1), sustituyendo los valores de a, b, h y k en la ecuación antes identificada se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = 1$$ sustituyendo el valor de: a, b, h y k, en la ecuación que le corresponde. ecuación de la elipse en su forma canónica.

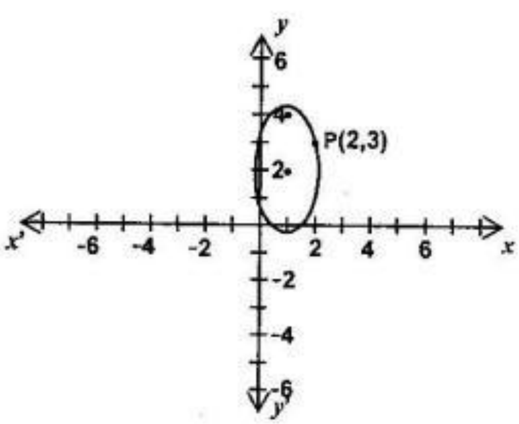
$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$ simplificando y obteniendo la ecuación en forma canónica.

$$112\left(\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7}\right) = 1(112)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$7(x-2)^2 + 16(y-1)^2 = 112$$ simplificando.

$$7x^2 + 16y^2 - 28x - 32y - 68 = 0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

i) Centro en (1, 2); un foco en (1,4) y pasa por el punto (2, 3).



Nótese el bosquejo de la gráfica según las condiciones dadas. Esta nos indica que es una elipse vertical. Se tiene que el centro es (1,2) y como un foco es el punto (1,4), entonces $c = 2$ (determinando la distancia del centro al foco). Por ser una elipse vertical, la ecuación que le corresponde a la misma es $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$. Como el centro es el punto (1, 2), sustituyendo los valores de h y k en la ecuación antes identificada se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} = 1$$ sustituyendo el valor de h y k.

Nótese que hasta este momento, no se conocen los valores de a y b, pero se da un punto que está en la elipse y por tal razón éste satisface la ecuación que le corresponde a la misma. Luego sustituyendo el punto dado en esta ecuación, se tiene:

$$\frac{(2-1)^2}{b^2}+\frac{(3-2)^2}{a^2}=1 \qquad \text{sustituyendo el punto (2, 3) en la ecuación.}$$

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=1 \qquad \text{simplificando.}$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ y, antes se determinó que $c = 2$, entonces $4 = a^2 - b^2$ ó $b^2 = a^2 - 4$. Nótese que también se puede decir que $a^2 = b^2 + 4$.

Sustituyendo a^2 o bien b^2 en la última ecuación que le corresponde a la elipse, se tiene:

$$\frac{1}{a^2-4}+\frac{1}{a^2}=1 \qquad \text{sustituyendo } b^2 \text{ por } a^2-4.$$

$$\frac{a^2+a^2-4}{a^2\left(a^2-4\right)}=1 \qquad \text{efectuando la suma en el miembro de la izquierda.}$$

$$2a^2-4 = a^2(a^2-4) \qquad \text{multiplicando por } a^2(a^2-4) \text{ ambos lados de la igualdad.}$$

$$a^4-6a^2+4=0 \qquad \text{simplificando y comparando con cero la ecuación obtenida.}$$

Nótese que se tiene una ecuación de grado 4, pero que tiene la forma de un trinomio de forma cuadrado, por tal razón se puede aplicar la fórmula general (forma cuadrática). Determinando el discriminante se tiene que: $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ ó $\boldsymbol{\Delta} = (-6)^2 - 4(1)(4) = 36 - 16 = 20$.

Aplicando fórmula general se tiene (nótese que la "variable" en esta última ecuación es a^2 **y no tiene nada que ver con las constantes de la fórmula general conocida, para encontrar soluciones de una ecuación cuadrática**):

$$a^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cabe la pena mencionar, que el valor de **a** en un trinomio de forma cuadrada, no tiene relación alguna con el valor de a, mostrada en la ecuación de la elipse.

$$a^2=\frac{-(-6)\pm\sqrt{20}}{2} \qquad \text{sustituyendo.}$$

$$a^2=\frac{6\pm 2\sqrt{5}}{2} \qquad \text{simplificando.}$$

$$a^2 = 3\pm\sqrt{5} \qquad \text{simplificando. Nótese que hay dos posibles valores.}$$

$$(a_1)^2 = 3+\sqrt{5} \quad \text{ó} \quad (a_2)^2 = \cancel{3-\sqrt{5}}$$

Observe que $(a_2)^2$ **es menor que el valor** de c lo que implica que esto no es posible, por tal razón este valor se descarta como un posible valor para a^2.

Luego el valor que es de interés es $a^2 = 3+\sqrt{5}$. Ahora con éste se encuentra el valor para b^2, obteniendo que $b^2 = a^2 - 4$ ó $b^2 = 3+\sqrt{5} - 4 = -1+\sqrt{5}$.

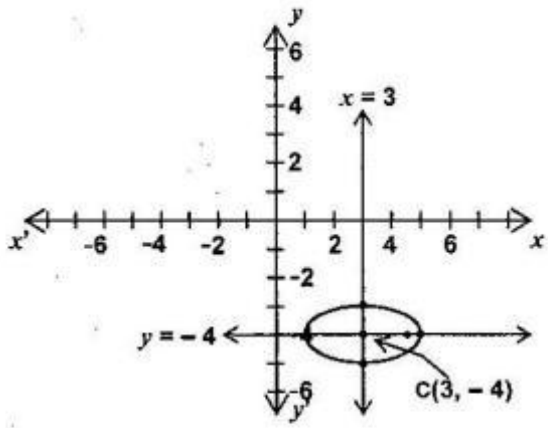
Conociendo los valores de a^2 y b^2, se sustituyen éstos en la ecuación que le corresponde a la elipse.

$$\frac{(x-1)^2}{b^2}+\frac{(y-2)^2}{a^2}=1 \qquad \text{ecuación que se había obtenido inicialmente.}$$

$$\frac{(x-1)^2}{-1+\sqrt{5}}+\frac{(y-2)^2}{3+\sqrt{5}}=1 \qquad \text{sustituyendo los valores de } a^2 \text{ y } b^2 \text{ se obtiene la ecuación canónica.}$$

Nótese que si se quiere llegar a la ecuación general, se multiplica ambos lados de la ecuación por $\left(-1+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$ y se simplifica.

j) El eje mayor está en la recta $y = -4$ y tiene longitud 4 unidades; el eje menor está es la recta $x = 3$ y tiene longitud de 2 unidades.



Según la información dada, se dice que el eje mayor está sobre la recta $y = -4$, y tiene una longitud de 4 unidades. Esto implica que $2a = 4$ y que $a = 2$. Se dice también que el eje menor está sobre la recta $x = 3$, y tiene una longitud de 2 unidades. Esto implica que $2b = 2$ y que $b = 1$. Además con estas condiciones dadas, también se nota que el centro es el punto $(3, -4)$ ya que no existe otra posibilidad (punto de intersección de ambas rectas). Con los valores conocidos para a y b se determina el valor para c, si se necesitara y el cual es $\sqrt{3}$.

Otro elemento importante que se debe tener en cuenta en la selección de la ecuación única que le corresponde a la elipse según las condiciones dadas. En este caso, la ecuación que le corresponde por ser una elipse horizontal es: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Como el centro es $C(3, -4)$ $h = 3$, $k = -4$, $a = 2$ y $b = 1$. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(y-(-4))^2}{1^2}=1$$ sustituyendo el valor de h, k, a y b.

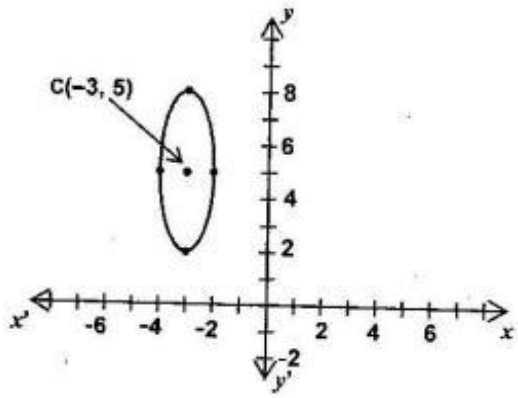
$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{1}=1$$ simplificando y se obtiene la ecuación en su forma canónica o estándar.

$$4\left(\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{1}\right)=1(4)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$(x-3)^2+4(y+4)^2=4$$ simplificando.

$$x^2+4y^2-6x+32y+69=0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

k) Los ejes de la elipse tienen longitudes de 2 y 6 unidades, el eje mayor es vertical y el centro está en (−3, 5).



Según la información dada, se tiene que el eje mayor tiene una longitud de 6 unidades. Esto implica que $2a = 6$ y que $a = 3$. Se dice también que el eje menor tiene una longitud de 2 unidades, esto implica que $2b = 2$ y que $b = 1$. Además se indica que el centro es el punto (−3, 5) y que el eje mayor es vertical, por tal razón la ecuación que le corresponde a ésta es: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Como el centro es C(−3, 5), se tiene que $h = -3$ y $k = 5$. Además antes se determinó que $a = 3$ y $b = 1$. Sustituye estos valores en la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-(-3))^2}{1^2}+\frac{(y-5)^2}{3^2}=1$$ sustituyendo el valor de h, k, a y b.

$$\frac{(x+3)^2}{1}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$$ simplificando y obteniendo la ecuación en su forma canónica o estándar.

$$9\left(\frac{(x+3)^2}{1}+\frac{(y-5)^2}{9}\right)=1(9)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

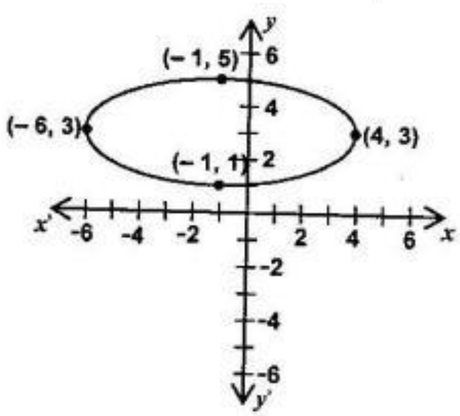
$$9(x+3)^2+(y-5)^2=9$$ simplificando.

$$9x^2+y^2+54x-10y+97=0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

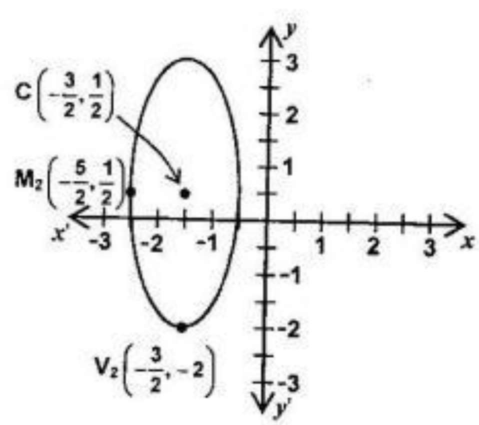
■

Ejemplo 3 Para cada gráfica indicada, determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) que le corresponde.

a)

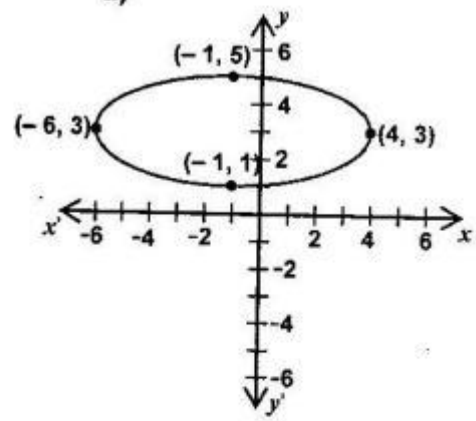


b)



Solución:

a)



Según la gráfica dada, se dan los vértices y los extremos del eje menor. Con uno de estos datos, se determina el punto medio del segmento que contiene los vértices o bien el punto medio del segmento que determina el eje menor. Encontrando el punto medio del segmento que contiene los vértices (eje mayor) se obtiene el centro de la elipse. Véase que $C\left(\frac{-6+4}{2},\frac{3+3}{2}\right)$ = $C(-1, 3)$, se tiene también que la distancia del centro a uno de los vértices es $\sqrt{(-6-(-1))^2+(3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 = a$. De igual forma, para encontrar el valor para b se encuentra la distancia del centro a uno de los extremos del eje menor: $\sqrt{(-1-(-1))^2+(5-3)^2} = \sqrt{2^2} = 2 = b$.

Como la elipse es horizontal, la ecuación que le corresponde es: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Se determinó que el centro es $C(-1, 3)$, luego $h = -1$ y $k = 3$, además se encontró que $a = 5$ y $b = 2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{(x-(-1))^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1$$ sustituyendo el valor de h, k, a y b.

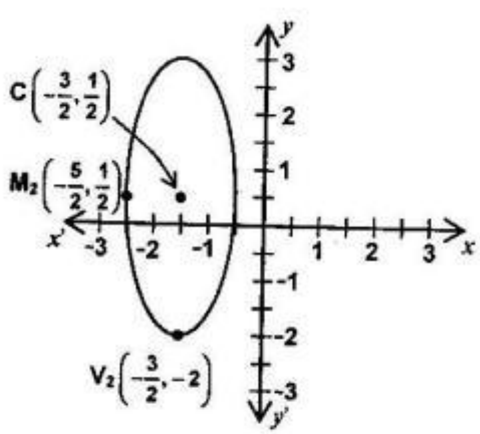
$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$ simplificando y se obtiene la ecuación en forma canónica o estándar.

$$100\left(\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{4}\right)=1(100)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

$$4(x+1)^2+25(y-3)^2=100$$ simplificando.

$$4x^2+25y^2+8x-150y+129=0$$ desarrollando los binomios, efectuando los productos y simplificando, se obtiene la ecuación general solicitada.

b)



Según la gráfica dada, se da un vértice, uno de los extremos del eje menor y el centro. Con los mismos se determina el valor de a (distancia del centro al vértice) y el de b (distancia del centro al extremo del eje menor). Haciendo los cálculos correspondientes se llega a que $a = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}-(-2)\right)^2} = \sqrt{(0)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$,

$b = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2+(0)^2} = 1$. Retomando el $C\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ y tomando la ecuación que corresponde por ser una elipse vertical se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ ecuación que le corresponde.

$$\frac{\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2}{1^2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1$$ sustituyendo el valor de h, k, a y b.

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{1}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}}=1$$ simplificando.

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{1}+\frac{4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{25}=1$$ expresando de forma equivalente y se obtiene la ecuación en forma canónica.

$$25\left(\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{1}+\frac{4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{25}\right)=1(25)$$ multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$25\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=25$$ simplificando.

$$25\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=25$$ desarrollando los binomios.

$$25x^2+75x+\frac{225}{4}+4y^2-4y+1=25$$ efectuando los productos.

$$4\left(25x^2+75x+\frac{225}{4}+4y^2-4y+1\right)=25(4)$$ multiplicando por el m. c. m. de los denominadores en la ecuación.

$$100x^2+16y^2+300x-16y+129=0$$ efectuando los productos y simplificando. ∎

Ejercicios 6.3

1. Para cada ecuación, determinar, si existe: el centro, vértices, focos, extremos del eje menor y trazar la gráfica.

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ **b)** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ **c)** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ **d)** $9x^2+25y^2=225$

e) $9x^2+16y^2=144$ **f)** $9x^2+25y^2=1$ **g)** $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ **h)** $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

i) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ **j)** $\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$ **k)** $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$

l) $16(x-2)^2+4(y+1)^2=1$ **m)** $4x^2+y^2+16x-4y+4=0$

n) $9x^2+y^2-54x+2y+73=0$ **o)** $3x^2+4y^2+6x-40y+103=0$

p) $11x^2+7y^2+132x-56y+585=0$ **q)** $18x^2+8y^2+18x-12y-63=0$

r) $144x^2+9y^2-192x+36y+64=0$ **s)** $-9x^2-4y^2+36x+8y-4=0$

2. Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la elipse, que satisfaga las condiciones indicadas.

a) Vértices en (± 5, 0) y focos en (± 4, 0).

b) Vértices en (0, ±6), focos en (0, ±4).

c) Vértices en (0, ±6), excentricidad $\frac{3}{4}$.

d) Focos en (±4, 0), excentricidad $\frac{6}{7}$.

e) Vértices en (0, ±5), pasa por el punto (3, 3).

f) Tiene focos en (±3,0) y pasa por (3, 1)

g) Centro en (1, −2), un vértice en (6, −2) y un foco en (4, −2).

h) Vértices en (4, 3) y (4, 8); un foco en (4, 7).

i) Focos en (3, 2) y (−3, 2), un vértice en (−4, 2).

j) Centro en (1, 3), un foco en (−3, 3) y pasa por el punto (2, 4).

k) Centro en (2, 1), un vértice en (5, 1), y pasa por el punto (4, 0).

l) Eje mayor y eje menor, sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos (−1, 2) y (1, 2).

m) Focos en (4, 2), (−2, 2); la longitud del eje mayor es 10.

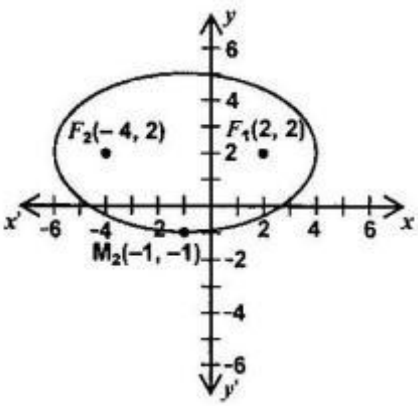
n) El eje menor está en la recta $y = 3$ y tiene longitud 6 unidades; el eje mayor está en la recta $x = 2$ y tiene longitud 10 unidades.

o) Los ejes de la elipse tienen longitudes de 4 y 6 unidades, el eje mayor es vertical y el centro está en (−3, 2).

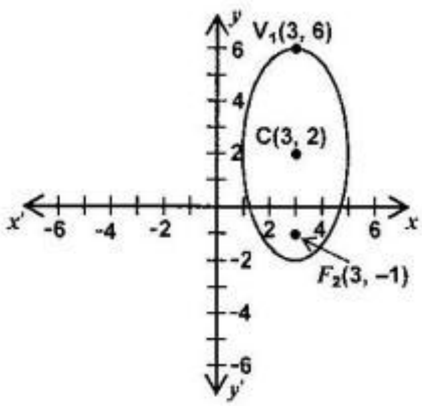
p) Semieje mayor 5 unidades, focos en los puntos (6, 3) y (−2, 3).

3. Para cada gráfica indicada, determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) que le corresponde.

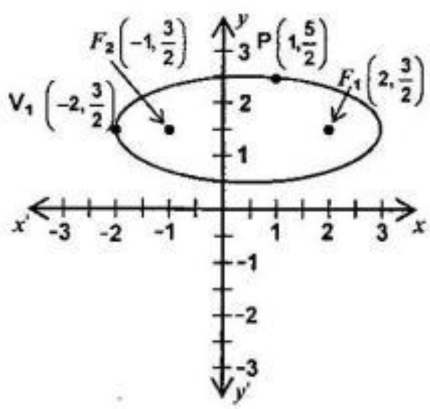
a)



b)



c)

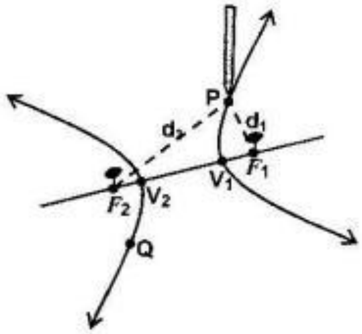


6.4 LA HIPERBOLA

Con el análisis de la **hipérbola**, se concluye el estudio de una ecuación cuadrática en dos variables (en el plano cartesiano), para lo cual se enuncia la definición de la misma.

Definición Una **hipérbola** es la gráfica formada por todos los puntos P del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos en el plano, sea una constante positiva. Los puntos fijos se llaman **focos**, los puntos de intersección V_1 y V_2 de la recta que pasa por los focos y las dos ramas de la hipérbola se llaman **vértices de la hipérbola**. El $\overline{V_1V_2}$ se le llama eje transverso, el punto medio del eje transverso es el centro.

Véase la siguiente figura.



Para que un punto P esté en la gráfica, es necesario que la distancia de P a F_2 menos la distancia de P a F_1 sea igual a una constante positiva. También un punto Q estará en la gráfica, si la distancia de Q a F_1 menos la distancia de Q a F_2 es igual a la misma constante y esa constante es $2a$. Lo dicho anteriormente se simboliza de la siguiente forma: $PF_2 - PF_1 = QF_1 - QF_2 = 2a$. Recuérdese que también se puede tener $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$. Para no obtener un error en este cálculo (obtener un resultado negativo), se debe escribir de la siguiente forma $|PF_1 - PF_2| = |PF_2 - PF_1| = 2a$.

Cómo se ha enfatizado que es de interés dibujar estas gráficas en el plano cartesiano, por tal razón se toma la dada en la fig.1 (por conveniencia) para determinar la ecuación que le corresponde.

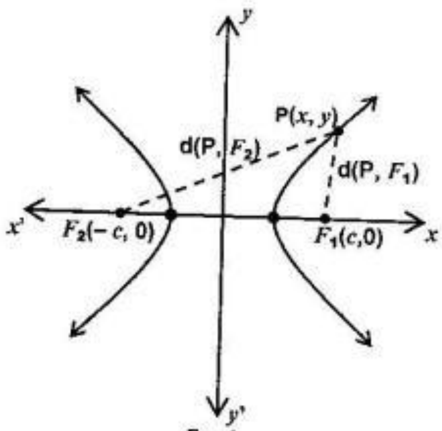


fig. 1

Utilizando la definición de la hipérbola enunciada anteriormente y la fórmula de la distancia entre dos puntos, se puede encontrar la ecuación canónica o estándar de la hipérbola. Nótese que en la gráfica tomada, los focos están a la misma distancia del centro y sobre el eje de las x. Luego las coordenadas de los focos están dadas por $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ con $c > 0$. Como ya se dijo la diferencia de las distancias es $2a$, con $a > 0$. Además es importante recordar (de geometría) que la suma de la medida de dos lados cualesquiera en un triángulo, es mayor que la medida del tercer lado, o de forma equivalente, que la diferencia de la medida de dos lados cualesquiera de un triángulo es menor que la longitud del tercer lado.

Aplicando este hecho, al ΔPF_1F_2 de la fig.1 se tiene que:

$|PF_1 - PF_2| < 2c$ — aplicando la relación entre los lados de un triángulo. Nótese que $F_1F_2 = 2c$.

$2a < 2c$ — sustituyendo $|PF_1 - PF_2|$ por $2a$. Recuérdese la definición de la hipérbola.

$a < c$ — dividiendo por 2 ambos lados de la desigualdad.

Con estos análisis, se procede a la obtención de la ecuación de una hipérbola. Véase:

En la fig. 1, el punto P(x, y) esta en la hipérbola si y sólo si

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$ por definición de la hipérbola.

$$\left|\sqrt{(x+c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$ aplicando la definición de distancia entre dos puntos del plano

$$\left|\sqrt{(x+c))^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right|^2 = 4a^2$$ elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2$$ aplicando propiedad de valor absoluto; $|x|^2 = x^2$.

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{\left[(x+c)^2 + y^2\right]\left[(x-c)^2 + y^2\right]} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$ desarrollando el binomio.

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{\left[(x+c)^2 + y^2\right]\left[(x-c)^2 + y^2\right]}$$ desarrollando los binomios y simplificando.

$$\left(x^2+c^2+y^2-2a^2\right)^2=\left(\sqrt{\left[(x+c)^2+y^2\right]\left[(x-c)^2+y^2\right]}\right)^2$$ elevando al cuadrado nuevamente ambos lados.

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2+a^4=0$$ desarrollando el binomio de la izquierda y simplificando.

$$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$ escribiendo de forma equivalente.

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$ reagrupando términos.

$$\frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2(c^2-a^2)}-\frac{a^2y^2}{a^2(c^2-a^2)}=\frac{a^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)}$$ dividiendo por $a^2(c^2-a^2)$ ambos lados de la ecuación. Nótese que antes de iniciar con el proceso de la obtención de la ecuación de la hipérbola, se concluyó que $a < c$, lo que implica que $a^2 < c^2$ o equivalente a decir que $c^2 - a^2 > 0$. Además por la definición de hipérbola, $a > 0$ luego $a^2(c^2-a^2) > 0$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$ simplificando.

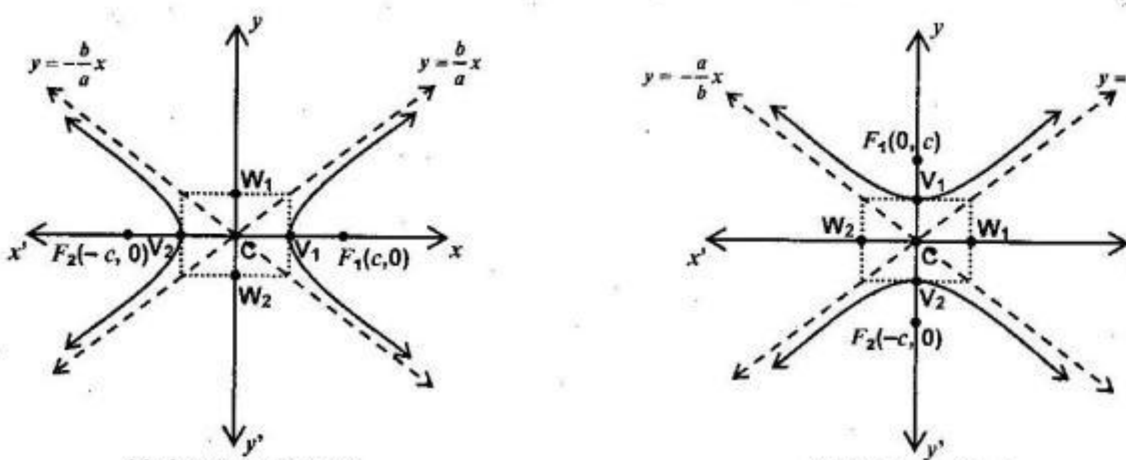
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ por simplicidad se sustituye c^2-a^2 por b^2 ($b^2=c^2-a^2$), obteniendo que $b > 0$.

Esta última ecuación es la ecuación de la hipérbola en su forma canónica.

Si se hace un análisis similar cuando los focos se ubican en el eje de las y, es decir si éstos se representan por $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ con $c > 0$, se obtiene la siguiente ecuación de la hipérbola, también en su forma canónica: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ donde la relación entre a, b y c permanecen igual que en la primera ecuación encontrada; es decir $b^2 = c^2 - a^2$.

Se procede ahora a trazar una hipérbola con centro en el origen para identificar todos sus elementos y las posibilidades de la misma.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



hipérbola horizontal a) fig. 2 hipérbola vertical b)

Con relación a la fig.2 a), ésta corresponde a la de una hipérbola horizontal. Nótese la ecuación que le corresponde a la misma. En cualquiera de los dos casos, se debe tener en cuenta que el valor de a^2 está bajo la variable que tiene signo positivo. Una forma de identificar si la hipérbola es horizontal o vertical, es observar cual de las variables (x o y) tiene el signo positivo y el valor que se encuentra bajo la variable con signo positivo, ese corresponderá al valor de a^2. Es importante también tener en cuenta que no necesariamente (como en el caso de la elipse) el valor de a^2 es mayor que el de b^2. En el caso de la hipérbola, a^2 **puede ser mayor**, **menor** o **igual** que el de b^2. Nótese que en la fig.2 a) la variable con signo positivo es x, lo que implica que la hipérbola es horizontal (véase la forma de la misma) y el valor que está bajo la variable x, corresponde a a^2. De igual manera, en la fig. 2 b) la variable con signo positivo es y, lo que implica que la hipérbola es vertical (véase la forma de la misma) y el valor que está bajo la variable y, corresponde a a^2.

Otro elemento importante que se debe recordar es que en la deducción de la ecuación de la hipérbola se utilizó el hecho que $b^2 = c^2 - a^2$ o de forma equivalente, $c^2 = a^2 + b^2$. Véase la relación que existe entre a, b y c. En la hipérbola $c > a$, a puede ser mayor o menor que b, inclusive pueden tener el mismo valor. El rectángulo formado en la gráfica tiene dimensiones $2a$ por $2b$ y las rectas que contienen las diagonales de dicho rectángulo, son las **asíntotas de la hipérbola**.

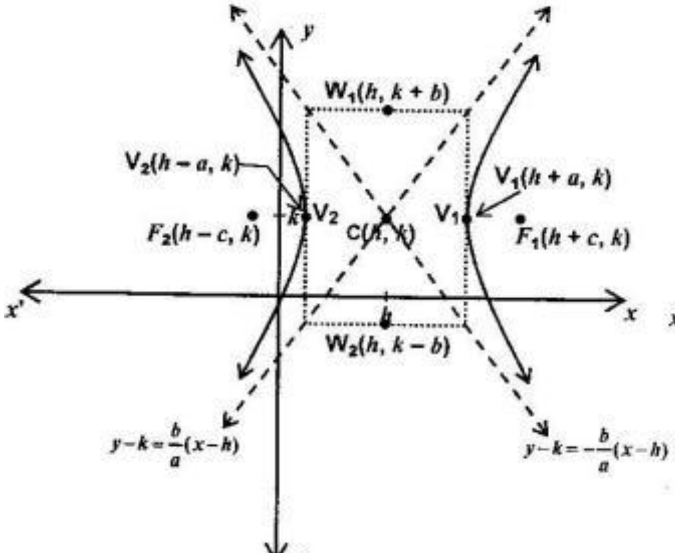
Ahora se procede a identificar los elementos de la hipérbola dada en la fig. 2.

Véase los elementos de una hipérbola, como la dada en la fig. 2 a): es una hipérbola horizontal, tiene **dos vértices** $V_1(a, 0)$; $V_2(-a, 0)$, **dos focos** $F_1(c, 0)$; $F_2(-c, 0)$, **el centro**; que es el punto medio del segmento con extremos los puntos fijos (focos) o el punto medio del segmento que contiene los vértices; en este caso es C(0, 0). El $\overline{V_1V_2}$ es llamado **eje transverso**, el $\overline{W_1W_2}$ es llamado **eje conjugado** o **eje imaginario**, $V_1V_2 = 2a$, $W_1W_2 = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Nótese que $c > a$, los extremos del eje transverso son los vértices y los extremos del eje conjugado o imaginario son $W_1(0, b)$ y $W_2(0, -b)$. Otro elemento importante de la hipérbola son las asíntotas; en una hipérbola horizontal las ecuaciones que le corresponden a dichas asíntotas son: $y = \pm\frac{b}{a}x$ (una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa).

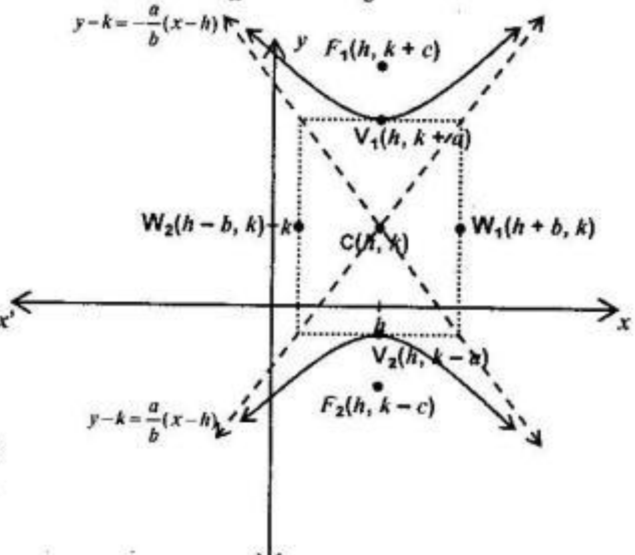
Si es una hipérbola vertical, los **vértices** son: $V_1(0, a)$; $V_2(0, -a)$, los **focos:** $F_1(0, c)$; $F_2(0, -c)$, y **el centro** es C(0, 0). El $\overline{V_1V_2}$ (**eje transverso**) es vertical, el $\overline{W_1W_2}$ (**eje conjugado** o **eje imaginario**), es horizontal. De igual manera, $V_1V_2 = 2a$, $W_1W_2 = 2b$, $F_1F_2 = 2c$, los extremos del eje conjugado o imaginario son $W_1(b, 0)$ y $W_2(-b, 0)$ y las ecuaciones que le corresponden a dichas asíntotas son: $y = \pm\frac{a}{b}x$ (una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa).

Una hipérbola que no tiene su centro en el origen se considera una hipérbola desfasada. Asúmase una con centro en el punto (h, k). Véase la siguiente figura, la ecuación que le corresponde y los elementos de la misma.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Observación: Una forma para encontrar las ecuaciones de las asíntotas en la hipérbola, es tomar la ecuación en forma canónica que le corresponde a la misma y compararla con cero (igualarla a cero). Notará que se tiene una diferencia de cuadrados, si ésta se factoriza y se compara uno de estos factores con cero y despeja para la variable y, se obtiene la ecuación de una de ellas. Se debe recordar que son dos ecuaciones, una con pendiente positiva y la otra con pendiente negativa.

Para el caso si se tiene la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y ésta se compara con cero se tiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$$ ecuación en forma canónica comparada con cero.

$$\left(\frac{x-h}{a}-\frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a}+\frac{y-k}{b}\right)=0$$ factorizando (diferencia de cuadrados).

$$\frac{x-h}{a}-\frac{y-k}{b}=0$$ igualando cada factor a cero se obtienen las dos ecuaciones.

$$\frac{x-h}{a}=\frac{y-k}{b}$$ transponiendo términos.

$$\frac{b}{a}(x-h)=y-k$$ despejando para el término $y-k$ y se obtiene una de las ecuaciones.

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$ tomando la ecuación con pendiente positiva y la ecuación con pendiente negativa.

Tenga en mente que a y b son positivas (esto se muestra con la deducción de la fórmula).

Para encontrar las asíntotas de la gráfica que le corresponden a la siguiente ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$, se procede de forma similar que en la anterior.

Recuérdese que para identificar si una hipérbola es horizontal o vertical, es importante ver cual de la variables (x o y) tiene el signo positivo. Para el caso si la variable x tiene el signo positivo, entonces es una hipérbola horizontal (las ramas de la misma abren hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente) (ver fig.3 a)). Por el contrario, si quien tiene el signo positivo es la variable y, entonces la hipérbola es vertical (las ramas de la misma abren hacia arriba y hacia abajo respectivamente) (ver fig.3 b)). Otro elemento que hay que tener en cuenta es que los focos, están en el interior de las ramas de la hipérbola.

Para determinar las componentes de los vértices, focos y extremos del eje imaginario, es importante notar cual de las componentes permanece fija y la otra se moverá a unidades a la izquierda y a unidades a la derecha respectivamente o bien a unidades hacia arriba y a unidades hacia abajo respectivamente a partir del centro (h, k), en el caso de los vértices. Ahora, en los focos al igual que en los vértices una de las componentes permanecerá fija y la otra se moverá c unidades a la izquierda y c unidades a la derecha o bien c unidades hacia arriba y c unidades hacia abajo a partir del centro (h, k). Similarmente se determinan las componentes de los extremos del eje conjugado o imaginario; una de las componentes permanece fija y la otra se moverá b unidades a la izquierda y b unidades a la derecha o bien b unidades hacia arriba y b unidades hacia abajo a partir del centro (h, k).

Tomando una de las ecuaciones en forma canónica de la hipérbola, desarrollando los binomios y luego simplificando, se obtiene una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con A y C con signos distinto (una positiva y la otra negativa), es decir AC < 0. Téngase en cuenta que esta última ecuación enunciada es la ecuación general de una hipérbola o de una hipérbola degenerada.

Con este análisis realizado a esta ecuación, se procede al trazo de la gráfica y a la identificación de sus elementos. Véase:

Ejemplo 1 Para cada ecuación, determinar si existe: el centro, vértices (extremos del eje transverso), focos, extremos del eje conjugado o imaginario, ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ **b)** $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{9}=1$ **c)** $25x^2-9y^2=225$ **d)** $4x^2-9y^2=1$

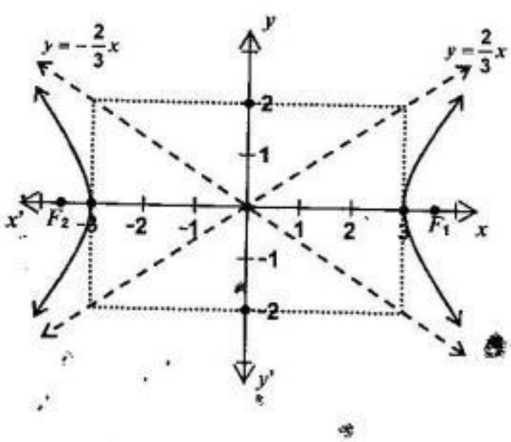
e) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ **f)** $\frac{(y+2)^2}{25}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$ **g)** $9(x-1)^2-4(y+1)^2=1$

h) $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ **i)** $x^2-4y^2-4x+8y-4=0$

j) $5x^2-13y^2-40x-78y=37$ **k)** $x^2-y^2-2x+6y+8=0$

Solución:

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$



La ecuación $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, está dada en su forma canónica. Esto implica que el centro es C(0, 0). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2=9$ ó $a=3$ y $b^2=4$ ó $b=2$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c=\sqrt{a^2+b^2}$ y se obtiene que $c=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola horizontal, se cuentan a unidades a la derecha, a unidades a la izquierda, b unidades hacia arriba y b unidades hacia abajo a partir del centro.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar un rectángulo de tal manera que su base mida $2a$ unidades y su altura $2b$ unidades. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

A continuación se indican los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h+a, k)$ y $\mathbf{V_2}(h-a, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(0+3, 0)$ y $\mathbf{V_2}(0-3, 0)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(3, 0)$ y $\mathbf{V_2}(-3, 0)$.

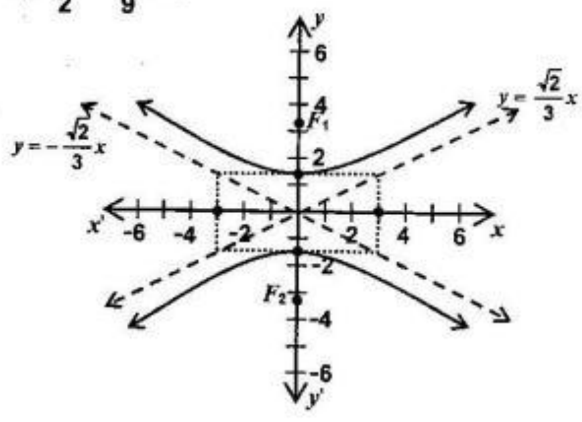
Los focos en términos generales están dados por $F_1(h+c, k)$ y $F_2(h-c, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(0+\sqrt{13}, 0\right)$ y $F_2\left(0-\sqrt{13}, 0\right)$, o en forma simplificada $F_1\left(\sqrt{13}, 0\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{13}, 0\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h, k+b)$ y $\mathbf{W_2}(h, k-b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}(0, 0+3)$ y $\mathbf{W_2}(0, 0-3)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(0, 3)$ y $\mathbf{W_2}(0, -3)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, se encuentran (si no ha memorizado la fórmula) tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y-k$, en uno o en ambos factores. Véase:

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0$	ecuación dada comparada con cero.
$\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=0$	factorizando (diferencia de cuadrado).
$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0$	tomando uno de los factores y comparando con cero.
$y=\dfrac{2}{3}x$	despejando para y. Recuérdese que son dos asíntotas.
$y=\pm\dfrac{2}{3}x$	tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

b) $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{9}=1$



La ecuación $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{9}=1$, está dada en su forma canónica. Esto implica que el centro es C(0, 0). Nótese que la variable con signo positivo es y, por lo que se tiene una hipérbola vertical con $a^2=2$ ó $a=\sqrt{2}$ y $b^2=9$ ó $b=3$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c=\sqrt{a^2+b^2}$ y se obtiene que $c=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola vertical, se cuentan a unidades hacia arriba, a unidades hacia abajo, b unidades a la derecha y b unidades a la izquierda a partir del centro.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar un rectángulo de tal manera que su base mida $2b$ unidades y su altura $2a$ unidades; es decir con base 6 y altura $2\sqrt{2}$. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

Indicando los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h,\ k+a)$ y $\mathbf{V_2}(h,\ k-a)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}\left(0, 0+\sqrt{2}\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(0, 0-\sqrt{2}\right)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}\left(0, \sqrt{2}\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(0, -\sqrt{2}\right)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h,\ k+c)$ y $F_2\ (h,\ k-c)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(0, 0+\sqrt{13}\right)$ y $F_2\ \left(0, 0-\sqrt{13}\right)$, o en forma simplificada $F_1\left(0,\sqrt{13}\right)$ y $F_2\left(0,-\sqrt{13}\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h+b,\ k)$ y $\mathbf{W_2}(h-b,\ k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}(0+3,\ 0)$ y $\mathbf{W_2}(0-3,\ 0)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(3, 0)$ y $\mathbf{W_2}(-3, 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, se encuentran (si no ha memorizado la fórmula) tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y-k$, en

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9} = 0$$ ecuación dada comparada con cero.

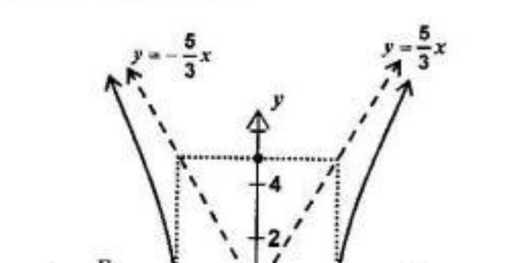
$$\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{3}\right) = 0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{3} = 0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y = \frac{\sqrt{2}}{3}x$$ despejando para y. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}x$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

c) $25x^2 - 9y^2 = 225$



La ecuación $25x^2 - 9y^2 = 225$ no está en la forma canónica y para llevarla a dicha forma se debe dividir ambos lados de la ecuación por 225 llegando a $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Luego el centro es C(0, 0). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2 = 9$ ó $a = 3$ y $b^2 = 25$ ó $b = 5$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene que $c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Para trazar la gráfica, se cuentan a unidades a la derecha, a unidades a la izquierda, b unidades hacia arriba y b unidades hacia abajo a partir del centro.

Dibujando el rectángulo de 6 unidades de base por 10 unidades de altura y sus diagonales, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

A continuación se indican los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h + a, k)$ y $\mathbf{V_2}(h - a, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(0 + 3, 0)$ y $\mathbf{V_2}(0 - 3, 0)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(3, 0)$ y $\mathbf{V_2}(-3, 0)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h + c, k)$ y $F_2\ (h - c, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(0 + \sqrt{34}, 0\right)$ y $F_2\left(0 - \sqrt{34}, 0\right)$, o en forma simplificada $F_1\left(\sqrt{34}, 0\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{34}, 0\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h, k + b)$ y $\mathbf{W_2}(h, k - b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}(0, 0 + 5)$ y $\mathbf{W_2}(0, 0 - 5)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(0, 5)$ y $\mathbf{W_2}(0, -5)$.

Tomando la ecuación en forma canónica, factorizando, comparando uno de los factores

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 0$ ecuación en forma canónica comparada con cero.

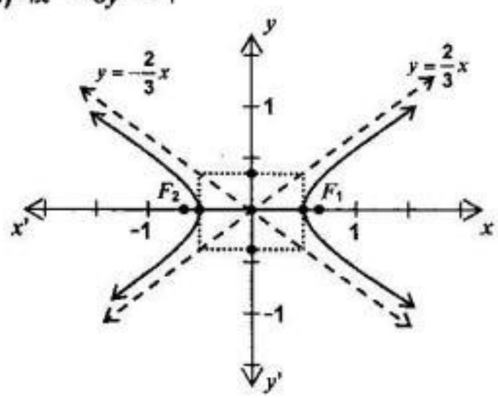
$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right) = 0$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 0$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$y = \frac{5}{3}x$ despejando para y. Recuérdese que son dos asíntotas.

$y = \pm\frac{5}{3}x$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

d) $4x^2 - 9y^2 = 1$



La ecuación $4x^2 - 9y^2 = 1$ no está en la forma canónica, pero ya está comparada con uno (una de las características de la hipérbola) y para llevarla a dicha forma se debe escribir en forma equivalente, la cual es $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$ (efectúese la división en cada término para que sea comprobado). Esto implica que el centro es C(0, 0). La variable que tiene signo positivo, es x, por lo que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2 = \frac{1}{4}$ ó $a = \frac{1}{2}$ y $b^2 = \frac{1}{9}$ ó $b = \frac{1}{3}$.

Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene que $c = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$.

Dibujando el rectángulo de **una** unidad de base, $\frac{2}{3}$ unidades de altura y sus diagonales, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura de arriba.

Indicando los elementos que se piden:

Los vértices, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h + a, k)$ y $\mathbf{V_2}(h - a, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}\left(0+\frac{1}{2},0\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(0-\frac{1}{2},0\right)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h + c, k)$ y $F_2\ (h - c, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(0+\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$ y $F_2\left(0-\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$, o en forma simplificada $F_1\left(\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h,\ k+b)$ y $\mathbf{W_2}(h,\ k-b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}\left(0, 0+\frac{1}{3}\right)$ y $\mathbf{W_2}\left(0, 0-\frac{1}{3}\right)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y $\mathbf{W_2}\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Tomando la ecuación en forma canónica, factorizando, comparando uno de los factores con cero y despejando para y o para $y-k$, se obtienen las ecuaciones de las asíntotas. Véase:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=0$$ ecuación en forma canónica comparada con cero.

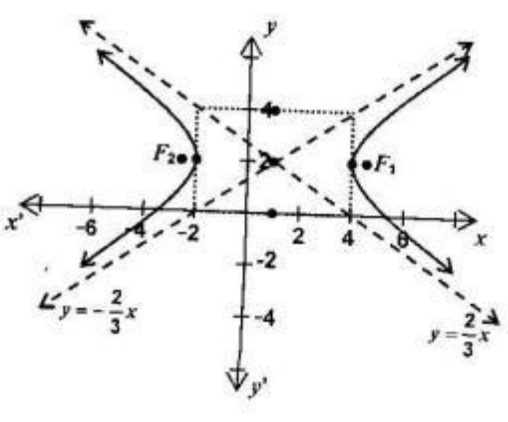
$$\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)=0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{3}}=0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y=\frac{2}{3}x$$ despejando para y. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y=\pm\frac{2}{3}x$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

e) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$



La ecuación $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$, está dada en su forma canónica. Esto implica que el centro es C(1, 2). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2=9$ ó $a=3$ y $b^2=4$ ó $b=2$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c=\sqrt{a^2+b^2}$ y se obtiene que $c=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola horizontal, se cuentan, *a partir del centro (1, 2)*, 3 unidades a la derecha, 3 unidades a la izquierda, 2 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia abajo *a partir del centro*.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar el rectángulo de base 6 unidades y su altura 4 unidades. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

Véase los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h+a,\ k)$ y $\mathbf{V_2}(h-a,\ k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(1+3, 2)$ y $\mathbf{V_2}(1-3, 2)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(4, 2)$ y $\mathbf{V_2}(-2, 2)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h + c,\ k)$ y $F_2\ (h - c,\ k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(1+\sqrt{13}, 2\right)$ y $F_2\ \left(1-\sqrt{13}, 2\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W}_1(h,\ k + b)$ y $\mathbf{W}_2(h,\ k - b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W}_1(1,\ 2 + 2)$ y $\mathbf{W}_2(1,\ 2 - 2)$, o en forma simplificada $\mathbf{W}_1(1,\ 4)$ y $\mathbf{W}_2(1,\ 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, se encuentran tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y - k$, en uno o en ambos factores.

Véase:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 0$$ ecuación dada comparada con cero.

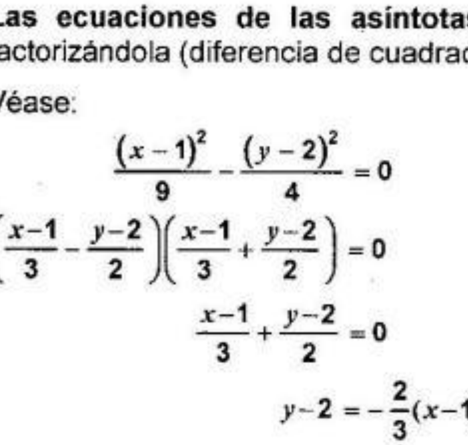
$$\left(\frac{x-1}{3} - \frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{x-1}{3} + \frac{y-2}{2}\right) = 0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{x-1}{3} + \frac{y-2}{2} = 0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y-2 = -\frac{2}{3}(x-1)$$ despejando para $y - 2$. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y-2 = \pm\frac{2}{3}(x-1)$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

f) $\dfrac{(y+2)^2}{25} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$



La ecuación $\dfrac{(y+2)^2}{25} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$, está dada en su forma canónica. Esto implica que el centro es C(–1, –2). Nótese que la variable con signo positivo es y, luego se tiene una hipérbola vertical con $a^2 = 25$ ó $a = 5$ y $b^2 = 4$ ó $b = 2$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene que $c = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.

Para trazar la gráfica, se cuentan 5 unidades hacia arriba, 5 unidades hacia abajo, 2 unidades a la derecha y 2 unidades a la izquierda a partir del centro.

Dibujando el rectángulo de tal manera que su base mida 4 unidades y su altura 10 unidades. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

Indicando los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V}_1(h,\ k + a)$ y $\mathbf{V}_2(h,\ k - a)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V}_1(-1, -2+5)$ y $\mathbf{V}_2(-1, -2-5)$, o en forma simplificada $\mathbf{V}_1(-1, 3)$ y $\mathbf{V}_2(-1, -7)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h,\ k + c)$ y $F_2\ (h,\ k - c)$ de donde al sustituir los

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h + b, k)$ y $\mathbf{W_2}(h - b, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}$ $(-1 + 2, -2)$ y $\mathbf{W_2}$ $(-1 - 2, -2)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(1, -2)$ y $\mathbf{W_2}(-3, -2)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, se encuentran tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y - k$, en uno de los factores o en ambos factores. Véase:

$$\frac{(y+2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{4} = 0$$ ecuación dada comparada con cero.

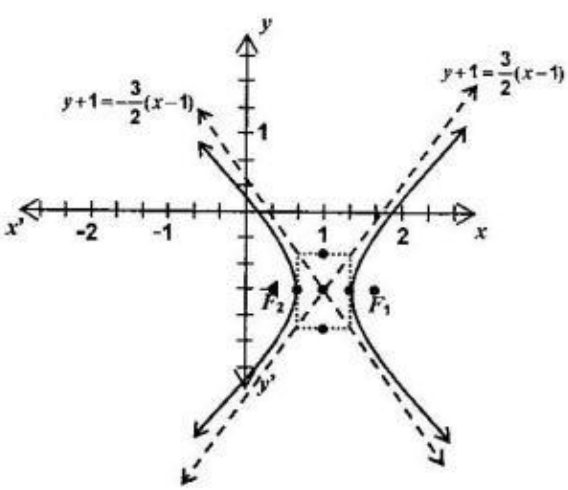
$$\left(\frac{y+2}{5} - \frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{y+2}{5} + \frac{x+1}{2}\right) = 0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{y+2}{5} - \frac{x+1}{2} = 0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y + 2 = \frac{5(x+1)}{2}$$ despejando para $y + 2$. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y + 2 = \pm\frac{5}{2}(x+1)$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

g) $9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 1$



La ecuación $9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 1$, no está dada en su forma canónica, pero como está comparada con uno, lo único que corresponde es escribirla de forma equivalente. Teniendo que $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$. Esto implica que el centro es C(1, −1). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2 = \frac{1}{9}$ ó $a = \frac{1}{3}$ y $b^2 = \frac{1}{4}$ ó $b = \frac{1}{2}$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene que $c = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola horizontal, se cuentan, a partir del centro (1, −1), $\frac{1}{3}$ unidades a la derecha, $\frac{1}{3}$ unidades a la izquierda, $\frac{1}{2}$ unidades hacia arriba y $\frac{1}{2}$ unidades hacia abajo.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar el rectángulo de base $\frac{2}{3}$ unidades y su altura una unidad. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

A continuación se indican los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h + a,\, k)$ y $\mathbf{V_2}(h - a,\, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}\left(1+\frac{1}{3},-1\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(1-\frac{1}{3},-1\right)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}\left(\frac{4}{3},-1\right)$ y $\mathbf{V_2}\left(\frac{2}{3},-1\right)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1(h + c,\, k)$ y $F_2(h - c,\, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(1+\frac{\sqrt{13}}{6},-1\right)$ y $F_2\left(1-\frac{\sqrt{13}}{6},-1\right)$ o en forma simplificada $F_1\left(\frac{6+\sqrt{13}}{6},-1\right)$ y $F_2\left(\frac{6-\sqrt{13}}{6},-1\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h,\, k + b)$ y $\mathbf{W_2}(h,\, k - b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}\left(1,-1+\frac{1}{2}\right)$ y $\mathbf{W_2}\left(1,-1-\frac{1}{2}\right)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ y $\mathbf{W_2}\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

Encontrando las ecuaciones de las asíntotas.

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{9}}-\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}=0$$ ecuación dada comparada con cero.

$$\left(\frac{x-1}{\frac{1}{3}}-\frac{y+1}{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-1}{\frac{1}{3}}+\frac{y+1}{\frac{1}{2}}\right)=0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}}+\frac{y+1}{\frac{1}{2}}=0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-1)$$ despejando para $y + 1$. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y+1=\pm\frac{3}{2}(x-1)$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

h) $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$

Esta ecuación está dada en su forma general (nótese A es positiva y C es negativa) y para llevarla a la forma canónica, se debe hacer completación de cuadrados con respecto a ambas variables. Véase:

$$4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$$ ecuación dada.

$$(4x^2-8x\ )-(9y^2-36y\ )=68$$ asociando y transponiendo el término sin variable.

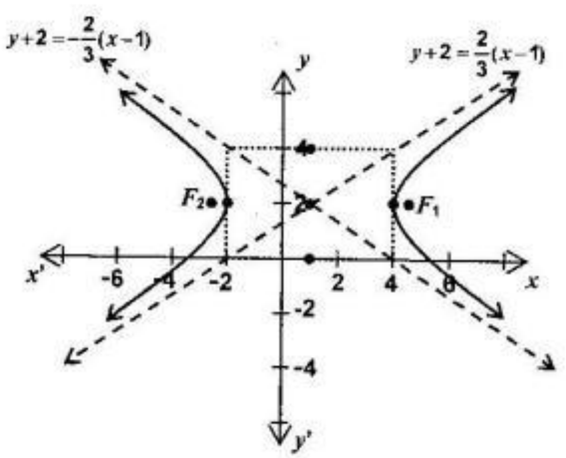
$$4(x^2-2x\ )-9(y^2-4y\ )=68$$ factorizando en cada término de la izquierda (factor común).

$$4(x^2-2x+1)-9(y^2-4y+4)=68+4-36$$ completación de cuadrados y propiedad de la igualdad. Nótese que en el lado izquierdo de la igualdad los números que se agregaron son $4(1) = 4$ y $-9(4) = -36$.

$$4(x-1)^2-9(y-2)^2=36$$ factorizando y simplificando.

$$\frac{4(x-1)^2}{36}-\frac{9(y-2)^2}{36}=\frac{36}{36}$$ dividiendo por 36 ambos lados de la ecuación.

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$ simplificando y se obtiene en su forma canónica.



La ecuación dada en su forma canónica corresponde a $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$. Esto implica que el centro es C(1, 2). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2 = 9$ ó $a = 3$ y $b^2 = 4$ ó $b = 2$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c=\sqrt{a^2+b^2}$ y se obtiene que $c=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola horizontal, se cuentan, a partir del centro (1, 2), 3 unidades a la derecha, 3 unidades a la izquierda, 2 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia abajo a partir del centro.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar el rectángulo de base 6 unidades y su altura 4 unidades. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura de arriba.

Los elementos que se piden son:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h+a, k)$ y $\mathbf{V_2}(h-a, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(1+3, 2)$ y $\mathbf{V_2}(1-3, 2)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(4, 2)$ y $\mathbf{V_2}(-2, 2)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h+c, k)$ y $F_2\ (h-c, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(1+\sqrt{13}, 2\right)$ y $F_2\left(1-\sqrt{13}, 2\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h, k+b)$ y $\mathbf{W_2}(h, k-b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}(1, 2+2)$ y $\mathbf{W_2}(1, 2-2)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(1, 4)$ y $\mathbf{W_2}(1, 0)$.

Encontrando las **ecuaciones de las asíntotas** de esta hipérbola.

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=0$$ ecuación dada comparada con cero.

$$\left(\frac{x-1}{3}-\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{2}\right)=0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{2}=0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero.

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$$ despejando para $y-2$. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y-2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$$ tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

i) $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$

Esta ecuación está dada en su forma general (nótese A es positiva y C es negativa) y para llevarla a la forma canónica, se debe hacer completación de cuadrados con respecto a ambas variables. Véase:

$x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$ ecuación dada.

$(x^2 - 4x\ ) - (4y^2 - 8y\ ) = 4$ asociando y transponiendo el término sin variable.

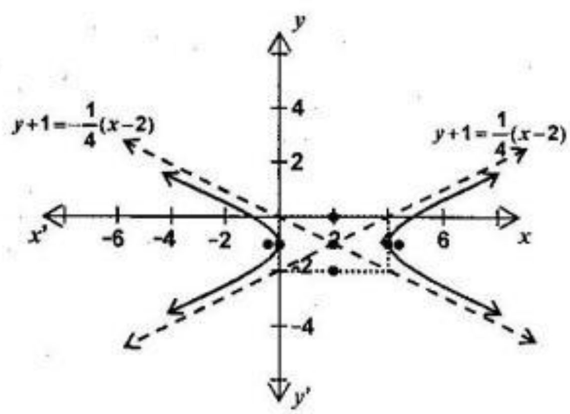
$(x^2 - 4x\ ) - 4(y^2 - 2y\ ) = 4$ factorizando en uno de los términos de la izquierda.

$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) - \mathbf{4}(y^2 - 2y + \mathbf{1}) = 4 + \mathbf{4} - \mathbf{4}$ completación de cuadrados y propiedad de la igualdad. Nótese que en el lado izquierdo de la igualdad los números que se agregaron son 4 y $-4\ (1) = -4$.

$(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 4$ factorizando y simplificando.

$\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{4(y+1)^2}{4} = \dfrac{4}{4}$ dividiendo por 4 ambos lados de la ecuación.

$\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$ simplificando y se obtiene en su forma canónica.



Retomando la ecuación en su forma canónica, se tiene $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$. El centro de ésta es C(2, −1). Nótese que la variable que tiene signo positivo es x, lo que implica que se tiene una hipérbola horizontal con $a^2 = 4$ ó $a = 2$ y $b^2 = 1$ ó $b = 1$. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene que $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola horizontal, se cuenta a partir del centro (2, −1), 2 unidades a la derecha, 2 unidades a la izquierda, una unidades hacia arriba y una unidades hacia abajo.

Una vez ubicados estos puntos, se procede a dibujar el rectángulo de base 4 unidades y con altura 2 unidades. Trazando las diagonales de este rectángulo, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

Indicando los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h + a, k)$ y $\mathbf{V_2}(h - a, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(2 + 2, -1)$ y $\mathbf{V_2}(2 - 2, -1)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(4, -1)$ y $\mathbf{V_2}(0, -1)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h + c, k)$ y $F_2\ (h - c, k)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(2+\sqrt{5}, -1\right)$ y $F_2\left(2-\sqrt{5}, -1\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h, k + b)$ y $\mathbf{W_2}(h, k - b)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}(2, -1 + 1)$ y $\mathbf{W_2}(2, -1 - 1)$, o en forma simplificada $\mathbf{W_1}(2, 0)$ y $\mathbf{W_2}(2, -2)$.

Las ecuaciones de las asintotas, se encuentran tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y - k$, en uno o en ambos factores. Véase:

$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{1} = 0$	ecuación dada comparada con cero.
$\left(\frac{x-2}{2} - \frac{y+1}{1}\right)\left(\frac{x-2}{2} + \frac{y+1}{1}\right) = 0$	factorizando (diferencia de cuadrado).
$\frac{x-2}{2} + \frac{y+1}{1} = 0$	tomando uno de los factores y comparando con cero.
$y+1 = -\frac{1}{2}(x-2)$	despejando para $y + 1$. Recuérdese que son dos asíntotas.
$y+1 = \pm\frac{1}{2}(x-2)$	tomando las dos ecuaciones (pendiente positiva y pendiente negativa).

j) $5x^2 - 13y^2 - 40x - 78y = 37$

Esta ecuación está dada en su forma general (nótese que A es positiva y C es negativa) y para llevarla a la forma canónica, se debe hacer completación de cuadrados con respecto a ambas variables. Véase:

$5x^2 - 13y^2 - 40x - 78y = 37$	ecuación dada.
$(5x^2 - 40x\ ) - (13y^2 + 78y\ ) = 37$	asociando términos de la izquierda.
$5(x^2 - 8x\ ) - 13(y^2 + 6y\ ) = 37$	factorizando los términos de la izquierda (factor común).
$\mathbf{5}(x^2 - 8x + \mathbf{16}) - \mathbf{13}(y^2 + 6y + \mathbf{9}) = 37 + \mathbf{80} - \mathbf{117}$	completación de cuadrados y propiedad de la igualdad. Nótese que en el lado izquierdo de la igualdad los números que se agregaron son **5(16) = 80** y **−13(9) = −117**.
$5(x-4)^2 - 13(y+3)^2 = 0$	factorizando y simplificando.

Como la ecuación obtenida finalmente está comparada con cero, esto implica que se tiene una **hipérbola degenerada** y el único punto que satisface dicha ecuación es (4, −3). Nótese que se pueden obtener las ecuaciones de las asíntotas (la ecuación está comparada con cero) y trazar las mismas y éstas se intersecan en el único punto que satisface esta ecuación.

k) $x^2 - y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$

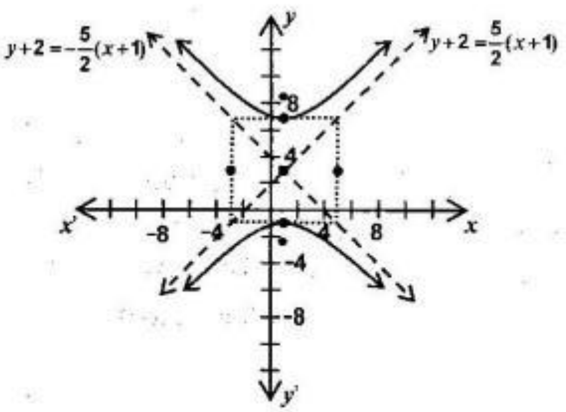
Esta ecuación está dada en su forma general (nótese A es positiva y C es negativa) y para llevarla a la forma canónica, se debe hacer completación de cuadrados con respecto a ambas variables. Véase:

$x^2 - y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$	ecuación dada.
$(x^2 - 2x\ ) - (y^2 - 6y\ ) = -8$	asociando términos de la izquierda y transponiendo término
$(x^2 - 2x + \mathbf{1}) - (y^2 - 6y + \mathbf{9}) = -8 + \mathbf{1} - \mathbf{9}$	completación de cuadrados y propiedad de la igualdad. **N**ótese que en el lado izquierdo de la igualdad los números que se agregaron son **1** y **− 9**.
$(x-1)^2 - (y-3)^2 = -16$	factorizando y simplificando.

Nótese que la ecuación está comparada con un número negativo, por lo que debe multiplicar por −1 ambos lados de la ecuación obteniendo $(y-3)^2 - (x-1)^2 = 16$. Si ésta última se divide por 16 se obtiene la forma canónica de la misma.

$(y-3)^2 - (x-1)^2 = 16$	ecuación obtenida después de multiplicar por −1 ambos lados de la igualdad.
$\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{16} = \frac{16}{16}$	dividiendo por 16 ambos lados de la ecuación.
$\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$	simplificando.

Obsérvese que inicialmente (en la ecuación dada en forma general), se había dicho que A es positiva y C negativa, lo que se podía pensar que la hipérbola abriría a la izquierda y derecha, lo cual al haberla llevado a la forma canónica no es verdad, ya que ésta abre hacia arriba y hacia abajo.



Retomando la ecuación en su forma canónica $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$, se tiene que el centro es C(1, 3), a^2 = 16 ó a = 4 y b^2 = 16 ó b = 4. Conociendo estos valores se encuentra el valor de c mediante la fórmula $c=\sqrt{a^2+b^2}$ y se obtiene que $c=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$.

Para trazar la gráfica, dado que se tiene una hipérbola vertical, se cuentan 4 unidades hacia arriba, 4 unidades hacia abajo, 4 unidades a la derecha y 4 unidades a la izquierda, a partir del centro.

Ahora, se procede a dibujar un rectángulo de tal manera que su base mida 8 unidades y su altura 8 unidades (un cuadrado, vea que el valor de a puede ser: menor, mayor o igual que el valor de b). Trazando las diagonales de este cuadrado, se hace un bosquejo de la gráfica, de tal manera que cada rama de la hipérbola se acerque a las asíntotas, como se muestra en la figura anterior.

Indicando los elementos que se piden:

Los vértices, por las características de la gráfica, en términos generales están dados por $\mathbf{V_1}(h, k+a)$ y $\mathbf{V_2}(h, k-a)$, de donde al sustituir los valores de h, k y a se obtienen los siguientes $\mathbf{V_1}(1, 3+4)$ y $\mathbf{V_2}(1, 3-4)$, o en forma simplificada $\mathbf{V_1}(1, 7)$ y $\mathbf{V_2}(1, -1)$.

Los focos en términos generales están dados por $F_1\ (h, k+c)$ y $F_2\ (h, k-c)$ de donde al sustituir los valores de h, k y c se obtienen los siguientes $F_1\left(1, 3+4\sqrt{2}\right)$ y $F_2\left(1, 3-4\sqrt{2}\right)$.

Los extremos del eje conjugado o imaginario, en términos generales están dados por $\mathbf{W_1}(h+b, k)$ y $\mathbf{W_2}(h-b, k)$, de donde al sustituir los valores de h, k y b se obtienen los siguientes $\mathbf{W_1}$ (1 + 4, 3) y $\mathbf{W_2}$ (1 − 4, 3), o en forma simplificada $\mathbf{W_1}$(5, 3) y $\mathbf{W_2}$(−3, 3).

Las ecuaciones de las asíntotas, se encuentran tomando la ecuación, comparándola con cero, factorizándola (diferencia de cuadrados) y despejando para y, o para $y-k$, en uno de los factores o en ambos factores. Véase:

$$\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{16}=0$$ ecuación dada comparada con cero.

$$\left(\frac{y-3}{4}-\frac{x-1}{4}\right)\left(\frac{y-3}{4}+\frac{x-1}{4}\right)=0$$ factorizando (diferencia de cuadrado).

$$\frac{y-3}{4}-\frac{x-1}{4}=0$$ tomando uno de los factores y comparando con cero

$$y-3=\frac{4}{4}(x-1)$$ despejando para $y-3$. Recuérdese que son dos asíntotas.

$$y-3=\pm(x-1)$$ tomando las dos ecuaciones y simplificando. ■

Ejemplo 2 Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la hipérbola, que satisfaga las condiciones indicadas.

a) Vértices en (–2, 0), (2, 0) y focos en (–4, 0), (4, 0).

b) Vértices en (0, ±**3**), focos en (0, ± **4**).

c) Vértices en (±1, 0) y ecuaciones de las asíntotas $y = \pm\, \mathbf{3}x$.

d) Focos en (0, ±4) y ecuaciones de las asíntotas $y = \pm\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x$.

e) Vértices en (0, ±**2**) y pasa por el punto (3, 4).

f) Tiene como asíntotas las rectas $y = \pm\, \mathbf{3}x$, centro en el origen pasa por el punto (3, 5).

g) Focos en (±3, 0) y la longitud del eje transverso 4 unidades.

h) Focos en (5, 1), (–1, 1); la longitud del eje conjugado o imaginario es de 4 unidades.

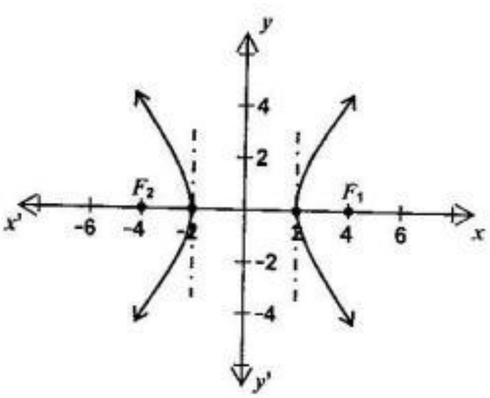
i) Con eje transverso de longitud 4 unidades y sobre la recta $x = 2$; y con eje conjugado o imaginario de longitud 6 unidades y sobre la recta $y = 3$.

j) Tiene C(3, –2), un vértice (7, –2) y un foco en (8, –2).

k) Vértices (–7, 2), (1, 2) y una de sus asíntotas con ecuación $y - 2 = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}(x + 3)$

Solución:

a) Vértices en (–2, 0), (2, 0) y focos en (–4, 0), (4, 0).

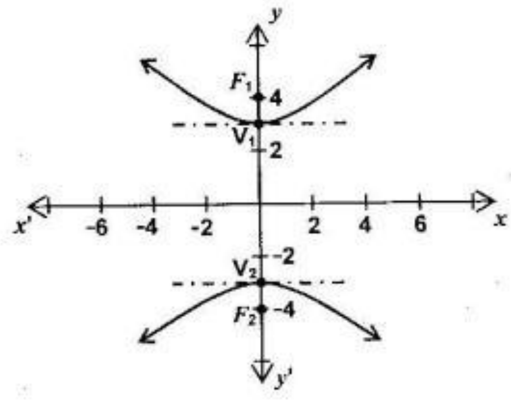


Hacer un bosquejo de la gráfica es muy importante. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices (extremos del eje transverso). Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$, con $a = 2$ y $c = 4$. Conociendo los valores de a y c, se determina el valor para b, mediante la fórmula $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ya que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Luego $b = \sqrt{\mathbf{4}^2 - \mathbf{2}^2} = \sqrt{\mathbf{12}} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$.

Para encontrar la ecuación solicitada, se necesitan los valores de a y b, y sustituir éstos en la ecuación que le corresponde a la curva. Retomando la ecuación y sustituyendo los valores de a y b, se tiene que la ecuación buscada es $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = \mathbf{1}$ ó $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = \mathbf{1}$ dada en su forma canónica. Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 12), ambos lados de la ecuación. Véase:

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = \mathbf{1}$	ecuación encontrada en su forma canónica.
$12\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12}\right) = \mathbf{1(12)}$	multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.
$3x^2 - y^2 = 12$	simplificando.
$3x^2 - y^2 - 12 = 0$	comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

b) Vértices en (0, ±**3**) y focos en (0, ± **4**).



Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia arriba y hacia abajo, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices (extremos del eje transverso). Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, con a = 3 y c = 4. Conociendo los valores a y c, se determina el valor para b, mediante la fórmula $b=\sqrt{c^2-a^2}$ ya que $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Luego $b=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

Para encontrar la ecuación solicitada, se necesitan los valores de a y b, y sustituir éstos en la ecuación que le corresponde a la curva. Retomando la ecuación y sustituyendo los valores de a y b, se tiene que la ecuación buscada es $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=1$ ó $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ dada en su forma canónica. Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 63), ambos lados de la ecuación. Véase:

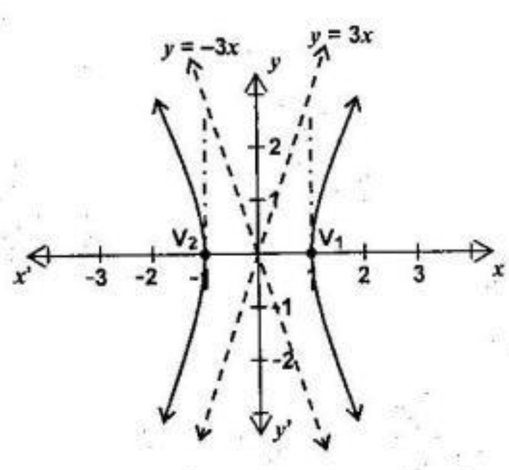
$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$63\left(\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}\right)=1(63)$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$7y^2-9x^2=63$ simplificando.

$7y^2-9x^2-60=0$ comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

c) Vértices en (±1, 0) y ecuaciones de las asintotas $y=\pm 3x$.



Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices (extremos del eje transverso). Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con a = 1. Otro de los datos que se da, son las asíntotas donde una de ellas es la que tiene como ecuación $y=3x$ ó $y=\frac{3}{1}x$. Por la forma de la gráfica, una de las ecuaciones generales que le corresponde a esta hipérbola es $y=\frac{b}{a}x$, pero como a = 1, se concluye que b = 3.

Para encontrar la ecuación solicitada, se necesitan los valores de a y b, y sustituir éstos en la ecuación que le corresponde a la curva. Retomando la ecuación y sustituyendo los valores de a y b, se tiene que la ecuación buscada es $\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ ó $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$ dada en su forma canónica. Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 9), ambos lados de la ecuación. Véase:

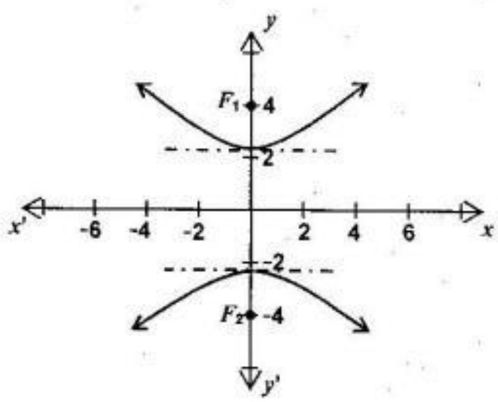
$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$9\left(\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}\right)=1(9)$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$9x^2-y^2=9$ simplificando.

$9x^2-y^2-9=0$ comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

d) Focos en (0, ±4) y ecuaciones de las asíntotas $y=\pm\frac{2}{3}x$.



Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia arriba y hacia abajo, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los focos. Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, con $c = 4$. Nótese que no se conoce el valor de a y b, pero se conocen las asíntotas. Por la forma de la gráfica, una de las ecuaciones generales de las asíntotas que le corresponde a esta hipérbola es $y=\frac{a}{b}x$. Según las condiciones dadas, la ecuación de una de las asíntotas corresponde a $y=\frac{2}{3}x$.

Si se comparan estas dos últimas se tiene que $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ ó su equivalente $3a = 2b$. De esta relación se concluye que $a=\frac{2}{3}b$. Se sabe que $c=\sqrt{a^2+b^2}$ o que $c^2=a^2+b^2$.

Sustituyendo el valor de c y el de b, en esta última ecuación, se tiene que $(4)^2=\left(\frac{2}{3}b\right)^2+b^2$.

$\frac{4}{9}b^2+b^2=16$ retomando la última ecuación, aplicando simetría y aplicando propiedad de potencias.

$\frac{13}{9}b^2=16$ efectuando la suma.

$b^2=\frac{144}{13}$ despejando para b^2.

$b=\frac{12\sqrt{13}}{13}$ despejando para b y racionalizando.

Conociendo el valor para b se encuentra el de a. De donde

$a = \frac{2}{3}\left(\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$ sustituyendo el valor de b, encontrado anteriormente en la ecuación $a = \frac{2}{3}b$.

$a = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ simplificando.

$a^2 = \frac{64}{13}$ encontrando el valor de a^2.

Ahora conociendo el valor de a y b, se sustituyen estos en la ecuación antes encontrada; que es la que le corresponde a dicha hipérbola, según las condiciones dadas.

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ecuación que le corresponde a la hipérbola según las condiciones dadas.

$\frac{y^2}{\frac{64}{13}} - \frac{x^2}{\frac{144}{13}} = 1$ sustituyendo los valores de a^2 y b^2 respectivamente, se llega a la ecuación canónica.

$\frac{13y^2}{64} - \frac{13x^2}{144} = 1$ expresando de forma equivalente.

Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 576), ambos lados de la ecuación. Véase:

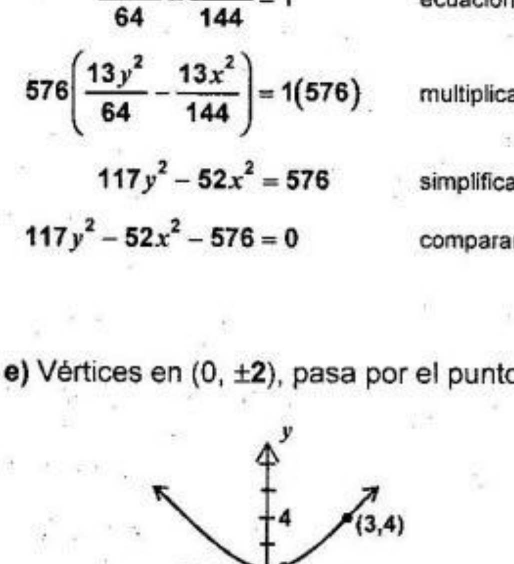
$\frac{13y^2}{64} - \frac{13x^2}{144} = 1$ ecuación equivalente encontrada en su forma canónica.

$576\left(\frac{13y^2}{64} - \frac{13x^2}{144}\right) = 1(576)$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$117y^2 - 52x^2 = 576$ simplificando.

$117y^2 - 52x^2 - 576 = 0$ comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

e) Vértices en (0, **±2**), pasa por el punto (3, 4).



Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia arriba y hacia abajo, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los vértices. Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, con a = 2. Nótese que no se conoce el valor de b y c, pero se conoce un punto que está en la curva. Retomando la ecuación que le corresponde a ésta, sustituyendo el valor de a y el punto que está en la curva (mismo que satisface la ecuación de la hipérbola), se tiene:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ecuación que le corresponde a esta hipérbola.

$\frac{4^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1$ sustituyendo el valor de a y el punto (3,4) en la ecuación.

$\frac{16}{4}-\frac{9}{b^2}=1$ efectuando las potencias.

$4-1=\frac{9}{b^2}$ transponiendo términos y simplificando.

$3=\frac{9}{b^2}$ simplificando.

$b^2=3$ despejando para b^2.

Conociendo los valores de a y b, se sustituyen éstos en la ecuación que le corresponde a la hipérbola según las condiciones dadas.

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ecuación que le corresponde a la hipérbola según las condiciones dadas.

$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ sustituyendo los valores de a^2 y b^2 respectivamente, se llega a la ecuación canónica.

Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 12), ambos lados de la ecuación. Véase:

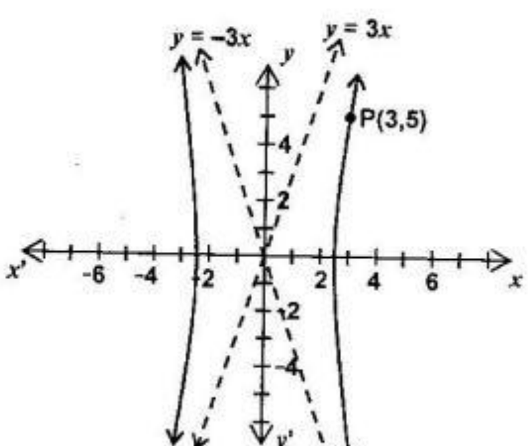
$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$12\left(\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}\right)=1(12)$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$3y^2-4x^2=12$ simplificando.

$3y^2-4x^2-12=0$ comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

f) Tiene como asíntotas las rectas $y=\pm 3x$, centro en el origen y pasa por el punto (3, 5).



Trazando las asíntotas y el punto por donde pasa la hipérbola, se hace un bosquejo de la gráfica, como se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada, la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda (un bosquejo, no le indica la exactitud de la grafica), además el centro es el punto (0, 0). Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y una de las ecuaciones de las asíntotas es $y=\frac{b}{a}x$. Como la curva pasa por el punto P(3, 5), éste satisface la ecuación anterior, luego $\frac{3^2}{a^2}-\frac{5^2}{b^2}=1$, que simplificando se tiene que $\frac{9}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1$.

Retomando una de las asíntotas dadas, $y = 3x$ y una de las ecuaciones generales de las asíntotas que le corresponde a la hipérbola según las condiciones dadas; $y = \frac{b}{a}x$ y comparándolas, se tiene que $\frac{b}{a} = \frac{3}{1}$ ó $b = 3a$, efectuando el producto cruzado.

En la ecuación antes encontrada $\frac{9}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1$, se sustituye b por $3a$ y se obtiene que:

$\frac{9}{a^2} - \frac{25}{(3a)^2} = 1$ ecuación encontrada anteriormente y sustituyendo b por $3a$.

$\frac{9}{a^2} - \frac{25}{9a^2} = 1$ simplificando.

$\frac{81 - 25}{9a^2} = 1$ efectuando la suma del lado izquierdo.

$81 - 25 = 9a^2$ multiplicando por $9a^2$ ambos lados de la igualdad.

$\frac{56}{9} = a^2$ despejando para a^2.

Como $b = 3a$, se tiene que $b^2 = 9a^2$. Luego $b^2 = 9\left(\frac{56}{9}\right) = 56$. Conociendo los valores de a^2 y b^2 se obtiene la ecuación en forma canónica que es: $\frac{x^2}{\frac{56}{9}} - \frac{y^2}{56} = 1$ ó su equivalente $\frac{9x^2}{56} - \frac{y^2}{56} = 1$.

Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 56), ambos lados de la ecuación. Véase:

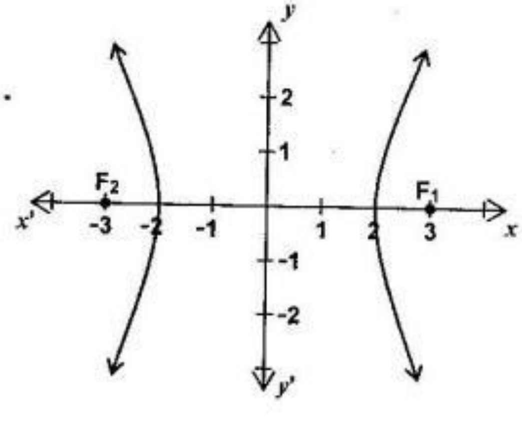
$\frac{9x^2}{56} - \frac{y^2}{56} = 1$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$56\left(\frac{9x^2}{56} - \frac{y^2}{56}\right) = 1(56)$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$9x^2 - y^2 = 56$ simplificando.

$9x^2 - y^2 - 56 = 0$ comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

g) Focos en $(\pm 3, 0)$ y la longitud del eje transverso 4 unidades.



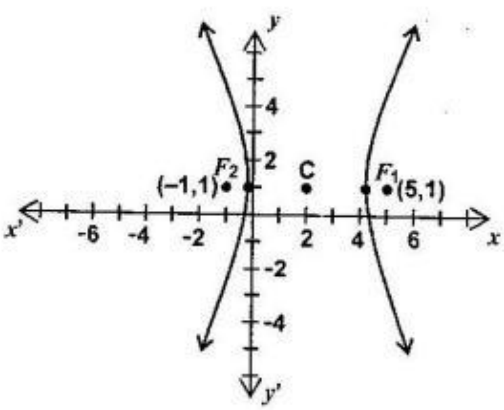
Un bosquejo de la gráfica se muestra en la figura de la izquierda. Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda, además el centro es el punto (0, 0); determinando el punto medio del segmento que tiene como extremos los focos. Luego la ecuación que le corresponde es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a = 2$ ya que la longitud del eje transverso es de 4 unidades. Con los datos dados, se determina que $a = 2$ y $c = 3$. Con estos valores, se encuentra el valor para $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Para encontrar la ecuación solicitada, se toman los valores de a y b encontrados anteriormente. Sustituyendo éstos en la ecuación que le corresponde a la curva, se tiene que $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$ ó $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ dada en su forma canónica.

Ahora para encontrar la ecuación general, se multiplica ambos lados de la igualdad por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 20), ambos lados de la ecuación. Véase:

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$	ecuación encontrada en su forma canónica.
$20\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}\right)=1(20)$	multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.
$5x^2-4y^2=20$	simplificando.
$5x^2-4y^2-20=0$	comparando con cero y obteniendo la ecuación general.

h) Focos en (5, 1), (−1, 1); la longitud del eje conjugado o imaginario es de 4 unidades.



Según la información dada, se hace un bosquejo de la gráfica y se observa que la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda. Determinando el centro (punto medio del segmento que tiene como extremos los focos) $C\left(\frac{5-1}{2},\frac{1+1}{2}\right)$ = C(2,1). Otro dato que se da es la longitud del eje conjugado que es 4, luego el valor para b es 2. Como se dan los focos, al tomar uno de ellos $F_1(5, 1)$ y comparándolo con uno de los focos en términos generales, según la forma de la hipérbola, para el caso $F_1(h + c, k)$, sustituyendo los valores de h, k y comparándolas se determina el valor para c.

Véase:

$F_1(h + c, k)$	tomando uno de los focos en términos generales que corresponde a la hipérbola, según su forma.
$F_1(2 + c, 1)$	sustituyendo los valores de h y k.
$F_1(2 + c, 1) = F_1(5,1)$	comparando los focos.
$2 + c = 5$ y $1 = 1$	comparando los pares ordenados; (a, b) = (c, d) sí y sólo sí a = c y b = d.
$c = 5 - 2$	despejando para c.
$c = 3$	simplificando.

Conociendo los valores para $b = 2$ y para $c = 3$, se tiene que $a = \sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$.

La ecuación en forma canónica que le corresponde a esta hipérbola es $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

Sustituyendo los valores de h, k, a y b en la misma, se tiene $\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$ ó simplificando $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$; ésta es la ecuación en forma canónica o estándar.

Ahora para encontrar la ecuación general, se multiplica ambos lados de la igualdad por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 20), ambos lados de la ecuación. Véase:

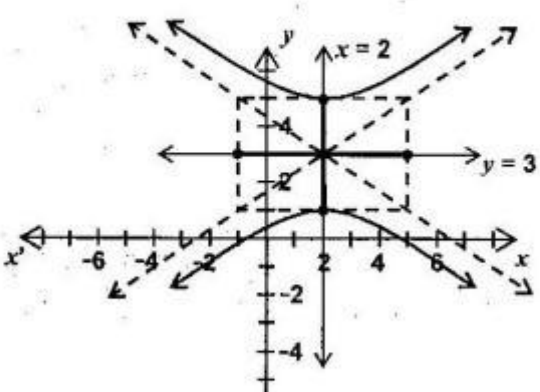
$$\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$$20\left(\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{4}\right)=1(20)$$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$$4(x-2)^2-5(y-1)^2=20$$ simplificando.

$$4x^2-5y^2-16x+10y-9=0$$ desarrollando los binomios, simplificando y comparando con cero, se obtiene la ecuación general.

i) Con eje transverso de longitud 4 unidades y sobre la recta $x = 2$; y con eje conjugado o imaginario de longitud 6 unidades y sobre la recta $y = 3$.



Para hacer un bosquejo de la gráfica, primero se trazan las rectas $x = 2$ e $y = 3$. El punto donde se interceptan ambas rectas, es el centro de la hipérbola, que en este caso es el punto (2,3). A partir del centro, se toman 2 unidades hacia arriba y dos unidades hacia abajo (ya que el eje transverso mide 4 unidades). De igual manera, a partir del centro se toman 3 unidades hacia la derecha y 3 unidades a la izquierda (ya que el eje imaginario o conjugado mide 6 unidades). Como los vértices están sobre el eje transverso, la hipérbola abre hacia arriba y hacia abajo. Se puede determinar que el valor de $a = 2$ y el valor para $b = 3$. Ahora que ya se conoce el centro C(2, 3), el valor para a y el valor para b y se ha identificando la ecuación que le corresponde a la hipérbola por la forma que tiene, se sustituyen estos en la misma. Véase:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$ ecuación que le corresponde a esta hipérbola.

$$\frac{(y-3)^2}{2^2}-\frac{(x-2)^2}{3^2}=1$$ sustituyendo los valores de h, k, a y b en la ecuación.

$$\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$$ efectuando las potencias y se obtiene la ecuación en forma canónica.

Para encontrar la ecuación general, se multiplica por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 36), ambos lados de la ecuación. Obsérvese:

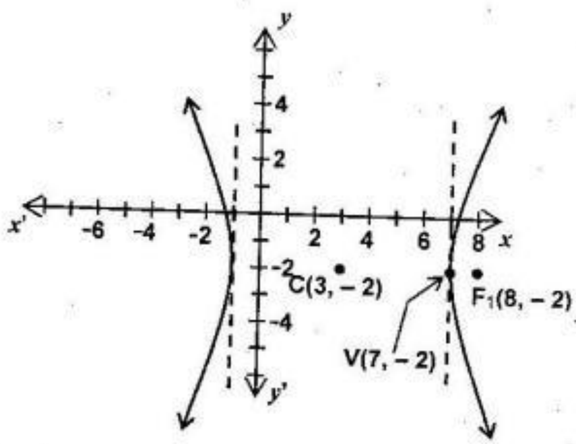
$$\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$$36\left(\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{9}\right)=1(36)$$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$$9(y-3)^2-4(x-2)^2=36$$ simplificando.

$$9y^2-4x^2-54y+16x+29=0$$ desarrollando los binomios, simplificando y comparando con cero.

j) Tiene C(3, –2), un vértice (7, –2) y un foco en (8, –2).



Según la información dada, se hace un bosquejo de la gráfica, observando que la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda por tal razón la ecuación que le corresponde es $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Se da el centro C(3, –2), un foco $F(8, -2)$ y un vértice V(7, –2). De esta información se determina que a = 4 (distancia del centro al vértice), c = 5 (distancia del centro al foco) y $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=3$.

Sustituyendo los valores de h, k, a y b en la misma, se tiene $\frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y-(-2))^2}{3^2}=1$ ó simplificando $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2))^2}{9}=1$.

Ahora para encontrar la ecuación general, se multiplica ambos lados de la igualdad por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores (que en este caso es 144), ambos lados de la ecuación. Véase:

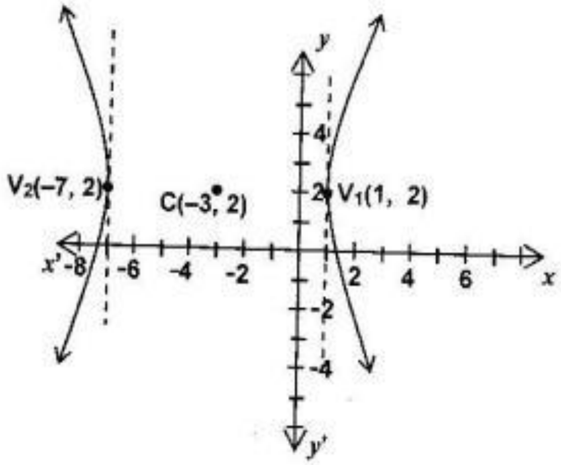
$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2))^2}{9}=1$$ ecuación encontrada en su forma canónica.

$$144\left(\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2))^2}{9}\right)=1(144)$$ multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.

$$9(x-3)^2-16(y+2)^2=144$$ simplificando.

$$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$$ desarrollando los binomios, simplificando y comparando con cero, se obtiene la ecuación general.

k) Vértices (−7, 2), (1, 2) y una de sus asíntotas con ecuación $y - 2 = \frac{3}{4}(x + 3)$



Nótese que según la información dada la hipérbola abre hacia la derecha y hacia la izquierda por tal razón la ecuación que le corresponde es $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Se dan los vértices $V_1(-7, 2)$, $V_2(1, 2)$, por lo que el centro es C(−3, 2); calculando el punto medio del segmento que contiene los vértices como extremos. Calculando la distancia del centro a uno de los vértices, se encuentra el valor para a el cual es 4. Además se indica que una de las asíntotas para esta hipérbola es $y - 2 = \frac{3}{4}(x + 3)$ y retomando una de las ecuaciones en términos general, según la forma de la hipérbola; $y - k = \frac{b}{a}(x-h)$, comparando $\frac{3}{4} = \frac{b}{a}$, sustituyendo el valor de a en ésta, se deduce que $b = 3$.

Sustituyendo los valores de h, k, a y b en la ecuación que le corresponde, se tiene $\frac{(x-(-3))^2}{4^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$ ó simplificando $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Encontrando la ecuación general:

$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$	ecuación encontrada en su forma canónica.
$144\left(\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9}\right) = 1(144)$	multiplicando ambos lados de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores.
$9(x+3)^2 - 16(y-2)^2 = 144$	simplificando.
$9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$	desarrollando los binomios, simplificando y comparando con cero, se obtiene la ecuación general.

■

Ejercicios 6.4

1. Para cada ecuación, determinar si existe: el centro, vértices, focos, extremos del eje conjugado o imaginario, ecuaciones de las asíntotas y trazar su gráfica.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $9x^2 - 25y^2 = 225$

e) $9x^2 - 16y^2 = -144$ f) $9x^2 - 25y^2 = 1$ g) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ h) $\frac{(y+2)^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

i) $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$ j) $\frac{(x-3)^2}{4} - (y+2)^2 = -1$ k) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{6} = 1$

l) $16(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 1$ m) $4x^2 - y^2 + 16x - 4y + 4 = 0$

n) $9x^2 - y^2 - 54x + 4y + 73 = 0$ o) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y = 4$

p) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 14 = 0$ q) $x^2 - y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$

r) $25x^2 - 4y^2 + 50x - 24y - 12 = 0$ s) $x^2 - 9y^2 - 4x - 54y - 68 = 0$

2. Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la hipérbola, que satisfaga las condiciones indicadas.

a) Vértices en $(\pm 3, 0)$ y focos en $(\pm 4, 0)$.

b) Vértices en $(0, \pm 2)$, focos en $(0, \pm 3)$.

c) Vértices en $(\pm 2, 0)$ y ecuaciones de las asíntotas $y = \pm 4x$.

d) Focos en $(0, \pm 3)$, y ecuaciones de las asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$.

e) Vértices en $(0, \pm 2)$, pasa por el punto $(4, 5)$.

f) Tiene como asíntotas las rectas $y = \pm 3x$ y la hipérbola pasa por el punto $(3, 5)$.

g) Focos en $(\pm 4, 0)$ y la longitud del eje transverso 6.

h) Focos en $(4, 1)$, $(0, 1)$; la longitud del eje imaginario o conjugado es 2.

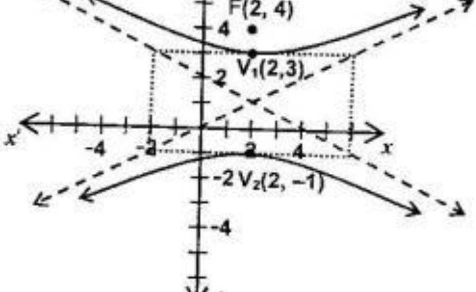
i) Con eje transverso de longitud 6 y sobre la recta $x = 2$; y con eje conjugado o imaginario de longitud 8 y sobre la recta $y = 4$.

j) Tiene $C(2, -1)$, un vértice $(2, 3)$ y un foco en $(2, -6)$.

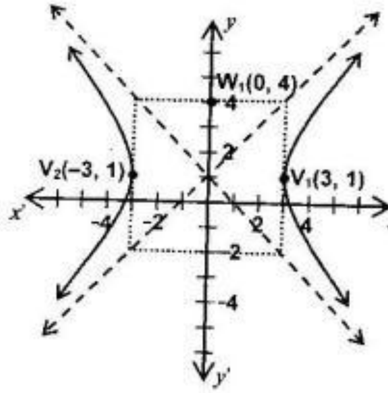
k) Vértices $(-2, -1)$, $(-2, 3)$ y una de sus asíntotas con ecuación $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$.

3. Para cada gráfica, determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) que le corresponde.

a)



b)



Ejercicios de repaso del capitulo VI

1. Para cada ecuación, encontrar los elementos de la misma si existen y trazar su gráfica.

a) $x^2 + 4x - 3y + 7 = 0$ **b)** $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y = 16$ **c)** $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

d) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = 63$ **e)** $-2x^2 - 2y^2 + 12x + 4y = 12$ **f)** $y^2 + 2x + 6y + 7 = 0$

g) $9x^2 + y^2 - 36x - 2y + 36 = 0$ **h)** $4x^2 - 9y^2 + 24x + 36y = 9$ **i)** $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 15 = 0$

j) $x^2 - 6x + 8y + 17 = 0$ **k)** $7x^2 + 4y^2 + 14x - 40y + 135 = 0$ **l)** $4x^2 - 3y^2 + 8x - 12y - 4 = 0$

2. Determinar la ecuación (forma canónica o estándar y general) de la cónica, que satisfaga las condiciones indicadas.

a) Circunferencia con centro en (2, –3) y que pasa por el punto (–1, 2).

b) Elipse con vértices V_1 (–2, 4), V_2 (4, 4) y un foco en el punto (3, 4).

c) Parábola con vertices en (2, 3), pasa por el punto (1,5) y con eje horizontal.

d) Cónica con vertices V_1 (1, –2), V_2 (5, –2), longitud del eje conjugado o imaginario 6 unidades.

e) Vértices en (0, ±2), pasa por el punto (4, 5).

f) Circunferencia con centro en C(–2, 3) y que sea tangente a la recta con ecuación $2y + 3x = 4$.

g) Focos en (±2, 0) y la longitud del eje transverso 6.

h) Focos en (4, 1), (0, 1); la longitud del eje imaginario o conjugado es 8.

i) Con eje transverso de longitud 6 y sobre la recta $x = 2$; y con eje conjugado o imaginario de longitud 8 y la recta $y = 4$.

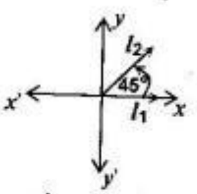
j) Tiene C(2, –1), un vértice (2, 3) y un foco en (2, 4).

k) Vértices (–2, –1), (–2, 3), una de sus asintotas con ecuación $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$ y con centro en (–1, 2).

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO II

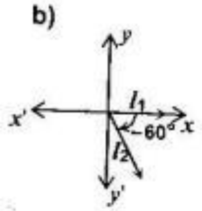
Ejercicios 2.1

1. a)



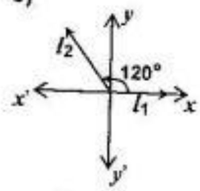
I cuadrante

b)



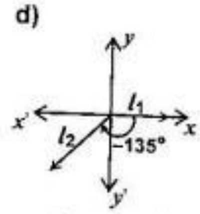
IV cuadrante

c)



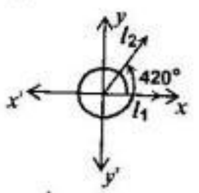
II cuadrante

d)



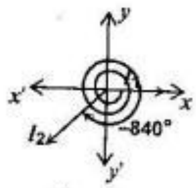
III cuadrante

e)



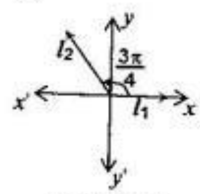
I cuadrante

f)



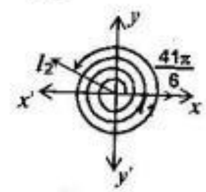
III cuadrante

g)



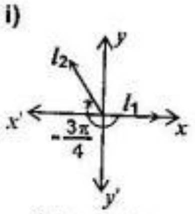
II cuadrante

h)



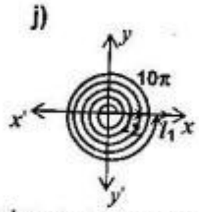
II cuadrante

i)



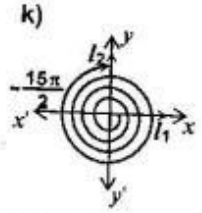
II cuadrante

j)



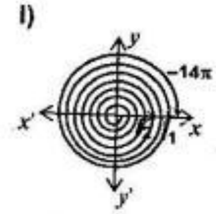
sobre el eje x positivo

k)



sobre el eje y positivo

l)



sobre el eje x positivo

2. a) 480°; 840°; 1220°; –240°; –600°; –960°;

b) $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{4}$; $\frac{27\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{21\pi}{4}$;

c) 300°; 660°; 1020°; –420°; –780°; –1140°;

d) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{16\pi}{3}$; $-\frac{22\pi}{3}$;

e) 380°; 740°; 1100°; –340°; –700°; –1060°;

f) $2 + 2\pi$; $2 + 4\pi$; $2 + 6\pi$; $2 - 2\pi$; $2 - 4\pi$; $2 - 6\pi$;

3. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{3}$ f) $-\frac{14\pi}{3}$
g) $\frac{5\pi}{12}$ h) $\frac{3\pi}{2}$ i) $-\frac{\pi}{12}$ j) $\frac{5\pi}{2}$ k) $-\frac{\pi}{18}$ l) 3π

4. a) 135° b) 1230° c) –240° d) 1800° e) –1350° f) 2520°
g) 36° h) –1020° i) 855° j) –1260° k) 4590° l) $\left(\frac{180}{7}\right)^{\circ}$

Ejercicios 2.2

1. a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$; $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\csc\theta = \frac{5}{3}$

b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$; $\sec\theta = \frac{13}{12}$; $\csc\theta = \frac{13}{5}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\theta = \frac{2}{3}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sec\theta = \frac{3}{2}$; $\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = 1$; $\cot\theta = 1$; $\sec\theta = \sqrt{2}$; $\csc\theta = \sqrt{2}$

e) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{15}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\tan\theta = 2$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{}$

f) sen $\theta = \frac{\sqrt{65}}{9}$; cos $\theta = \frac{4}{9}$; tan $\theta = \frac{\sqrt{65}}{4}$; cot $\theta = \frac{4\sqrt{65}}{65}$; sec $\theta = \frac{9}{4}$; csc $\theta = \frac{9\sqrt{65}}{65}$

g) sen $\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; cos $\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; tan $\theta = \frac{y}{x}$; cot $\theta = \frac{x}{y}$; sec $\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

h) sen $\theta = \frac{\sqrt{z^2-y^2}}{z}$; cos $\theta = \frac{y}{z}$; tan $\theta = \frac{\sqrt{z^2-y^2}}{y}$; cot $\theta = \frac{y}{\sqrt{z^2-y^2}}$; sec $\theta = \frac{z}{y}$; csc $\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2-y^2}}$

2. **a)** $a = 5$; $b = 5\sqrt{3}$ **b)** $y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **c)** $z = 8$; $y = 4\sqrt{3}$ **d)** $x = 4\sqrt{2}$; $y = 4\sqrt{2}$ **e)** $x = 6\sqrt{5}$; $y = 4\sqrt{5}$

3. **a)** sen $\theta = \frac{6}{7}$; tan $\theta = \frac{6\sqrt{13}}{13}$; cot $\theta = \frac{\sqrt{13}}{6}$; sec $\theta = \frac{7\sqrt{13}}{13}$; csc $\theta = \frac{7}{6}$

b) sen $\theta = \frac{\sqrt{55}}{8}$; tan $\theta = \frac{\sqrt{55}}{3}$; cot $\theta = \frac{3\sqrt{55}}{55}$; sec $\theta = \frac{8}{3}$; csc $\theta = \frac{8\sqrt{55}}{55}$

c) sen $\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; cos $\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$; cot $\theta = \frac{1}{3}$; sec $\theta = \sqrt{10}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$

d) sen $\theta = \frac{11\sqrt{130}}{130}$; cos $\theta = \frac{3\sqrt{130}}{130}$; tan $\theta = \frac{11}{3}$; sec $\theta = \frac{\sqrt{130}}{3}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{130}}{11}$

e) sen $\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$; cos $\theta = \frac{1}{4}$; tan $\theta = \sqrt{15}$; cot $\theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$; csc $\theta = \frac{4\sqrt{15}}{15}$

f) sen $\theta = \frac{2}{7}$; cos $\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$; tan $\theta = \frac{2\sqrt{5}}{15}$; cot $\theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; sec $\theta = \frac{7\sqrt{5}}{15}$

Ejercicios 2.3

1. **a)** sen $\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; cos $\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; tan $\theta = \frac{3}{2}$; cot $\theta = \frac{2}{3}$; sec $\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

b) sen $\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$; cos $\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; tan $\theta = -\frac{1}{3}$; cot $\theta = -3$; sec $\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; csc $\theta = \sqrt{10}$

c) sen $\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$; cos $\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$; tan $\theta = -\frac{1}{4}$; cot $\theta = -4$; sec $\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$; csc $\theta = -\sqrt{17}$

d) sen $\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$; cos $\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; tan $\theta = \frac{3}{2}$; cot $\theta = \frac{2}{3}$; sec $\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; csc $\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$

e) sen $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos $\theta = \frac{1}{2}$; tan $\theta = \sqrt{3}$; cot $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; sec $\theta = 2$; csc $\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) sen $\theta = -\frac{1}{2}$; cos $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; tan $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; cot $\theta = -\sqrt{3}$; sec $\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; csc $\theta = -2$

g) sen $\theta = 0$; cos $\theta = 2$; tan $\theta = 0$; cot θ (no existe); sec $\theta = \frac{1}{2}$; csc θ (no existe)

h) sen $\theta = 3$; cos $\theta = 2$; tan θ (no existe); cot $\theta = 0$; sec θ (no existe); csc $\theta = \frac{1}{3}$

i) sen $\theta = 3$; cos $\theta = -2$; tan $\theta = 0$; cot θ (no existe); sec $\theta = -\frac{1}{2}$; csc θ (no existe)

j) sen $\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; cos $\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; tan $\theta = \frac{1}{3}$; cot $\theta = 3$; sec $\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; csc $\theta = -\sqrt{10}$

k) sen $\theta = -4$; cos $\theta = 0$; tan θ (no existe); cot $\theta = 0$; sec θ (no existe); csc $\theta = -\frac{1}{4}$

l) sen $\theta = -\frac{1}{2}$; cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; tan $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; cot $\theta = \sqrt{3}$; sec $\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; csc $\theta = -2$

2. **a)** sen $\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; cos $\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; tan $\theta = \frac{1}{2}$; cot $\theta = 2$; sec $\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; csc $\theta = \sqrt{5}$

b) sen $\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; cos $\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; tan $\theta = -3$; cot $\theta = -\frac{1}{3}$; sec $\theta = -\sqrt{10}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$

c) sen θ $= -\frac{3\sqrt{13}}{13}$; cos θ $= \frac{2\sqrt{13}}{13}$; tan θ $= -\frac{3}{2}$; cot θ $= -\frac{2}{3}$; sec θ $= \frac{\sqrt{13}}{2}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{13}}{3}$

d) sen θ $= -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; cos θ $= -\frac{3\sqrt{13}}{13}$; tan θ $= \frac{2}{3}$; cot θ $= \frac{3}{2}$; sec θ $= -\frac{\sqrt{13}}{3}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{13}}{2}$

e) sen θ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos θ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; tan θ = 1; cot θ = 1; sec θ $= \sqrt{2}$; csc θ $= \sqrt{2}$

f) sen θ $= \frac{3\sqrt{10}}{10}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{10}}{10}$; tan θ = – 3; cot θ $= -\frac{1}{3}$; sec θ $= -\sqrt{10}$; csc θ $= \frac{\sqrt{10}}{3}$

g) sen θ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan θ = 1; cot θ = 1; sec θ $= -\sqrt{2}$; csc θ $= -\sqrt{2}$

3. **a)** cos θ $= -\frac{\sqrt{5}}{3}$; tan θ $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cot θ $= -\frac{\sqrt{5}}{2}$; sec θ $= -\frac{3\sqrt{5}}{5}$; csc θ $= \frac{3}{2}$

b) sen θ $= -\frac{3\sqrt{34}}{34}$; cos θ $= -\frac{5\sqrt{34}}{34}$; tan θ $= -\frac{3}{5}$; sec θ $= \frac{\sqrt{34}}{5}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{34}}{3}$

c) sen θ $= \frac{\sqrt{15}}{4}$; cos θ $= \frac{1}{4}$; tan θ $= \sqrt{15}$; cot θ $= \frac{\sqrt{15}}{2}$; csc θ $= \frac{4\sqrt{15}}{15}$

d) sen θ $= \frac{3}{5}$; tan θ $= -\frac{3}{4}$; cot θ $= -\frac{4}{3}$; sec θ $= -\frac{5}{4}$; csc θ $= -\frac{5}{3}$

e) sen θ $= \frac{\sqrt{21}}{7}$; cos θ $= -\frac{2\sqrt{7}}{7}$; cot θ $= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; sec θ $= -\frac{2\sqrt{7}}{7}$; csc θ $= \frac{\sqrt{21}}{3}$

f) sen θ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{6}}{3}$; tan θ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; cot θ $= -\sqrt{2}$; sec θ $= -\frac{\sqrt{6}}{2}$

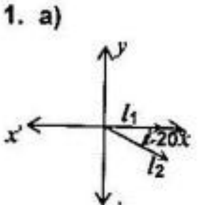
4. **a)** II **b)** III **c)** IV **d)** II **e)** I **f)** IV

5. **a)** 60° **b)** 80° **c)** 10° **d)** 75° **e)** 35° **f)** 60°
g) $\frac{\pi}{3}$ **h)** $\frac{\pi}{3}$ **i)** $\frac{\pi}{4}$ **j)** $\frac{\pi}{6}$ **k)** $\frac{\pi}{3}$ **l)** $\frac{\pi}{4}$
m) $\frac{\pi}{4}$ **n)** $\frac{5\pi}{12}$ **o)** $\frac{\pi}{8}$ **p)** $\pi - 2$ **q)** $\pi - 3$ **l)** $7 - 2\pi$

6. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-\sqrt{3}$ **e)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
g) –2 **h)** –1 **i)** –2 **j)** $\sqrt{3}$ **k)** $\frac{1}{2}$ **l)** $-\frac{1}{2}$
m) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **n)** $-\frac{1}{2}$ **o)** 0 **p)** 0 **q)** no existe **r)** 0
s) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **t)** no existe **u)** no existe **v)** 0 **w)** $\frac{1}{2}$ **x)** $-\frac{1}{2}$

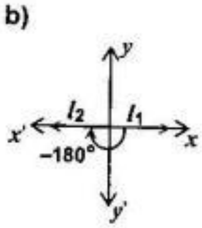
RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO II

1. **a)**



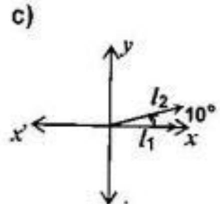
IV cuadrante

b)



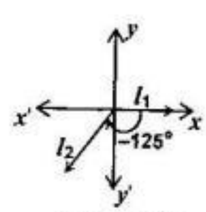
sobre el eje *x* negativo

c)



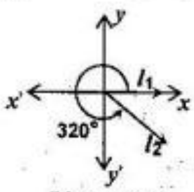
I cuadrante

d)



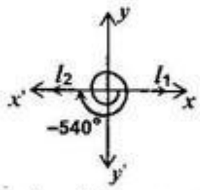
III cuadrante

e)



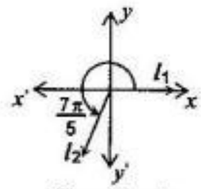
IV cuadrante

f)



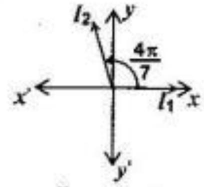
sobre el eje x negativo

g)



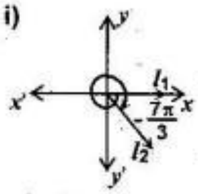
III cuadrante

h)



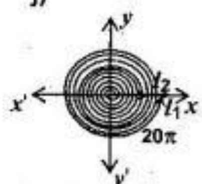
II cuadrante

i)



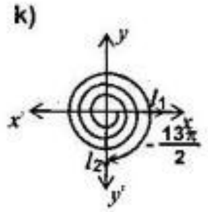
IV cuadrante

j)



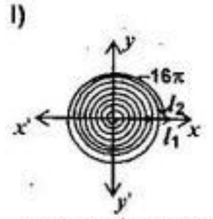
sobre el eje x positivo

k)



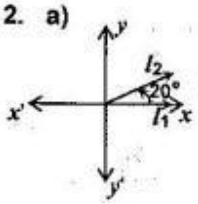
sobre el eje y negativo

l)



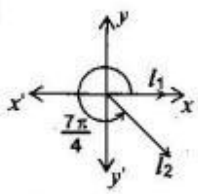
sobre el eje x positivo

2. a)



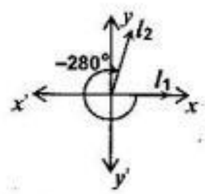
380°, 740°,1100°;−340°, −700°, −1060°

b)



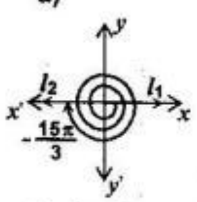
$\frac{15\pi}{4}$, $\frac{23\pi}{4}$, $\frac{31\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$

c)



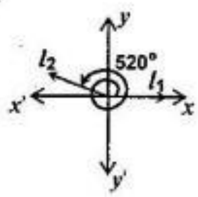
80°, 440°,800°; −640°, −1000°, 1360°

d)



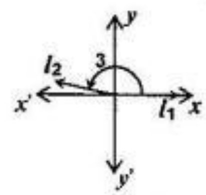
π, 3π, 5π ; −3π, −π, −7π

e)



160°, 880°,1240°; −200°, −560°, −920°

f)



3 + 2π, 3 + 4π, 3 + 6π; 3 − 2π, 3 − 4π, 3 − 6π

3. a) $\frac{25\pi}{36}$ b) $-\frac{13\pi}{9}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $-\frac{25\pi}{36}$ e) 4π f) $-\frac{14\pi}{3}$

g) $-\frac{5\pi}{12}$ h) $\frac{4\pi}{3}$ i) $-\frac{7\pi}{12}$ j) $\frac{25\pi}{6}$ k) $-\frac{5\pi}{9}$ l) $\frac{\pi^2}{300}$

4. a) 225° b) 330° c) −420° d) 3600° e) −1530° f) 2160°

g) 108° h) −1140° i) 945° j) −1980° k) 3690° l) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$

5. a) $\text{sen}\ \theta = \frac{4\sqrt{65}}{65}$; $\cos\theta = \frac{7\sqrt{65}}{65}$; $\tan\theta = \frac{4}{7}$; $\cot\theta = \frac{7}{4}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{65}}{7}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{65}}{4}$

b) $\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{23}}{12}$; $\cos\theta = \frac{11}{12}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{23}}{11}$; $\cot\theta = \frac{11\sqrt{23}}{23}$; $\sec\theta = \frac{12}{11}$; $\csc\theta = \frac{12\sqrt{23}}{23}$

c) $\text{sen}\ \theta = \frac{3\sqrt{29}}{29}$; $\cos\theta = \frac{2\sqrt{145}}{29}$; $\tan\theta = \frac{3\sqrt{5}}{10}$; $\cot\theta = \frac{2\sqrt{5}}{3}$; $\sec\theta = \frac{2\sqrt{145}}{29}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{145}}{10}$

d) $\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan\theta = 1$; $\cot\theta = 1$; $\sec\theta = \sqrt{2}$; $\csc\theta = \sqrt{2}$

e) $\text{sen}\ \theta = \frac{8\sqrt{113}}{113}$; $\cos\theta = \frac{7\sqrt{113}}{113}$; $\tan\theta = \frac{8}{7}$; $\cot\theta = \frac{7}{8}$; $\sec\theta = \frac{\sqrt{113}}{7}$; $\csc\theta = \frac{\sqrt{113}}{8}$

f) $\text{sen}\ \theta = \frac{2\sqrt{14}}{9}$; $\cos\theta = \frac{5}{9}$; $\tan\theta = \frac{2\sqrt{14}}{5}$; $\cot\theta = \frac{5\sqrt{14}}{28}$; $\sec\theta = \frac{9}{5}$; $\csc\theta = \frac{9\sqrt{14}}{28}$

g) sen θ $= \frac{m\sqrt{m^2+n^2}}{m^2+n^2}$; cos θ $= \frac{n\sqrt{m^2+n^2}}{m^2+n^2}$; tan θ $= \frac{m}{n}$; cot θ $= \frac{n}{m}$; sec θ $= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n}$; csc θ $= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$

h) sen θ $= \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$; cos θ $= \frac{y}{x}$; tan θ $= \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$; cot θ $= \frac{y\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}$; sec θ $= \frac{x}{y}$; csc θ $= \frac{x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}$

6. a) $a = 4$; $b = 4\sqrt{3}$ b) $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$; $y = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ c) $y = 6\sqrt{3}$; $z = 12$ d) $x = 3\sqrt{2}$; $y = 3\sqrt{2}$ e) $x = \frac{28\sqrt{41}}{41}$; $y = \frac{35\sqrt{41}}{41}$

7. a) sen θ $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos θ $= \frac{\sqrt{5}}{5}$; tan θ $= -2$; cot θ $= -\frac{1}{2}$; sec θ $= \sqrt{5}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) sen θ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan θ $= -1$; cot θ $= -1$; sec θ $= -\sqrt{2}$; csc θ $= \sqrt{2}$

c) sen θ $= -\frac{2\sqrt{13}}{13}$; cos θ $= \frac{3\sqrt{13}}{13}$; tan θ $= -\frac{2}{3}$; cot θ $= -\frac{3}{2}$; sec θ $= \frac{\sqrt{13}}{3}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{13}}{2}$

d) sen θ $= -\frac{5\sqrt{29}}{29}$; cos θ $= -\frac{2\sqrt{29}}{29}$; tan θ $= \frac{5}{2}$; cot θ $= \frac{2}{5}$; sec θ $= -\frac{\sqrt{29}}{2}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{29}}{5}$

e) sen θ $= \frac{\sqrt{6}}{3}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$; tan θ $= -\sqrt{2}$; cot θ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; sec θ $= -\sqrt{3}$; csc θ $= \frac{\sqrt{6}}{2}$

f) sen θ $= -\frac{\sqrt{6}}{6}$; cos θ $= \frac{\sqrt{30}}{6}$; tan θ $= -\frac{\sqrt{5}}{5}$; cot θ $= -\sqrt{5}$; sec θ $= \frac{\sqrt{30}}{5}$; csc θ $= -\sqrt{6}$

8. a) sen θ $= -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{10}}{10}$; tan θ $= 3$; cot θ $= \frac{1}{3}$; sec θ $= -\sqrt{10}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{10}}{3}$

b) sen θ $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos θ $= \frac{\sqrt{5}}{5}$; tan θ $= -2$; cot θ $= -\frac{1}{2}$; sec θ $= \sqrt{5}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) sen θ $= -\frac{4}{5}$; cos θ $= \frac{3}{5}$; tan θ $= -\frac{4}{3}$; cot θ $= -\frac{3}{4}$; sec θ $= -\frac{5}{3}$; csc θ $= \frac{5}{4}$

d) sen θ $= \frac{2\sqrt{29}}{29}$; cos θ $= \frac{5\sqrt{29}}{29}$; tan θ $= \frac{2}{5}$; cot θ $= \frac{5}{2}$; sec θ $= \frac{\sqrt{29}}{5}$; csc θ $= \frac{\sqrt{29}}{2}$

e) sen θ $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos θ $= -\frac{\sqrt{5}}{5}$; tan θ $= 2$; cot θ $= \frac{1}{2}$; sec θ $= -\sqrt{5}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{5}}{2}$

f) sen θ $= -\frac{3\sqrt{10}}{10}$; cos θ $= \frac{\sqrt{10}}{10}$; tan θ $= -3$; cot θ $= -\frac{1}{3}$; sec θ $= \sqrt{10}$; csc θ $= -\frac{\sqrt{10}}{3}$

g) sen θ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos θ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; tan θ $= 1$; cot θ $= 1$; sec θ $= \sqrt{2}$; csc θ $= \sqrt{2}$

9. a) sen θ $= -\frac{\sqrt{21}}{5}$; tan θ $= -\frac{\sqrt{21}}{2}$; cot θ $= -\frac{2\sqrt{21}}{21}$; sec θ $= \frac{5}{2}$; csc θ $= -\frac{5\sqrt{21}}{21}$

b) sen θ $= \frac{4}{5}$; cos θ $= -\frac{3}{5}$; cot θ $= -\frac{3}{4}$; sec θ $= -\frac{5}{3}$; csc θ $= \frac{5}{4}$

c) sen θ $= \frac{2\sqrt{3}}{3}$; cos θ $= \frac{1}{3}$; tan θ $= 2\sqrt{2}$; cot θ $= \frac{\sqrt{2}}{4}$; csc θ $= \frac{3\sqrt{2}}{4}$

d) cos θ $= \frac{3}{5}$; tan θ $= -\frac{4}{3}$; cot θ $= -\frac{3}{4}$; sec θ $= \frac{5}{3}$; csc θ $= -\frac{5}{4}$

e) sen θ $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$; cos θ $= 2$; tan θ $= -\sqrt{3}$; sec θ $= \frac{1}{2}$; csc θ $= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) sen θ $= \frac{\sqrt{5}}{5}$; cos θ $= -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; tan θ $= -\frac{1}{2}$; cot θ $= -2$; sec θ $= -\frac{\sqrt{5}}{2}$

10. a) II b) III c) II d) IV e) I f) IV

11. a) 60° b) 40° c) 85° d) 55° e) 75° f) 20°

g) $\frac{2\pi}{9}$ h) $\frac{\pi}{5}$ i) $\frac{\pi}{4}$ j) $\frac{\pi}{6}$ k) $\frac{\pi}{3}$ l) $\frac{\pi}{4}$

m) 3π n) π o) π

12. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

g) -1 h) -1 i) -2 j) $-\sqrt{3}$ k) $-\frac{1}{2}$ l) $-\frac{1}{2}$

m) no existe n) no existe o) no existe p) 1 q) no existe r) no existe

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO III

Ejercicios 3.1

1) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$ **2)** $\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ **3)** $\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$ **4)** $\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{1-\cos^2\theta}$

5) $\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$ **6)** $\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$ **7)** $\frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\theta}$ **8)** $\frac{1}{1-\cos^2\theta}$

9) $\tan\theta=-\frac{3}{4}$; $\cot\theta=-\frac{4}{3}$; $\sec\theta=\frac{5}{4}$; $\csc\theta=-\frac{5}{3}$

10) $\tan\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cot\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\csc\theta=\frac{3}{2}$

11) $\operatorname{sen}\theta=-\frac{5}{6}$; $\cos\theta=-\frac{\sqrt{11}}{6}$; $\tan\theta=\frac{5\sqrt{11}}{11}$; $\csc\theta=-\frac{6}{5}$

12) $\cos\theta=-\frac{4}{5}$; $\tan\theta=-\frac{3}{4}$; $\cot\theta=-\frac{4}{3}$; $\sec\theta=-\frac{5}{4}$; $\csc\theta=\frac{5}{3}$

13) $\operatorname{sen}\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\tan\theta=-\frac{1}{2}$; $\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\csc\theta=-\sqrt{5}$

14) $\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{4}$; $\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan\theta=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\cot\theta=-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sec\theta=-\frac{4\sqrt{7}}{7}$

15) 1 **16)** 1 **17)** $\csc\lambda$ **18)** $\csc x$ **19)** $\operatorname{sen} x$

20) $\cot\beta$ **21)** $\tan^2 x$ **22)** $\sec^2 x\,(\csc^2 x-2)$ **23)** 2 **24)** $1+\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

25) $\cot\alpha\tan\alpha=\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}\,\frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}=1$ **26)** $\operatorname{sen}\beta\cot\beta=\cancel{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{\cos\alpha}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}=\cos\beta$

27) $\tan\beta\operatorname{sen}\beta+\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta+\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\beta}=\sec\beta$

28) $$\frac{\cot^2 x-1}{1+\cot^2 x}=\frac{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$$

29) $$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x\cot x}=\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}\left(\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\right)}=1$$

30) $$\frac{\cos\delta}{1+\operatorname{sen}\delta}+\frac{1+\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta}=\frac{\cos^2\delta+(1+\operatorname{sen}\delta)^2}{\cos\delta(1+\operatorname{sen}\delta)}=\frac{\cos^2\delta+1+2\operatorname{sen}\delta+\operatorname{sen}\delta^2}{\cos\delta(1+\operatorname{sen}\delta)}=\frac{2(1+\operatorname{sen}\delta)}{\cos\delta(1+\operatorname{sen}\delta)}=2\sec\delta$$

31) $$\frac{\operatorname{sen}\alpha\csc\alpha}{\cot\alpha}=\frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{1}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}\right)}{\cot\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha}=\tan\alpha$$

32) $$\sec\beta+\tan\beta=\frac{1}{\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}=\frac{1+\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}=\frac{1-\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta(1-\operatorname{sen}\beta)}=\frac{\cancel{\cos^2\beta}}{\cancel{\cos\beta}(1-\operatorname{sen}\beta)}=\frac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}$$

33) $$\frac{\operatorname{sen}^2\phi-\cos^2\phi}{\operatorname{sen}\phi\cos\phi}=\frac{\cancel{\operatorname{sen}^2\phi}}{\cancel{\operatorname{sen}\phi}\cos\phi}-\frac{\cancel{\cos^2\phi}}{\operatorname{sen}\phi\cancel{\cos\phi}}=\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}-\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}=\tan\phi-\cot\phi$$

34) $$\frac{\operatorname{sen}^2\lambda}{1+\cos\lambda}=\frac{1-\cos^2\lambda}{1+\cos\lambda}=\frac{(1-\cos\lambda)\cancel{(1+\cos\lambda)}}{\cancel{(1+\cos\lambda)}}=1-\cos\lambda$$

35) $\dfrac{\tan x+\cot x}{\tan x-\cot x}=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\cos x\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}^2x-\cos^2x}{\cos x\operatorname{sen}x}}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2x-\cos^2x}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2x-(1-\operatorname{sen}^2x)}=\dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2x-1}$

36) $\dfrac{\sec\lambda}{\tan\lambda+\cot\lambda}=\dfrac{\frac{1}{\cos\lambda}}{\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\cos\lambda}+\frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}}=\dfrac{\frac{1}{\cos\lambda}}{\frac{\operatorname{sen}^2\lambda+\cos^2\lambda}{\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda}}=\dfrac{\operatorname{sen}\lambda\cancel{\cos\lambda}}{\cancel{\cos\lambda}\left(\operatorname{sen}^2\lambda+\cos^2\lambda\right)}=\operatorname{sen}\lambda$

37) $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)}=\dfrac{1-\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)}=0$

38) $\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}=\dfrac{\frac{1}{\cos\theta}+1}{\frac{1}{\cos\theta}-1}=\dfrac{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

39) $\dfrac{1-\cot^2\psi}{\tan^2\psi-1}=\dfrac{1-\frac{1}{\tan^2\psi}}{\tan^2\psi-1}=\dfrac{\frac{\tan^2\psi-1}{\tan^2\psi}}{\tan^2\psi-1}=\dfrac{\cancel{\left(\tan^2\psi-1\right)}}{\tan^2\psi\cancel{\left(\tan^2\psi-1\right)}}=\dfrac{1}{\tan^2\psi}=\cot^2\psi$

40) $\dfrac{\cos\mu}{1+\operatorname{sen}\mu}=\dfrac{\cos\mu}{1+\operatorname{sen}\mu}\cdot\dfrac{1-\operatorname{sen}\beta}{1-\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\cos\beta(1-\operatorname{sen}\beta)}{(1-\operatorname{sen}\beta)(1-\operatorname{sen}\beta)}=\dfrac{\cos\beta(1-\operatorname{sen}\beta)}{1-\operatorname{sen}^2\beta}=\dfrac{\cancel{\cos\beta}(1-\operatorname{sen}\beta)}{\cancel{\cos^2\beta}}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\mu}{\cos\mu}$

41) $\dfrac{\csc\mu+1}{\cot\mu}=\dfrac{\csc\mu+1}{\cot\mu}\cdot\dfrac{\csc\mu-1}{\csc\mu-1}=\dfrac{(\csc\mu+1)(\csc\mu-1)}{\cot\mu(\csc\mu-1)}=\dfrac{\csc^2\mu-1}{\cot\mu(\csc\mu-1)}=\dfrac{\cancel{\cot^2\mu}}{\cancel{\cot\mu}(\csc\mu-1)}=\dfrac{\cot\mu}{\csc\mu-1}$

42) $(\tan 2\varphi-\sec 2\varphi)^2=\tan^2 2\varphi-2\tan 2\varphi\sec 2\varphi+\sec^2 2\varphi=\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}+\dfrac{2\operatorname{sen}2\varphi}{\cos^2 2\varphi}+\dfrac{1}{\cos^2 2\varphi}=$

$\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\varphi-2\operatorname{sen}2\varphi+1}{\cos^2 2\varphi}=\dfrac{(\operatorname{sen}2\varphi-1)^2}{1-\operatorname{sen}^2 2\varphi}=\dfrac{\cancel{(1-\operatorname{sen}2\varphi)^2}}{\cancel{(1-\operatorname{sen}2\varphi)}(1+\operatorname{sen}2\varphi)}=\dfrac{1-\operatorname{sen}2\varphi}{1+\operatorname{sen}2\varphi}$

43) $\dfrac{1+(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{1+\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{2-2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x}=2\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen}x}}\right)=$
$2(\csc x-\cos x)$

44) $\dfrac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\beta+1}=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\beta}{(\operatorname{sen}\beta+1)^2}=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\beta)\cancel{(1+\operatorname{sen}\beta)}}{\cancel{(\operatorname{sen}\beta+1)^2}}=\dfrac{1-\operatorname{sen}\beta}{1+\operatorname{sen}\beta}$

45) $\dfrac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}=\dfrac{(1+\cos\beta)^2+\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\beta(1+\cos\beta)}=\dfrac{1+2\cos\beta+\cos\beta^2+\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\beta(1+\cos\beta)}=\dfrac{2\cancel{(1+\cos\beta)}}{\operatorname{sen}\beta\cancel{(1+\cos\beta)}}=2\csc\beta$

46) $\dfrac{(\operatorname{sen}2\beta-\cos 2\beta)^2}{\cos 2\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\beta-2\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta+\cos^2 2\beta}{\cos 2\beta}=\dfrac{1-2\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta}{\cos 2\beta}=\dfrac{1}{\cos 2\beta}-\dfrac{2\operatorname{sen}2\beta\cancel{\cos 2\beta}}{\cancel{\cos 2\beta}}=$
$\sec 2\beta-2\operatorname{sen}2\beta$

47) $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta}=\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta}\cdot\dfrac{1-\csc\beta}{1-\csc\beta}=\dfrac{1-\csc^2\beta}{\cot\beta(1-\csc\beta)}=\dfrac{-\cot^2\beta}{\cot\beta(1-\csc\beta)}=\dfrac{\cancel{\cot^2\beta}}{\cancel{-\cot\beta}(1-\csc\beta)}=\dfrac{\cot\beta}{\csc\beta-1}$

48) $\dfrac{\cot 3\theta-1}{1+\cot 3\theta}=\dfrac{\frac{1}{\tan 3\theta}-1}{1+\frac{1}{\tan 3\theta}}=\dfrac{\frac{1-\tan 3\theta}{\tan 3\theta}}{\frac{\tan 3\theta+1}{\tan 3\theta}}=\dfrac{\cancel{\tan 3\theta}(1-\tan 3\theta)}{\cancel{\tan 3\theta}(\tan 3\theta+1)}=\dfrac{1-\tan 3\theta}{\tan 3\theta+1}$

49) $\operatorname{sen}^4\lambda+\cos^2\lambda=\left(1-\cos^2\lambda\right)^2+\cos^2\lambda=1-2\cos^2\lambda+\cos^4\lambda+\cos^2\lambda=\cos^4\lambda+1-\cos^2\lambda=\cos^4\lambda+\operatorname{sen}^2\lambda$

50) $\dfrac{\cot 2\beta-\tan 2\beta}{\operatorname{sen}2\beta+\cos 2\beta}=\dfrac{\frac{\cos 2\beta}{\operatorname{sen}2\beta}-\frac{\operatorname{sen}2\beta}{\cos 2\beta}}{\operatorname{sen}2\beta+\cos 2\beta}=\dfrac{\frac{\cos^2 2\beta-\operatorname{sen}^2 2\beta}{\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta}}{\operatorname{sen}2\beta+\cos 2\beta}=\dfrac{\cos^2 2\beta-\operatorname{sen}^2 2\beta}{\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta(\operatorname{sen}2\beta+\cos 2\beta)}=$

$\dfrac{\cancel{(\cos 2\beta+\operatorname{sen}2\beta)}(\cos 2\beta-\operatorname{sen}2\beta)}{\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta\cancel{(\operatorname{sen}2\beta+\cos 2\beta)}}=\dfrac{\cos 2\beta-\operatorname{sen}2\beta}{\operatorname{sen}2\beta\cos 2\beta}=\dfrac{\cancel{\cos 2\beta}}{\operatorname{sen}2\beta\cancel{\cos 2\beta}}-\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}2\beta}}{\cancel{\operatorname{sen}2\beta}\cos 2\beta}=\csc 2\beta-\sec 2\beta$

51) $(\operatorname{sen}^2\lambda+\cos^2\lambda)^4=(1)^4=1$

52) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\beta-\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta-\cos\beta}=\dfrac{\cancel{(\operatorname{sen}\beta-\cos\beta)}\left(\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\cos^2\beta\right)}{\cancel{(\operatorname{sen}\beta-\cos\beta)}}=1+\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

53) $(\sec\lambda+\tan\lambda)^4(\sec\lambda-\tan\lambda)^4=[(\sec\lambda+\tan\lambda)(\sec\lambda-\tan\lambda)]^4=(\sec^2\lambda-\tan^2\lambda)^4=(1)^4=1$

54) $x^2\cot^2\alpha-y^2\csc^2\alpha+y^2\cot^2\alpha-x^2\csc^2\alpha=x^2\cot^2\alpha+y^2\cot^2\alpha-(y^2\csc^2\alpha+x^2\csc^2\alpha)=$
$\cot^2\alpha(x^2+y^2)-\csc^2\alpha(y^2+x^2)=(x^2+y^2)(\cot^2\alpha-\csc^2\alpha)=-(x^2+y^2)(\csc^2\alpha-\cot^2\alpha)=-(y^2+x^2)$

55) $(1+\operatorname{sen}\lambda)^2(1-\operatorname{sen}\lambda)^2=[(1-\operatorname{sen}^2\lambda)]^2=(\cos^2\lambda)^2=\cos^4\lambda$

56) $\dfrac{\cos^2\theta-3\cos\theta+2}{\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{(\cos\theta-2)(\cos\theta-1)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\dfrac{-(\cos\theta-2)\cancel{(\cos\theta-1)}}{(1+\cos\theta)\cancel{(\cos\theta-1)}}=\dfrac{2-\cos\theta}{\cos\theta+1}$

57) $\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)}=\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}^2\theta}}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}(1-\cos\theta)}==\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

58) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}{2\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\sec\theta$

59) $\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}=\dfrac{1}{\csc^2\theta}=\operatorname{sen}^2\theta$

60) $\cot\theta-\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\left(1-\cos^2\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta-1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$

61) $\csc\theta-\sec\theta=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$

62) $\cot\alpha-\sec\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}}=\dfrac{\cos\alpha+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\tan\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

63) $\dfrac{\cot\theta+1}{\csc\theta}=\dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\theta}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}=\cos\theta+\operatorname{sen}\theta$

64) $\dfrac{\cos^2\delta}{1+\operatorname{sen}\delta}=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\delta}{1+\operatorname{sen}\delta}=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\delta)\cancel{(1+\operatorname{sen}\delta)}}{\cancel{(1+\operatorname{sen}\delta)}}=1-\operatorname{sen}\delta$

65) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

66) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2}=\dfrac{1-\cos^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2}=\dfrac{\cancel{(1-\cos\lambda)}(1+\cos\lambda)}{\cancel{(1-\cos\lambda)}^2}=\dfrac{1+\cos\lambda}{1-\cos\lambda}$

67) $\dfrac{1+\sec\phi}{\operatorname{sen}\phi+\tan\phi}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos\phi}}{\operatorname{sen}\phi+\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}}=\dfrac{\dfrac{\cos\phi+1}{\cos\phi}}{\dfrac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi+\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}}=\dfrac{\cancel{\cos\phi}\cancel{(\cos\phi+1)}}{\cancel{\cos\phi}\operatorname{sen}\phi\cancel{(\cos\phi+1)}}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\phi}=\csc\phi$

68) $\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)=(1)(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)=(1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha)=1-2\cos^2\alpha$

69) $\dfrac{\csc^4\gamma-1}{\cot^2\gamma}=\dfrac{\left(\csc^2\gamma-1\right)\left(\csc^2\gamma+1\right)}{\cot^2\gamma}=\dfrac{\cancel{\cot^2\gamma}\left(\csc^2\gamma+1\right)}{\cancel{\cot^2\gamma}}=1+\cot^2\gamma+1=2+\cot^2\gamma$

70) $\dfrac{\tan^2\kappa-1}{1-\cot^2\kappa}=\dfrac{\tan^2\kappa-1}{1-\dfrac{1}{\tan^2\kappa}}=\dfrac{\tan^2\kappa-1}{\dfrac{\tan^2\kappa-1}{\tan^2\kappa}}=\dfrac{\tan^2\kappa\cancel{(\tan^2\kappa-1)}}{\cancel{(\tan^2\kappa-1)}}=\tan^2\kappa$

71) $\dfrac{\tan\beta}{\operatorname{sen}\beta-2\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\operatorname{sen}\beta-\dfrac{2\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\beta\operatorname{sen}\beta-2\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\cancel{\cos\beta}\cancel{\operatorname{sen}\beta}}{\cancel{\cos\beta}\cancel{\operatorname{sen}\beta}(\cos\beta-2)}=\dfrac{1}{\cos\beta-2}$

72) $$\frac{\tan\beta}{\text{sen}\beta + 2\tan\beta} = \frac{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}{\text{sen}\beta + \frac{2\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\beta\,\text{sen}\beta + 2\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\cancel{\cos\beta\,\text{sen}\beta}}{\cancel{\cos\beta\,\text{sen}\beta}(\cos\beta + 2)} = \frac{1}{\cos\beta + 2}$$

73) $$\frac{\tan\mu + \cot\rho}{\tan\mu\cot\rho} = \frac{\frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu} + \frac{\cos\rho}{\text{sen}\,\rho}}{\frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}\frac{\cos\rho}{\text{sen}\,\rho}} = \frac{\frac{\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\rho + \cos\rho\cos\mu}{\text{sen}\,\rho\cos\mu}}{\frac{\text{sen}\,\mu\cos\rho}{\cos\mu\,\text{sen}\,\rho}} = \frac{\cancel{\cos\mu\,\text{sen}\,\rho}(\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\rho + \cos\rho\cos\mu)}{\cancel{\text{sen}\,\rho\cos\mu}\,\text{sen}\,\mu\cos\rho} =$$

$$\frac{\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\rho + \cos\rho\cos\mu}{\text{sen}\,\mu\cos\rho} = \frac{\cancel{\text{sen}\,\mu}\,\text{sen}\,\rho}{\cancel{\text{sen}\,\mu}\cos\rho} + \frac{\cancel{\cos\rho}\cos\mu}{\text{sen}\,\mu\cancel{\cos\rho}} = \frac{\text{sen}\,\rho}{\cos\rho} + \frac{\cos\mu}{\text{sen}\,\mu} = \tan\rho + \cot\mu$$

74) $$\frac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\tan y} - 1}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \frac{\frac{1 - \tan x\tan y}{\tan x\tan y}}{\frac{\tan y + \tan x}{\tan x\tan y}} = \frac{\cancel{\tan x\tan y}(1 - \tan x\tan y)}{\cancel{\tan x\tan y}(\tan y + \tan x)} = \frac{1 - \tan x\tan y}{\tan x + \tan y}$$

Ejercicios 3.2

1) $$\frac{\cos(\mu - \phi)}{\cos\mu\,\text{sen}\phi} = \frac{\cos\mu\cos\phi + \text{sen}\mu\,\text{sen}\phi}{\cos\mu\,\text{sen}\phi} = \frac{\cancel{\cos\mu}\cos\phi}{\cancel{\cos\mu}\,\text{sen}\phi} + \frac{\text{sen}\mu\,\cancel{\text{sen}\phi}}{\cos\mu\,\cancel{\text{sen}\phi}} = \frac{\cos\phi}{\text{sen}\phi} + \frac{\text{sen}\mu}{\cos\mu} = \tan\mu + \cot\phi$$

2) $$\frac{\text{sen}\,(\mu - \phi)}{\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\cos\phi - \cos\mu\,\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\phi} = \frac{\cancel{\text{sen}\,\mu}\cos\phi}{\cancel{\text{sen}\,\mu}\,\text{sen}\,\phi} - \frac{\cos\mu\,\cancel{\text{sen}\,\phi}}{\text{sen}\,\mu\,\cancel{\text{sen}\,\phi}} = \frac{\cos\phi}{\text{sen}\,\phi} - \frac{\cos\mu}{\text{sen}\,\mu} = \cot\phi - \cot\mu$$

3) $$\cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}} = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1 - \frac{1}{\cot\alpha}\left(\frac{1}{\cot\beta}\right)}{\frac{1}{\cot\alpha} + \frac{1}{\cot\beta}} = \frac{\frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha\cot\beta}}{\frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta}} =$$

$$\frac{\cancel{\cot\alpha\cot\beta}(\cot\alpha\cot\beta - 1)}{\cancel{\cot\alpha\cot\beta}(\cot\beta + \cot\alpha)} = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

4) $$\cot(2\alpha - 3\beta) = \frac{1}{\frac{\tan 2\alpha - \tan 3\beta}{1 + \tan 2\alpha\tan 3\beta}} = \frac{1 + \tan 2\alpha\tan 3\beta}{\tan 2\alpha - \tan 3\beta} = \frac{1 + \frac{1}{\cot 2\alpha}\frac{1}{\cot 3\beta}}{\frac{1}{\cot 2\alpha} - \frac{1}{\cot 3\beta}} = \frac{\frac{\cot 2\alpha\cot 3\beta + 1}{\cot 2\alpha\cot 3\beta}}{\frac{\cot 3\beta - \cot 2\alpha}{\cot 2\alpha\cot 3\beta}} =$$

$$\frac{\cancel{\cot 2\alpha\cot 3\beta}(\cot 2\alpha\cot 3\beta + 1)}{\cancel{\cot 2\alpha\cot 3\beta}(\cot 3\beta - \cot 2\alpha)} = \frac{\cot 2\alpha\cot 3\beta + 1}{\cot 3\beta - \cot 2\alpha}$$

5) $$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta} = \frac{\frac{\cancel{\text{sen}\alpha}\cos\beta}{\cancel{\text{sen}\alpha}\,\text{sen}\beta} + \frac{\cos\alpha\,\cancel{\text{sen}\beta}}{\text{sen}\alpha\,\cancel{\text{sen}\beta}}}{\frac{\cancel{\text{sen}\alpha}\cos\beta}{\cancel{\text{sen}\alpha}\,\text{sen}\beta} - \frac{\cos\alpha\,\cancel{\text{sen}\beta}}{\text{sen}\alpha\,\cancel{\text{sen}\beta}}} = \frac{\frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}{\frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}} = \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

6) $$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta} = \frac{\frac{\text{sen}\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\text{sen}\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}} - \frac{\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}} = \frac{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

7) $$\frac{\cos(\mu+\phi)}{\text{sen}\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\cos\phi - \text{sen}\mu\,\text{sen}\phi}{\text{sen}\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\,\cancel{\cos\phi}}{\text{sen}\mu\,\cancel{\cos\phi}} - \frac{\cancel{\text{sen}\mu}\,\text{sen}\phi}{\cancel{\text{sen}\mu}\cos\phi} = \frac{\cos\mu}{\text{sen}\mu} - \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} = \cot\mu - \tan\phi$$

8) $$\frac{\text{sen}\,(\mu - \phi)}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\cos\phi - \cos\mu\,\text{sen}\phi}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\,\cancel{\cos\phi}}{\cos\mu\,\cancel{\cos\phi}} - \frac{\cancel{\cos\mu}\,\text{sen}\phi}{\cancel{\cos\mu}\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu} - \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi} = \tan\mu - \tan\phi$$

9) $$\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan 2\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan 2\alpha + 1}{1 - \tan 2\alpha\,(1)} = \frac{\tan 2\alpha + 1}{1 - \tan 2\alpha}$$

10) $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = (\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) =$
$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta = \cos^2\alpha\,(1 - \text{sen}^2\beta) - (1 - \cos^2\alpha)\,\text{sen}^2\beta =$
$\cos^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta} - \text{sen}^2\beta + \cancel{\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta} = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\beta$

11) $\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta-\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}} = \frac{2\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\beta}{2\cancel{\cos\alpha}\cos\beta} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$

12) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta-\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}} = \frac{-2\cancel{\text{sen}\,\alpha}\,\text{sen}\,\beta}{2\cancel{\text{sen}\,\alpha}\cos\beta} = -\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = -\tan\beta$

13) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}}{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta-\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{2\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}{2\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \cot\beta$

14) $\sec(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{\cos(2\alpha+2\beta)} = \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 2\beta-\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,2\beta} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,2\beta}}{\frac{\cos 2\alpha\cos 2\beta}{\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,2\beta}-\frac{\cancel{\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,2\beta}}{\cancel{\text{sen}\,2\alpha\,\text{sen}\,2\beta}}} =$

$$\frac{\frac{1}{\text{sen}\,2\alpha}\left(\frac{1}{\text{sen}\,2\beta}\right)}{\frac{\cos 2\alpha}{\text{sen}\,2\alpha}\,\frac{\cos 2\beta}{\text{sen}\,2\beta}-1} = \frac{\csc 2\alpha\csc 2\beta}{\cot 2\alpha\,\cot 2\beta-1}$$

15) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta} = = 2\cos\alpha\cos\beta$

16) $\frac{\text{sen}(\mu+\phi)}{\text{sen}\,\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\cos\phi+\cos\mu\,\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\mu\cos\phi} = \frac{\cancel{\text{sen}\,\mu\cos\phi}}{\cancel{\text{sen}\,\mu\cos\phi}}+\frac{\cos\mu}{\text{sen}\,\mu}\,\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = 1+\cot\mu\tan\phi$

17) $\frac{\text{sen}(\mu+\phi)}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\cos\phi+\cos\mu\,\text{sen}\,\phi}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu\cos\phi}{\cos\mu\cos\phi}+\frac{\cos\mu\,\text{sen}\,\phi}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}+\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \tan\mu+\tan\phi$

18) $\frac{\cos(\mu-\phi)}{\text{sen}\,\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\cos\phi+\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\cancel{\cos\phi}}{\text{sen}\,\mu\cancel{\cos\phi}}+\frac{\cancel{\text{sen}\,\mu}\,\text{sen}\,\phi}{\cancel{\text{sen}\,\mu}\cos\phi} = \frac{\cos\mu}{\text{sen}\,\mu}+\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \cot\mu+\tan\phi$

19) $\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)} = \frac{\cos\theta\cos\varphi-\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\theta\cos\varphi+\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta\cos\varphi}}{\cancel{\cos\theta\cos\varphi}}-\frac{\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}}{\frac{\cancel{\cos\theta\cos\varphi}}{\cancel{\cos\theta\cos\varphi}}+\frac{\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}} = \frac{1-\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}}{1+\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{1-\tan\theta\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi}$

20) $\sec(\alpha-\beta) = \frac{1}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}+\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)}{1+\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} =$

$$\frac{\sec\alpha\sec\beta}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

21) $\frac{\cos(\mu+\phi)}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\cos\phi-\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\phi}{\cos\mu\cos\phi} = \frac{\cos\mu\cos\phi}{\cos\mu\cos\phi}-\frac{\text{sen}\,\mu\,\text{sen}\,\phi}{\cos\mu\cos\phi} = 1-\frac{\text{sen}\,\mu}{\cos\mu}\,\frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = 1-\tan\mu\tan\phi$

22) $\csc(\alpha-\beta) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}{\frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}-\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)}{1-\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} =$

$$\frac{\csc\alpha\sec\beta}{1-\cot\alpha\tan\beta}$$

23) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha} = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+1}{1-\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}$

24) $\frac{\sec(\alpha-\beta)}{\csc(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}}{\frac{1}{\text{sen}(\alpha+\beta)}} = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \frac{\frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}{\cancel{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}+\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}{\text{sen}\,\alpha\cancel{\cos\beta}}+\frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha}\,\text{sen}\,\beta}{\cancel{\text{sen}\,\alpha}\cos\beta}} =$

$$\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}+\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} = \frac{1+\cot\alpha\tan\beta}{\cot\alpha+\tan\beta}$$

25) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

26) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta) =$
$\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\beta)-(1-\operatorname{sen}^2\beta)\operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha \cancel{-\operatorname{sen}^4\beta} - \operatorname{sen}^2\beta \cancel{+\operatorname{sen}^4\beta} =$
$\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

27) $$\frac{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}{\operatorname{sen}(\phi-\mu)} = \frac{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi\cos\mu-\cos\phi\operatorname{sen}\mu} = \frac{\cancel{\dfrac{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\phi\cos\mu}{\operatorname{sen}\mu\cos\phi}-\dfrac{\cos\phi\cancel{\operatorname{sen}\mu}}{\cancel{\operatorname{sen}\mu}\cos\phi}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}\dfrac{\cos\mu}{\operatorname{sen}\mu}-1} = \frac{1}{\cot\mu\tan\phi-1}$$

28) $\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{2}$ **29)** $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{2}$ **30)** $-\operatorname{sen}\theta$ **31)** $\cos\beta$ **32)** $\dfrac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}$

33) $\dfrac{1+\tan\alpha}{\tan\alpha-1}$ **34)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$ **35)** $\csc\phi$ **36)** $\operatorname{sen}\alpha$ **37)** $\cos\alpha$

38) $\tan\alpha$ **39)** $\cot\alpha$ **40)** $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$ **41)** $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **42)** $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$ **43)** $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

44) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ **45)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **46)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **47)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **48)** $2-\sqrt{3}$ **49)** $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

50) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **51)** $\sqrt{2}-\sqrt{6}$ **52)** $-2-\sqrt{3}$ **53)** $2+\sqrt{3}$ **54)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **55)** $1+\sqrt{3}$

56) $\cos 41°$ **57)** $\cos 22°$ **58)** $-\operatorname{sen} 8°$ **59)** $\cos 18°$ **60)** $-\operatorname{sen} 44°$ **61)** $\sec\dfrac{21\pi}{4}$

62) $\tan 55°$ **63)** $\cot 20°$ **64)** $\csc\dfrac{2\pi}{63}$ **65)** $\sec 24°$ **66)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **67)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

68) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **69)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **70)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **71)** $\dfrac{1}{2}$ **72)** -2 **73)** 1

74) $\sqrt{3}$ **75)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **76)** $\sqrt{2}$ **77)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

78) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{7}-3\sqrt{15}}{16}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{3+\sqrt{105}}{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{16}{3\sqrt{15}+\sqrt{7}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{7}+3\sqrt{15}}{-3+\sqrt{105}}$; $\alpha-\beta\in$ III; $\alpha+\beta\in$ I

79) $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{16\sqrt{7}+21\sqrt{33}}{112}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{-12+\sqrt{231}}{4\sqrt{7}+3\sqrt{33}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{28}{3\sqrt{33}-4\sqrt{7}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{3\sqrt{33}-4\sqrt{7}}{12+\sqrt{231}}$; $\alpha-\beta\in$ III; $\alpha+\beta\in$ I

80) $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{25+6\sqrt{11}}{6\sqrt{61}}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{6-\sqrt{11}}{25+6\sqrt{11}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{6\sqrt{61}}{6\sqrt{11}-25}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{25-6\sqrt{11}}{6+\sqrt{11}}$; $\alpha-\beta\in$ III; $\alpha+\beta\in$ III

81) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{10+\sqrt{11}}{6\sqrt{5}}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{5-2\sqrt{11}}{10+\sqrt{11}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{6\sqrt{5}}{10-6\sqrt{11}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{10-\sqrt{11}}{5+2\sqrt{11}}$; $\alpha-\beta\in$ IV; $\alpha+\beta\in$ I

82) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3\sqrt{3}-4\sqrt{13}}{20}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{4\sqrt{3}+3\sqrt{13}}{3\sqrt{3}-4\sqrt{13}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{-20}{4\sqrt{13}+3\sqrt{3}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{4\sqrt{13}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{13}-4\sqrt{3}}$; $\alpha-\beta\in$ II; $\alpha+\beta\in$ III

83) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{35\sqrt{61}+10\sqrt{366}}{427}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{39\sqrt{6}-78}{30}$; $\sec(\alpha+\beta)=-\dfrac{7\sqrt{366}+21\sqrt{61}}{30}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{30-10\sqrt{6}}{25+12\sqrt{6}}$; $\alpha-\beta\in$ I; $\alpha+\beta\in$ III

84) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{40-12\sqrt{5}}{45}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{8+3\sqrt{5}}{6-4\sqrt{5}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{15}{6+4\sqrt{5}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{6+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-8}$; $\alpha-\beta\in$ I; $\alpha+\beta\in$ III

85) $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6+2\sqrt{3}}$; $\alpha-\beta\in$ II; $\alpha+\beta\in$ I

Ejercicios 3.3

1) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2\dfrac{\cancel{\tan\theta}}{\cancel{\tan\theta}}}{\dfrac{1}{\tan\theta} - \dfrac{\cancel{\tan^2\theta}}{\cancel{\tan\theta}}} = \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

2) $\dfrac{\text{sen}2\theta}{1+\cos 2\theta} = \dfrac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta - 1} = \dfrac{\cancel{2}\text{sen}\theta\cancel{\cos\theta}}{\cancel{2}\cancel{\cos^2\theta}} = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

3) $1 + \text{sen } 4\beta = 1 + 2\text{sen } 2\beta\cos 2\beta = \text{sen}^2\beta + 2\text{sen } 2\beta\cos 2\beta + \cos^2\beta = (\text{sen } 2\beta + \cos 2\beta)^2$

4) $\dfrac{\text{sen}2\beta}{\tan\beta} = \dfrac{2\text{sen}\beta\cos\beta}{\dfrac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \dfrac{2\cancel{\text{sen}\beta}\cos^2\beta}{\cancel{\text{sen}\beta}} = 2\cos^2\beta = \cancel{2}\left(\dfrac{1+\cos 2\beta}{\cancel{2}}\right) = 1 + \cos 2\beta = 1 + \dfrac{1}{\sec 2\beta}$

5) $\cos^4\theta - \text{sen}^4\theta = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(1) = \cos 2\theta$

6) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha\,\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\text{sen}2\alpha} = \dfrac{2}{\text{sen}2\alpha}$

7) $\dfrac{1-\tan^2\mu}{1+\tan^2\mu} = \dfrac{1-\dfrac{\text{sen}^2\mu}{\cos^2\mu}}{1+\dfrac{\text{sen}^2\mu}{\cos^2\mu}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\mu - \text{sen}^2\mu}{\cos^2\mu}}{\dfrac{\cos^2\mu + \text{sen}^2\mu}{\cos^2\mu}} = \dfrac{\cancel{\cos^2\mu}\left(\cos^2\mu - \text{sen}^2\mu\right)}{\cancel{\cos^2\mu}\left(\cos^2\mu + \text{sen}^2\mu\right)} = \dfrac{\cos^2\mu - \text{sen}^2\mu}{1} = \cos^2\mu - \text{sen}^2\mu = \cos 2\mu$

8) $\cos^2 4\alpha - \text{sen}^2 4\alpha = \cos^2 2(4\alpha) = \cos 8\alpha$

9) $\text{sen } 6\lambda = \text{sen } 2(3\lambda) = 2\,\text{sen } 3\lambda\cos 3\lambda$

10) $\dfrac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} - 1}{\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} + 1} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta - \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta}}{\dfrac{\cos\theta + \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta}} = \dfrac{\cos\theta - \text{sen}\theta}{\cos\theta + \text{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta - \text{sen}\theta}{\cos\theta + \text{sen}\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta + \text{sen}\theta}{\cos\theta + \text{sen}\theta} =$

$$\dfrac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta} = \dfrac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen } 2\theta}$$

11) $2\csc 4\mu = \dfrac{2}{\text{sen}2(2\mu)} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\text{sen}2\mu\cos 2\mu} = \dfrac{1}{\text{sen}2\mu}\left(\dfrac{1}{\cos 2\mu}\right) = \csc 2\mu\sec 2\mu$

12) $\text{sen } 3\theta = \text{sen }(\theta + 2\theta) = \text{sen }\theta\cos 2\theta + \cos\theta\,\text{sen } 2\theta = \text{sen }\theta\,(1 - 2\text{sen}^2\theta) + \cos\theta\,(2\text{sen }\theta\cos\theta) =$
$\text{sen }\theta - 2\text{sen}^3\theta + 2\cos^2\theta\,\text{sen }\theta = \text{sen }\theta - 2\text{sen}^3\theta + 2\text{sen }\theta\,(1 - \text{sen}^2\theta) = \text{sen }\theta - 2\text{sen}^3\theta + 2\text{sen }\theta - 2\text{sen}^3\theta =$
$3\text{sen }\theta - 4\text{sen}^3\theta = \text{sen }\theta\,(3 - 4\text{sen}^2\theta)$

13) $2\text{sen}^2 2\alpha + \cos 4\alpha = 2\text{sen}^2 2\alpha + \cos 2(2\alpha) = \cancel{2\text{sen}^2 2\alpha} + 1 - \cancel{2\text{sen}^2 2\alpha} = 1$

14) $\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\dfrac{1-\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{1+\dfrac{1-\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = \dfrac{1-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1+\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\dfrac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{\dfrac{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{2\cos\alpha\cancel{(1+\cos\alpha)}}{2\cancel{(1+\cos\alpha)}} = \dfrac{\cancel{2}\cos\alpha}{\cancel{2}} = \cos\alpha$

15) $\dfrac{2(\tan\alpha - \cot\alpha)}{\tan^2\alpha - \cot^2\alpha} = \dfrac{2(\tan\alpha - \cot\alpha)}{(\tan\alpha - \cot\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha)} = \dfrac{2}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}} = \dfrac{2}{\dfrac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen }\alpha\cos\alpha}} = 2\text{sen }\alpha\cos\alpha = \text{sen } 2\alpha$

16) $\dfrac{\cot\theta}{\csc 2\theta} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\text{sen}2\theta}} = \dfrac{\cos\theta\,\text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta\,(2\cancel{\text{sen}\theta}\cos\theta)}{\cancel{\text{sen}\theta}} = 2\cos^2\theta$

17) $\cot^2\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 = \frac{(1+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\cancel{(1+\cos\alpha)}^2}{(1-\cos\alpha)\cancel{(1+\cos\alpha)}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}} = \frac{\sec\alpha+1}{\sec\alpha-1}$

18) $\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha\right)} = \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$

19) $\frac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{2-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}\left(2\cos^2\alpha-1\right)} = \frac{1}{2\cos^2\alpha-1} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha$

20) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{2}{\cot\theta}}{1-\frac{1}{\cot^2\theta}} = \frac{\frac{2}{\cot\theta}}{\frac{\cot^2\theta-1}{\cot^2\theta}} = \frac{2\cot^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cot\theta}\left(\cot^2\theta-1\right)} = \frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta-1}$

21) $\frac{1+\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}2\theta}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\frac{1}{\cos\theta}+1 = 1+\frac{1}{2}\sec\theta\csc\theta$

22) $\operatorname{sen}^3\beta+\cos^3\beta = (\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\cos^2\beta) = (\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(1-\operatorname{sen}\beta\cos\beta) =$
$(\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\beta)$

23) $(\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)^3 = (\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)^2 = (\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\cos^2\beta) =$
$(\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(1+2\operatorname{sen}\beta\cos\beta) = (\operatorname{sen}\beta+\cos\beta)(1+\operatorname{sen}2\beta)$

24) $\operatorname{sen}4\alpha = \operatorname{sen}2(2\alpha) = 2\operatorname{sen}2\alpha\cos 2\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)$

25) $\cos^2 2\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha = (\cos 2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)(\cos 2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha) = (1-2\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)(1-2\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha) =$
$(1-3\operatorname{sen}^2\alpha)(1-\operatorname{sen}^2\alpha) = \cos^2\alpha\,(1-3\operatorname{sen}^2\alpha) = \cos^2\alpha-3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha =$
$\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha-\operatorname{sen}2\alpha = \cos^2\alpha-\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 2\alpha$

26) $\operatorname{sen}^4\alpha = \left(\operatorname{sen}^2\alpha\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 2\alpha =$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 2(2\alpha)}{2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}(1+\cos 4\alpha) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$

27) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)^2-(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2}{(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)} =$

$\frac{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{(2\cos\alpha)(2\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{\cos 2\alpha} = 2\tan 2\alpha$

28) $\frac{\cos^3\alpha+\operatorname{sen}^3\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cancel{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}\left(\cos^2\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\right)}{\cancel{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}} = 1-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha$

29) $\frac{1+\operatorname{sen}2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\operatorname{sen}2\alpha-\cos 2\alpha} = \frac{1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}{1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\left(1-2\operatorname{sen}^2\alpha\right)} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\cancel{2}\cos\alpha\cancel{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)}}{\cancel{2}\operatorname{sen}\alpha\cancel{(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}} = \cot\alpha$

30) $\cos^4 2\alpha = \left(\cos^2 2\alpha\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 4\alpha =$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 8\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{8}\left(1+\cos 8\alpha\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha+\frac{1}{8}\cos 8\alpha$

31) $\operatorname{sen}^4 3\alpha = \left(\operatorname{sen}^2 3\alpha\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 6\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 6\alpha+\cos^2 6\alpha\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 6\alpha =$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 12\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{1}{8}(1+\cos 12\alpha) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{1}{8}\cos 12\alpha$

32) $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = -(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = -\cos 2\alpha$

33) $\cos^6\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^3 = \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2\alpha + 3\cos^2 2\alpha + \cos^3 2\alpha\right) =$

$\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}\cos^2 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 2\alpha\cos^2 2\alpha = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right) + \frac{1}{8}\cos 2\alpha\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right) =$

$\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos 2\alpha + \frac{3}{16}\left(1+\cos 4\alpha\right) + \frac{1}{16}\cos 2\alpha(1+\cos 4\alpha) = \frac{5}{16} + \frac{7}{16}\cos 2\alpha + \frac{3}{16}\cos 4\alpha + \frac{1}{16}\cos 2\alpha\cos 4\alpha$

34) $\operatorname{sen}^2\alpha\cos^4\alpha = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(1-\cos 2\alpha\right)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha) =$

$\frac{1}{8}\left(1-\cos^2 2\alpha\right)\left(1+\cos 2\alpha\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 2\alpha - \frac{1}{8}\cos^2 2\alpha - \frac{1}{8}\cos 2\alpha\cos^2 2\alpha = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 2\alpha -$

$\frac{1}{16}\left(1+\cos 4\alpha\right) - \frac{1}{16}\cos 2\alpha\,(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cos 2\alpha - \frac{1}{16}\cos 4\alpha - \frac{1}{16}\cos 2\alpha\cos 4\alpha$

35) $\operatorname{sen}^4\alpha\cos^4\alpha = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\left[(1+\cos 2\alpha)(1-\cos 2\alpha)\right]^2 = \frac{1}{16}\left(1-\cos^2 2\alpha\right)^2 =$

$\frac{1}{16}\left(\operatorname{sen}^2 2\alpha\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4\alpha + \frac{1}{8}\cos 8\alpha\right) = \frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4\alpha + \frac{1}{128}\cos 8\alpha$

36) $\frac{1}{\sec^4\alpha} = \cos^4\alpha = \left(\cos^2\alpha\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$

37) $\frac{1}{\csc^4\alpha} = \operatorname{sen}^4\alpha = \left(\operatorname{sen}^2\alpha\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$

38) $\operatorname{sen} 40°$ **39)** $\cos 50°$ **40)** $\tan 24°$ **41)** $\tan 9°$ **42)** $2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$ **43)** $3\cos\frac{4\pi}{7}$

44) $\tan\frac{2\pi}{9}$ **45)** $\tan\frac{\pi}{7}$ **46)** $\cos\frac{4\pi}{9}$ **47)** $\cos\frac{4\pi}{11}$ **48)** $\operatorname{sen}\left(\frac{35}{2}\right)^{\circ}$ **49)** $\cos\frac{\pi}{24}$

50) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **51)** $\sqrt{2}-1$ **52)** $\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **53)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **54)** $\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **55)** $\sqrt{2}-1$

56) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **57)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **58)** $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **59)** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **60)** $-1-\sqrt{2}$ **61)** $\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}$

62) $\cos 2\alpha = -\frac{23}{49}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{12\sqrt{13}}{49}$; $\csc 2\alpha = -\frac{49\sqrt{13}}{156}$; $\cot 2\alpha = \frac{23\sqrt{13}}{156}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{98+14\sqrt{13}}}{14}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{9-14\sqrt{13}}}{14}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{7+\sqrt{13}}{6}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(7+\sqrt{13}\right)\sqrt{98-14\sqrt{13}}}{36}$; $2\alpha \in \mathrm{III}$

63) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{8}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$; $\csc 2\alpha = -\frac{8\sqrt{7}}{21}$; $\cot 2\alpha = \frac{\sqrt{7}}{21}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{4}$;

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{2\left(4-\sqrt{7}\right)\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{9}$; $2\alpha \in \mathrm{III}$

64) $\cos 2\alpha = -\frac{11}{61}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{60}{61}$; $\csc 2\alpha = \frac{61}{60}$; $\cot 2\alpha = -\frac{11}{60}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{122\sqrt{61}+610}}{122}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{122\sqrt{61}-610}}{122}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{5+\sqrt{61}}{6}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sqrt{61}-5\right)\sqrt{122-10\sqrt{61}}}{36}$; $2\alpha \in \mathrm{II}$

65) $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4}{5}$; $\csc 2\alpha = \frac{5}{3}$; $\cot 2\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}-20}}{10}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+20}}{10}$;
$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}-2$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{10+4\sqrt{5}}$; $2\alpha \in \mathrm{I}$

66) $\cos 2\alpha = \frac{5}{8}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{13}{8}$; $\csc 2\alpha = -\frac{8}{13}$; $\cot 2\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{104}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{13}}}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{13}}}{4}$;
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{39}}{3}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{2\left(4-\sqrt{13}\right)\sqrt{8+2\sqrt{13}}}{3}$; $2\alpha \in \mathrm{IV}$

67) $\cos 2\alpha = -\frac{11}{61}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{60}{61}$; $\csc 2\alpha = -\frac{61}{60}$; $\cot 2\alpha = \frac{11}{60}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{122\sqrt{61}+610}}{122}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{122\sqrt{61}-610}}{122}$;
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{5+\sqrt{61}}{6}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sqrt{61}-5\right)\sqrt{122-10\sqrt{61}}}{36}$; $2\alpha \in \mathrm{III}$

68) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\csc 2\alpha = -\frac{9\sqrt{5}}{20}$; $\cot 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{20}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$;
$\sec\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{6}$; $2\alpha \in \mathrm{II}$

69) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$; $\operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\csc 2\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\cot 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt[4]{216}\sqrt{2\sqrt{3}-2}}{12}$;
$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt[4]{216}\sqrt{2\sqrt{3}+2}}{12}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3+\sqrt{3}}}{2}$; $2\alpha \in \mathrm{III}$

70) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{13\sqrt{39}}{39}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

71) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{4}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{2\left(4-\sqrt{7}\right)\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{9}$

72) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{338-65\sqrt{26}}}{26}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{338+65\sqrt{26}}}{26}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = 5-\sqrt{26}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \left(5-\sqrt{26}\right)\sqrt{52+10\sqrt{26}}$

73) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{50+20\sqrt{5}}}{10}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{50-20\sqrt{5}}}{10}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = -2-\sqrt{5}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = -\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

74) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{13}}}{4}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{13}}}{4}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{39}}{3}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(8-2\sqrt{13}\right)\sqrt{8+2\sqrt{13}}}{3}$

75) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7442+610\sqrt{61}}}{122}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7442-610\sqrt{61}}}{122}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{5+\sqrt{61}}{6}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sqrt{61}+5\right)\sqrt{122-10\sqrt{61}}}{36}$

76) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{6}$

77) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{18-3\sqrt{2}}}{6}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{18+3\sqrt{2}}}{6}$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$; $\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{3+\sqrt{3}}}{2}$

78) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **79)** $\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ **80)** $\tan\theta = 3$; $\cos\theta = \sqrt{10}$

81) **a)** $\cos(\phi+\mu) = \frac{3\sqrt{1682+87\sqrt{58}} - 4\sqrt{1682-87\sqrt{58}}}{290}$ **b)** $\tan(\phi-\mu) = \frac{-3\sqrt{58-3\sqrt{58}} + 4\sqrt{58+3\sqrt{58}}}{3\sqrt{58+3\sqrt{58}} + 4\sqrt{58-3\sqrt{58}}}$

c) $\operatorname{sen}(3\phi+2\mu) = -\frac{147\sqrt{116-6\sqrt{58}} + 23\sqrt{116+6\sqrt{58}}}{2900}$

d) $\sqrt{2}\sec(3\phi) + 5\cos\frac{\mu}{2} = \frac{116-7\sqrt{290-15\sqrt{58}} - 3\sqrt{290+15\sqrt{58}}}{7\sqrt{58-3\sqrt{58}} - 3\sqrt{58+3\sqrt{58}}}$

Ejercicios 3.4

1) $CS = \{60°, 300°\}$; $CS = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

2) $CS = \{30°, 150°\}$; $CS = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

3) $CS = \{225°, 315°\}$; $CS = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

4) $CS = \{30°, 330°\}$; $CS = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

5) $CS = \{60°, 120°, 240°, 300°\}$; $CS = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

6) $CS = \{240°\}$; $CS = \left\{\frac{4\pi}{3}\right\}$

7) $CS = \{75°\}$; $CS = \left\{\frac{5\pi}{12}\right\}$

8) $CS = \{30°, 70°\}$; $CS = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

9) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

10) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

11) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

12) $CS = \left\{\frac{2\pi+6k\pi}{3}, \frac{4\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

13) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{\pi+12k\pi}{6}, \frac{5\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

14) $CS = \left\{\frac{\pi+k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

15) $CS = \left\{\pi+2k\pi, \frac{\pi+6k\pi}{3}, \frac{5\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

16) $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{6}, \frac{5\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

17) $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

18) $CS = \left\{2k\pi, \frac{3\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

19) $CS = \{\pi+2k\pi; k\in Z\}$

20) $CS = \left\{4k\pi, \frac{2\pi+12k\pi}{3}, \frac{10\pi+12k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

21) $CS = \left\{\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

22) $CS = \left\{\frac{k\pi}{4}, \frac{\pi+4k\pi}{16}; k\in Z\right\}$

23) $CS = \left\{k\pi, \frac{3\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

24) $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{6}, \frac{7\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

25) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

26) $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

27) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{2}, \frac{7\pi+12k\pi}{6}, \frac{11\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

28) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

29) $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{2}, \frac{7\pi+12k\pi}{6}, \frac{11\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

30) $CS = \left\{\frac{k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

31) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

32) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

33) $CS = \left\{\frac{k\pi}{4}, \frac{\pi+2k\pi}{8}; k\in Z\right\}$

34) $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{24}, \frac{5\pi+12k\pi}{24}, \frac{3\pi+4k\pi}{8}; k\in Z\right\}$

35) $CS = \left\{\frac{k\pi}{5}, \frac{2\pi+6k\pi}{15}, \frac{4\pi+6k\pi}{15}; k\in Z\right\}$

36) $CS = \left\{2k\pi, \frac{\pi+12k\pi}{3}, \frac{5\pi+12k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

37) $CS = \left\{2k\pi, \frac{2\pi+12k\pi}{3}, \frac{10\pi+12k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

38) $CS = \left\{2k\pi, \frac{2\pi+6k\pi}{3}, \frac{4\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

39) $CS = \left\{\pi+k\pi, \frac{\pi+6k\pi}{3}, \frac{2\pi+6k\pi}{3}, \frac{4\pi+6k\pi}{3}, \frac{5\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

40) $CS = \left\{\frac{\pi+k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

41) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

42) $CS = \left\{2k\pi, \frac{\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

43) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+2k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

44) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{7\pi+8k\pi}{4}, \frac{3\pi+8k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

45) $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{6}, \frac{5\pi+12k\pi}{6}, \frac{7\pi+12k\pi}{6}, \frac{11\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

46) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

47) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

48) $CS = \left\{\pi+2k\pi, \frac{2\pi+6k\pi}{3}, \frac{4\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

49) $CS = \left\{2k\pi, \frac{2\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

50) $\{\,\}$

51) $CS = \{k\pi; k\in Z\}$

52) $CS = \left\{\frac{\pi+2k\pi}{2}, \frac{7\pi+12k\pi}{6}, \frac{11\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

53) $CS = \left\{\frac{4\pi+12k\pi}{3}, \frac{8\pi+12k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

54) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

55) $CS = \{\pi+4k\pi; k\in Z\}$

56) $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{6}, \frac{5\pi+12k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

57) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{8}; k\in Z\right\}$

58) $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

59) $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{9}, \frac{5\pi+6k\pi}{9}; k\in Z\right\}$

60) $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$

61) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+2k\pi}{4}, \frac{\pi+3k\pi}{3}, \frac{2\pi+3k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

62) $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{2}, \frac{2\pi+6k\pi}{3}, \frac{4\pi+6k\pi}{3}; k\in Z\right\}$

63) $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$

64) $CS = \left\{\frac{\pi+8k\pi}{8}, \frac{7\pi+8k\pi}{8}; k\in Z\right\}$

65) $CS=\left\{\frac{\pi+6k\pi}{9},\frac{2\pi+6k\pi}{9};k\in Z\right\}$

66) $CS=\left\{\frac{k\pi}{4};k\in Z\right\}$

67) $CS\approx\{70.53°+360°k,289.47°+360°k;k\in Z\}$; $CS\approx\{1.23+2k\pi,2\pi-1.23+2k\pi;k\in Z\}$

68) $CS\approx\{119.47°+360°k,340.53°+360°k,221.81°+360°k,318.19°+360°k;k\in Z\}$;
$CS\approx\{\pi+0.34+2k\pi,2\pi-0.34+2k\pi,\pi+0.73+2k\pi,2\pi-0.73+2k\pi;k\in Z\}$

69) $CS\approx\{26.56°+360°k,153.43°+360°k,206.57°+360°k,333.43°+360°k;k\in Z\}$;
$CS\approx\{0.46+2k\pi,\pi-0.46+2k\pi,\pi+0.46+2k\pi,2\pi-0.46+2k\pi;k\in Z\}$

70) $CS\approx\{116.57°+180°k,75.96°+180°k;k\in Z\}$; $CS\approx\{\pi-1.11+k\pi,\pi+1.33+k\pi;k\in Z\}$

71) $CS\approx\{24.10°+180°k,155.90°+180°k;k\in Z\}$; $CS\approx\{0.42+k\pi,\pi-0.42+k\pi;k\in Z\}$

72) $CS\approx\{193.05°+360°k,346.95°+360°k;k\in Z\}$; $CS\approx\{\pi+0.23+2k\pi,2\pi-0.23+2k\pi;k\in Z\}$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO III

1) $\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha}}=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}=\operatorname{sen}\alpha$

2) $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha}}=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}=\operatorname{sen}\alpha$

3) $\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}=\frac{\frac{\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}{\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}}=\frac{\cancel{\cos^2x}\left(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x\right)}{\cancel{\cos^2x}\left(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x\right)}=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=1-2\operatorname{sen}^2x$

4) $\frac{2}{\cot x+\tan x}=\frac{2}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}=\frac{2}{\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x\cos x}}=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$

5) $\frac{\sec x+\csc x}{\sec x-\csc x}=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\cos x\operatorname{sen}x}}=\frac{\cancel{\cos x\operatorname{sen}x}(\operatorname{sen}x+\cos x)}{\cancel{\cos x\operatorname{sen}x}(\operatorname{sen}x-\cos x)}=\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}$

6) $\frac{\operatorname{sen}\beta+\tan\beta}{\cot\beta+\csc\beta}=\frac{\operatorname{sen}\beta+\tan\beta}{\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}}=\frac{\operatorname{sen}\beta+\tan\beta}{\frac{\operatorname{sen}\beta+\tan\beta}{\tan\beta\operatorname{sen}\beta}}=\frac{\tan\beta\operatorname{sen}\beta\cancel{(\operatorname{sen}\beta+\tan\beta)}}{\cancel{(\operatorname{sen}\beta+\tan\beta)}}=\operatorname{sen}\beta\tan\beta$

7) $\sec^3x\cos x=\frac{1}{\cos^3x}(\cos x)=\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2x=1+\tan^2x$

8) $\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\frac{1+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}=\frac{\frac{\cos\beta+\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\cos\beta-\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}=\frac{\cos\beta+\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta-\operatorname{sen}\beta}\cdot\frac{\cos\beta+\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta-\operatorname{sen}\beta}=\frac{\cos^2\beta+2\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}=\frac{1+\operatorname{sen}2\beta}{\cos2\beta}$

9) $\tan\beta+\cot\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}+\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta}{\cos\beta\operatorname{sen}\beta}=\frac{1}{\cos\beta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\right)=\sec\beta\csc\beta$

10. $2\tan y+1=\frac{2\operatorname{sen}y}{\cos y}+1=\frac{2\operatorname{sen}y+\cos y}{\cos y}=\frac{\cos y+2\operatorname{sen}y}{\cos y}$

11) $\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos2\alpha}+\cot2\alpha=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos2\alpha}+\frac{\cos2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^22\alpha+\cos2\alpha+\cos^22\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha(1+\cos2\alpha)}=\frac{\cancel{(1+\cos2\alpha)}}{\operatorname{sen}2\alpha\cancel{(1+\cos2\alpha)}}=\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha}=\csc2\alpha$

12) $\frac{1+\sec\theta}{2\sec\theta}=\frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{2}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta+1}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

13) $\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=\cos^2\alpha\,(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha=\ 1-\dfrac{1}{\csc^2\alpha}$

14) $\tan\alpha\tan\beta(\cot\alpha+\cot\beta)=\tan\alpha\tan\beta\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)=\cancel{\tan\alpha\tan\beta}\left(\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\cancel{\tan\alpha\tan\beta}}\right)=\ \tan\alpha+\tan\beta$

15) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}x}+\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}x}=\dfrac{1-\operatorname{sen}x+1+\operatorname{sen}x}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)}=\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2x}=\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2x}=2\sec^2x$

16) $\operatorname{sen}x\cos x(1+\cot x)(1+\tan x)=\operatorname{sen}x\cos x\left(1+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)=\cancel{\operatorname{sen}x\cos x}\left(\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\cancel{\operatorname{sen}x}}\right)\left(\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cancel{\cos x}}\right)=$
$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x=\operatorname{sen}^2x+\cos^2x+2\operatorname{sen}x\cos x=1+2\operatorname{sen}x\cos x$

17) $-\left(2+\sqrt{3}\right)$ **18)** $-\left(1+\sqrt{2}\right)$ **19)** $\sqrt{2}-1$ **20)** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **21)** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ **22)** $\sqrt{3}-2$

23) $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **24)** $-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ **25)** $\dfrac{\sqrt{74}+5}{7}$ **26)** $\dfrac{\sqrt{18-3\sqrt{11}}}{6}$ **27)** $-\dfrac{\sqrt{6\sqrt{13}-18}}{6}$ **28)** $-\dfrac{24}{7}$

29) $-\dfrac{\left(9+\sqrt{385}\right)}{32}$ **30)** $\dfrac{19}{33}$ **31)** a) $\dfrac{\sqrt{12+4\sqrt{5}-6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}+\sqrt{20-4\sqrt{5}+10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{\sqrt{12+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}-\sqrt{20-4\sqrt{5}-10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{20+10\sqrt{3}-4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}-\sqrt{12-6\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}}{8}$ c) $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}{4}$

e) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ f) $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}$ g) $\dfrac{8}{\sqrt{30+10\sqrt{5}}-3\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$

32) $\cos^4(x+y)=\left(\cos^2(x+y)\right)^2=\left(\dfrac{1+\cos 2(x+y)}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2(x+y)+\cos^2 2(x+y)\right)=$
$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2(x+y)+\dfrac{1}{4}\cos^2 2(x+y)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2(x+y)+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos 4(x+y)}{2}\right)=$
$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2(x+y)+\dfrac{1}{8}\left(1+\cos 4(x+y)\right)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2(x+y)+\dfrac{1}{8}\cos 4(x+y)$

33) $\operatorname{sen}^4\dfrac{\alpha}{4}=\left(\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1-\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=$
$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{8}\left(1+\cos\alpha\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{8}\cos\alpha$

34) $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\operatorname{sen}^2\alpha\right)^2+\left(\cos^2\alpha\right)^2=\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)+$
$\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha+\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$

35) $\dfrac{1}{\csc^4\dfrac{\beta}{2}}=\operatorname{sen}^4\dfrac{\beta}{2}=\left(\operatorname{sen}^2\dfrac{\beta}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1-\cos\beta}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos\beta+\cos^2\beta\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{4}\cos^2\beta=$
$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{8}\left(1+\cos 2\beta\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{8}\cos 2\beta$

36) $CS=\left\{\pi+2k\pi,\dfrac{2\pi+6k\pi}{3},\dfrac{4\pi++6k\pi}{3};k\in Z\right\}$ **37)** $CS=\left\{\dfrac{\pi+2k\pi}{2},\dfrac{\pi+12k\pi}{6},\dfrac{5\pi+12k\pi}{6};k\in Z\right\}$

38) $CS=\left\{\dfrac{\pi+4k\pi}{4};k\in Z\right\}$ **39)** $CS=\left\{\dfrac{\pi+12k\pi}{6},\dfrac{5\pi+12k\pi}{6};k\in Z\right\}$ **40)** $CS=\left\{\dfrac{\pi+6k\pi}{3},\dfrac{5\pi+6k\pi}{3};k\in Z\right\}$

41) $CS=\left\{\dfrac{\pi+12k\pi}{6},\dfrac{5\pi+12k\pi}{6};k\in Z\right\}$ **42)** $CS=\{k\pi;k\in Z\}$ **43)** $CS=\left\{\dfrac{\pi+4k\pi}{4},\dfrac{3\pi+4k\pi}{4};k\in Z\right\}$

44) $CS=\left\{\dfrac{\pi+4k\pi}{4},\dfrac{3\pi+4k\pi}{4};k\in Z\right\}$ **45)** $CS=\{k\pi;k\in Z\}$ **46)** $CS=\{k\pi;k\in Z\}$

47) $CS = \left\{k\pi, \frac{\pi+4k\pi}{4}, \frac{3\pi+4k\pi}{4}; k\in Z\right\}$ **48)** $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{2}, \frac{3\pi+4k\pi}{2}; k\in Z\right\}$ **49)** $CS = \left\{\frac{\pi+4k\pi}{24}; k\in Z\right\}$

50) $CS = \left\{\frac{\pi+8k\pi}{8}, \frac{3\pi+8k\pi}{8}, \frac{5\pi+8k\pi}{8}, \frac{7\pi+8k\pi}{8}; k\in Z\right\}$ **51)** $CS = \left\{\frac{\pi+12k\pi}{36}, \frac{11\pi+12k\pi}{36}; k\in Z\right\}$

52) $CS = \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{16}; k\in Z\right\}$ **53)** $CS = \left\{\frac{2\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$ **54)** $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{6}, \frac{5\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$

55) $CS = \left\{\frac{\pi+3k\pi}{3}; k\in Z\right\}$ **56)** $CS = \left\{\frac{\pi+6k\pi}{12}; k\in Z\right\}$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO IV

Ejercicios 4.1

1)
a) $\beta = 69°$, $b \approx 26.05$, $c \approx 27.90$ **b)** $\beta = 48°$, $a \approx 13.51$, $c \approx 20.18$ **c)** $\beta = 35°$, $a \approx 14.74$, $b \approx 20.18$
d) $\alpha = 58°$, $a \approx 72.02$, $c \approx 84.92$ **e)** $\alpha = 47°35'$, $b \approx 10.95$, $c \approx 13.55$ **f)** $\alpha = 35.7°$, $a \approx 7.18$, $b \approx 9.99$
g) $\beta = 25°$, $a \approx 2.03$, $b \approx 0.95$ **h)** $\alpha = 62°$, $a \approx 6.52$, $c \approx 7.38$ **i)** $c = 2\sqrt{29}$, $\alpha \approx 68.2°$, $\beta \approx 21.8°$
j) $a = 12$, $\alpha \approx 67.38°$, $\beta \approx 22.62°$ **k)** $b = \sqrt{13}$, $\alpha \approx 59°$, $\beta \approx 31°$ **l)** $c = 2\sqrt{6}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$

2) $d \approx 31.52$ mts **3)** $A = 31.52$ mts **4)** $\beta \approx 32.11°$ **5) a)** $d = 10\sqrt{61}$ **b)** $\alpha \approx 162.19°$ **c)** $\beta \approx 342.19°$
6) a) $d = 5\sqrt{433}$ **b)** $\alpha \approx 129.78°$ **7)** $h \approx 162.26$ mts **8) a)** $h \approx 77.18$ mts **b)** $h \approx 77.18$ mts
9) $A \approx 306.9$ mts **10)** $h \approx 9.85$ mts **11)** $h \approx 1931.7$ mts **12)** $d \approx 6.99$ millas
13) a) $d \approx 270.08$ mts **b)** $d \approx 281.67$mts **14)** $d \approx 21,297.4$ mts **15)** $\alpha \approx 18.44°$ **16)** $h \approx 932.72°$
17) a) $d \approx 86.78$ mts **b)** $h \approx 163.22$ mts **18)** $t \approx 7$min con 38 seg **19)** $d \approx 8,177.13$ mts **20)** $d \approx 60.71$pies
21) $d \approx 170.14$ mts **22)** $c \approx 33.64.14$ pies **23)** $d = 4\sqrt{113}$ millas; **aproximadamente N 22.46°O**

Ejercicios 4.2

1)
a) $\alpha = 105°$, $a \approx 75.66$, $c \approx 33.10$ **b)** $\gamma = 83°$, $a \approx 13.70$, $b \approx 8.01$ **c)** $\beta = 70°$, $a \approx 19.37$, $b \approx 21.47$
d) $\gamma = 95.3°$, $a \approx 4.77$, $b \approx 3.23$ **e)** $\alpha = 152°40'$, $b \approx 5.76$, $c \approx 4.53$ **f)** $\alpha = 42°45'$, $a \approx 10.74$, $b \approx 4.26$
g) $\alpha \approx 14.48°$, $\beta \approx 135.52°$, $b \approx 56.05$ **h) no existe Δ** **i) no existe Δ**
j) $\beta \approx 43.16°$, $\alpha \approx 98.84°$, $a \approx 28.89$, $\alpha' \approx 5.16°$, $\beta' \approx 136.84°$, $a' = 2.63$ **k)** $\alpha \approx 45.78°$, $\gamma \approx 31°$, $a \approx 32.40$
l) $\alpha \approx 53.65°$, $\beta \approx 16.35°$, $b \approx 8.39$ **m) no existe Δ** **n)** $\alpha \approx 55.32°$, $\gamma \approx 59.68°$, $c \approx 40.1$
o) $\gamma \approx 48°48'11''$, $\beta \approx 55°51'35''$, $b \approx 15.4$ **p)** $\alpha = \beta = 56°$, $c \approx 16.9$ **q)** $\beta \approx 38.07°$, $\alpha \approx 46.93°$, $a \approx 15.40$
r) $\gamma \approx 74.36°$, $\alpha \approx 41.64°$, $a \approx 20.7$, $\gamma' \approx 105.64°$, $\alpha' \approx 10.36°$, $a' \approx 5.6$ **s)** $\alpha \approx 44.6°$, $\beta \approx 80.4°$, $b \approx 67.41$
t) $\gamma \approx 60.33°$, $\alpha \approx 83.67°$, $a \approx 38.89$, $\gamma' \approx 119.67°$, $\alpha' \approx 24.33°$, $a' = 16.12$ **u)** $\gamma \approx 39.01°$, $\beta \approx 94.99°$, $b \approx 55.4$

2) $l \approx 29.19$ pulg **3)** $h \approx 246.57$ mts **4) a)** $d_1 \approx 5.8$ millas, $d_2 \approx 8.5$ millas **b)** No ($d \approx 3.05$ millas)
5) $h \approx 50.584$ pies **6)** $h \approx 1.53$ millas **7) a)** $h_1 \approx 73.66$ pies, $h_2 \approx 99.9$ pies **b)** $h \approx 68.45$ pies
8) $h \approx 13.54$ km **9) a)** $d \approx 4.82$ km **b)** $h \approx 1.29$ km **10)** $h \approx 3,869.37$ pies
11) $h \approx 2,095.5$ pies **12)** $h \approx 3.5$ km **13)** $l \approx 15.97$ pies
14) No; $d \approx 2.91$ km ó $d \approx 0.94$ km; $d \approx 2.3$ km; **aproximadamente S 23.18° O**

Ejercicios 4.3

1)
a) $a \approx 11.56$, $\beta \approx 96.87°$, $\gamma \approx 48.13°$ **b)** $b = 15\sqrt{3}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$ **c)** $c \approx 16.21$, $\beta \approx 51.69°$, $\alpha \approx 70.31°$
d) $b \approx 8.94$, $\gamma = 59°32'57''$, $\alpha \approx 84°6'51''$ **e)** $c \approx 18.5$, $\alpha \approx 41.29°$, $\beta \approx 55.71°$
f) $a \approx 31.47$, $\beta = 51°$, $\alpha = 51°$ **g)** $\alpha \approx 28.96°$, $\beta \approx 75.52°$, $\gamma \approx 75.52°$ **h)** $\alpha \approx 43.39°$, $\beta \approx 50.86°$, $\gamma \approx 85.75°$
i) $\alpha \approx 53.13°$, $\beta \approx 36.87°$, $\gamma = 90°$ **j)** $\alpha \approx 130.54°$, $\beta \approx 22.33°$, $\gamma \approx 27.13°$ **k)** $\alpha \approx 43.92°$, $\beta \approx 53.43°$, $\gamma \approx 82.65°$
l) $\alpha \approx 71.58°$, $\beta \approx 64.33°$, $\gamma \approx 44.09°$ **2)** $d \approx 21.49$ mi **3)** $d \approx 205.89$ milla; aprox. S72.99°O; aprox. N 72.99°E

4) a) $\alpha \approx 345.15°$ **b)** $t \approx 16$ hrs 20 min 15 seg
5) a) d ≈ 1,038.64 mts **b)** d ≈ 127.28 pies **c)** $\alpha \approx 87.12°$
6) a) d ≈ 42.58 pies **b)** d ≈ 84.85 pies **c)** $\alpha \approx 85.18°$
7) a) d ≈ 845.1 mts **b)** aprox. **S**14.67°**O**
8) $l \approx 6.18$ cm **9)** $d_1 \approx 26.07$ pies; $d_2 \approx 54.50$ pies
10) a) d ≈ 491.55 mts **b)** aprox. **N**14.41°**E**
11) a) d ≈ 8.88 km **b)** aprox. **N**13.83°**E**
12) aprox. 111.8°, 40.54° y 27.66°
13) aprox. **N**63.9°**E** **14)** $\alpha \approx 30.81°$
15) d ≈ 2,689.85 millas
16) a) d ≈ 52.92 mts **b)** aprox. **S**14.11°**O** **17)** $\alpha \approx 41.41°$ **18)** d ≈ 357.77 millas **b)** $\alpha \approx 66.57°$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO IV

1)
a) $\beta = 66°$, $c \approx 1.85$, $b \approx 1.69$ **b)** $\beta = 18°$, $a \approx 11.92$, $c \approx 12.53$ **c)** $\beta = 34°38'$, $a \approx 46.90$, $b \approx 32.39$
d) $\alpha = 54.80°$, $a \approx 75.13$, $c \approx 91.95$ **e)** $\beta \approx 15.02°$, $\alpha \approx 74.98°$, $c \approx 42.45$ **f)** $\alpha \approx 50.29°$, $\beta \approx 39.71°$, $b \approx 8.31$
g) $\alpha \approx 70.69°$, $\beta \approx 19.31°$, $a = \sqrt{57}$ **h)** $\alpha \approx 65.21°$, $\beta \approx 24.79°$, $c \approx 14.73$ **i)** $a \approx 18.62$, $\beta \approx 86.08°$, $\gamma \approx 45.92°$
j) $\alpha = 37°$, $b \approx 17.54$, $a = 12.13$ **k)** $\beta \approx 44.97°$, $\alpha \approx 77.03°$, $a \approx 20.68$ **l) no existe** Δ
m) $\beta \approx 76.98°$, $\gamma \approx 41.02°$, $c \approx 21.56$, $\gamma' \approx 14.98°$, $\beta' \approx 103.02°$, $c' \approx 8.49$ **n)** $\gamma \approx 49.27°$, $\alpha \approx 29.73°$, $a \approx 57.59$
o) $\alpha \approx 29.93°$, $\beta \approx 93.82$, $\gamma \approx 56.25°$ **p) no existe** Δ **q)** $\alpha = 90°$, $\beta \approx 53.13°$, $\gamma \approx 36.87°$

2) h ≈ 10.28 pies **3)** b ≈ 3.86 pulg **4)** $\beta \approx 37.33°$ **5)** $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ pulg **6)** $L_1 \approx 3.88$ pulg, $L_2 \approx 8.9$ pulg
7) L ≈ 8.21 cms **8)** L ≈ 32.36 pies **9)** $\beta \approx 30.96°$ **10)** d ≈ 713.23 pies **11)** d ≈ 51.87 pies
12) d ≈ 300.26 pies **13)** $h_{\text{tanque}} \approx 456.55$ pies; $h_{\text{ventana}} \approx 141.41$ pies **14)** d ≈ 13419.89 pies
15) r ≈ 427.33 millas **16) a)** d ≈ 61.77 millas **b)** direción ≈ S4.05°O
17) a) d ≈ 158.11 millas **b)** $\alpha \approx 338.43°$ **18)** $\theta \approx 93.58°$ **19) a)** d ≈ 53.98 millas **b)** $\alpha \approx 197.98°$
20) $d_1 \approx 5.56$ km, $d_2 \approx 6.66$ km **21)** $t_1 \approx 4'52''$, $t_2 \approx 7'57''$, d ≈ 7.31 km

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO V

Ejercicios 5.1

1)

a) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = \frac{1}{2}$; $P = \frac{2\pi}{3}$; Dsf = no hay; $Rg f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

b) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 2$; $P = 6\pi$; Dsf = no hay; $Rg f = [-2,2]$

c) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 3$; $P = 2\pi$; $Dsf = \frac{\pi}{6}$; $Rg f = [-3,3]$

d) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 3$; $P = \pi$; $Dsf = -\frac{\pi}{2}$; $Rg f = \left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$

e) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 2$; $P = \frac{2\pi}{3}$; $Dsf = \frac{\pi}{12}$; $Rg f = [-3,1]$

f) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 4$; $P = \pi$; $Dsf = \frac{\pi}{6}$; $Rg f = [-4,4]$

g) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 1$; $P = \frac{\pi}{2}$; $Dsf = \frac{\pi}{24}$; $Rg f = [-4,-2]$

h) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = \frac{3}{4}$; $P = 4\pi$; $Dsf = \frac{2\pi}{3}$; $Rg f = \left[\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right]$

i) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 2$; $P = \frac{2\pi}{3}$; $Dsf = -\frac{\pi}{6}$; $Rg f = [-1,3]$

j) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 3$; $P = 2$; $Dsf = \frac{1}{8}$; $Rg f = [-4,2]$

k) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = \frac{1}{3}$; $P = 8$; $Dsf = 4$; $Rg f = \left[\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right]$

l) $Df = \boldsymbol{R}$; $a = 1$; $P = \frac{2\pi}{3}$; $Dsf = -\frac{2}{3}$; $Rg f = [0,2]$

2)

a) $Df = R$; $a = \frac{4}{3}$; $P = \pi$; Dsf (desfase) = no hay; $Rg f = \left[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$

b) $Df = R$; $a = 3$; $P = 6\pi$; $Dsf = \frac{3\pi}{2}$; $Rg f = [-3, 3]$

c) $Df = R$; $a = 1$; $P = 2\pi$; $Dsf = \frac{\pi}{4}$; $Rg f = [0, 2]$

d) $Df = R$; $a = 2$; $P = 4\pi$; $Dsf = -2\pi$; $Rg f = [0, 4]$

e) $Df = R$; $a = 2$; $P = 2\pi$; $Dsf = \frac{\pi}{3}$; $Rg f = [-5, -1]$

f) $Df = R$; $a = 2$; $P = \frac{2\pi}{3}$; $Dsf = -\frac{\pi}{24}$; $Rg f = [-3, 1]$

3)

a) $Df = R$; $a = 2$; $P = \frac{2\pi}{3}$; $Dsf = \frac{\pi}{18}$; $Rg f = [-3, 1]$

b) $Df = R$; $a = \frac{5}{2}$; $P = 2\pi$; $Dsf = -\frac{\pi}{3}$; $Rg f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$

c) $Df = R$; $a = 3$; $P = \pi$; $Dsf = -\frac{\pi}{4}$; $Rg f = [-4, 2]$

d) $Df = R$; $a = 2$; $P = 6\pi$; $Dsf = 3\pi$; $Rg f = [-5, -1]$

e) $Df = R$; $a = \frac{1}{2}$; $P = 8\pi$; $Dsf = 4\pi$; $Rg f = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

f) $Df = R$; $a = 2$; $P = \pi$; $Dsf = -\frac{\pi}{16}$; $Rg f = [-1, 3]$

4)

a) $y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \frac{3}{2}\cos(x - \pi)$ b) $y = 4\operatorname{sen}(2x - \pi)$, $y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$ d) $y = 6\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = 6\cos(2x - \pi)$

Ejercicios 5.2

1)

a) $Df = R - \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{6}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi + 2k\pi}{6}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{3}$; Dsf (desfase) = no hay; $Rg f = R$

b) $Df = R - \{3k\pi, k \in Z\}$; A.V; $x = 3k\pi; k \in Z$; $P = 3\pi$; Dsf = no hay; $Rg f = R$

c) $Df = R - \left\{\frac{\pi + 6k\pi}{6}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi + 6k\pi}{6}; k \in Z$; $P = \pi$; $Dsf = \frac{\pi}{6}$; $Rg f = R$

d) $Df = R - \left\{\frac{-\pi + 2k\pi}{4}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{-\pi + 2k\pi}{4}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{2}$; $Dsf = -\frac{\pi}{2}$; $Rg f = R$

e) $Df = R - \left\{\frac{\pi + 4k\pi}{12}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi + 4k\pi}{12}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{3}$; $Dsf = \frac{\pi}{12}$; $Rg f = R$

f) $Df = R - \left\{-\frac{\pi + 6k\pi}{12}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = -\frac{\pi + 6k\pi}{12}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{2}$; $Dsf = \frac{\pi}{6}$; $Rg f = R$

g) $Df = R - \left\{\frac{\pi + 6k\pi}{24}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi + 6k\pi}{24}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{4}$; $Dsf = \frac{\pi}{24}$; $Rg f = R$

h) $Df = R - \left\{-\frac{\pi + 6k\pi}{3}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = -\frac{\pi + 6k\pi}{3}; k \in Z$; $P = 2\pi$; $Dsf = \frac{2\pi}{3}$; $Rg f = R$

i) $Df = R - \left\{\frac{-\pi + 2k\pi}{6}; k \in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{-\pi + 2k\pi}{6}; k \in Z$; $P = \frac{\pi}{3}$; $Dsf = -\frac{\pi}{6}$; $Rg f = R$

j) $Df = R - \left\{\frac{\pi + 8k\pi}{8}; k \in Z\right\}$; A.V, $x = \frac{\pi + 8k\pi}{8}; k \in Z$; $P = \pi$; $Dsf = \frac{\pi}{8}$; $Rg f = R$

k) $Df = R - \{2\pi - 4k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = 2\pi - 4k\pi;\ k \in Z$; P = 4π; Dsf = 4π; Rgf = R

l) $Df = R - \{3\pi + 3k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = \{3\pi + 3k\pi;\ k \in Z\}$; P = 3π; Dsf = 3π; Rgf = R

m) $Df = R - \left\{-\frac{\pi+6k\pi}{6};k\in Z\right\}$; A.V; $x = -\frac{\pi+6k\pi}{6};k\in Z$; P = π; Dsf = $\frac{\pi}{3}$; Rgf = R

n) $Df = R - \left\{\frac{3\pi-6k\pi}{2};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{3\pi-6k\pi}{2};k\in Z$; P = 3π; Dsf = $\frac{3\pi}{2}$; Rgf = R

o) $Df = R - \{-1 + 2k;\ k \in Z\}$; A.V; $x = \{-1 + 2k;\ k \in Z\}$; P = 2; Dsf = -2; Rgf = R

p) $Df = R - \{4 + 4k;\ k \in Z\}$; A.V; $x = \{4 + 4k;\ k \in Z\}$; P = 4; Dsf = 4; Rgf = R

q) $Df = R - \left\{\frac{-\pi+8k\pi}{24};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{-\pi+8k\pi}{24};k\in Z$; P = $\frac{\pi}{3}$; Dsf = $-\frac{\pi}{24}$; Rgf = R

r) $Df = R - \left\{\frac{-\pi+2k\pi}{4};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{-\pi+2k\pi}{4};k\in Z$; P = $\frac{\pi}{2}$; Dsf = $-\frac{\pi}{4}$; Rgf = R

Ejercicios 5.3

1)

a) $Df = R - \left\{\frac{\pi+2k\pi}{6};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi+2k\pi}{6};k\in Z$; P = $\frac{2\pi}{3}$; Dsf = no hay; Rgf = $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

b) $Df = R - \{3k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = 3k\pi;\ k \in Z$; P = 6π; Dsf = no hay; Rgf = $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$

c) $Df = R - \left\{\frac{2\pi+3k\pi}{3};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{2\pi+3k\pi}{3};k\in Z$; P = 2π; Dsf = $\frac{\pi}{6}$; Rgf = $]-\infty,-3] \cup [3,+\infty[$

d) $Df = R - \left\{\frac{-\pi+k\pi}{2};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{-\pi+k\pi}{2};k\in Z$; P = π; Dsf = $-\frac{\pi}{2}$; Rgf = $\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2},+\infty\right[$

e) $Df = R - \left\{\frac{3\pi+4k\pi}{12};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{3\pi+4k\pi}{12};k\in Z$; P = $\frac{2\pi}{3}$; Dsf = $\frac{\pi}{12}$; Rgf = $]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$

f) $Df = R - \left\{\frac{\pi-3k\pi}{6};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi-3k\pi}{6};k\in Z$; P = π; Dsf = $\frac{\pi}{6}$; Rgf = $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$

g) $Df = R - \left\{\frac{2\pi+3k\pi}{12};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{2\pi+3k\pi}{12};k\in Z$; P = $\frac{\pi}{2}$; Dsf = $\frac{\pi}{24}$; Rgf = $]-\infty,-4] \cup [-2,+\infty[$

h) $Df = R - \left\{\frac{2\pi-6k\pi}{3};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{2\pi-6k\pi}{3};k\in Z$; P = 4π; Dsf = $\frac{2\pi}{3}$; Rgf = $\left]-\infty,\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4},+\infty\right[$

i) $Df = R - \left\{\frac{k\pi}{3};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{k\pi}{3};k\in Z$; P = $\frac{2\pi}{3}$; Dsf = $-\frac{\pi}{6}$; Rgf = $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

j) $Df = R - \left\{\frac{\pi+8k\pi}{8};k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi+8k\pi}{8};k\in Z$; P = 2π; Dsf = $\frac{\pi}{8}$; Rgf = $]-\infty,-4] \cup [2,+\infty[$

k) $Df = R - \{2 - 4k;\ k \in Z\}$; A.V; $x = 2 - 4k;\ k\in Z$; P = 8; Dsf = 4; Rgf = $\left]-\infty,\frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{3},+\infty\right[$

l) $Df = R - \{3 + 3k;\ k \in Z\}$; A.V; $x = \{3 + 3k;\ k\in Z\}$; P = 6; Dsf = 3; Rgf = $]-\infty,-5] \cup [-1,+\infty[$

Ejercicios 5.4

1)

a) $Df = [0,2]$; Rg$f = [0,2\pi]$

b) $Df = [1,3]$; Rg$f = \left[-\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$

c) $Df = \left[-1,-\frac{1}{3}\right]$; Rg$f = \left[-\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$

d) $Df = \left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$; Rg$f = \left[-\frac{5\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

e) $Df = \left[0,\frac{2}{3}\right]$; Rg$f = \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

f) $Df = [0,1]$; Rg$f = \left[-\frac{13\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$

g) $Df = \left[\frac{1}{2},1\right]$; Rg$f = \left[-\frac{7\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$

h) $Df = [-2,2]$; Rg$f = \left[-\frac{\pi}{24},\frac{17\pi}{24}\right]$

i) $Df = \left[-\frac{2}{3},0\right]$; Rg$f = \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

j) $Df = [-1,0]$; Rg$f = \left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

k) $Df = [2,4]$; Rg$f = \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

l) $Df = \left[-\frac{2}{3},0\right]$; Rg$f = \left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

m) $Df = [-12,-4]$; Rg$f = \left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]$

n) $Df = [3,9]$; Rg$f = [-2\pi,0]$

o) $Df = \left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$; Rg$f = \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

p) $Df=[-8,-4]$; $Rg f=[-4\pi,-2\pi]$ q) $Df=\left[0,\frac{4}{5}\right]$; $Rg f=\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ r) $Df=\left[-\frac{5}{3},-1\right]$; $Rg f=\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$

s) $Df=\left[1,\frac{5}{3}\right]$; $Rg f=\left[-\frac{13\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$ t) $Df=[0,1]$; $Rg f=\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ u) $Df=[-2,-1]$; $Rg f=[-2\pi,\pi]$

Ejercicios 5.5

1)

a) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=]0,2\pi[$; A.H; $y=0$, $y=2\pi$

b) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right[$; A.H; $y=-\frac{5\pi}{8}$, $y=\frac{3\pi}{8}$

c) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=]\pi,2\pi[$; A.H; $y=\pi$, $y=2\pi$

d) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{5\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; A.H; $y=-\frac{5\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$

e) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right[$; A.H; $y=-\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{7\pi}{4}$

f) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[$; A.H; $y=-\frac{7\pi}{3}$, $y=\frac{5\pi}{3}$

g) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{7\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$; A.H; $y=-\frac{7\pi}{6}$, $y=-\frac{\pi}{6}$

h) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{\pi}{24},\frac{17\pi}{24}\right[$; A.H; $y=-\frac{\pi}{24}$, $y=\frac{17\pi}{24}$

i) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[$; A.H; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{5\pi}{2}$

j) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right[$; A.H; $y=-\frac{5\pi}{6}$, $y=\frac{7\pi}{6}$

k) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$; A.H; $y=\frac{2\pi}{3}$, $y=\pi$

l) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$; A.H; $y=-\frac{3\pi}{2}$, $y=\frac{3\pi}{2}$

m) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]-\frac{3\pi}{2},-\pi\right[$; A.H; $y=-\frac{3\pi}{2}$, $y=-\pi$

n) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=]-2\pi,0[$; A.H; $y=-2\pi$, $y=0$

o) $Df=\mathbb{R}$; $Rg f=\left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[$; A.H; $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{5\pi}{4}$

Ejercicios 5.6

1)

a) $Df=]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$; A.H; $y=0$; $Rg f=[-\pi,0[\cup]0,\pi]$

b) $Df=]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$; A.H; $y=\frac{3\pi}{8}$; $Rg f=\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$

c) $Df=]-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[$; A.H; $y=\pi$; $Rg f=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\cup\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

d) $Df=\left]-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$; A.H; $y=\frac{\pi}{2}$; $Rg f=\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},2\pi\right]$

e) $Df=]-\infty,0]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$; A.H; $y=-\frac{\pi}{4}$; $Rg f=\left[-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

f) $Df=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$; A.H; $y=-\frac{7\pi}{3}$; $Rg f=\left[-\frac{13\pi}{3},-\frac{7\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{7\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$

g) $Df=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$; A.H; $y=-\frac{\pi}{6}$; $Rg f=\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

h) $Df=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$; A.H; $y=-\frac{\pi}{24}$; $Rg f=\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{24}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{3}\right]$

i) $Df=\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[0,+\infty[$; A.H; $y=\frac{\pi}{2}$; $Rg f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

j) $Df=]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$; A.H; $y=-\frac{5\pi}{6}$; $Rg f=\left[-\frac{11\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

k) $Df=]-\infty,2]\cup[4,+\infty[$; A.H; $y=\pi$; $Rg f=\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right[\cup\left]\pi,\frac{7\pi}{6}\right]$

l) $Df=]-\infty,0]\cup[6,+\infty[$; A.H; $y=-\frac{3\pi}{2}$; $Rg f=\left[-3\pi,-\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{3\pi}{2},0\right]$

m) $Df =]-\infty,-12] \cup [-4,+\infty[$; A.H; $y=-\pi$; $Rg\,f = \left[-\frac{5\pi}{4},-\pi\right[\cup \left]-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right]$

n) $Df =]-\infty,3] \cup [9,+\infty[$; A.H; $y=0$; $Rg\,f = [-\pi,0[\cup]0,\pi]$

o) $Df = \left]-\infty,\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2},+\infty\right[$; A.H; $y=\frac{\pi}{4}$; $Rg\,f = \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO V

1)

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) 0 f) $\frac{\pi}{6}$ g) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{\pi}{20}$

i) $\frac{7}{8}$ j) $\frac{\pi}{19}$ k $-\frac{\pi}{17}$ l) $\frac{19}{20}$ m) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ n) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ o) $\frac{\pi}{15}$ p) $\frac{18\pi}{19}$

2)

a) $Df = \mathbb{R}$; $a=\frac{2}{3}$; $P=\frac{2\pi}{3}$; Dsf (desfase) $=\frac{\pi}{12}$; $Rg\,f = \left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$

b) $Df = \mathbb{R}$; $a=2$; $P=4\pi$; Dsf $=\frac{\pi}{3}$; $Rg\,f = [-2,2]$

c) $Df = \mathbb{R}$; $a=1$; $P=2\pi$; Dsf $=\frac{\pi}{8}$; $Rg\,f = [1,3]$

d) $Df = \mathbb{R}$; $a=3$; $P=\frac{4\pi}{3}$; Dsf $=-\frac{2\pi}{3}$; $Rg\,f = [-4,2]$

e) $Df = \mathbb{R}$; $a=4$; $P=\pi$; Dsf $=\frac{\pi}{6}$; $Rg\,f = [-5,3]$

f) $Df = \mathbb{R}$; $a=1$; $P=\pi$; Dsf $=-\frac{\pi}{16}$; $Rg\,f = [-3,-1]$

g) $Df = \mathbb{R}$; $a=\frac{4}{3}$; $P=\pi$; Dsf $=\frac{\pi}{6}$; $Rg\,f = \left[-\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right]$

h) $Df = \mathbb{R}$; $a=2$; $P=2\pi$; Dsf $=-\frac{7\pi}{4}$; $Rg\,f = \left[-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$

i) $Df = \mathbb{R}$; $a=\frac{5}{2}$; $P=\pi$; Dsf $=\frac{\pi}{4}$; $Rg\,f = \left[-\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right]$

3)

a) $Df = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = \pi + k\pi;\ k \in Z$; $P=\pi$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

b) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{-\pi+k\pi}{2};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{-\pi+k\pi}{2};k\in Z$; $P=\pi$; $Rg\,f = \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

c) $Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi+6k\pi}{3};k\in Z\right\}$; A.V; $x=-\frac{\pi+2k\pi}{6};k\in Z$; $P=2\pi$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

d) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{5\pi+6k\pi}{6};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{5\pi+6k\pi}{6};k\in Z$; $P=2\pi$; $Rg\,f = \left]-\infty,-\frac{15}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4},+\infty\right[$

e) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi-4k\pi}{12};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{\pi-4k\pi}{12};k\in Z$; $P=\frac{\pi}{3}$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

f) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{k\pi}{2};k\in Z$; $P=\pi$; $Rg\,f =]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$

g) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi+12k\pi}{24};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{\pi+12k\pi}{24};k\in Z$; $P=\frac{\pi}{2}$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

h) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi-3k\pi}{2};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{3\pi-3k\pi}{2};k\in Z$; $P=3\pi$; $Rg\,f = \left]-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

i) $Df = \mathbb{R} - \{-\pi + k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = -\pi + k\pi;\ k \in Z$; $P=\pi$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

j) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{-\pi+4k\pi}{8};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{-\pi+4k\pi}{8};k\in Z$; $P=\frac{\pi}{2}$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

k) $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi+6k\pi}{12};k\in Z\right\}$; A.V; $x=\frac{\pi+6k\pi}{12};k\in Z$; $P=\frac{\pi}{2}$; $Rg\,f = \mathbb{R}$

l) $Df = R - \left\{\frac{9\pi+6k\pi}{2}; k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{9\pi+6k\pi}{2}; k\in Z$; $P = 6\pi$; $Rg f =]-\infty,-3]\cup[1,+\infty[$

m) $Df = R - \{-k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = -k\pi;\ k \in Z$; $P = \pi$; $Rg f = \left]-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right[$

n) $Df = R - \{6\pi + 4k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = 6\pi + 4k\pi;\ k \in Z$; $P = 4\pi$; $Rg f = R$

o) $Df = R - \{2\pi + 2k\pi;\ k \in Z\}$; A.V; $x = 2\pi + 2k\pi;\ k \in Z$; $P = 4\pi$; $Rg f =]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$

p) $Df = R - \left\{\frac{4\pi+4k\pi}{3}; k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{4\pi+4k\pi}{3}; k\in Z$; $P = \frac{8\pi}{3}$; $Rg f = \left]-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

q) $Df = R - \left\{\frac{\pi+6k\pi}{6}; k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi+6k\pi}{6}; k\in Z$; $P = \pi$; $Rg f = R$

r) $Df = R - \left\{\frac{\pi+6k\pi}{12}; k\in Z\right\}$; A.V; $x = \frac{\pi+6k\pi}{12}; k\in Z$; $P = \pi$; $Rg f = \left]-\infty,-\frac{7}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

4)

a) $Df = [-2,0]$; $Rg f = [0,2\pi]$

b) $Df = [-3,-1]$; $Rg f = \left[-\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$

c) $Df = \left[\frac{1}{3},1\right]$; $Rg f = \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

d) $Df = \left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$; $Rg f = \left[-\frac{7\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right]$

e) $Df = \left[-\frac{2}{3},0\right]$; $Rg f = \left[-\frac{13\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$

f) $Df = [1,2]$; $Rg f = \left[-\frac{7\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$

g) $Df = R$; $Rg f = \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$

h) $Df = R$; $Rg f = \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$

i) $Df = R$; $Rg f = \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

j) $Df = R$; $Rg f = \left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$

k) $Df = R$; $Rg f = \left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right[$

l) $Df = R$; $Rg f =]-4\pi,-\pi[$

m) $Df =]-\infty,-8]\cup[0,+\infty[$; $Rg f = \left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$

n) $Df =]-\infty,0]\cup[6,+\infty[$; $Rg f = \left[-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right]$

o) $Df = \left]-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right[$; $Rg f = \left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

p) $Df =]-\infty,6]\cup[10,+\infty[$; $Rg f = \left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right[\cup\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$

q) $Df = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$; $Rg f = \left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$

r) $Df = \left]-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[-\frac{2}{3},+\infty\right[$; $Rg f = \left[-\frac{7\pi}{6},-\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO VI

Ejercicios 6.1

1)

a) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \frac{9}{4}$; $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

c) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$; $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

d) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$; $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

e) $(x-0)^2 + (y+1)^2 = 5$; $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$

f) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$; $x^2 + y^2 + x + 2y - 4 = 0$

g) $(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{61}{4}$; $x^2 + y^2 - 2x - y - 14 = 0$

h) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$; $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

i) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$; $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

j) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

k) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

l) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$

ll) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

m) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $4x^2 + 4y^2 - 12x + 12y + 9 = 0$

n) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{36}{5}$; $5x^2 + 5y^2 - 30x - 10y + 14 = 0$

o) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$; $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

p) $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

q) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

r) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16$; $x^2 + y^2 - 16 = 0$; Coor A $\left(2,2\sqrt{3}\right)$

2)

a) $C(0, 3)$; $r = 2$ **b)** $C(-2, 1)$; $r = \frac{1}{3}$ **c)** $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$; $r = \sqrt{5}$ **d)** $C(1, 0)$; $r = 1$

e) $C(0, -1)$; $r = 2$ **f)** $C(2, -1)$; $r = 0$ (c. degenerada) **g)** $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $r = 3$ **h)** $C(-3, 2)$; $r = 0$ (c. degen.)

i) No existe (c. degen.) **j)** $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; $r = 2$ **k)** $C\left(-2, \frac{1}{3}\right)$; $r = 1$ **l)** $C(1, -3)$; $r = 0$ (c. degen.)

Ejercicios 6.2

1)

a) $V(0, 0)$; $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; D: $x = \frac{3}{2}$ **b)** $V(0, 0)$; $F(0, -1)$; D: $y = 1$ **c)** $V(2, 0)$; $F\left(2, \frac{1}{2}\right)$; D: $y = -\frac{1}{2}$

d) $V(0, -3)$; $F\left(-\frac{1}{8}, -3\right)$; D: $x = -\frac{1}{8}$ **e)** $V(-3, 2)$; $F(-4, 2)$; D: $x = -2$ **f)** $V(-1, 2)$; $F\left(-1, \frac{5}{4}\right)$; D: $y = \frac{11}{4}$

g) $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}\right)$; $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right)$; D: $x = -\frac{7}{8}$ **h)** $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$; $F(-2, 2)$; D: $x = -1$ **i)** $V(1, -1)$; $F\left(\frac{7}{4}, -1\right)$; D: $x = \frac{1}{4}$

j) $V\left(-\frac{5}{2}, \frac{19}{4}\right)$; $F\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$; D: $y = 5$ **k)** parábola degenerada **l)** parábola degenerada

m) parábola degenerada **n)** $V(-1, -2)$; $F\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$; D: $y = -\frac{7}{3}$ **o)** $V\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$; $F\left(-\frac{1}{3}, \frac{53}{18}\right)$; D: $y = \frac{55}{18}$

p) $V(-3, -2)$; $F\left(-\frac{13}{4}, -2\right)$; D: $x = -\frac{11}{4}$ **q)** $V\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$; $F\left(-\frac{15}{16}, -\frac{3}{2}\right)$; D: $x = \frac{17}{16}$ **r)** $V(-3, -1)$; $F(-3, 1)$; D: $y = -3$

2)

a) $(x - 0)^2 = -8(y - 0)$; $x^2 + 8y = 0$ **b)** $(y - 0)^2 = -12(x - 0)$; $y^2 + 12x = 0$
c) $(y - 0)^2 = \frac{9}{2}(x - 0)$; $2y^2 - 9x = 0$ **d)** $(y - 0)^2 = -\frac{20}{3}(x - 0)$; $3y^2 + 20x = 0$
e) $(x - 0)^2 = -5(y - 0)$; $x^2 + 5y = 0$ **f)** $(y + 2)^2 = -8(x - 1)$; $y^2 + 4y + 8x - 4 = 0$
g) $(x - 2)^2 = -8(y + 3)$; $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$ **h)** $(x + 3)^2 = 4(y - 3)$; $x^2 + 6x - 4y + 21 = 0$
i) $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$; $y^2 + 4y + 8x + 12 = 0$ **j)** $(y + 1)^2 = 12(x - 4)$; $y^2 + 2y - 12x + 49 = 0$
k) $(x + 4)^2 = 12(y - 1)$; $x^2 + 8x - 12y + 28 = 0$ **l)** $(x + 1)^2 = -4(y - 1)$; $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$
m) $(y + 1)^2 = 4(x + 2)$; $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$ **n)** $(y - 2)^2 = -9(x + 3)$; $y^2 - 4y + 9x + 31 = 0$
o) $(y + 2)^2 = 4(x - 3)$; $y^2 + 4y - 4x + 16 = 0$

3)

a) $(y - 1)^2 = -(x - 2)$; $y^2 - 2y + x - 1 = 0$ **b)** $(x - 1)^2 = -\frac{25}{8}(y - 2)$; $8x^2 - 16x + 2y + 58 = 0$

c) $(x - 3)^2 = 12(y + 1)$; $x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$ **d)** $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{8}(x + 2)$; $8y^2 - 8y - 25x - 48 = 0$

e) $(x + 1)^2 = -8(y - 5)$; $x^2 + 2x + 8y - 39 = 0$ **f)** $(y - 1)^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$; $y^2 - 2y + 2x - 2 = 0$

Ejercicios 6.3

1)

a) $C(0, 0)$; $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$; $F_1\left(2\sqrt{3}, 0\right)$, $F_2\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$; $M_1(0, 2)$, $M_2(0, -2)$

b) $C(0, 0)$; $V_1(0, 2)$, $V_2(0, -2)$; $F_1\left(0, \sqrt{3}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{3}\right)$; $M_1(1, 0)$, $M_2(-1, 0)$

c) $C(0, 0)$; $V_1(0, 2)$, $V_2(0, -2)$; $F_1(0, 1)$, $F_2(0, -1)$; $M_1\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $M_2\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

d) $C(0, 0)$; $V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$; $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$; $M_1(0, 2)$ $(0, -3)$, $M_2(0, 3)$

e) $C(0, 0)$; $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$; $F_1\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $M_1(0, 3)$, $M_2(0, -3)$

f) $C(0,0)$, $V_1\left(\frac{1}{3},0\right)$, $V_2\left(-\frac{1}{3},0\right)$; $F_1\left(\frac{4}{15},0\right)$, $F_2\left(-\frac{4}{15},0\right)$; $M_1\left(0,\frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(0,-\frac{1}{5}\right)$

g) $C(2,3)$; $V_1(5,3)$, $V_2(-1,3)$; $F_1\left(2+\sqrt{5},3\right)$, $F_2\left(2-\sqrt{5},3\right)$; $M_1(2,5)$, $M_2(2,1)$

h) $C(1,-2)$; $V_1(1,3)$, $V_2(1,-7)$; $F_1\left(1,-2+\sqrt{21}\right)$, $F_2\left(1,-2-\sqrt{21}\right)$; $M_1(3,-2)$, $M_2(-1,-2)$

i) $C(-3,-2)$; $V_1(-3,2)$, $V_2(-3,-6)$; $F_1\left(-3,-2+\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(-3,-2-\sqrt{7}\right)$; $M_1(0,-2)$, $M_2(-6,-2)$

j) $C(3,-2)$; $V_1(5,-2)$, $V_2(1,-2)$; $F_1\left(3+\sqrt{3},-2\right)$, $F_2\left(3-\sqrt{3},-2\right)$; $M_1(3,-1)$, $M_2(3,-3)$

k) $C(-1,-2)$; $V_1(2,-2)$, $V_2(-4,-2)$; $F_1\left(-1+\sqrt{3},-2\right)$, $F_2\left(-1-\sqrt{3},-2\right)$; $M_1\left(2,-2+\sqrt{6}\right)$, $M_2\left(2,-2-\sqrt{6}\right)$

l) $C(2,-1)$; $V_1\left(2,-\frac{1}{2}\right)$, $V_2\left(2,-\frac{3}{2}\right)$; $F_1\left(2,\frac{-4+\sqrt{3}}{4}\right)$, $F_2\left(2,\frac{-4-\sqrt{3}}{4}\right)$; $M_1\left(\frac{9}{4},-1\right)$, $M_2\left(\frac{7}{4},-1\right)$

m) $C(-2,2)$; $V_1(-2,6)$, $V_2(-2,-2)$; $F_1\left(-2,2+2\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(-2,2-2\sqrt{3}\right)$; $M_1(0,2)$, $M_2(-4,2)$

n) $C(3,-1)$; $V_1(3,2)$, $V_2(3,-4)$; $F_1\left(3,-1+2\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(3,-1-2\sqrt{2}\right)$; $M_1(4,-1)$, $M_2(2,-1)$

o) $C(-1,5)$; esta ecuación tiene solamente un punto que la satisface; **elipse degenerada**

p) No existe elipse; ningún punto satisface dicha ecuación; elipse degenerada

q) $C\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; $V_1\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$, $V_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$; $F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3+4\sqrt{5}}{4}\right)$, $F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{3-4\sqrt{5}}{4}\right)$; $M_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right)$

r) $C\left(\frac{2}{3},-2\right)$; $V_1\left(\frac{2}{3},0\right)$, $V_2\left(\frac{2}{3},-4\right)$; $F_1\left(\frac{2}{3},\frac{-4+\sqrt{15}}{2}\right)$, $F_2\left(\frac{2}{3},\frac{-4-\sqrt{15}}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{7}{6},-2\right)$, $M_2\left(\frac{1}{6},-2\right)$

s) $C(4,1)$; $V_1(4,4)$, $V_2(4,-2)$; $F_1\left(4,1+\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(4,1-\sqrt{5}\right)$; $M_1(6,1)$, $M_2(2,1)$

2)

a) $\frac{(x-0)^2}{25}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$; $9x^2+25y^2-255=0$

b) $\frac{(x-0)^2}{20}+\frac{(y-0)^2}{36}=1$; $9x^2+5y^2-180=0$

c) $\frac{(x-0)^2}{\frac{63}{4}}+\frac{(y-0)^2}{36}=1$; $16x^2+7y^2-252=0$

d) $\frac{(x-0)^2}{\frac{196}{9}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{52}{9}}=1$; $117x^2+441y^2-2548=0$

e) $\frac{(x-0)^2}{\frac{225}{16}}+\frac{(y-0)^2}{259}=1$; $16x^2+9y^2-255=0$

f) $\frac{(x-0)^2}{\frac{19+\sqrt{37}}{2}}+\frac{(y-0)^2}{\frac{1+\sqrt{37}}{2}}=1$; $\left(19-\sqrt{37}\right)x^2+\left(\sqrt{37}-9\right)y^2-162=0$

g) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$; $16x^2+25y^2-32x+100y-284=0$

h) $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{4\left(y-\frac{11}{2}\right)^2}{25}=1$; $25x^2+16y^2-200x-176y+784=0$

i) $\frac{(x-0)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1$; $7x^2+16y^2-64y-48=0$

j) $\frac{(x-1)^2}{9+\sqrt{65}}+\frac{(y-3)^2}{\sqrt{65}-7}=1$; $\left(9-\sqrt{65}\right)x^2+\left(\sqrt{65}+7\right)y^2+\left(2\sqrt{65}-18\right)x-\left(6\sqrt{65}+42\right)y+56+8\sqrt{65}=0$

k) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{5(y-1)^2}{9}=1$; $x^2+5y^2-4x-10y=0$

l) $\frac{(x-0)^2}{4}+\frac{3(y-0)^2}{4}=1$; $x^2+3y^2-4=0$

m) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; $16x^2+25y^2-32x-100y-284=0$

n) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$; $25x^2+9y^2-100x-54y-219=0$

o) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$; $9x^2+4y^2+54x+16y+61=0$

p) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$; $9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$

3)

a) $\frac{(x+1)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$; $x^2+2y^2+2x-8y-9=0$

b) $\frac{(x-3)^2}{7}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; $16x^2+y^2-96x-28y+60=0$

c) $\frac{(2x-1)^2}{25}+\frac{(2y-3)^2}{16}=1$; $64x^2+100y^2-46x-300y-159=0$

Ejercicios 6.4

1)

a) C(0, 0); $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$; $F_1\left(2\sqrt{5},0\right)$, $F_2\left(-2\sqrt{5},0\right)$; $W_1(0, 2)$, $W_2(0, -2)$; $y=\pm\frac{1}{2}x$

b) C(0, 0); $V_1(1, 0)$, $V_2(-1, 0)$; $F_1\left(\sqrt{5},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{5},0\right)$; $W_1(0, 2)$, $W_2(0, -2)$; $y = \pm 2x$

c) C(0, 0); $V_1\left(\sqrt{3},0\right)$, $V_2\left(-2\sqrt{5},0\right)$); $F_1\left(\sqrt{7},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$; $W_1(0, 2)$, $W_2(0, -2)$; $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

d) C(0, 0); $V_1(5, 0)$, $V_2(-5, 0)$; $F_1\left(\sqrt{34},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{34},0\right)$; $W_1(0, 3)$, $W_2(0, -3)$; $y=\pm\frac{3}{5}x$

e) C(0, 0); V_1 (0, 3), $V_2(0, -3)$; $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$; $W_1(4, 0)$, W_2 (−4, 0); $y=\pm\frac{3}{4}x$

f) C(0, 0); $V_1\left(\frac{1}{3},0\right)$, $V_2\left(-\frac{1}{3},0\right)$; $F_1\left(\frac{\sqrt{34}}{15},0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{34}}{15},0\right)$; $W_1\left(0,\frac{1}{5}\right)$, $W_2\left(0,-\frac{1}{5}\right)$; $y=\pm\frac{3}{5}x$

g) C(2, 3); $V_1(5, 3)$, $V_2(-1, 3)$; $F_1\left(2+\sqrt{13},3\right)$, $F_2\left(2-\sqrt{13},3\right)$; $W_1(2, 5)$, $W_2(2, 1)$; $y-3=\pm\frac{2}{3}(x-2)$

h) C(1, −2); $V_1(1, 3)$, $V_2(1, -7)$; $F_1\left(1,-2+\sqrt{29}\right)$, $F_2\left(1,-2-\sqrt{29}\right)$; $W_1(3, -2)$, $W_2(-1, -2)$; $y+2=\pm\frac{5}{2}(x-1)$

i) C(−3, −2); $V_1(-3, 2)$, $V_2(-3, -6)$; $F_1(-3, 3)$, $F_2(-3, -7)$; $W_1(0, -2)$, $W_2(-6, -2)$; $y+2=\pm\frac{4}{3}(x+3)$

j) C(3, −2); $V_1(3, -1)$, $V_2(3, -3)$; $F_1\left(3,-2+\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(3,-2-\sqrt{5}\right)$; $W_1(5, -2)$, $W_2(1, -2)$; $y+2=\pm\frac{1}{2}(x-3)$

k) C(−1,−2); $V_1(2,-2)$, $V_2(-4,-2)$; $F_1\left(-1+\sqrt{15},-2\right)$, $F_2\left(-1-\sqrt{15},-2\right)$; $W_1\left(-1,-2+\sqrt{6}\right)$, $W_2\left(-1,-2-\sqrt{6}\right)$;

$y+2=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x+1)$

l) C(2,−2); $V_1\left(\frac{9}{4},-2\right)$, $V_2\left(\frac{9}{4},-2\right)$; $F_1\left(\frac{8+\sqrt{5}}{4},-2\right)$, $F_2\left(\frac{8-\sqrt{5}}{4},-2\right)$; $W_1\left(2,-\frac{3}{2}\right)$, $W_2\left(2,-\frac{5}{2}\right)$; $y+2=\pm 2(x+1)$

m) C(−2,−2); $V_1\left(-2+\sqrt{2},-2\right)$, $V_2\left(-2-\sqrt{2},-2\right)$; $F_1\left(-2+\sqrt{10},-2\right)$, $F_2\left(-2-\sqrt{10},-2\right)$; $W_1\left(-2,-2+2\sqrt{2}\right)$,

$W_2\left(-2,-2-2\sqrt{2}\right)$; $y+2=\pm 2(x+2)$

n) C(3,2); $V_1\left(\frac{11}{3},2\right)$, $V_2\left(\frac{7}{3},2\right)$; $F_1\left(\frac{9+2\sqrt{10}}{3},2\right)$, $F_2\left(\frac{9-2\sqrt{10}}{3},2\right)$; $W_1(3, 4)$, W_2 (3, 0); $y-2=\pm 3(x-3)$

o) C(−2, 1); $V_1(0, 1)$, $V_2(-4, 1)$; $F_1\left(-2+\sqrt{13},1\right)$, $F_2\left(-2-\sqrt{13},1\right)$; $W_1(-2, 4)$, $W_2(-2, -2)$; $y-1=\pm\frac{3}{2}(x+2)$

p) C(−1, 2); $V_1\left(-1,\frac{5}{2}\right)$, $V_2\left(-1,\frac{3}{2}\right)$; $F_1\left(-1,\frac{4+\sqrt{5}}{2}\right)$, $F_2\left(-1,\frac{4-\sqrt{5}}{2}\right)$; $W_1(0, 2)$, W_2 (−2, 2); $y-2=\pm\frac{1}{2}(x+1)$

q) C(−2, 4); $V_1(1, 4)$, $V_2(-5, 4)$; $F_1\left(-2+3\sqrt{2},4\right)$, $F_2\left(-2-3\sqrt{2},4\right)$; $W_1(-2, 7)$, $W_2(-2, 1)$; $y-4=\pm(x+2)$

r) C(−1, −3); $V_1\left(-\frac{4}{5},-3\right)$, $V_2\left(-\frac{6}{5},-3\right)$; $F_1\left(\frac{-10+\sqrt{29}}{10},-3\right)$, $F_2\left(\frac{-10-\sqrt{29}}{10},-3\right)$; $W_1\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$, $W_2\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$;

$y+2=\pm\frac{5}{2}(x+1)$

s) C(2, −3); $V_1(2, -2)$, $V_2(2, -4)$; $F_1\left(2,-3+\sqrt{10}\right)$, $F_2\left(2,-3-\sqrt{10}\right)$; $W_1(5, -3)$, $W_2(-1, -3)$; $y+3=\pm\frac{1}{3}(x-2)$

2)

a) $\frac{(x-0)^2}{9}-\frac{(y-0)^2}{7}=1$; $7x^2-9y^2-63=0$

b) $\frac{(y-0)^2}{4}-\frac{(x-0)^2}{5}=1$; $5y^2-4x^2-20=0$

c) $\frac{(x-0)^2}{4}-\frac{(y-0)^2}{64}=1$; $16x^2-y^2-64=0$

d) $\frac{25(y-0)^2}{81}-\frac{25(x-0)^2}{144}=1$; $400y^2-225x^2-1296=0$

e) $\frac{(y-0)^2}{4}-\frac{21(x-0)^2}{64}=1$; $16y^2-21x^2-64=0$

f) $\frac{9(x-0)^2}{56}-\frac{(y-0)^2}{56}=1$; $9x^2-y^2-56=0$

g) $\frac{(x-0)^2}{9}-\frac{(y-0)^2}{7}=1$; $7x^2-9y^2-63=0$

h) $\frac{(x-0)^2}{3}-\frac{(y-0)^2}{1}=1$; $x^2-3y^2-3=0$

i) $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$; $16y^2-9x^2-128y+36x+76=0$

j) $\frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{9}=1$; $9y^2-16x^2+18y+64x-199=0$

k) $\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$; $9y^2-4x^2-18y-16x-43=0$

3)

a) $\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1$; $5y^2-4x^2-10y+16x-31=0$

b) $\frac{(x-0)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$; $x^2-y^2+2y-10=0$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO VI

1)

a) $V(-2,1)$; $F\left(-2,\frac{7}{4}\right)$; $D: y=\frac{1}{4}$

b) $C(-1,2)$; $r=3$

c) $C(1,-3)$; $V_1(1,0)$, $V_2(1,-6)$; $F_1\left(1,-3+\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(1,-3-\sqrt{5}\right)$; $M_1(3,-3)$, $M_2(-1,-3)$

d) $C(1,-3)$; $V_1(3,-3)$, $V_2(-1,-3)$; $F_1\left(1+\sqrt{13},-3\right)$, $F_2\left(1-\sqrt{13},-3\right)$; $W_1(1,0)$, $W_2(1,-6)$; $y+3=\pm\frac{3}{2}(x-1)$

e) $C(3,1)$; $r=2$

f) $V(2,-3)$; $F\left(\frac{3}{2},-3\right)$; $D: y=\frac{5}{2}$

g) $C(2,1)$; $V_1(2,2)$, $V_2(2,0)$; $F_1\left(2,\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$, $F_2\left(2,\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right)$; $M_1\left(\frac{7}{3},1\right)$, $M_2\left(\frac{5}{3},1\right)$

h) $C(-3,2)$; $V_1\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $V_2\left(-\frac{9}{2},2\right)$; $F_1\left(\frac{-6+\sqrt{13}}{2},2\right)$, $F_2\left(\frac{-6-\sqrt{13}}{2},2\right)$; $W_1(-3,3)$, $W_2(-3,1)$; $y-2=\pm\frac{2}{3}(x+3)$

i) circunferencia degenerada

j) $V(3,-1)$; $F(3,-3)$; $D: y=1$

k) elipse degenerada

l) $C(-1,-2)$; $V_1\left(-1,\frac{-6+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $V_2\left(-1,\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$; $F_1\left(-1,\frac{-6+\sqrt{21}}{3}\right)$, $F_2\left(-1,\frac{-6-\sqrt{21}}{3}\right)$; $W_1(0,-1)$, $W_2(-2,-1)$;

$y+2=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1)$

2)

a) $(x-2)^2+(y+3)^2=34$; $x^2+y^2-4x+6y-21=0$

b) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{5}=1$; $5x^2+9y^2-10x-72y+104=0$

c) $(y-3)^2=-4(x-2)$; $y^2-6y+4x+1=0$

d) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$; $9x^2-4y^2-54x-16y+29=0$

e) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$; $9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$

f) $(x+2)^2+(y-3)^2=\frac{16}{13}$; $13x^2+13y^2+52x-78y+153=0$

g) $(y-3)^2=-8(x-2)$; $y^2-6y+8x-7=0$

h) $\frac{(y+3)^2}{1}-\frac{(x-2)^2}{3}=1$; $3y^2-x^2+18y+4x+20=0$

i) $(y+2)^2=-\frac{1}{2}(x-3)$; $2y^2+8y+x+5=0$

j) $\frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$; $16x^2+7y^2+64x-14y-41=0$

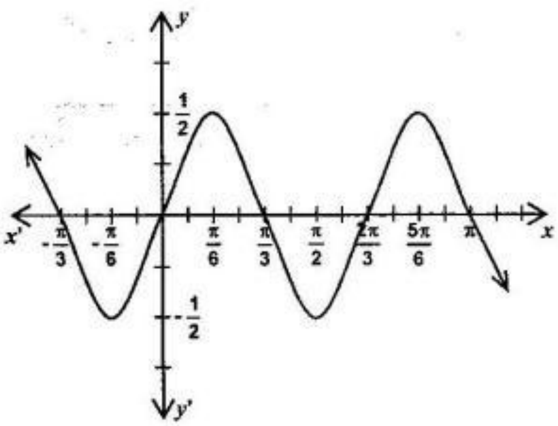
k) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{1}=1$; $y^2-9x^2-4y-18x-14=0$

RESPUESTA DE LAS GRAFICAS DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO V

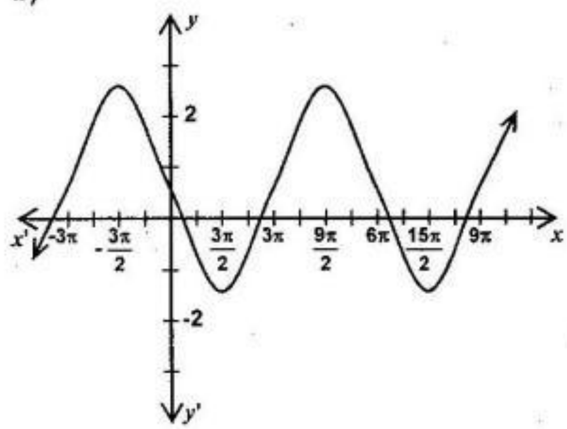
Ejercicios 5.1

1)

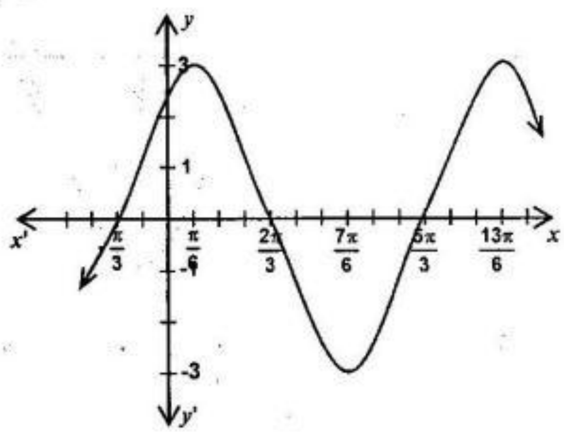
a)



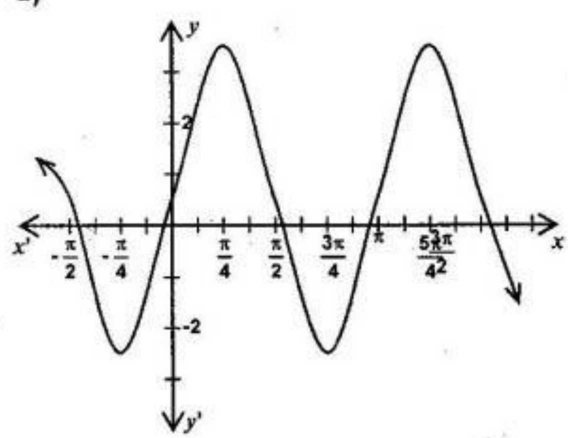
b)



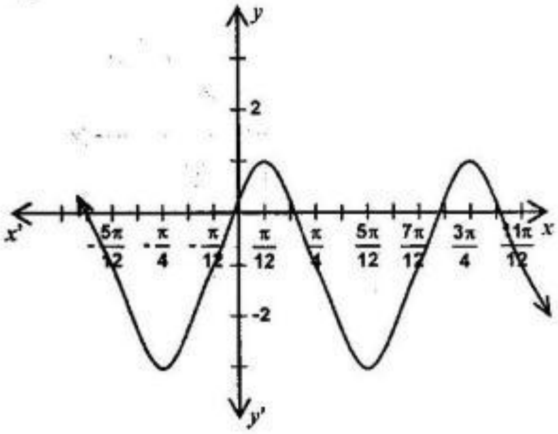
c)



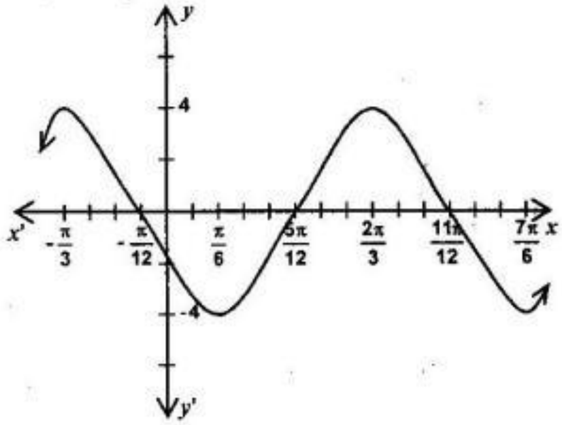
d)



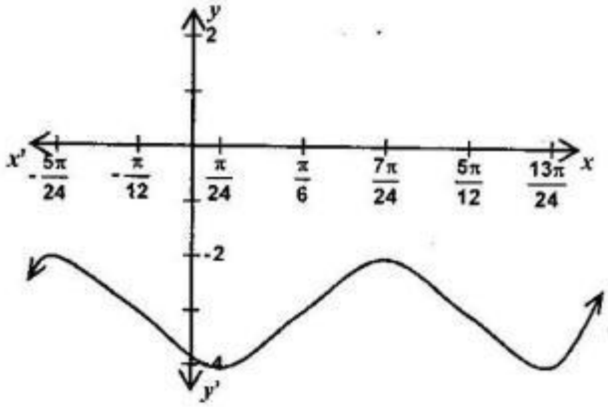
e)



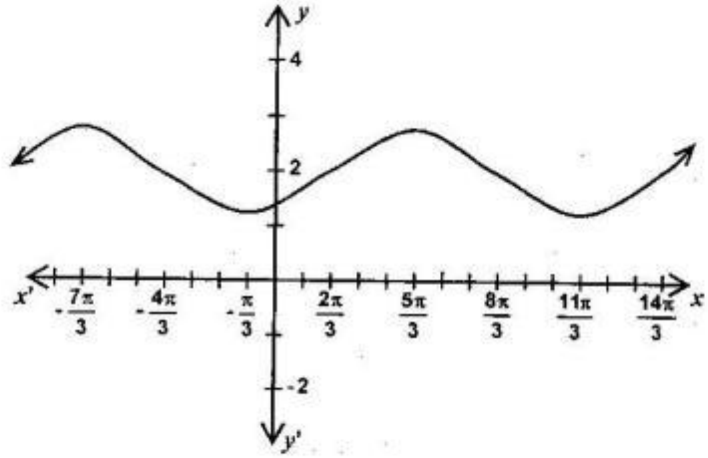
f)



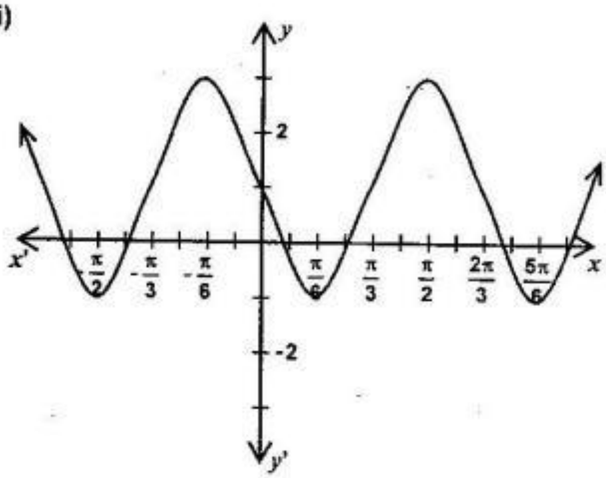
g)


y
2
x'
x
-5π/24
-π/12
π/24
π/6
7π/24
5π/12
13π/24
-2
-4
y'

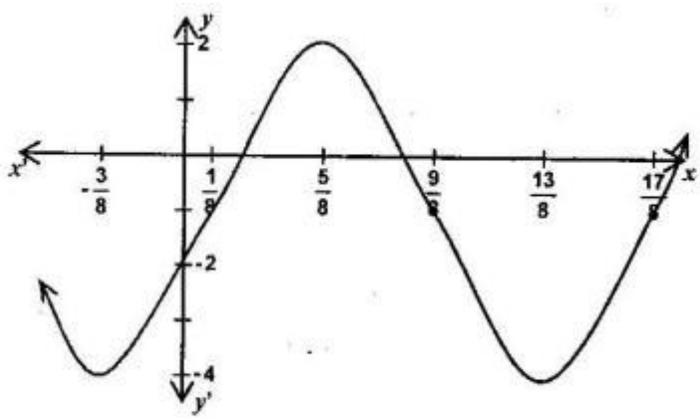
h)


y
4
2
x'
x
-7π/3
-4π/3
-π/3
2π/3
5π/3
8π/3
11π/3
14π/3
-2
y'

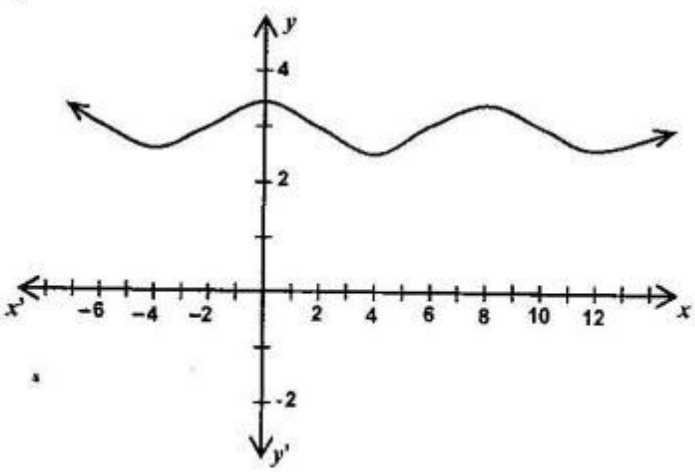
i)


y
2
x'
x
-π/2
-π/3
-π/6
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
-2
y'

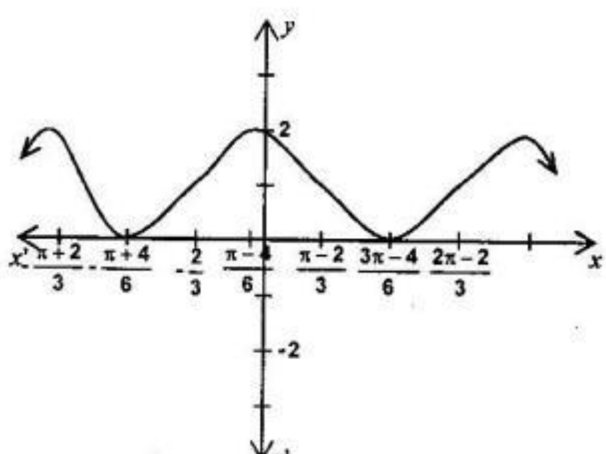
j)


y
2
x'
x
-3/8
1/8
5/8
9/8
13/8
17/8
-2
-4
y'

k)

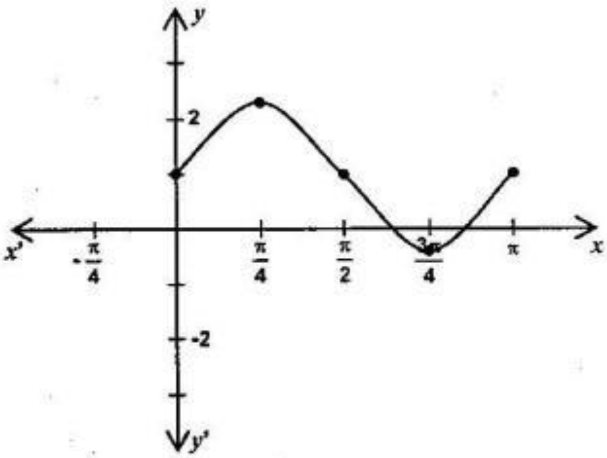

y
4
2
x'
x
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
-2
y'

l)

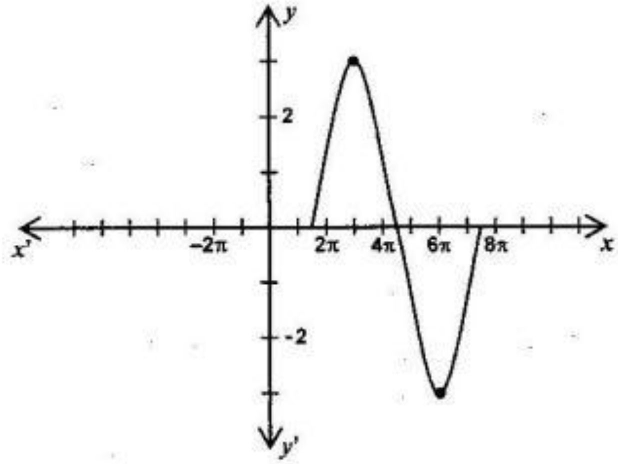

y
2
x'
x
-(π+2)/3
-(π+4)/6
-2/3
(π-4)/6
(π-2)/3
(3π-4)/6
(2π-2)/3
-2
y'

2)

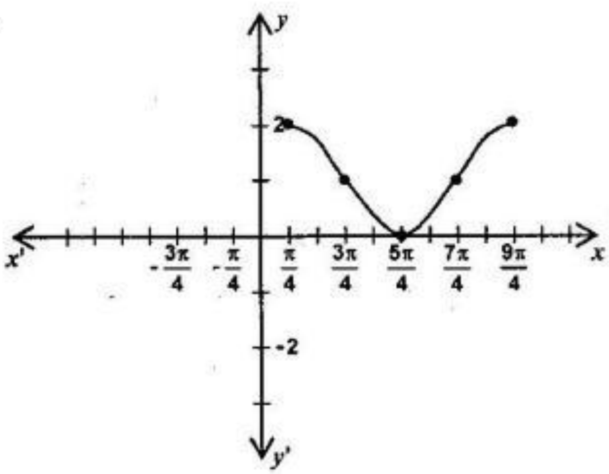
a)


y
2
-2
x'
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
x
y'

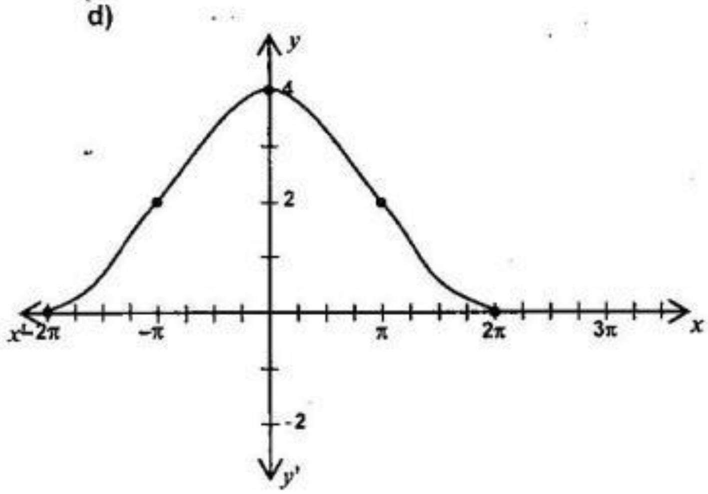
b)


y
2
-2
x'
-2π
2π
4π
6π
8π
x
y'

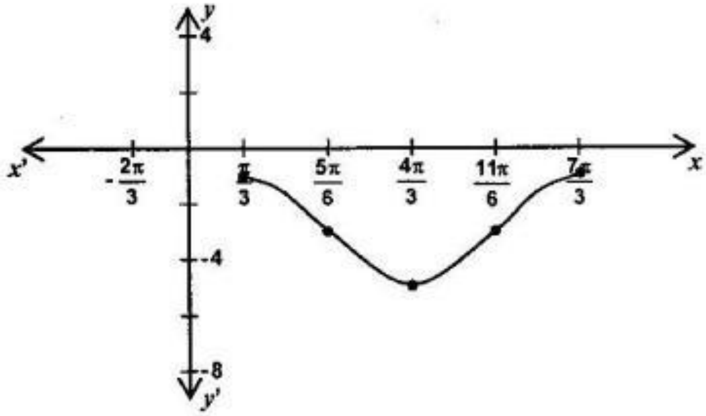
c)


y
2
-2
x'
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
x
y'

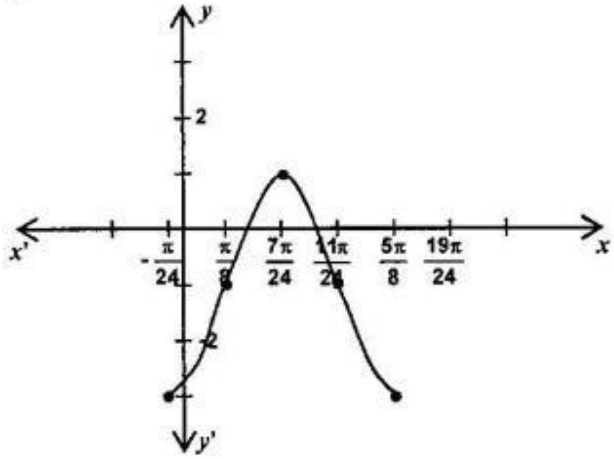
d)


y
4
2
-2
x'
-2π
$-\pi$
π
2π
3π
x
y'

e)

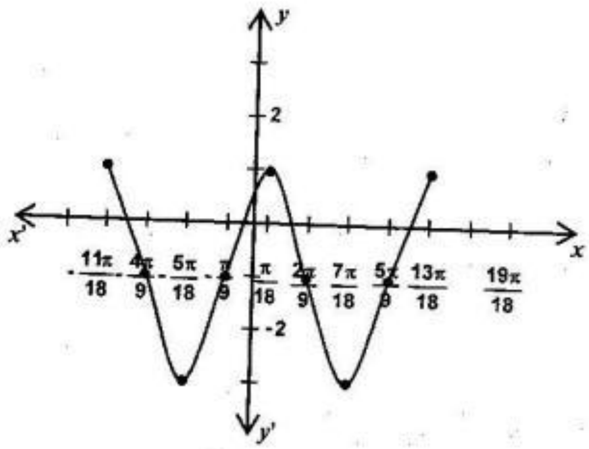

y
4
-4
-8
x'
$-\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{3}$
x
y'

f)

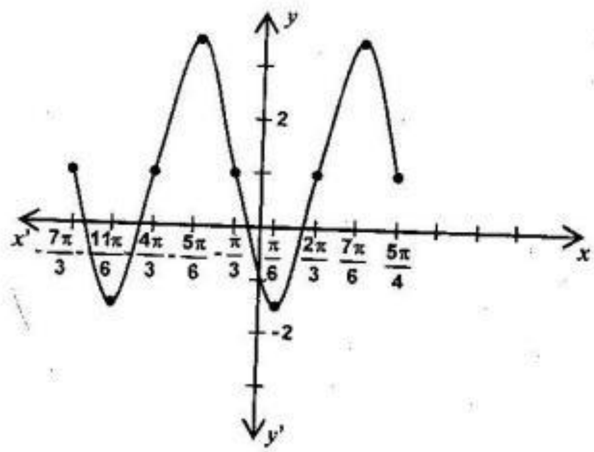

y
2
-2
x'
$-\frac{\pi}{24}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{7\pi}{24}$
$\frac{11\pi}{24}$
$\frac{5\pi}{8}$
$\frac{19\pi}{24}$
x
y'

3)

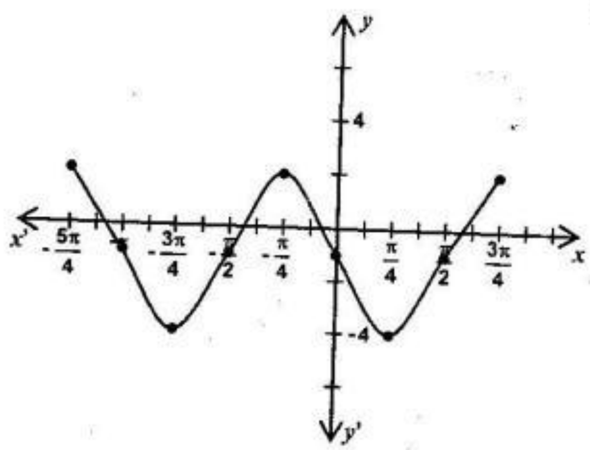
a)


y
2
-2
x'
x
y'

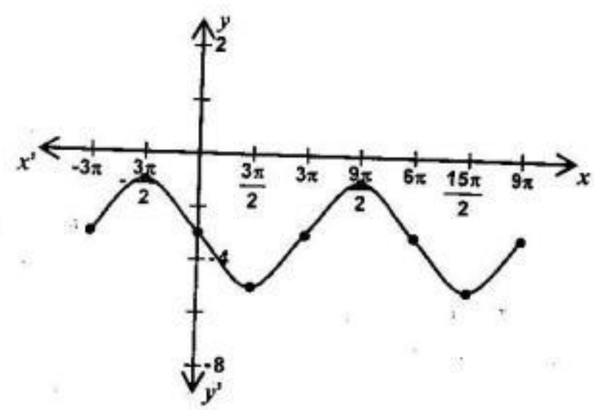
b)


y
2
-2
x'
x
y'

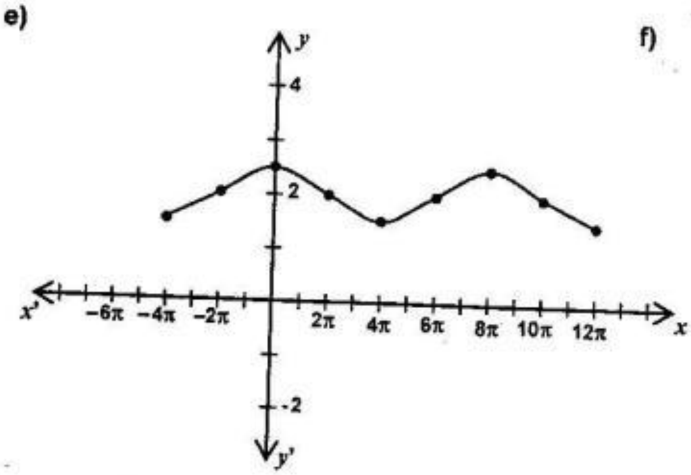
c)


y
4
-4
x'
x
y'

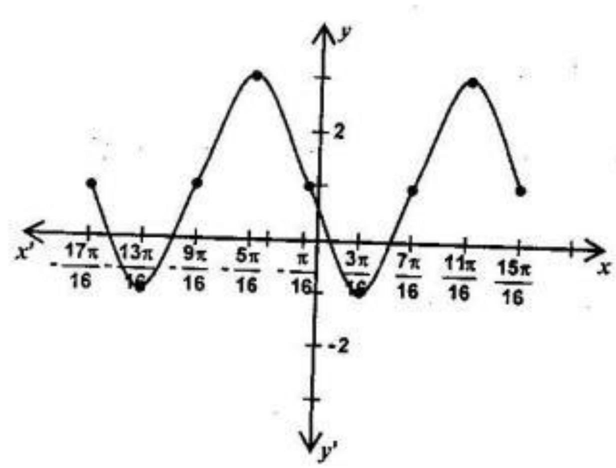
d)


y
2
-8
x'
-3π
3π
6π
9π
x
y'

e)


y
4
2
-2
x'
-6π
-4π
-2π
2π
4π
6π
8π
10π
12π
x
y'

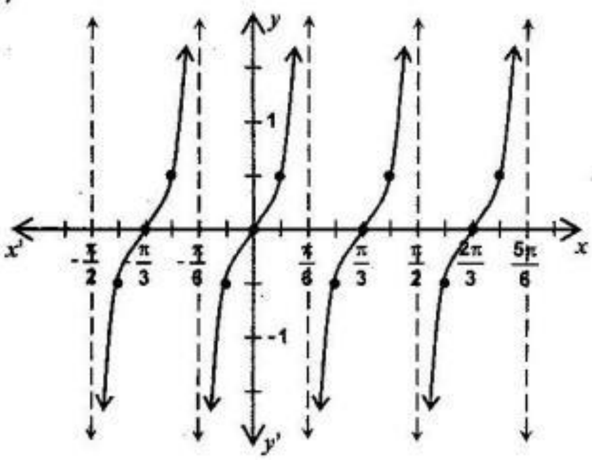
f)


y
2
-2
x'
x
y'

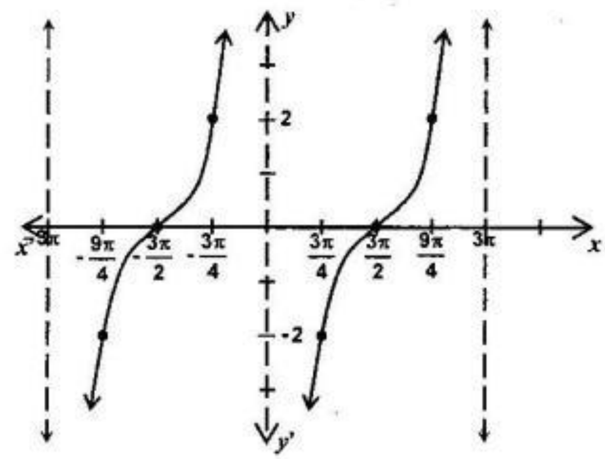
Ejercicios 5.2

1)

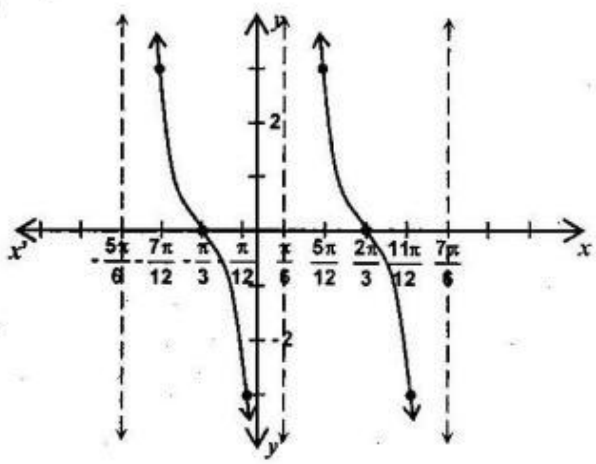
a)



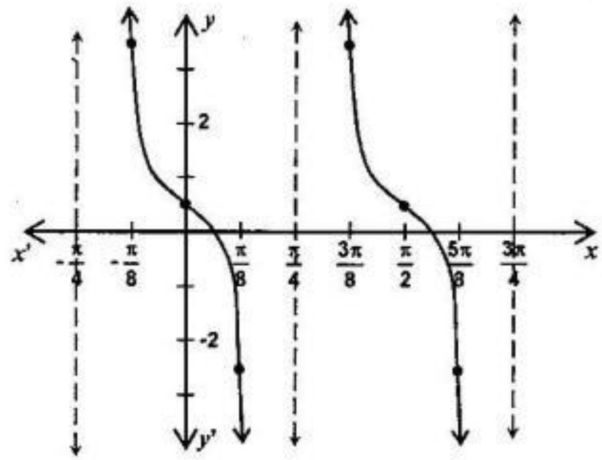
b)



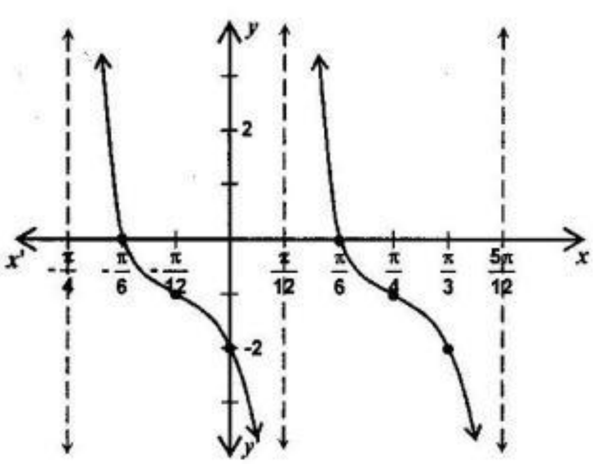
c)



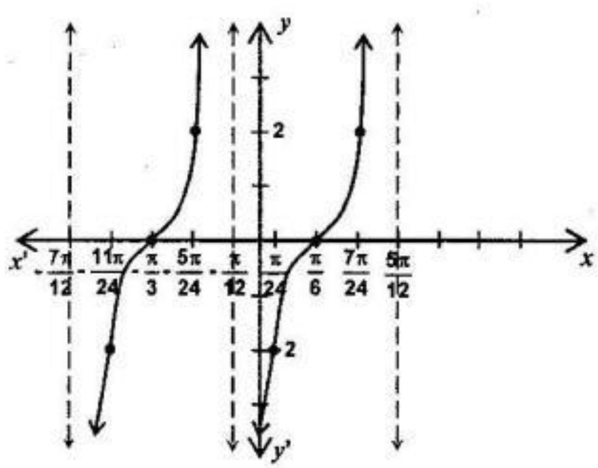
d)



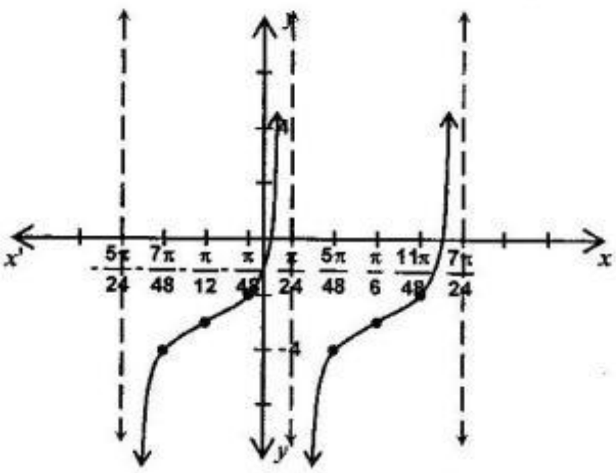
e)



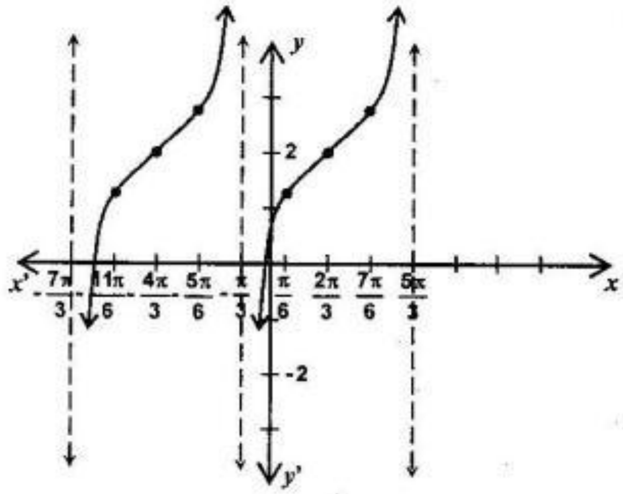
f)



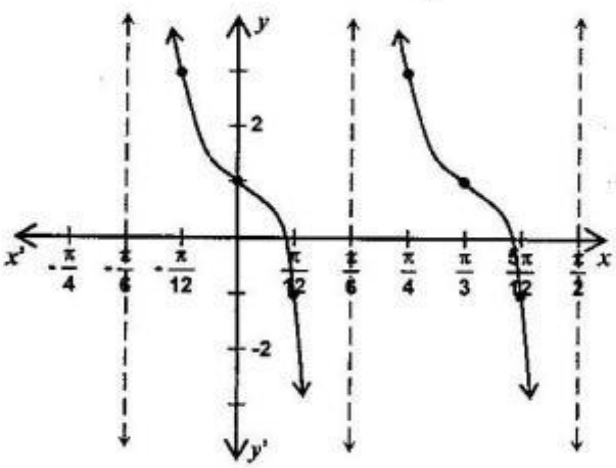
g)


x'
x
y
y'
4
-4
-5π/24
7π/48
π/12
π/48
π/24
5π/48
π/6
11π/48
7π/24

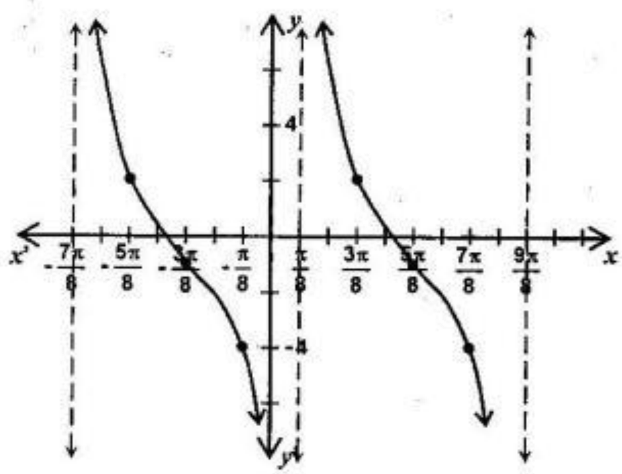
h)


x'
x
y
y'
2
-2
7π/3
11π/6
4π/3
5π/6
π/3
π/6
2π/3
7π/6
5π/3

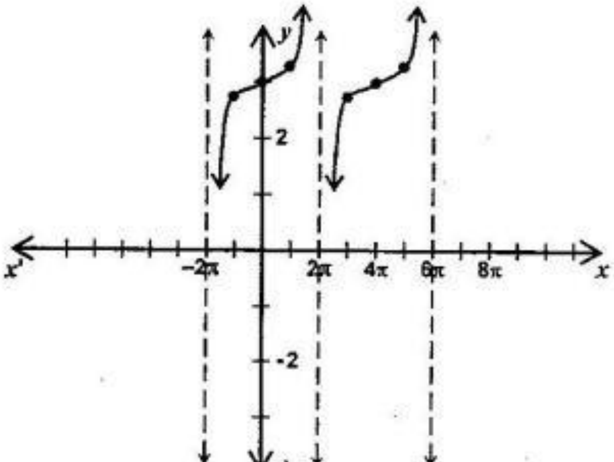
i)


x'
x
y
y'
2
-2
-π/4
-π/6
-π/12
π/12
π/6
π/4
π/3
5π/12
π/2

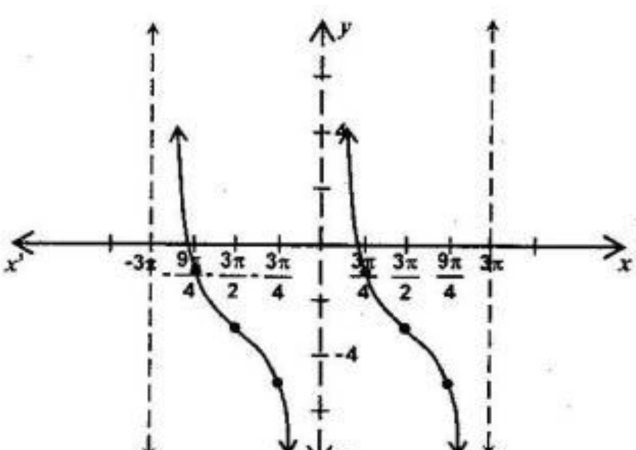
j)


x'
x
y
y'
4
-4
7π/8
5π/8
3π/8
π/8
3π/8
5π/8
7π/8
9π/8

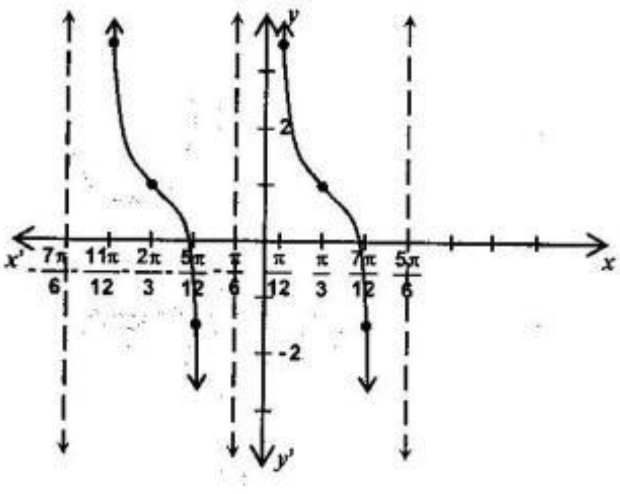
k)


x'
x
y
y'
2
-2
-2π
2π
4π
6π
8π

l)

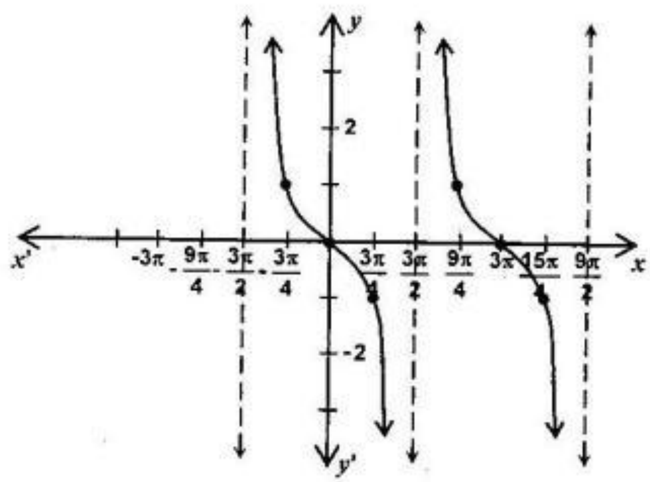

x'
x
y
y'
4
-4
-3π
9π/4
3π/2
3π/4
3π/4
3π/2
9π/4
3π

m)



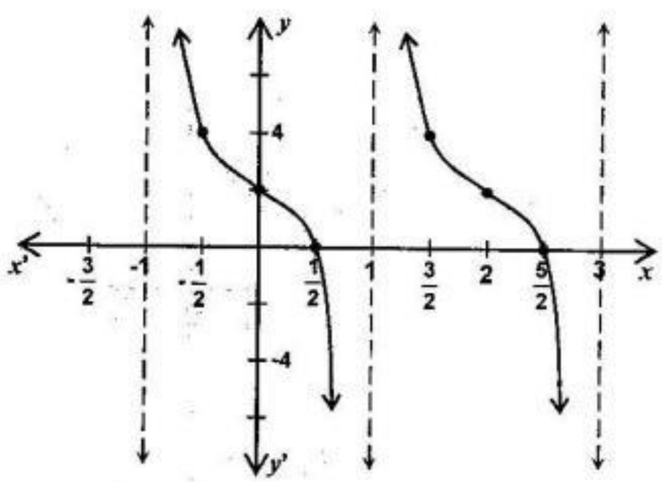
y
2
-2
y'
x'
x
7π/6
11π/12
2π/3
5π/12
π/6
π/12
π/3
7π/12
5π/6

n)



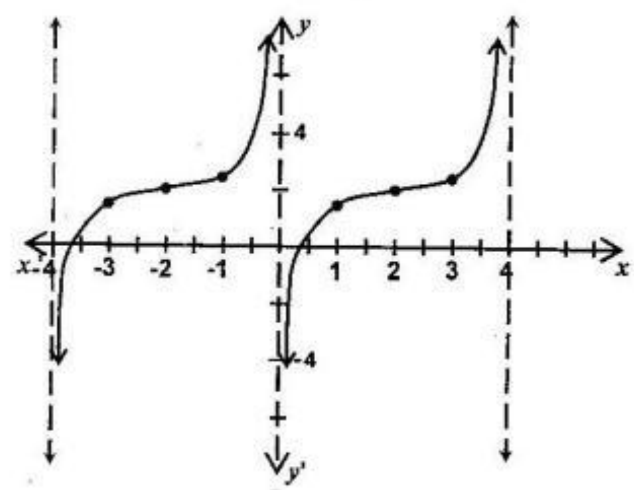
y
2
-2
y'
x'
x
-3π
9π/4
3π/2
3π/4
3π/4
3π/2
9π/4
3π
15π/4
9π/2

o)



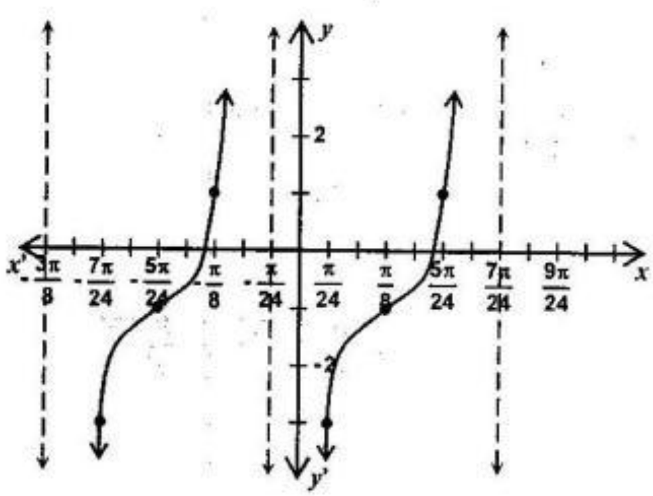
y
4
-4
y'
x'
x
-3/2
-1
-1/2
1/2
1
3/2
2
5/2
3

p)



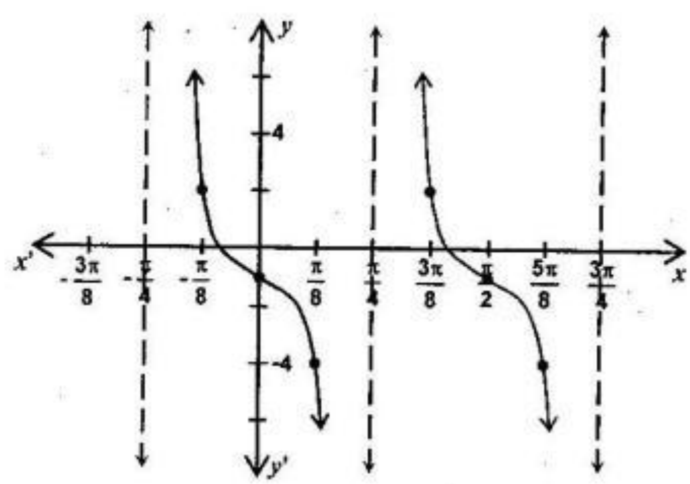
y
4
-4
y'
x'
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

q)



y
2
-2
y'
x'
x
3π/8
7π/24
5π/24
π/8
π/24
π/24
π/8
5π/24
7π/24
9π/24

r)

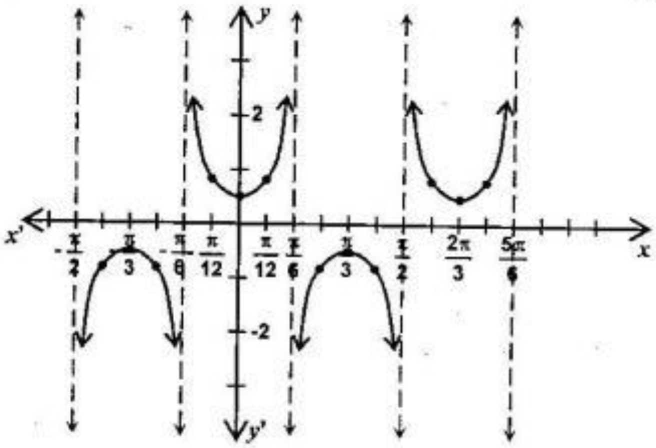


y
4
-4
y'
x'
x
-3π/8
π/4
-π/8
π/8
π/4
3π/8
π/2
5π/8
3π/4

Ejercicios 5.3

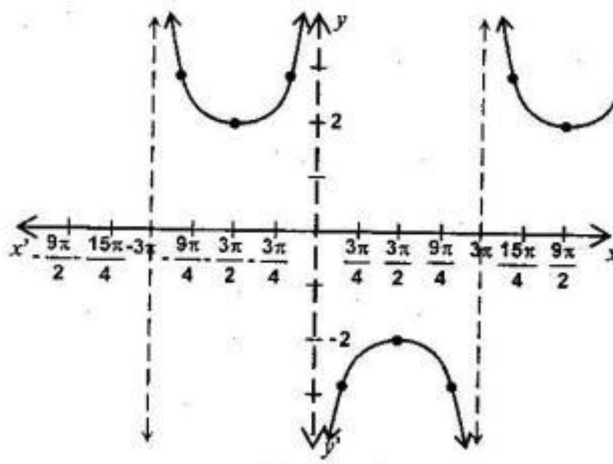
1)

a)



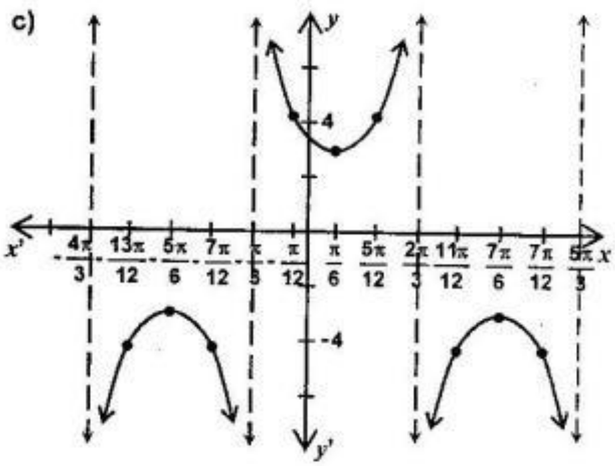
dos ciclos

b)



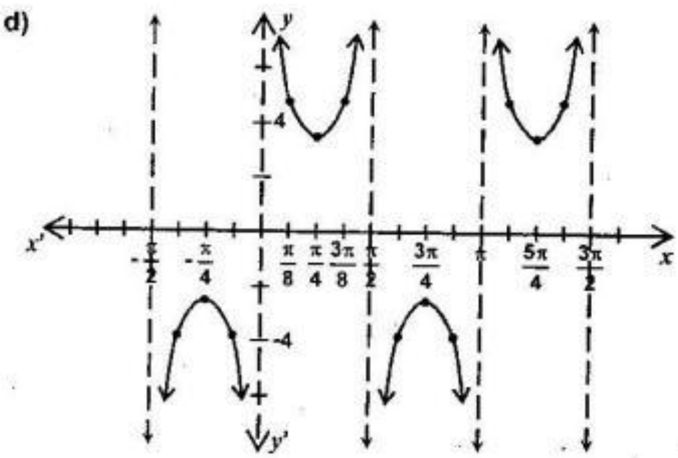
un ciclo y medio

c)



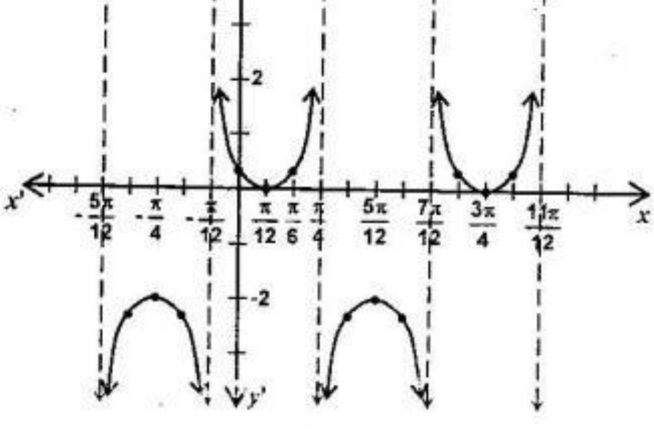
un ciclo y medio

d)



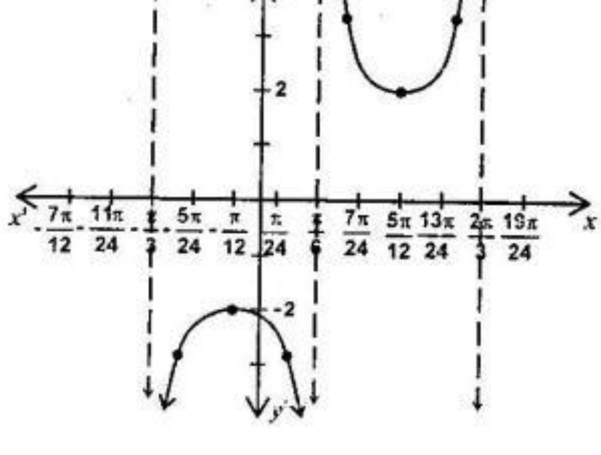
dos ciclos

e)



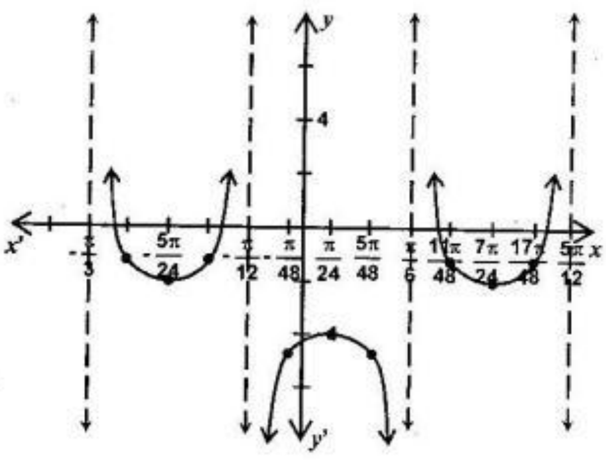
dos ciclos

f)



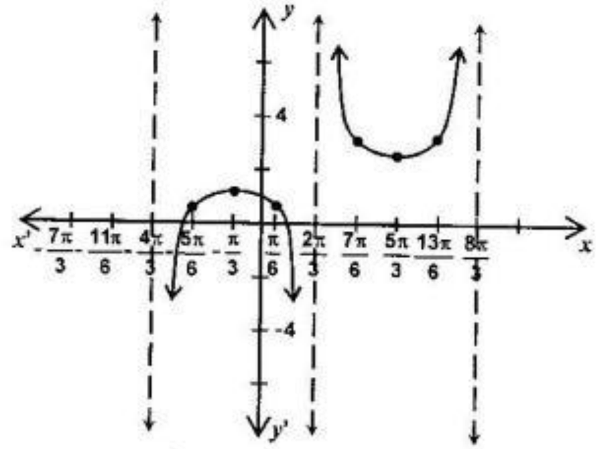
un ciclo

g)



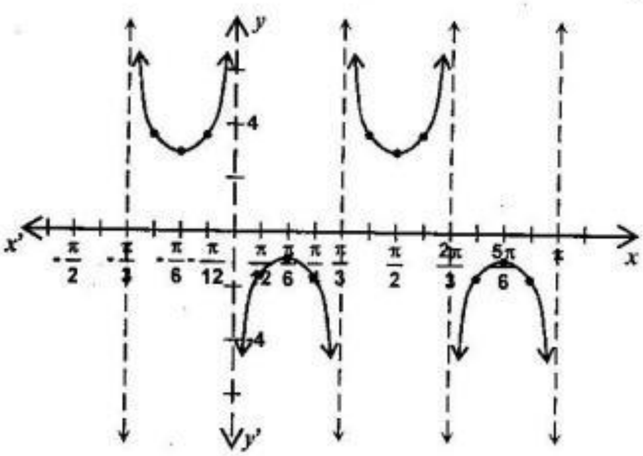
un ciclo y medio

h)



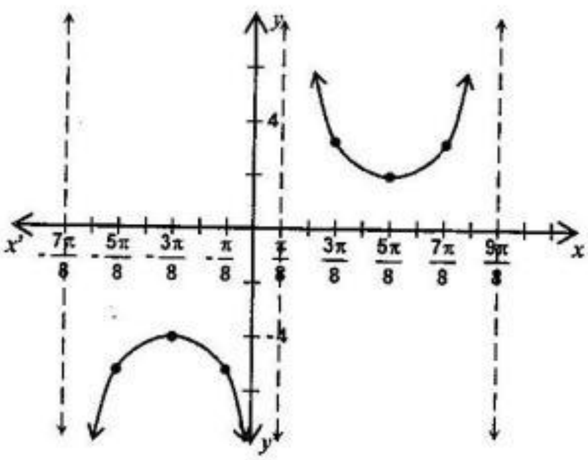
un ciclo

i)



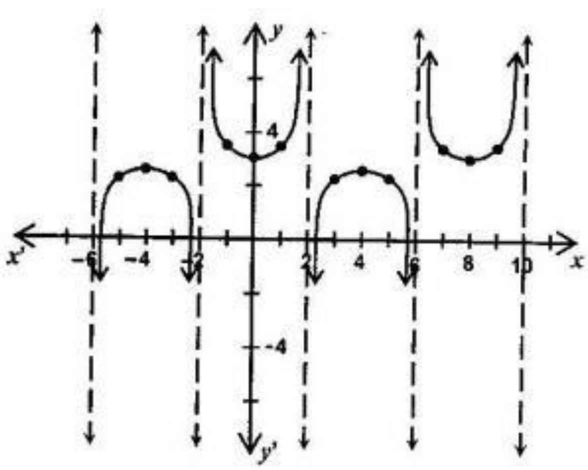
dos ciclos

j)



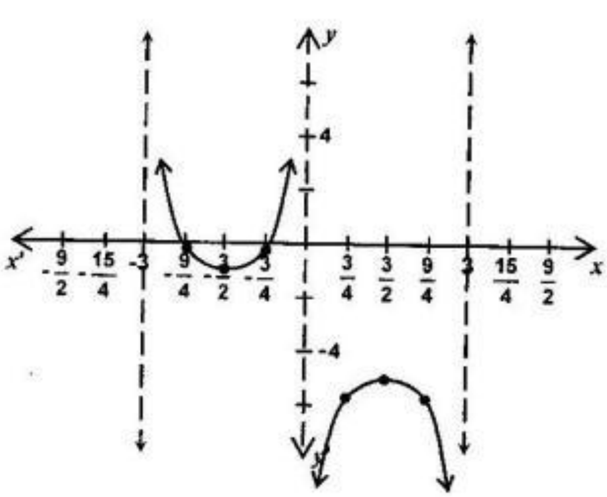
un ciclo

k)



dos ciclos

l)

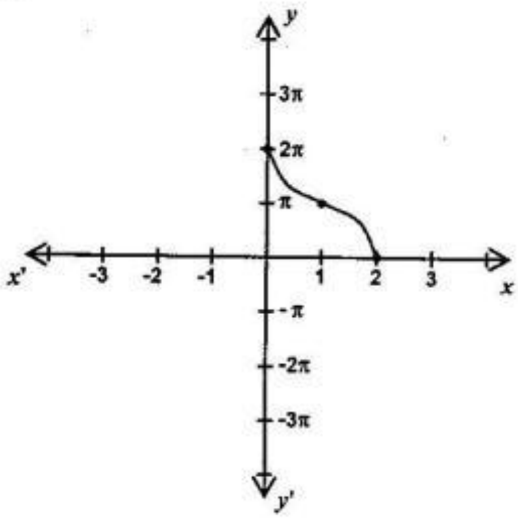


un ciclo

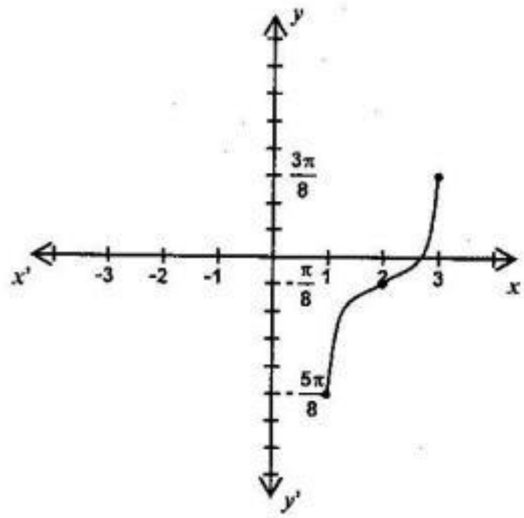
Ejercicios 5.4

1)

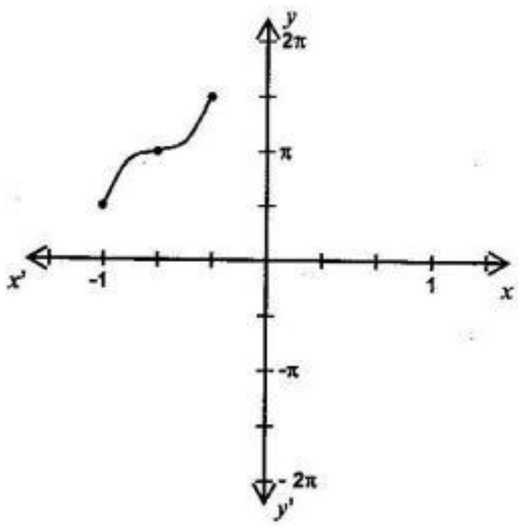
a)



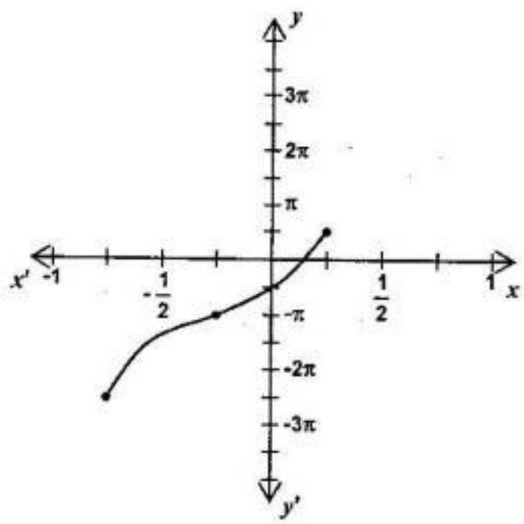
b)



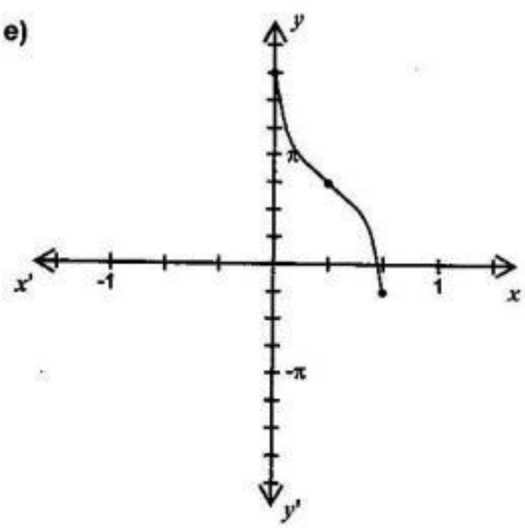
c)



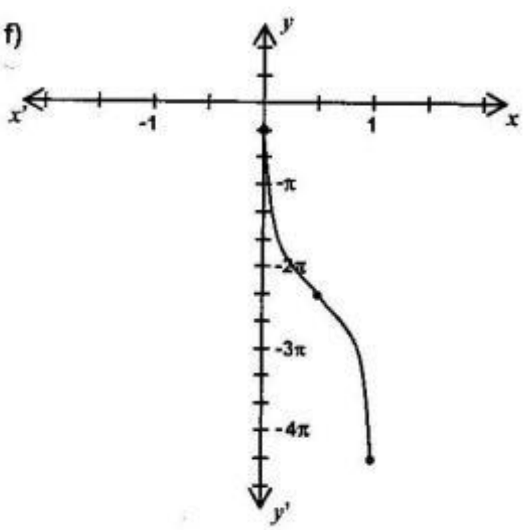
d)



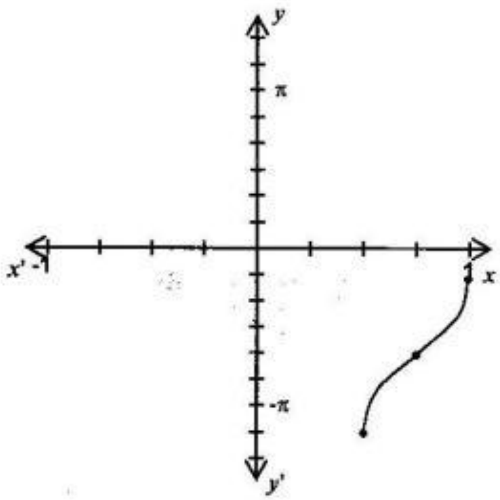
e)



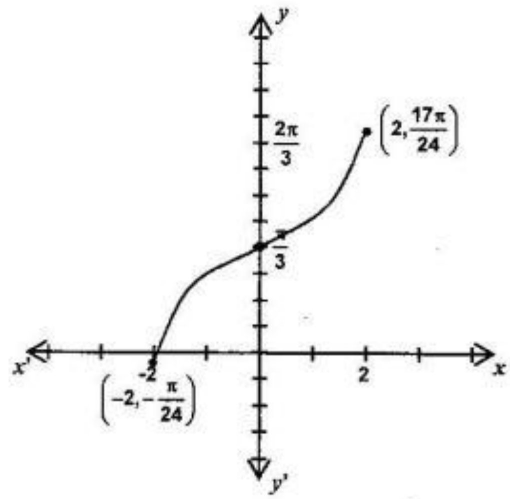
f)



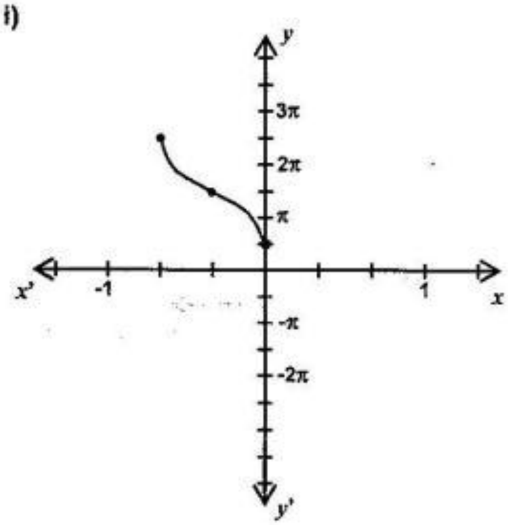
g)


y
π
x' -1
1 x
-π
y'

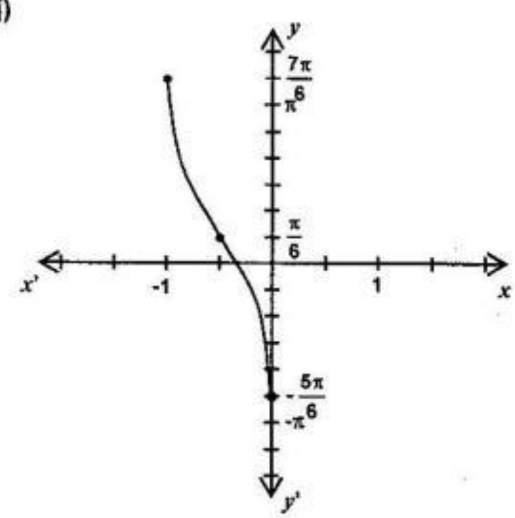
h)


y
$\frac{2\pi}{3}$
$\left(2, \frac{17\pi}{24}\right)$
$\frac{\pi}{3}$
x'
-2
2
x
$\left(-2, -\frac{\pi}{24}\right)$
y'

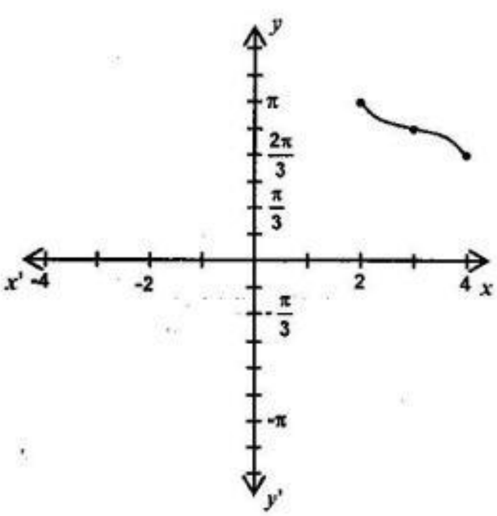
i)


y
3π
2π
π
x'
-1
1
x
-π
-2π
y'

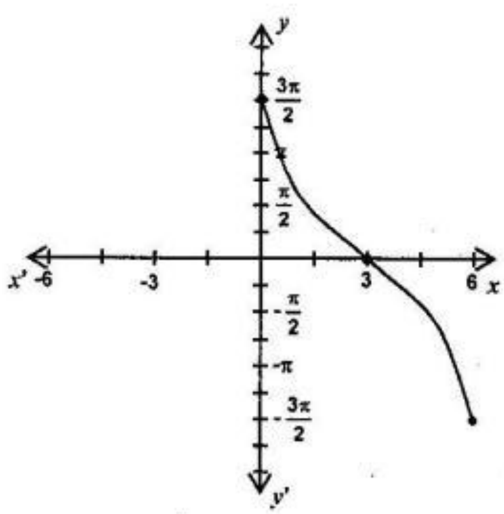
j)


y
$\frac{7\pi}{6}$
π
$\frac{\pi}{6}$
x'
-1
1
x
$-\frac{5\pi}{6}$
-π
y'

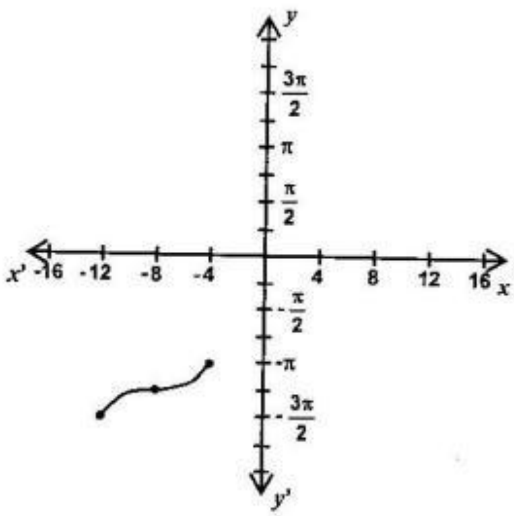
k)


y
π
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
x' -4
-2
2
4 x
$-\frac{\pi}{3}$
-π
y'

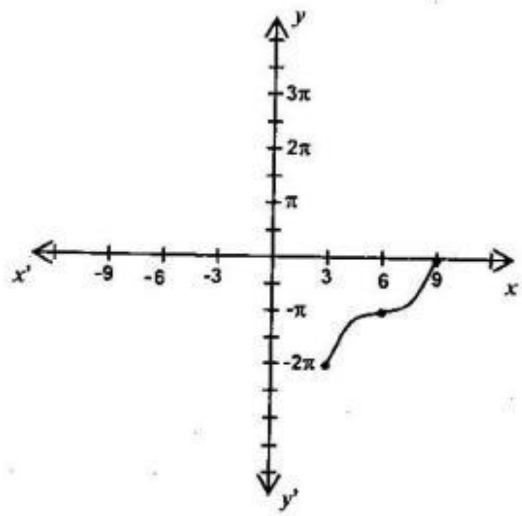
l)


y
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
x' -6
-3
3
6 x
$-\frac{\pi}{2}$
-π
$-\frac{3\pi}{2}$
y'

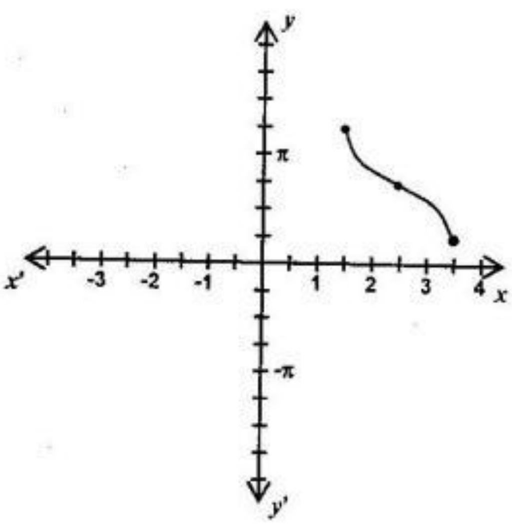
m)


y
3π/2
π
π/2
x' -16 -12 -8 -4 4 8 12 16 x
-π/2
-π
-3π/2
y'

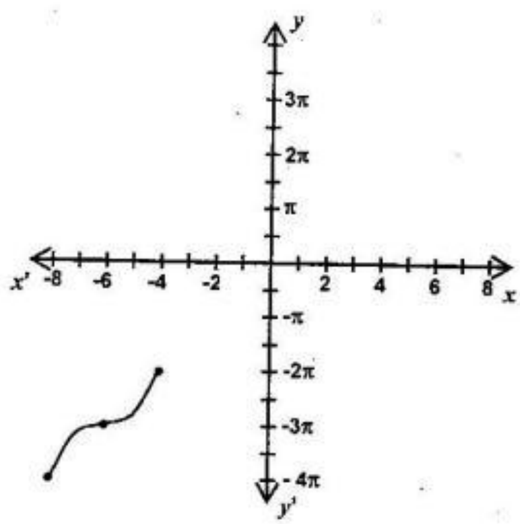
n)


y
3π
2π
π
x' -9 -6 -3 3 6 9 x
-π
-2π
y'

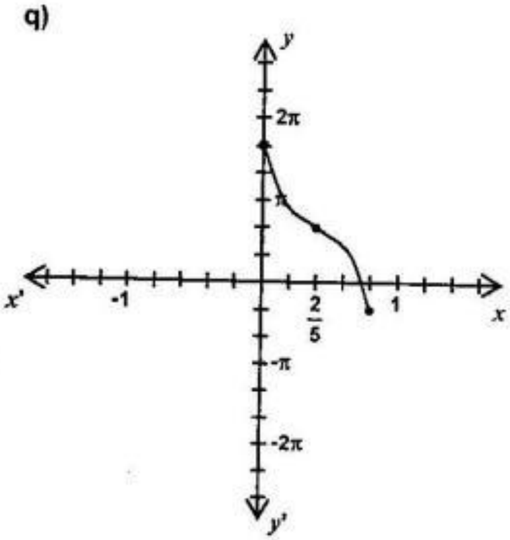
o)


y
π
x' -3 -2 -1 1 2 3 4 x
-π
y'

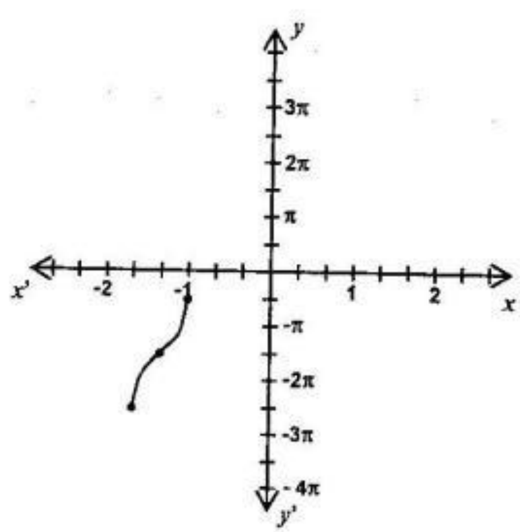
p)


y
3π
2π
π
x' -8 -6 -4 -2 2 4 6 8 x
-π
-2π
-3π
-4π
y'

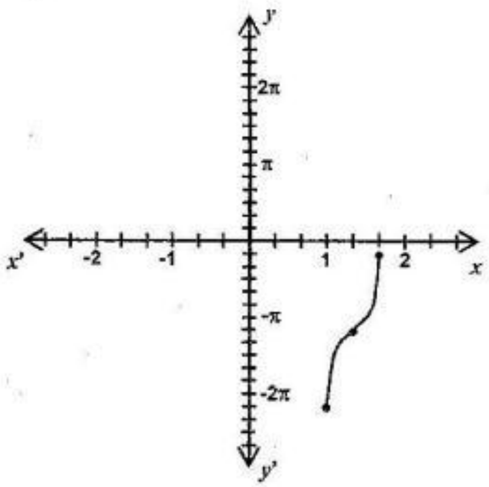
q)


y
2π
π
x' -1 2/5 1 x
-π
-2π
y'

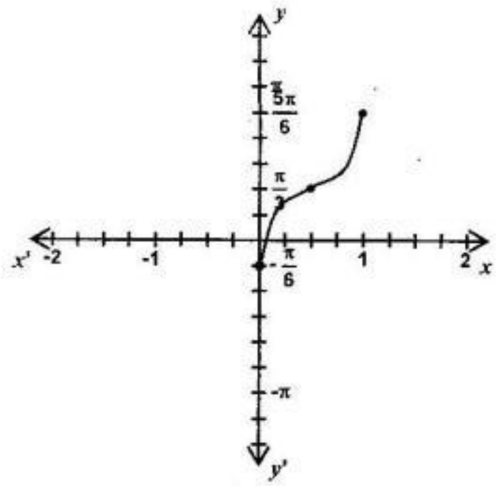
r)


y
3π
2π
π
x' -2 -1 1 2 x
-π
-2π
-3π
-4π
y'

s)

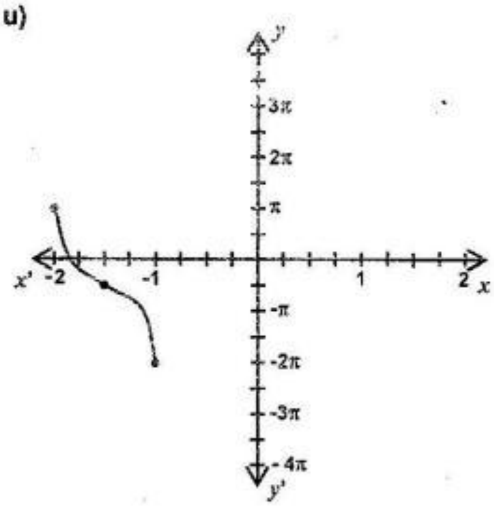


t)



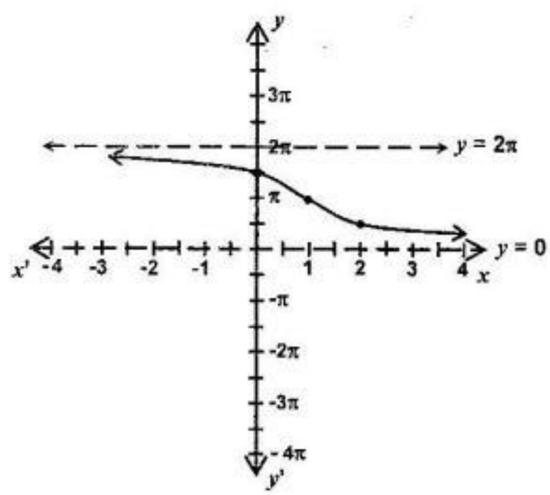
Ejercicios 5.5

u)

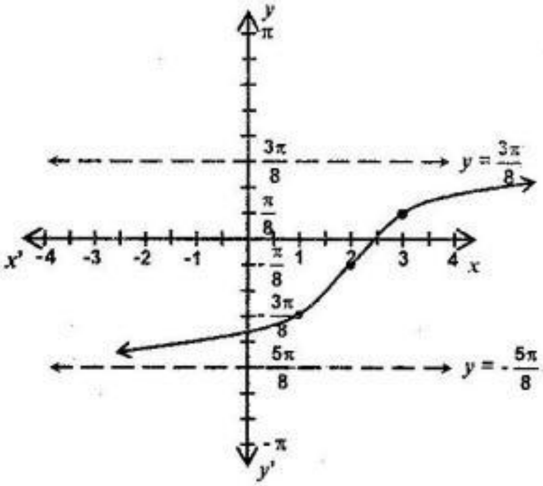


1)

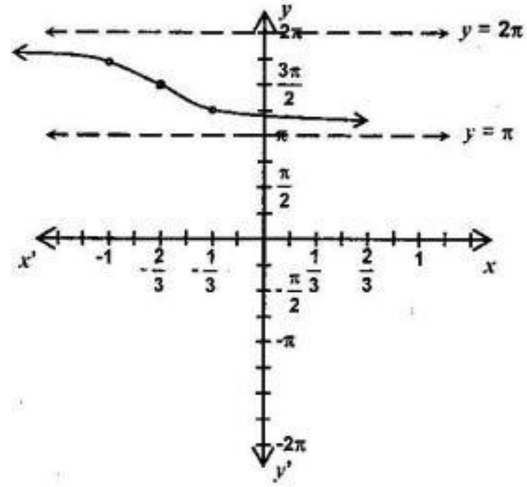
a)



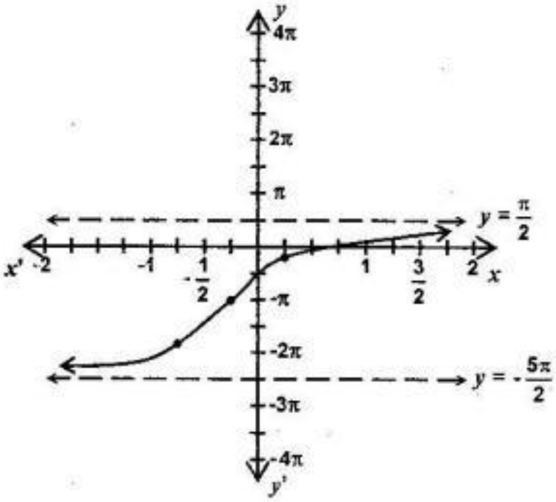
b)



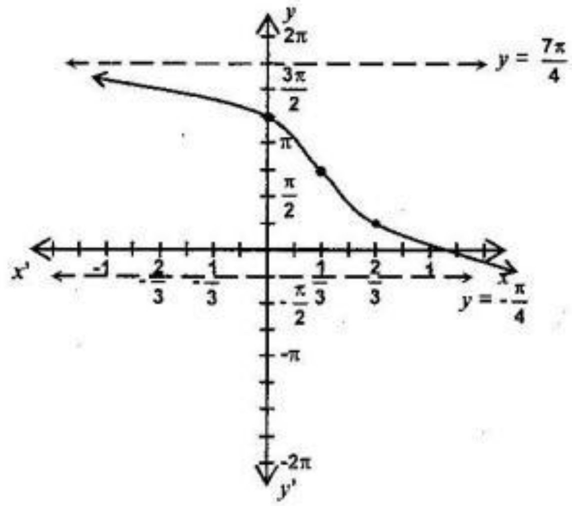
c)



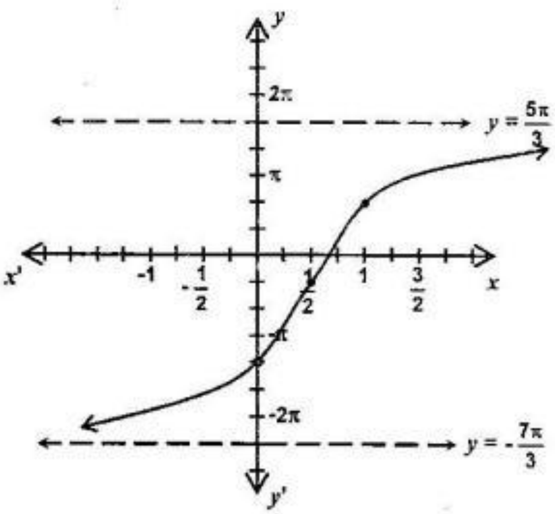
d)


$y = \frac{\pi}{2}$
$y = -\frac{5\pi}{2}$

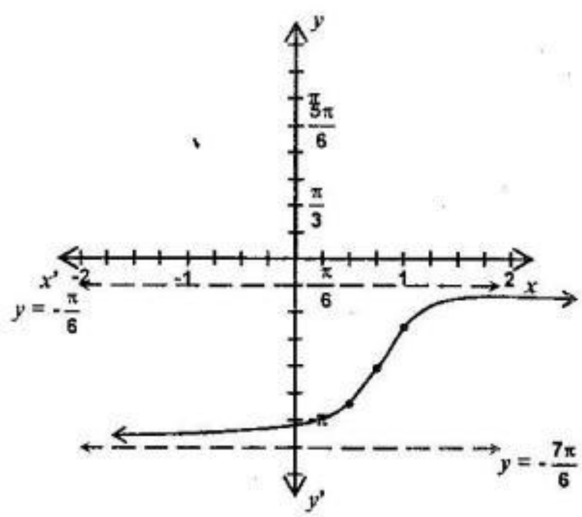
e)


$y = \frac{7\pi}{4}$
$y = -\frac{\pi}{4}$

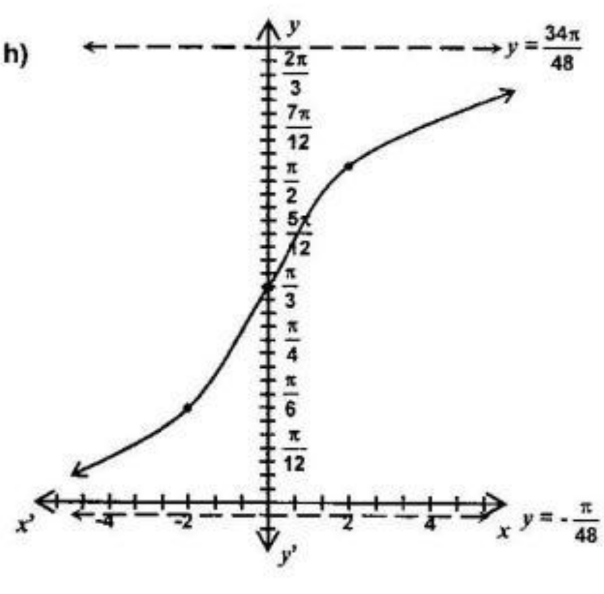
f)


$y = \frac{5\pi}{3}$
$y = -\frac{7\pi}{3}$

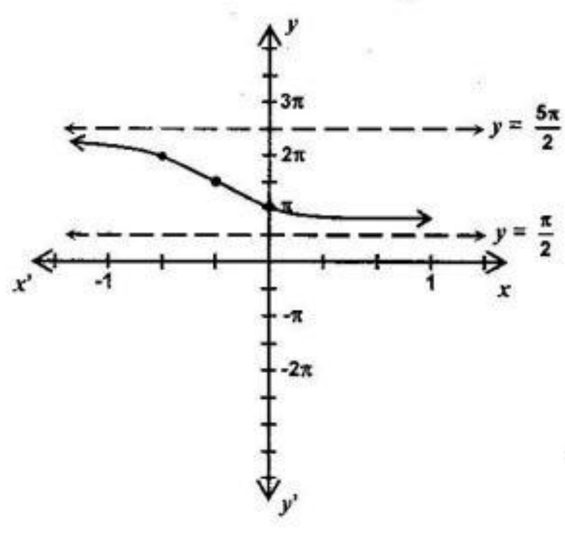
g)


$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = -\frac{7\pi}{6}$

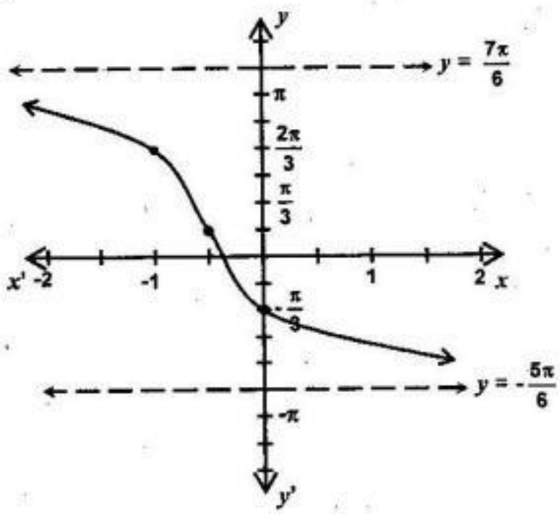
h)


$y = \frac{34\pi}{48}$
$y = -\frac{\pi}{48}$

i)

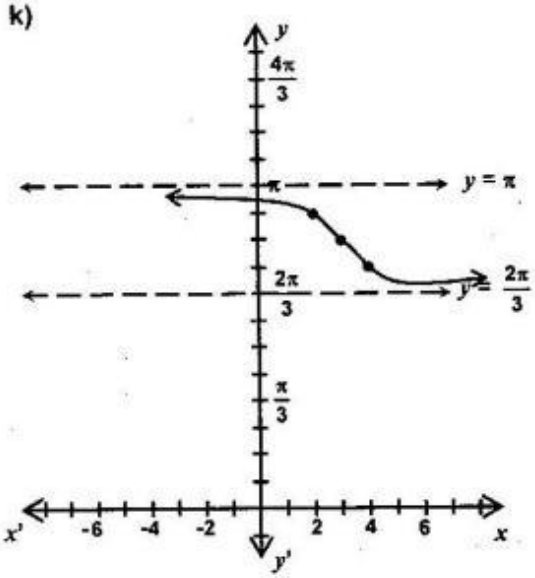

$y = \frac{5\pi}{2}$
$y = \frac{\pi}{2}$

j)



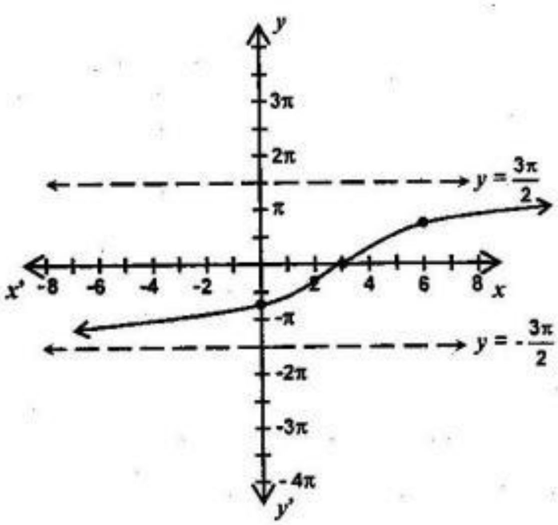
y
y = 7π/6
π
2π/3
π/3
x' -2
-1
1
2 x
-π/3
y = -5π/6
-π
y'

k)



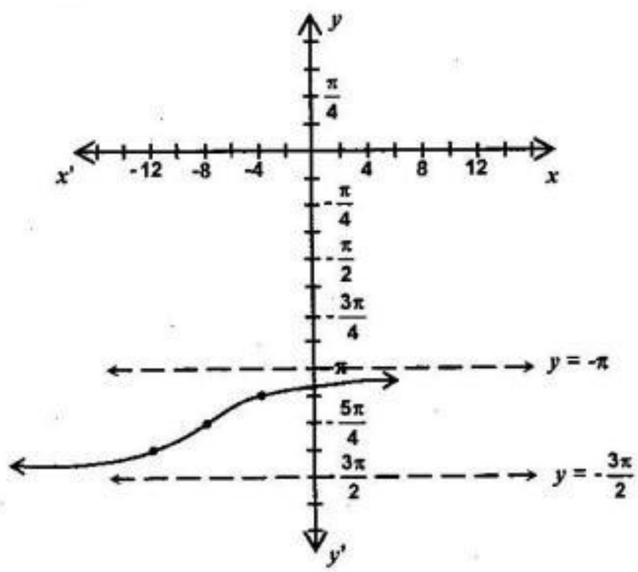
y
4π/3
y = π
2π/3
y = 2π/3
π/3
x'
-6
-4
-2
2
4
6
x
y'

l)



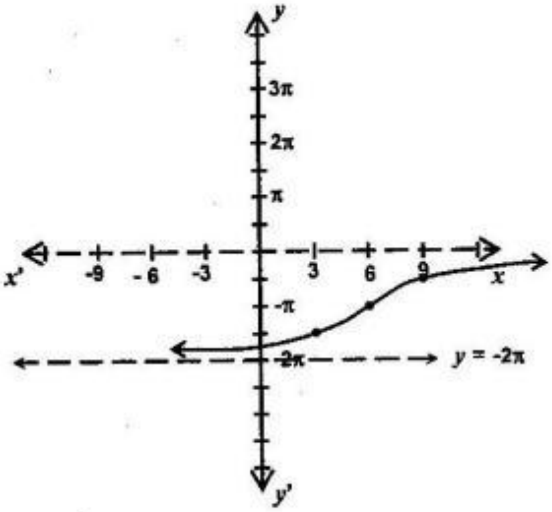
y
3π
2π
y = 3π/2
π
x' -8
-6
-4
-2
2
4
6
8 x
-π
y = -3π/2
-2π
-3π
-4π
y'

m)



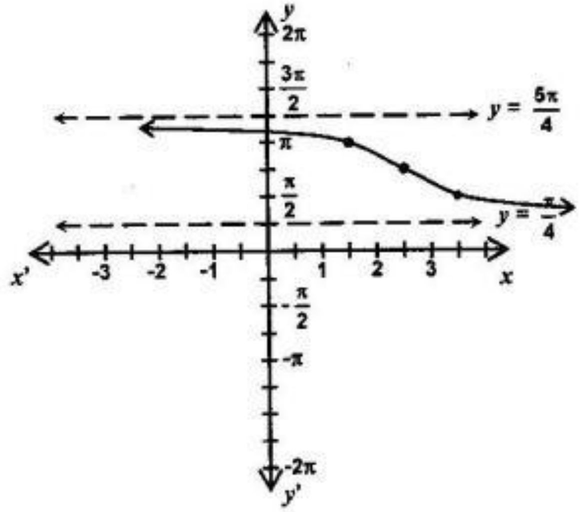
y
π/4
x'
-12
-8
-4
4
8
12
x
-π/4
-π/2
-3π/4
y = -π
-5π/4
-3π/2
y = -3π/2
y'

n)



y
3π
2π
π
x'
-9
-6
-3
3
6
9
x
-π
-2π
y = -2π
y'

o)

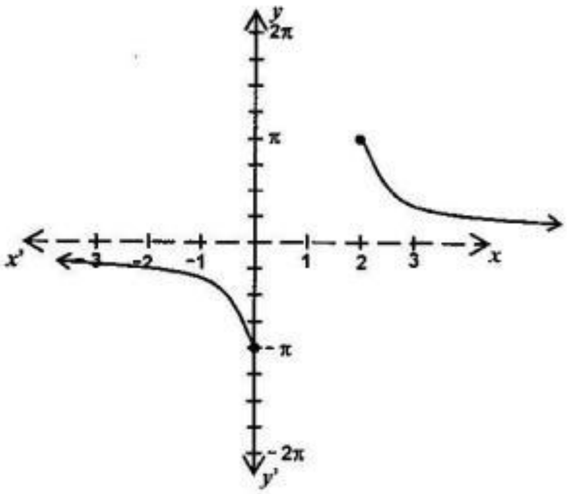


y
2π
3π/2
y = 5π/4
π
π/2
y = π/4
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
-π/2
-π
-2π
y'

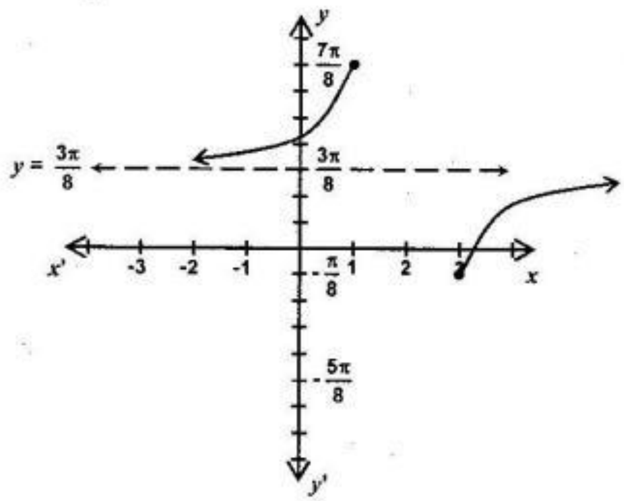
Ejercicios 5.6

1)

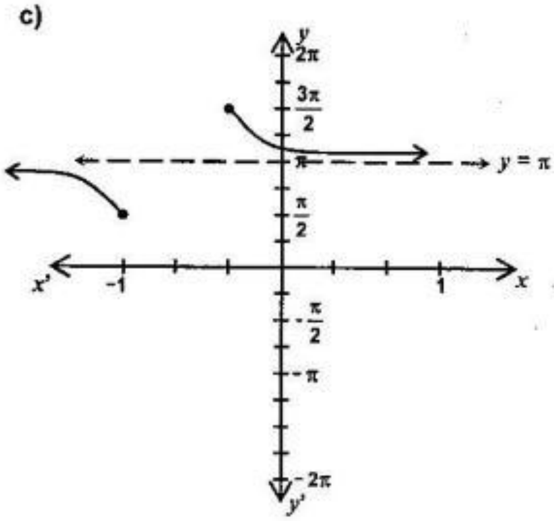
a)



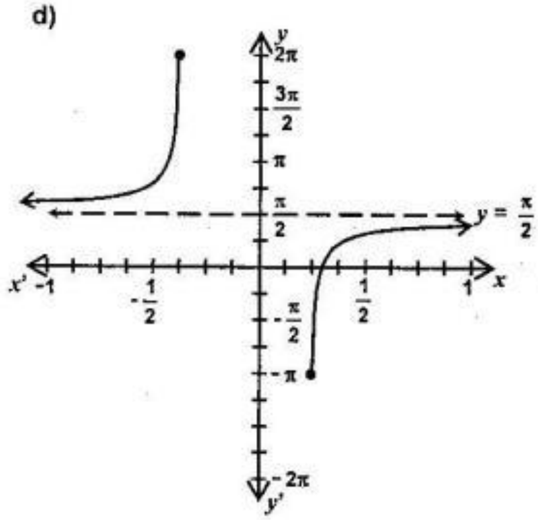
b)



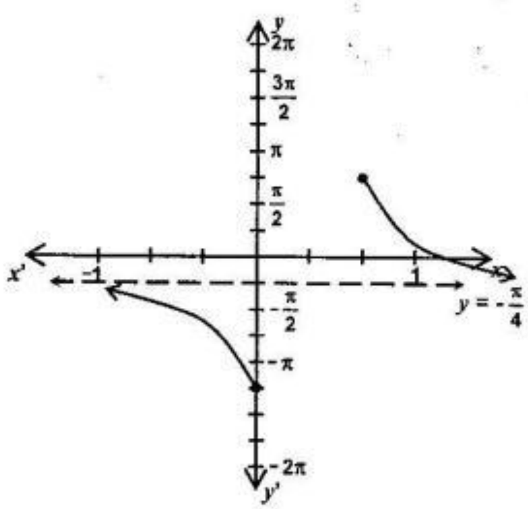
c)



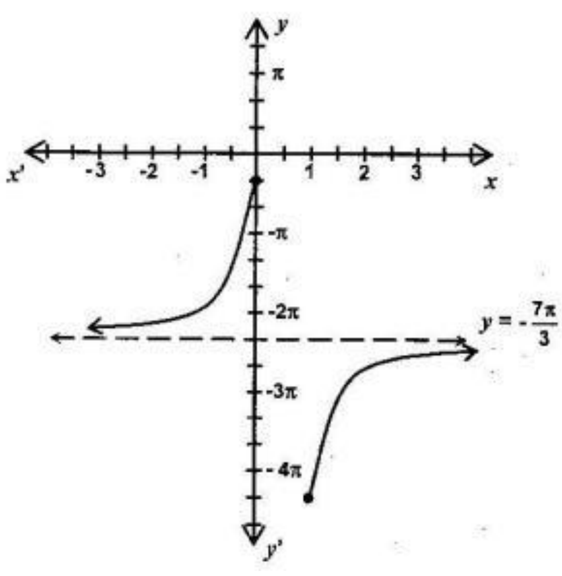
d)



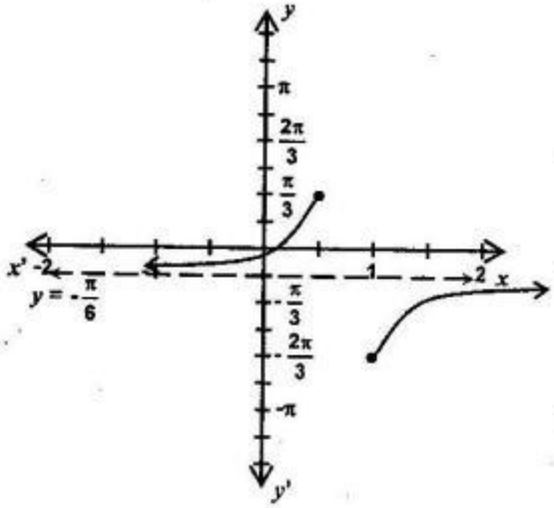
e)



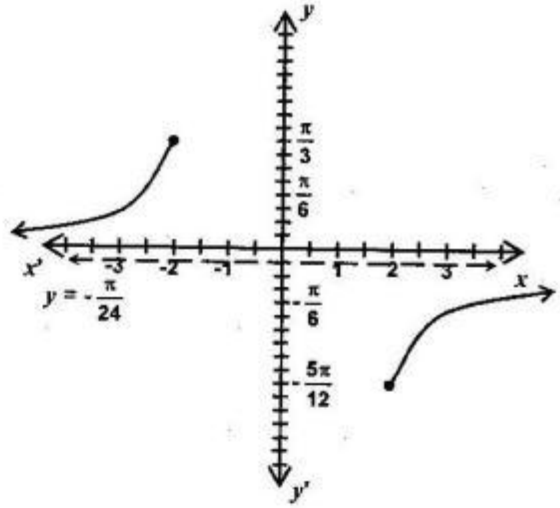
f)



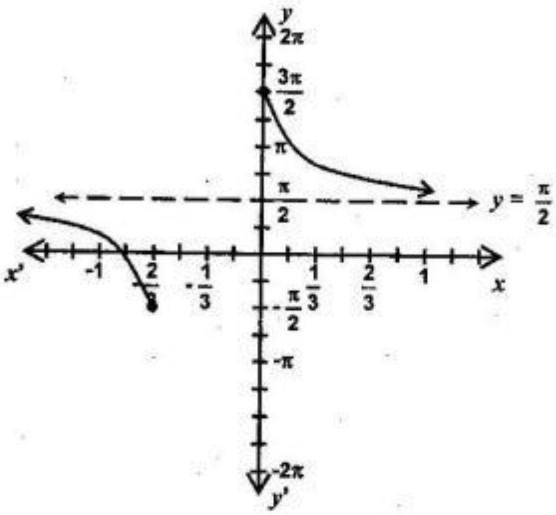
g)


y
π
2π/3
π/3
x' -2
1
2 x
y = -π/6
-π/3
-2π/3
-π
y'

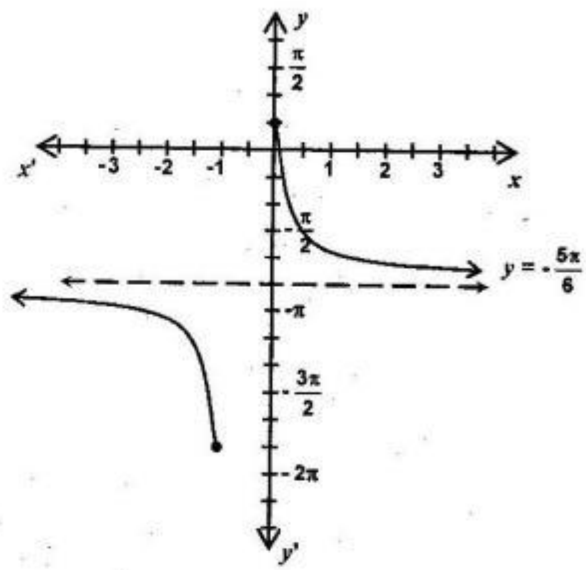
h)


y
π/3
π/6
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
y = -π/24
-π/6
-5π/12
y'

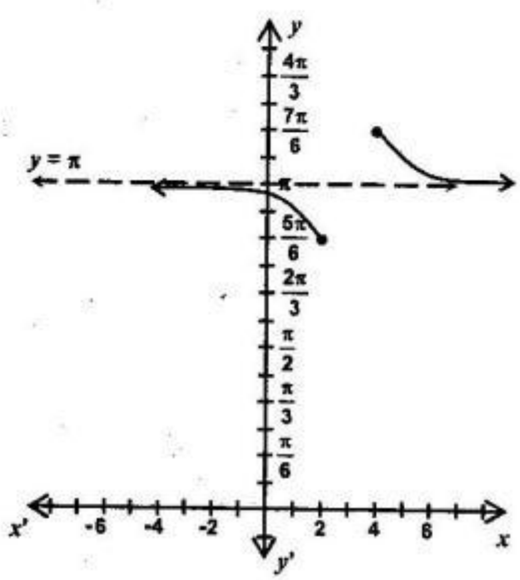
i)


y
2π
3π/2
π
π/2
y = π/2
x'
-1
-2/3
-1/3
1/3
2/3
1
x
-π/2
-π
-2π
y'

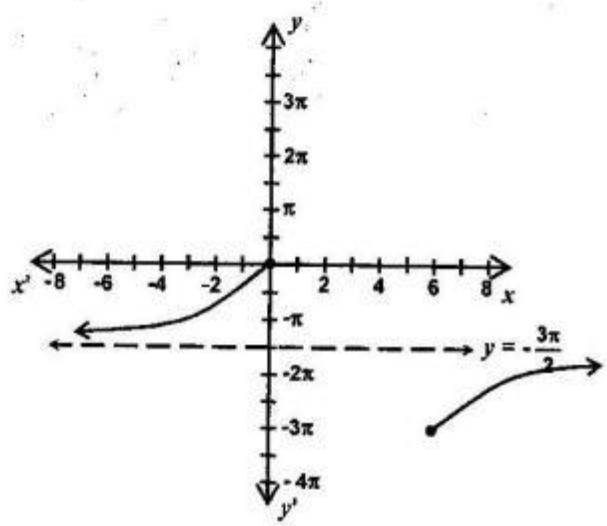
j)


y
π/2
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
-π/2
y = -5π/6
-π
-3π/2
-2π
y'

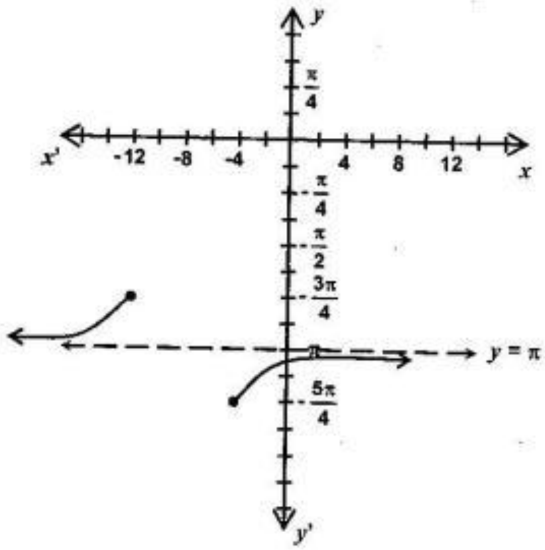
k)


y
4π/3
7π/6
y = π
π
5π/6
2π/3
π/2
π/3
π/6
x'
-6
-4
-2
2
4
6
x
y'

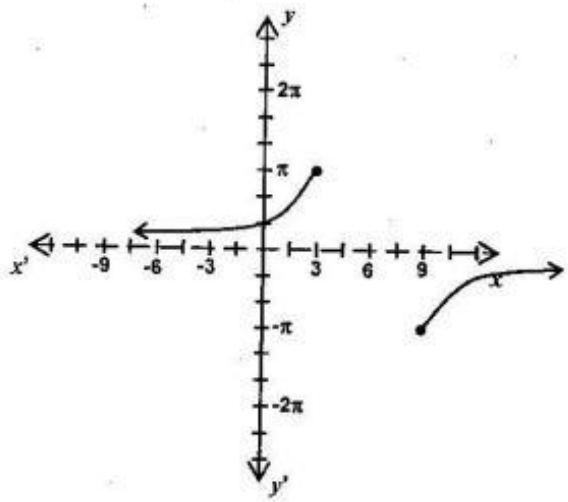
l)


y
3π
2π
π
x' -8
-6
-4
-2
2
4
6
8 x
-π
y = -3π/2
-2π
-3π
-4π
y'

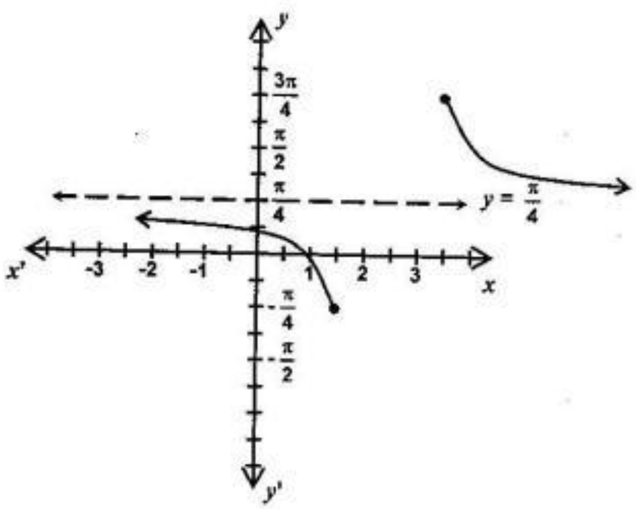
m)



n)



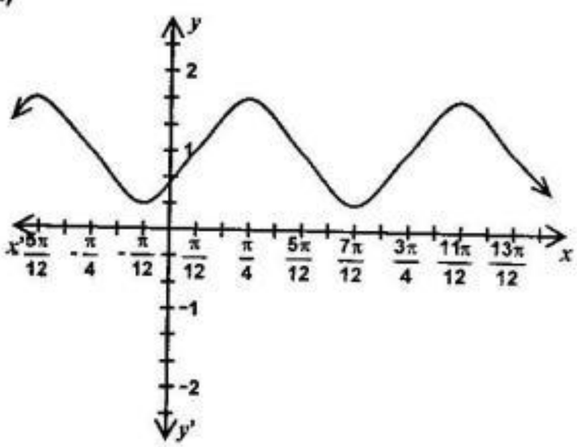
o)



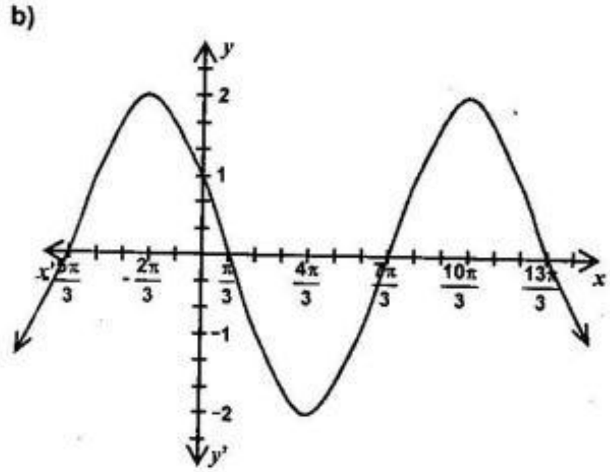
RESPUESTA DE LAS GRAFICAS DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPITULO V

2)

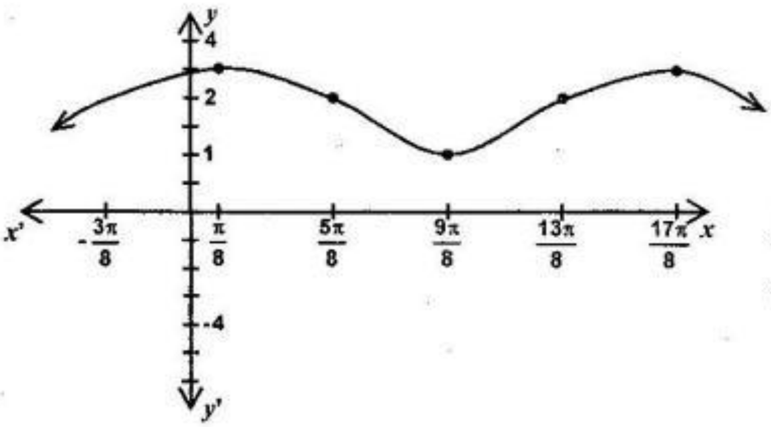
a)



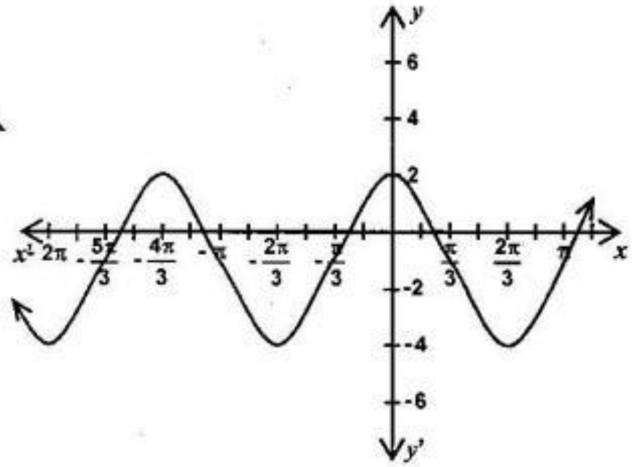
b)



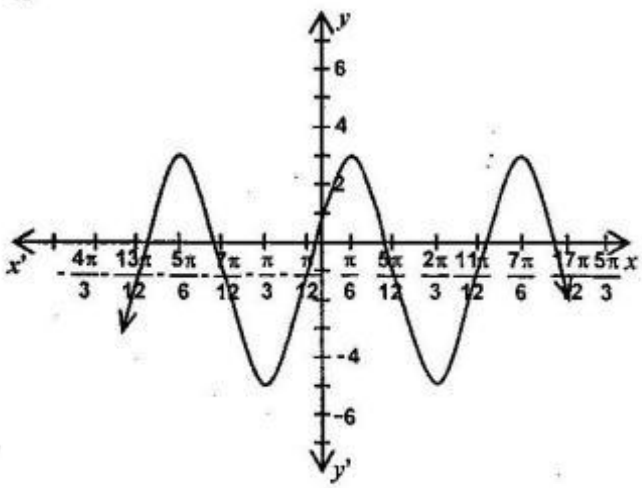
c)


y
4
2
1
-4
y'
x'
x
- 3π/8
π/8
5π/8
9π/8
13π/8
17π/8

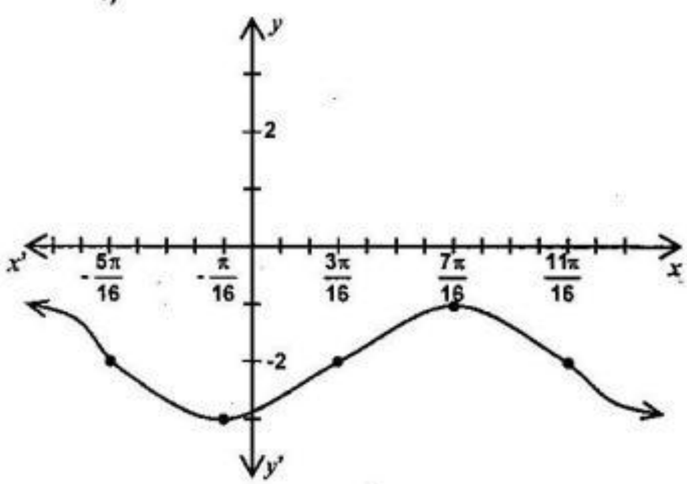
d)


y
6
4
2
-2
-4
-6
y'
x'
x
-2π
- 5π/3
- 4π/3
-π
- 2π/3
- π/3
π/3
2π/3
π

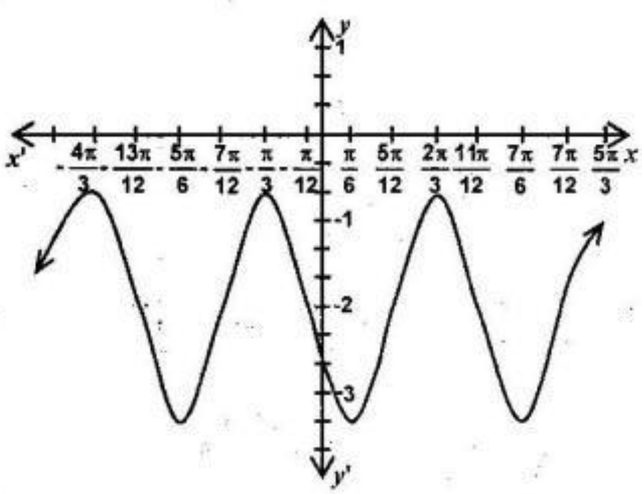
e)


y
6
4
2
-4
-6
y'
x'
x
- 4π/3
- 13π/12
- 5π/6
- 7π/12
- π/3
- π/12
π/6
5π/12
2π/3
11π/12
7π/6
17π/12
5π/3

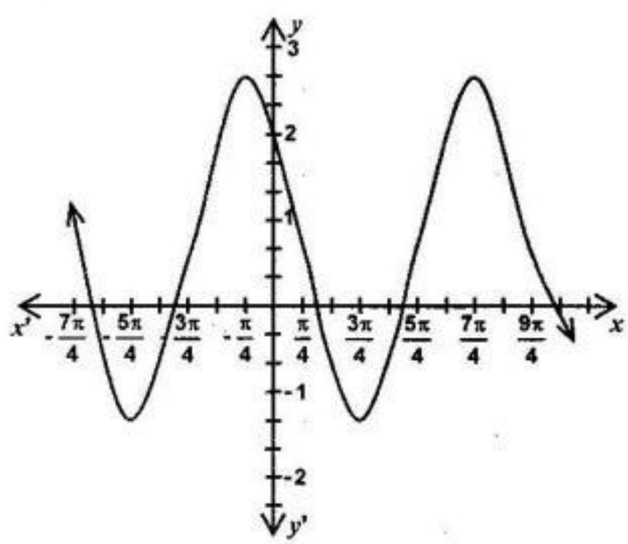
f)


y
2
-2
y'
x'
x
- 5π/16
- π/16
3π/16
7π/16
11π/16

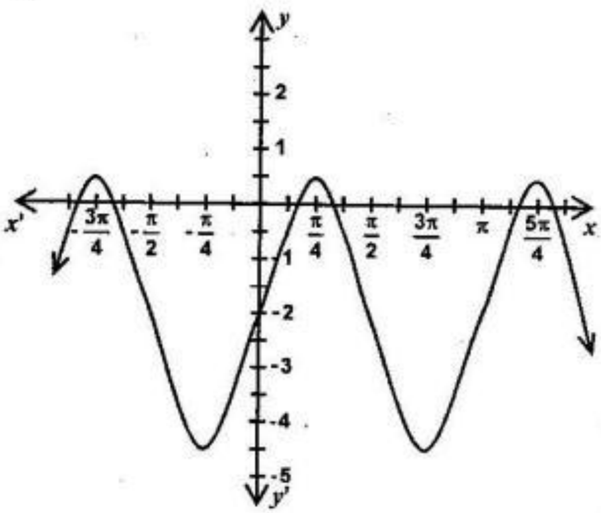
g)


y
1
-1
-2
-3
y'
x'
x
- 4π/3
- 13π/12
- 5π/6
- 7π/12
- π/3
- π/12
π/6
5π/12
2π/3
11π/12
7π/6
7π/12
5π/3

h)

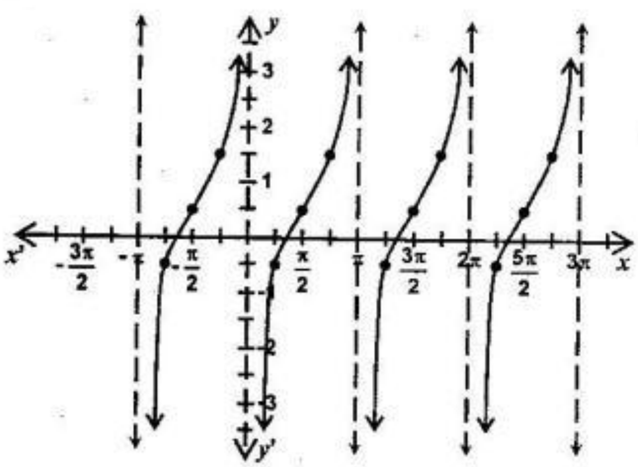

y
3
2
1
-1
-2
y'
x'
x
- 7π/4
- 5π/4
- 3π/4
- π/4
π/4
3π/4
5π/4
7π/4
9π/4

i)

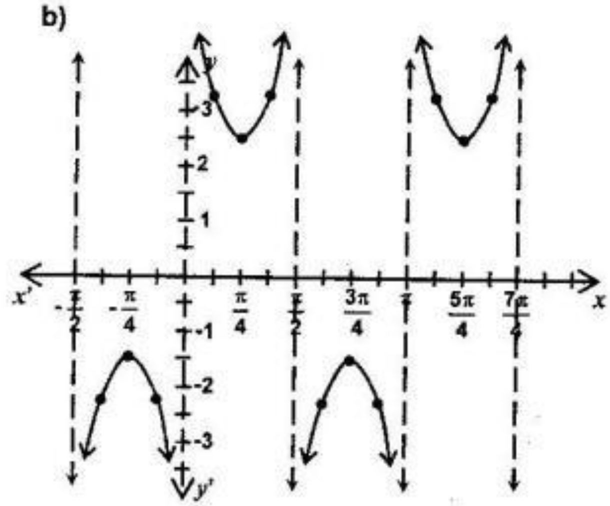

y
2
1
x'
-3π/4
-π/2
-π/4
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
x
-1
-2
-3
-4
-5
y'

3)

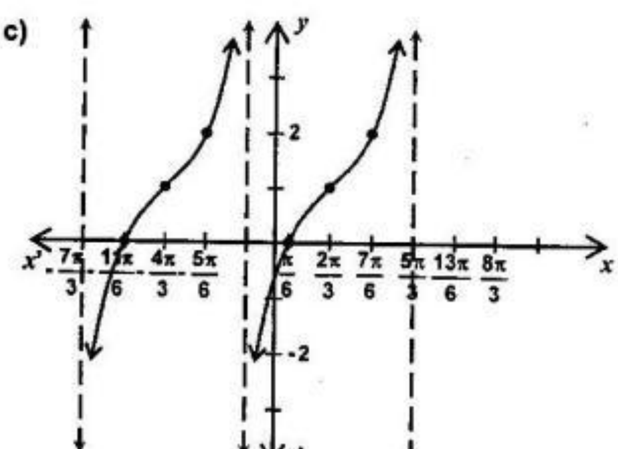
a)


y
3
2
1
x'
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
x
-1
-2
-3
y'

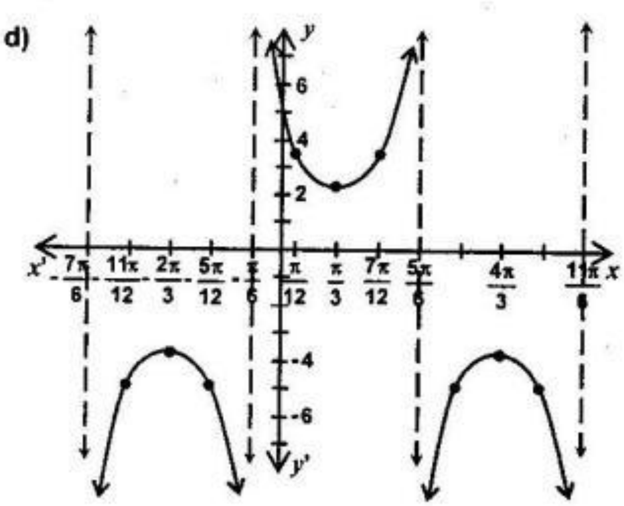
b)


y
3
2
1
x'
-π/2
-π/4
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
7π/4
x
-1
-2
-3
y'

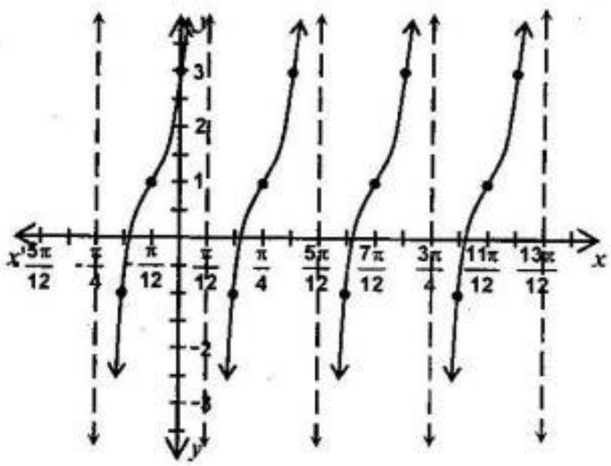
c)


y
2
x'
-7π/3
-11π/6
-4π/3
-5π/6
π/6
2π/3
7π/6
5π/3
13π/6
8π/3
x
-2
y'

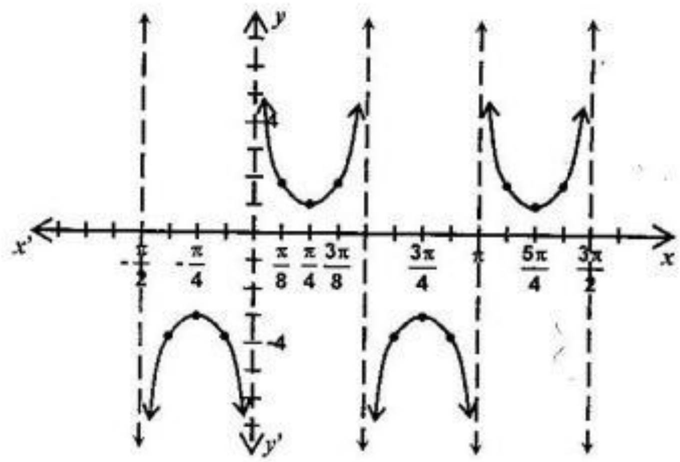
d)


y
6
4
2
x'
-7π/6
-11π/12
-2π/3
-5π/12
-π/6
π/12
π/3
7π/12
5π/6
4π/3
11π/6
x
-4
-6
y'

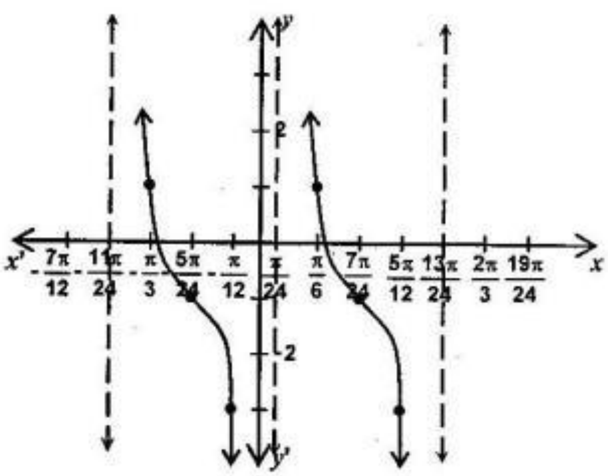
e)


x'
x
y
y'
3
2
1
-2
-3
$\frac{5\pi}{12}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{7\pi}{12}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{12}$
$\frac{13\pi}{12}$

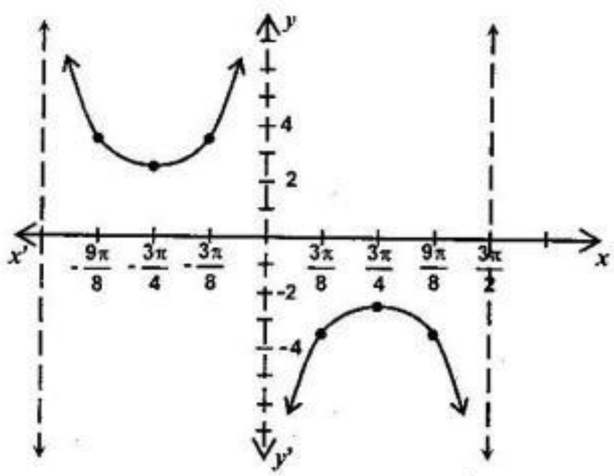
f)


x'
x
y
y'
4
-4
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

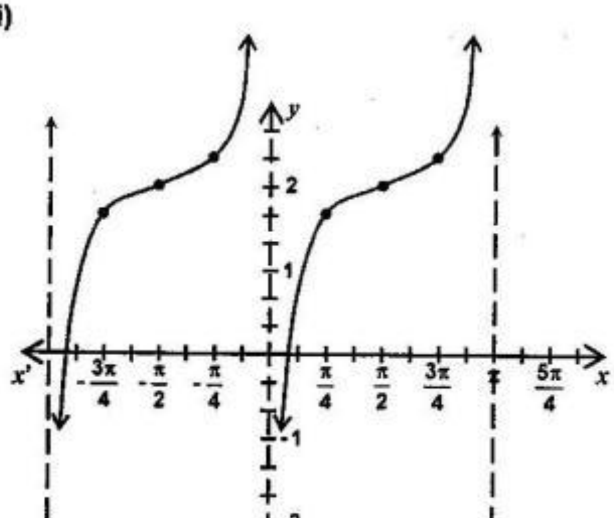
g)


x'
x
y
y'
2
2
$\frac{7\pi}{12}$
$\frac{11\pi}{24}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{24}$
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{24}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{24}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{13\pi}{24}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{19\pi}{24}$

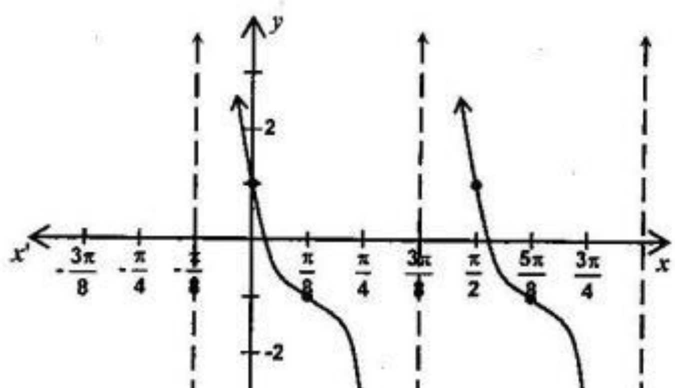
h)


x'
x
y
y'
4
2
-2
-4
$-\frac{9\pi}{8}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{3\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{2}$

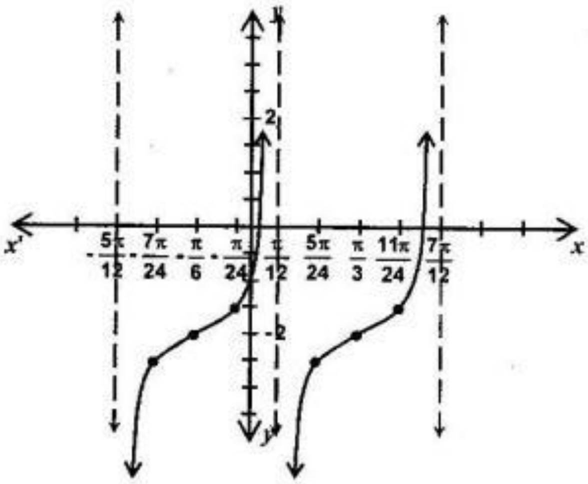
i)


x'
x
y
y'
2
1
-1
-2
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$

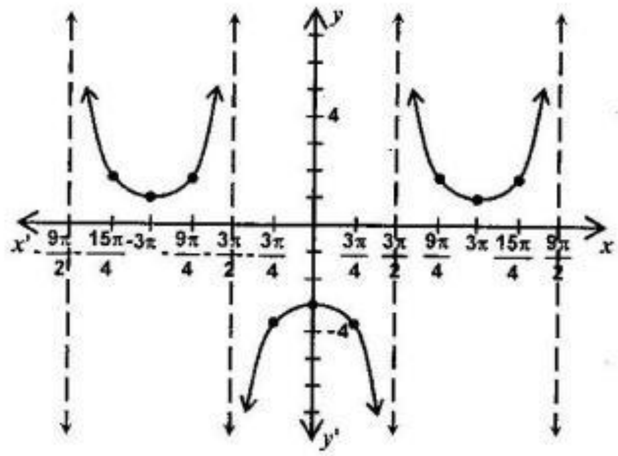
j)


x'
x
y
y'
2
-2
$-\frac{3\pi}{8}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{4}$

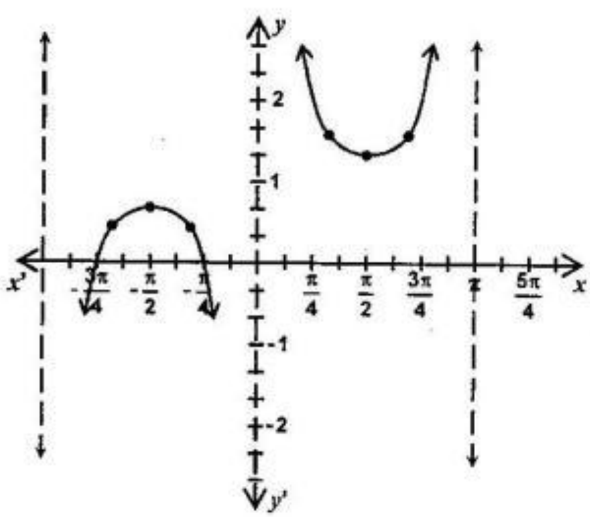
k)


y
2
-2
y'
x'
x
$-\frac{5\pi}{12}$ $-\frac{7\pi}{24}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{24}$ $\frac{\pi}{12}$ $\frac{5\pi}{24}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{24}$ $\frac{7\pi}{12}$

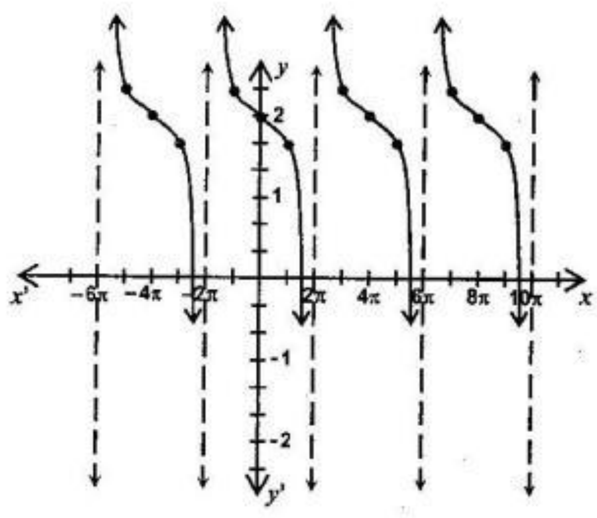
l)


y
4
-4
y'
x'
x
$-\frac{9\pi}{2}$ $-\frac{15\pi}{4}$ -3π $-\frac{9\pi}{4}$ $-\frac{3\pi}{2}$ $-\frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{9\pi}{4}$ 3π $\frac{15\pi}{4}$ $\frac{9\pi}{2}$

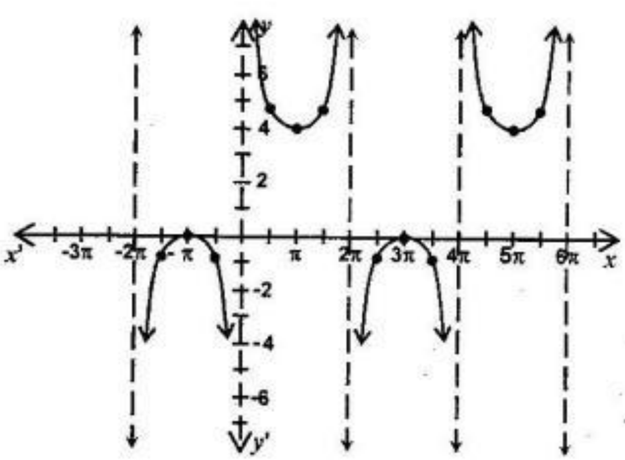
m)


y
2
1
-1
-2
y'
x'
x
$-\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ π $\frac{5\pi}{4}$

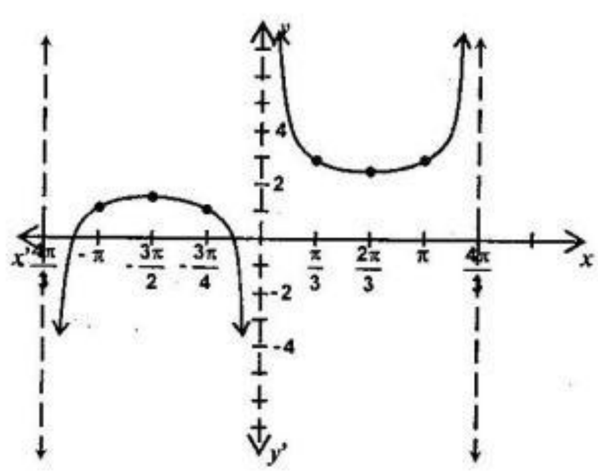
n)


y
2
1
-1
-2
y'
x'
x
-6π -4π -2π 2π 4π 6π 8π 10π

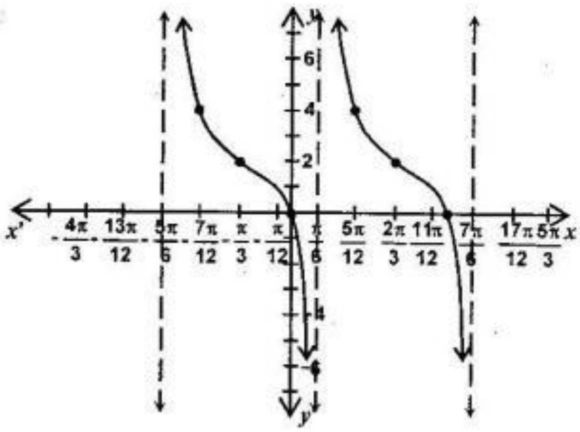
o)


y
6
4
2
-2
-4
-6
y'
x'
x
-3π -2π $-\pi$ π 2π 3π 4π 5π 6π

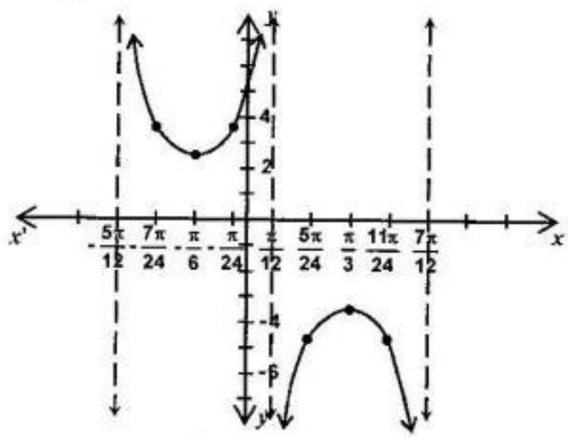
p)


y
4
2
-2
-4
y'
x'
x
$-\frac{4\pi}{3}$ $-\pi$ $-\frac{3\pi}{2}$ $-\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ π $\frac{4\pi}{3}$

q)

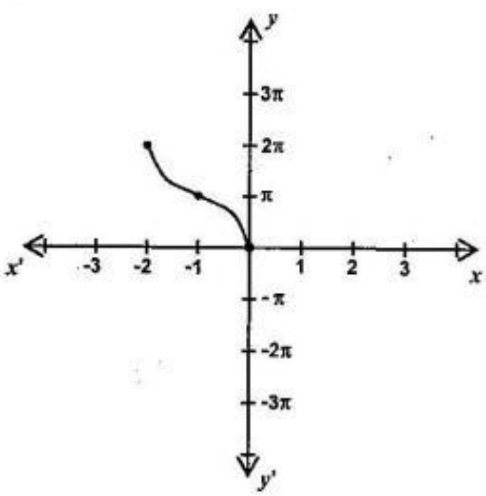

y
6
4
2
x'
$-\frac{4\pi}{3}$ $-\frac{13\pi}{12}$ $-\frac{5\pi}{6}$ $-\frac{7\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{12}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{12}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{12}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{17\pi}{12}$ $\frac{5\pi}{3}$
x
-4
-6
y'

r)

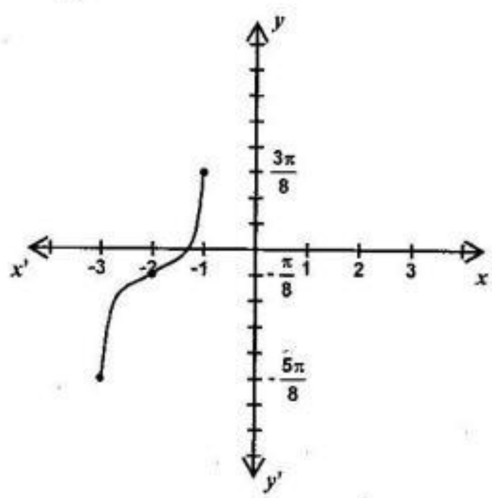

y
4
2
x'
$-\frac{5\pi}{12}$ $-\frac{7\pi}{24}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{24}$ $\frac{\pi}{12}$ $\frac{5\pi}{24}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{24}$ $\frac{7\pi}{12}$
x
-4
-6
y'

4)

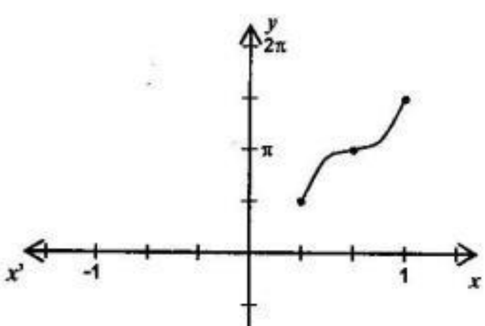
a)


y
3π
2π
π
x'
-3 -2 -1 1 2 3
x
$-\pi$
-2π
-3π
y'

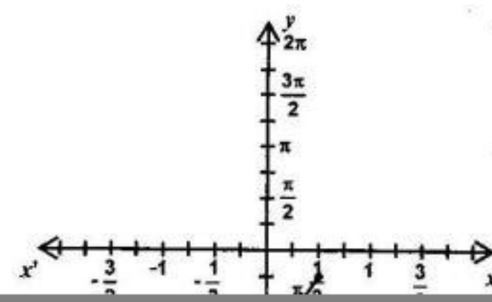
b)


y
$\frac{3\pi}{8}$
x'
-3 -2 -1 1 2 3
$-\frac{\pi}{8}$
x
$-\frac{5\pi}{8}$
y'

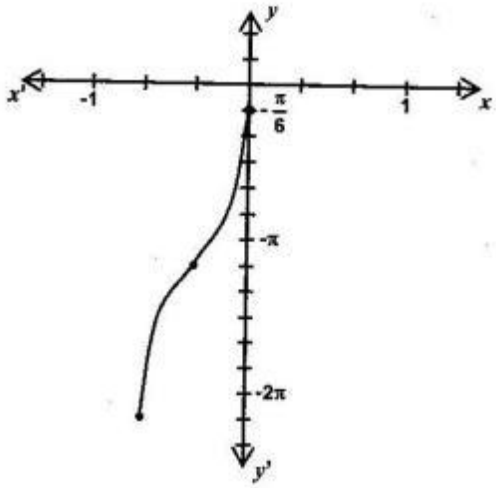
c)


y
2π
π
x'
-1 1
x

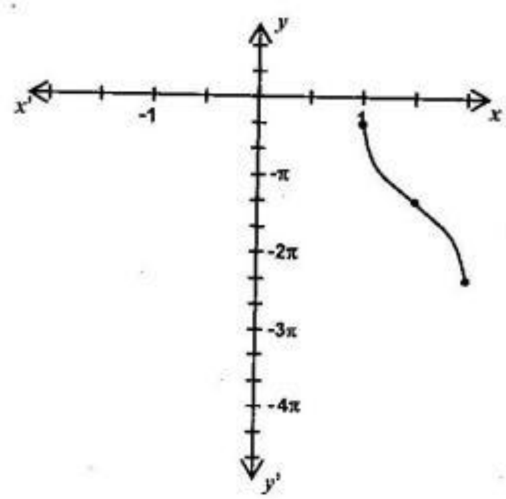
d)


y
2π
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
x'
-1 1
x

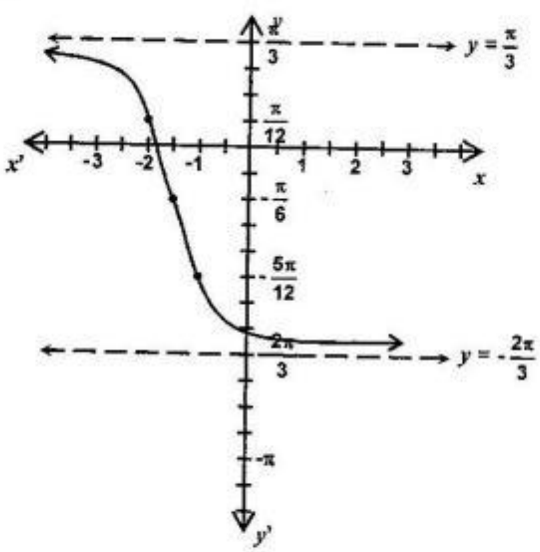
e)


y
x'
-1
1
x
π/6
-π
-2π
y'

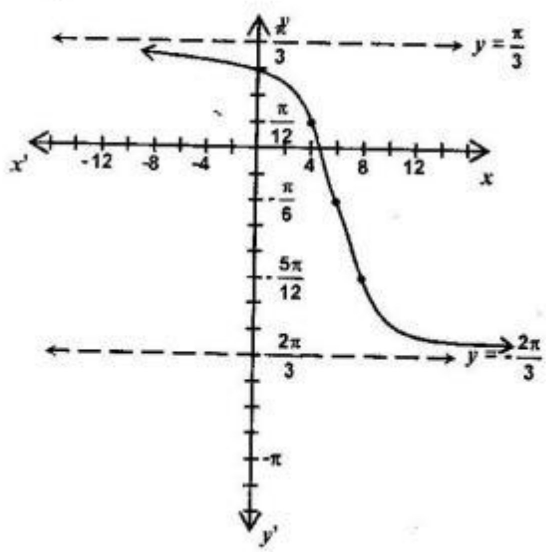
f)


y
x'
-1
1
x
-π
-2π
-3π
-4π
y'

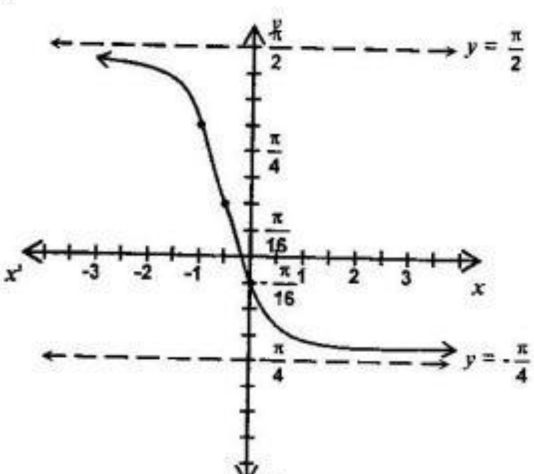
g)


y
π/3
y = π/3
π/12
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
π/6
5π/12
2π/3
y = -2π/3
-π
y'

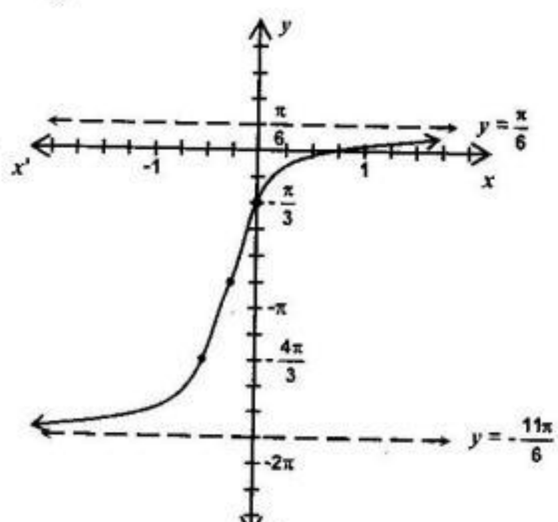
h)


y
π/3
y = π/3
π/12
x'
-12
-8
-4
4
8
12
x
π/6
5π/12
2π/3
y = -2π/3
-π
y'

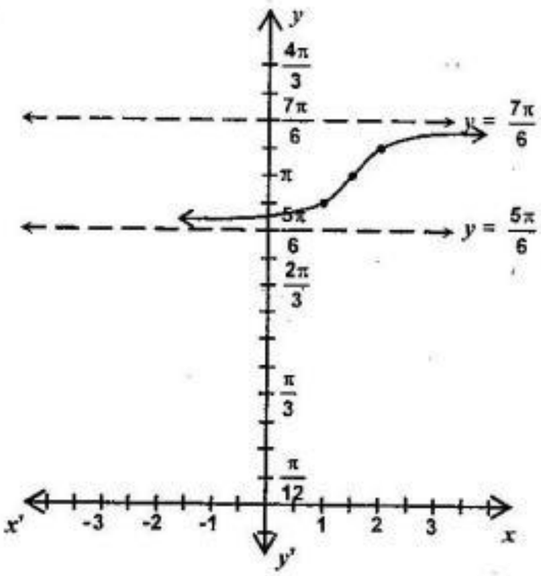
i)


y
π/2
y = π/2
π/4
π/16
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
π/16
π/4
y = -π/4
y'

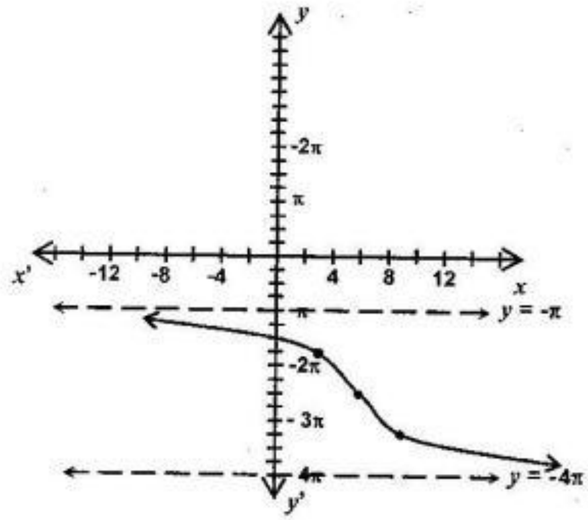
j)


y
π/6
y = π/6
x'
-1
1
x
π/3
-π
4π/3
y = -11π/6
-2π
y'

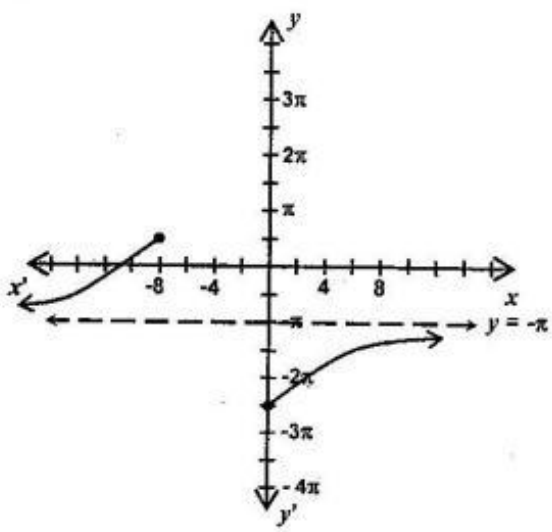
k)


y
4π/3
7π/6
y = 7π/6
π
5π/6
y = 5π/6
2π/3
π/3
π/12
x'
-3
-2
-1
1
2
3
x
y'

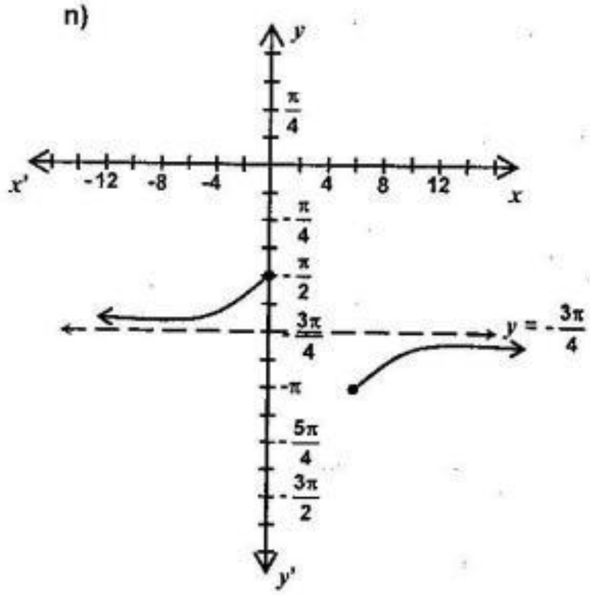
l)


y
-2π
π
x'
-12
-8
-4
4
8
12
x
y = -π
-2π
- 3π
y = -4π
y'

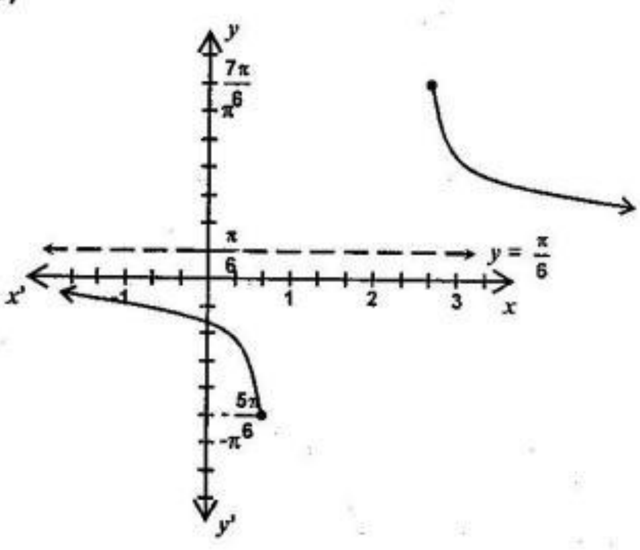
m)


y
3π
2π
π
x'
-8
-4
4
8
x
y = -π
-2π
-3π
- 4π
y'

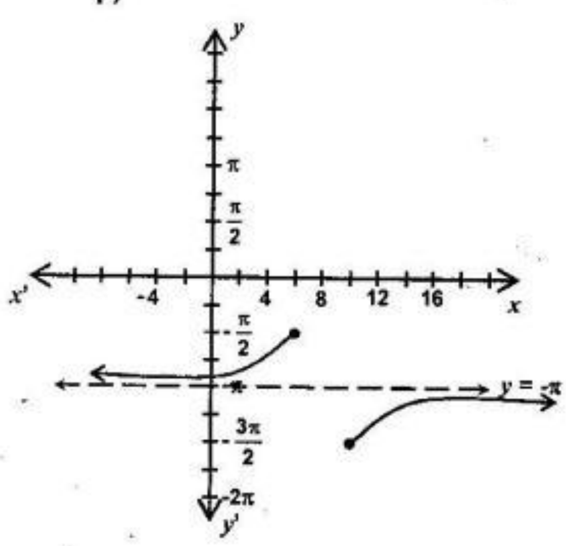
n)


y
π/4
x'
-12
-8
-4
4
8
12
x
π/4
π/2
3π/4
y = - 3π/4
-π
5π/4
3π/2
y'

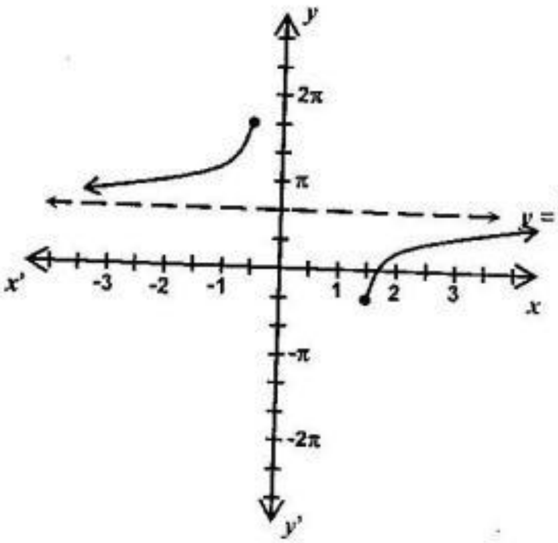
o)


y
7π/6
π
π/6
y = π/6
x'
-1
1
2
3
x
5π/6
-π
y'

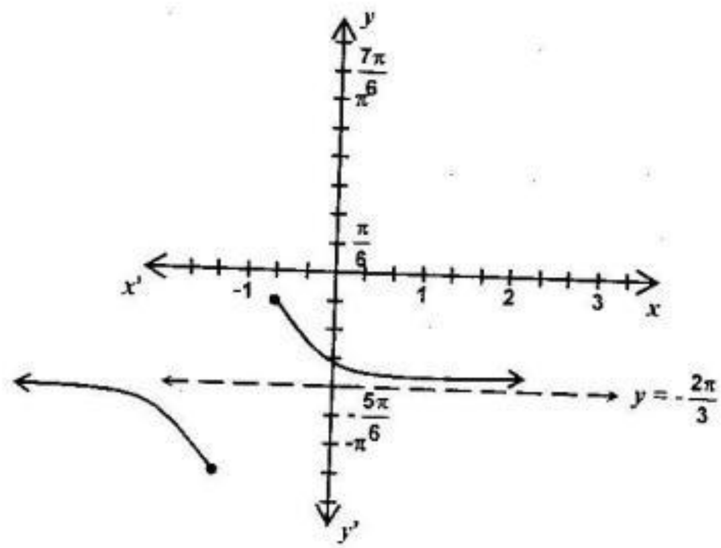
p)


y
π
π/2
x'
-4
4
8
12
16
x
π/2
y = -π
3π/2
-2π
y'

q)



r)

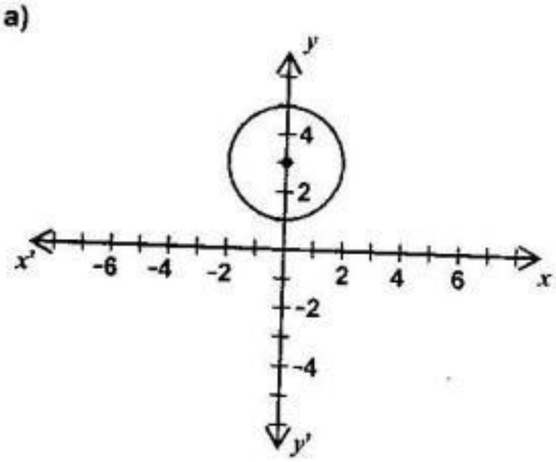


RESPUESTA DE LAS GRAFICAS DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO VI

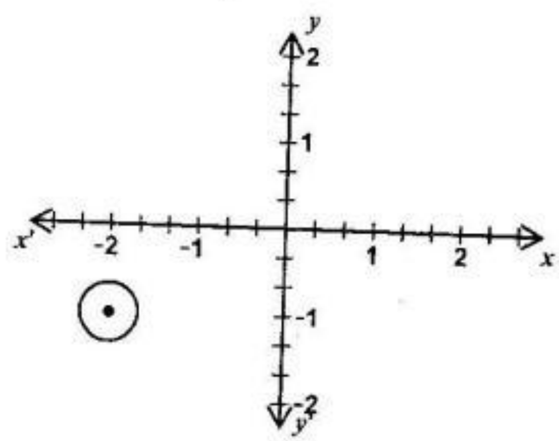
Ejercicios 6.1

2)

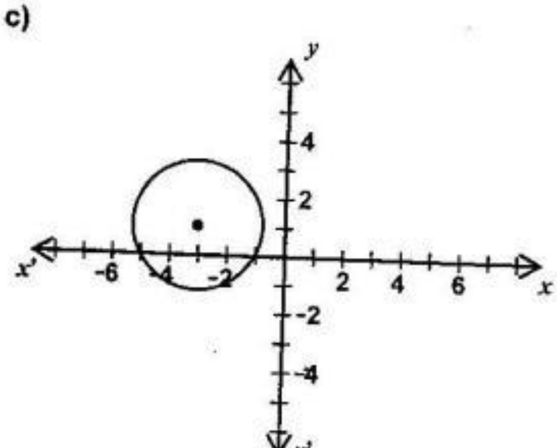
a)



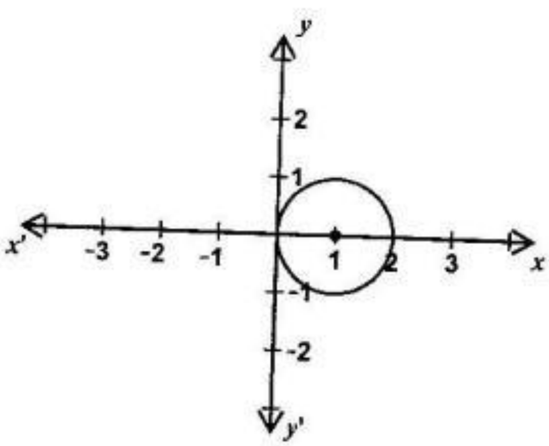
b)



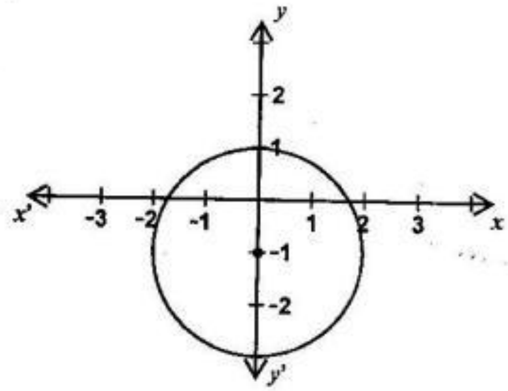
c)



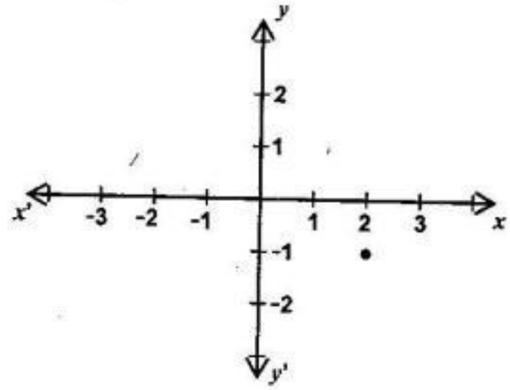
d)



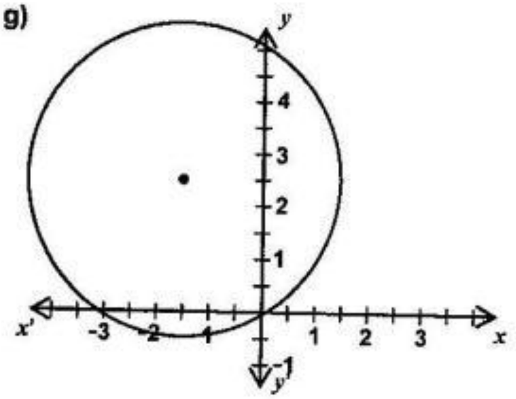
e)



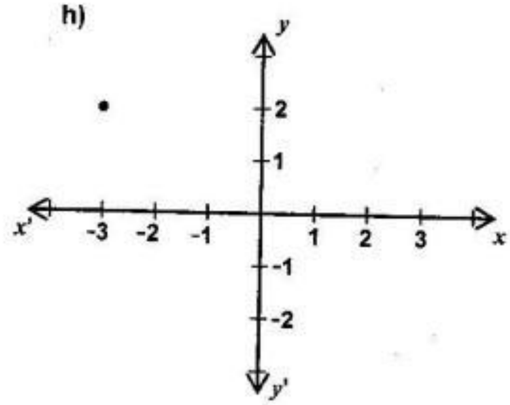
f)



g)

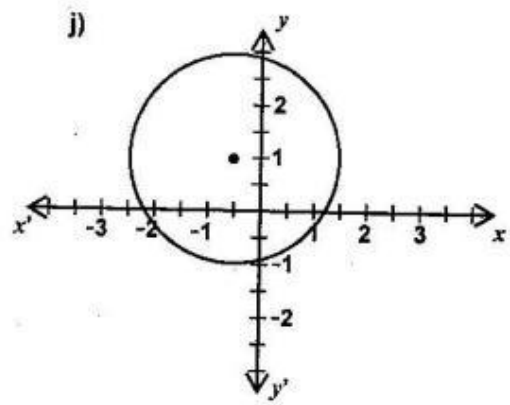


h)

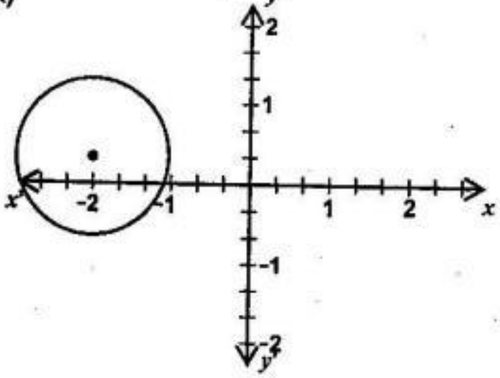


i) **No existe circunferencia degenerada**

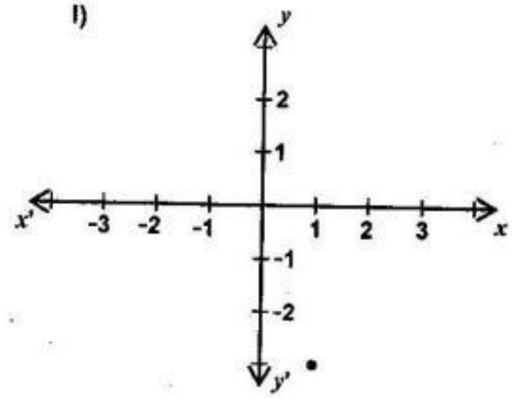
j)



k)



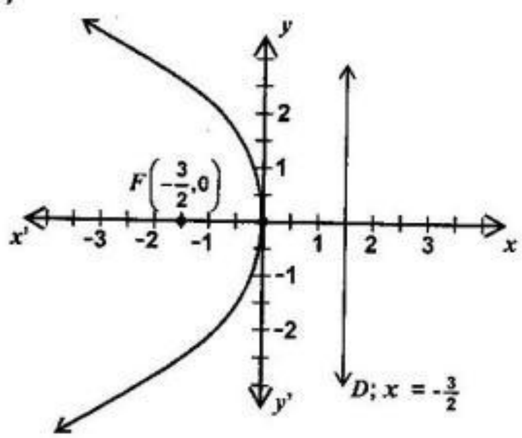
l)



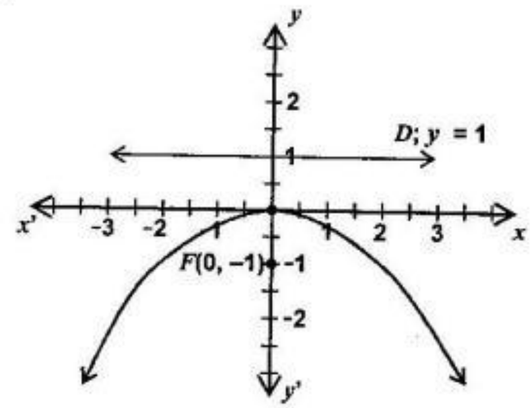
Ejercicios 6.2

1)

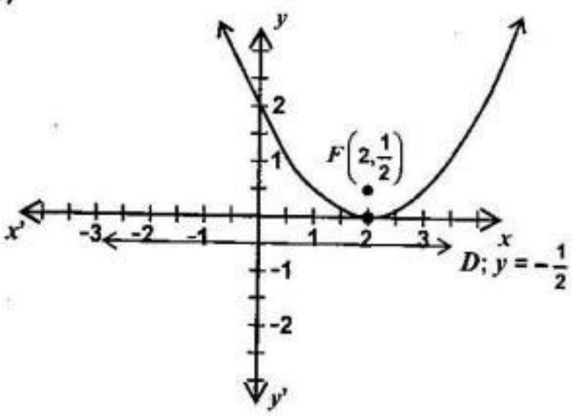
a)



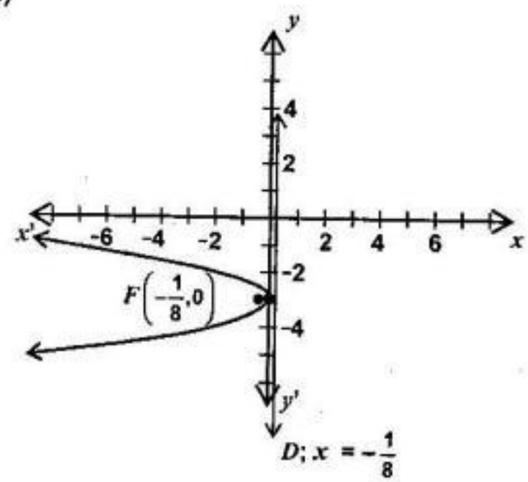
b)



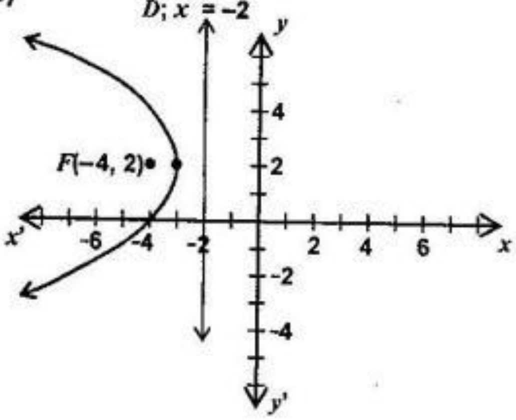
c)



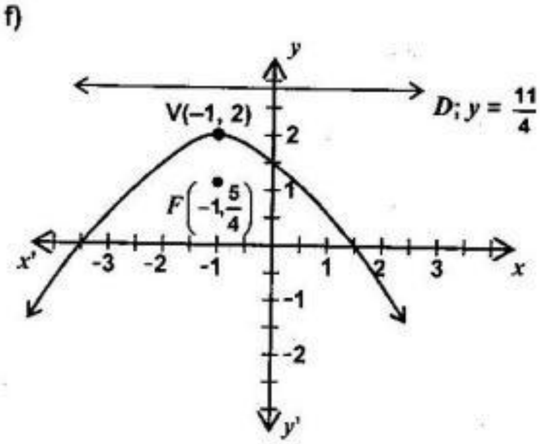
d)



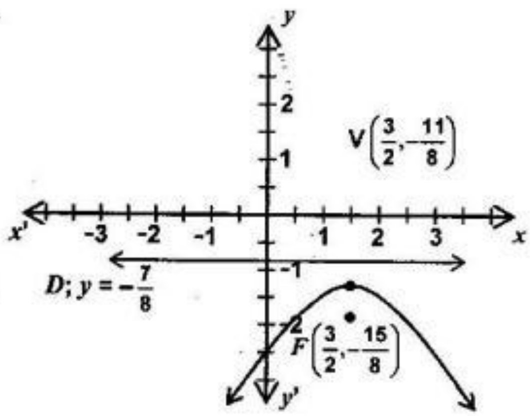
e)



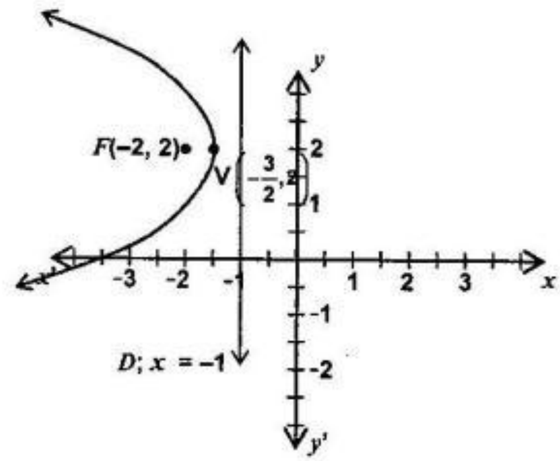
f)



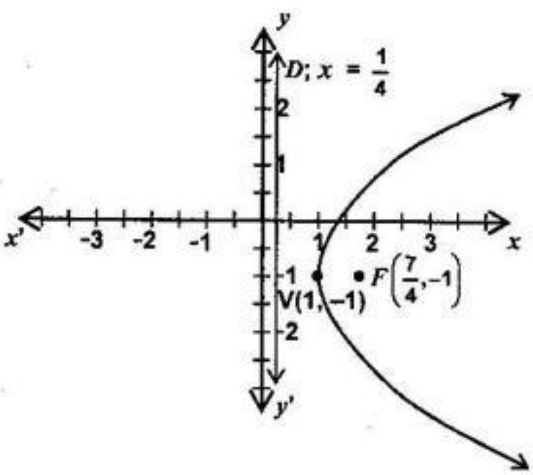
g)



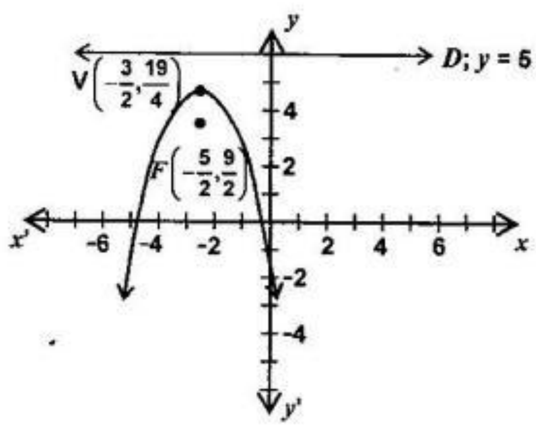
h)



i)

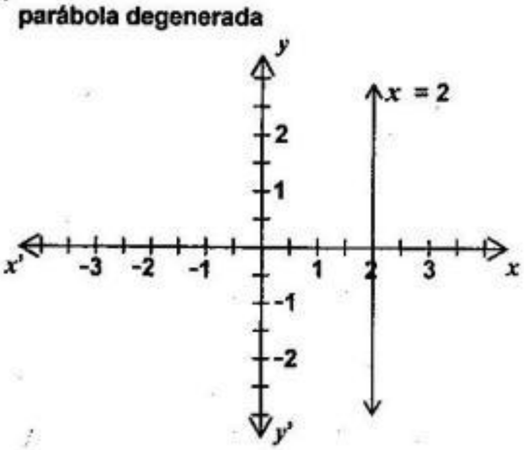


j)



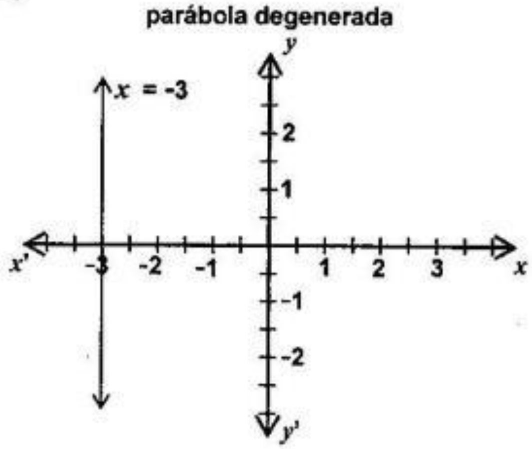
k)

parábola degenerada



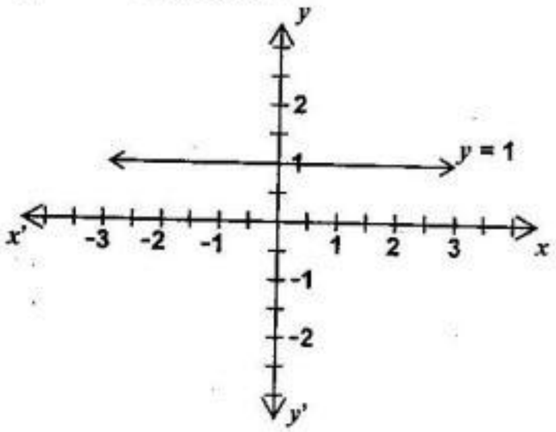
l)

parábola degenerada

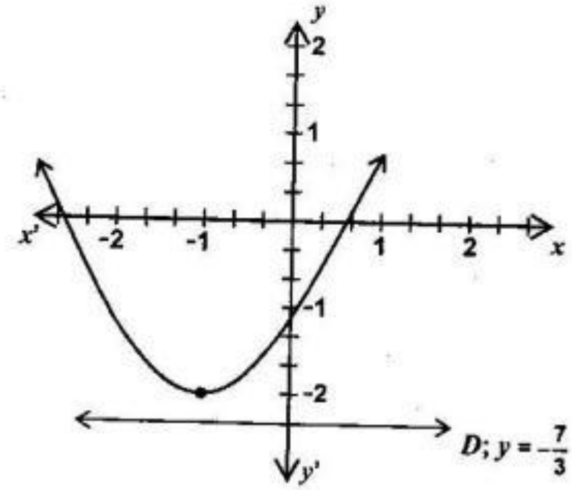


m)

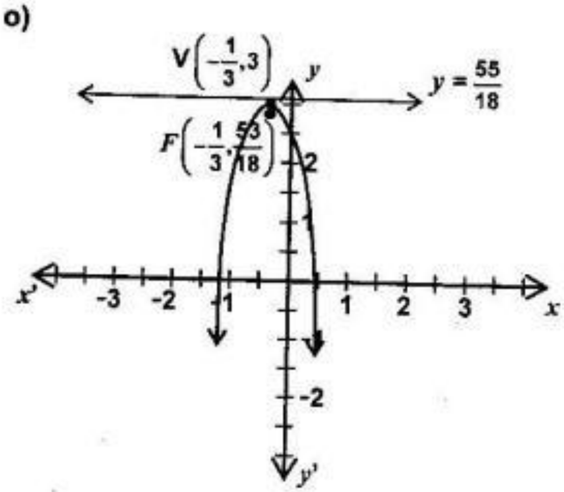
parábola degenerada



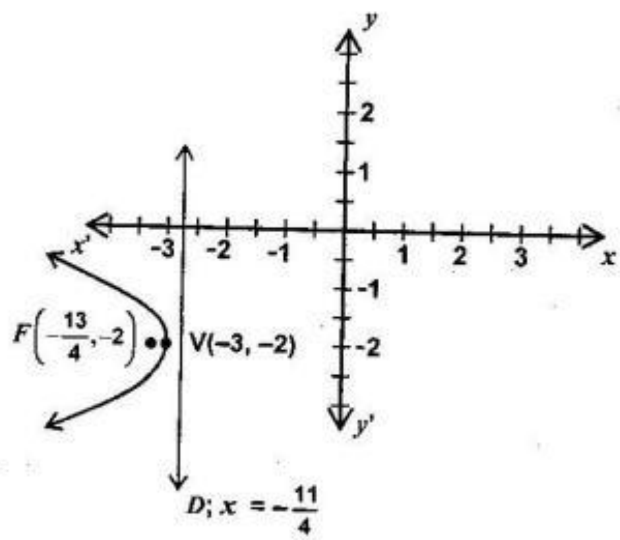
n)



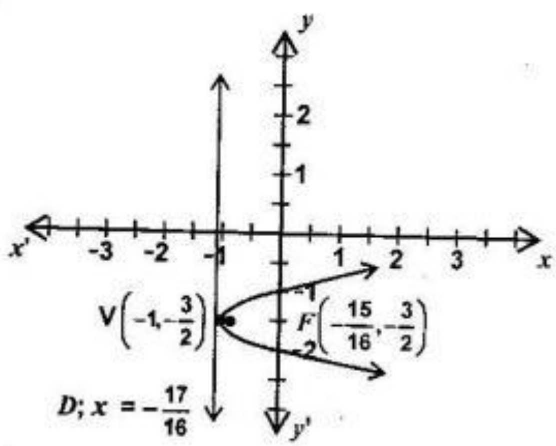
o)



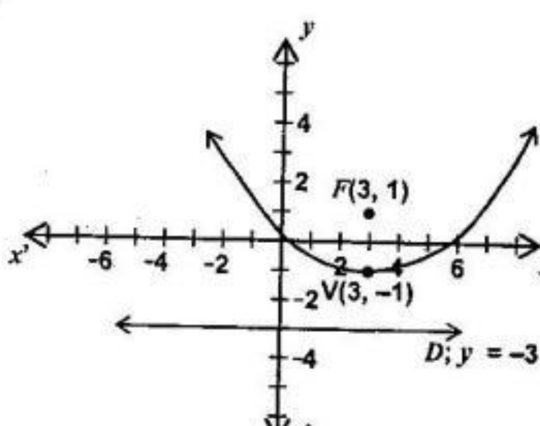
p)



q)



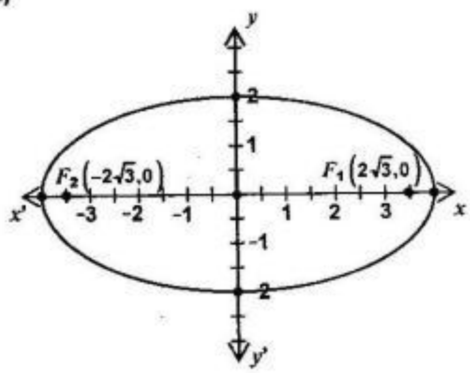
r)



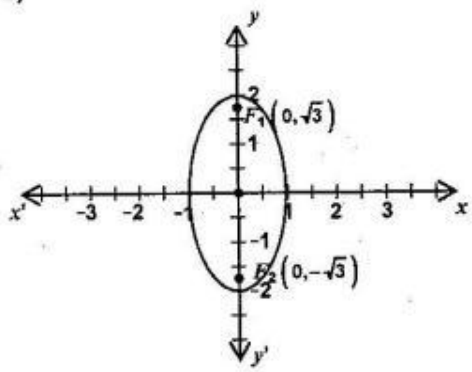
Ejercicios 6.3

1)

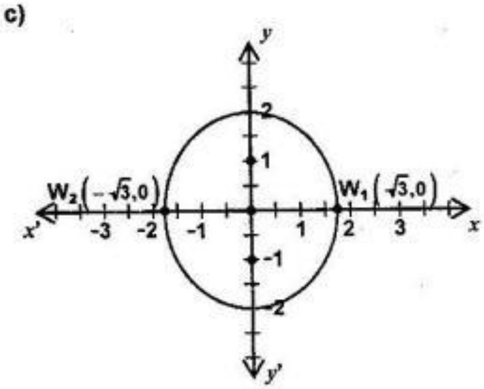
a)



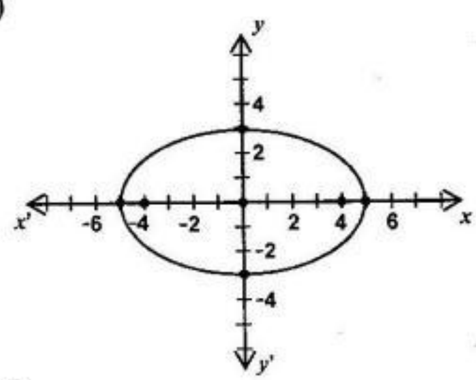
b)



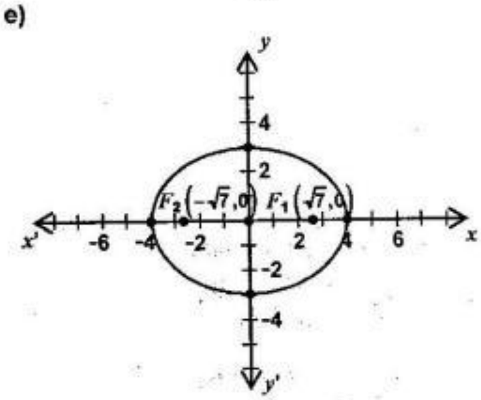
c)



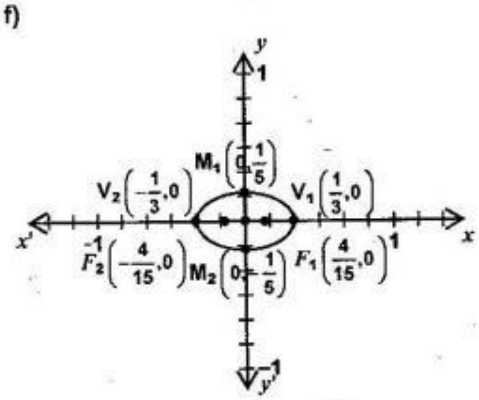
d)



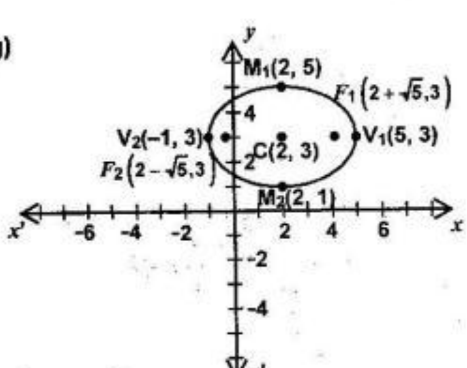
e)



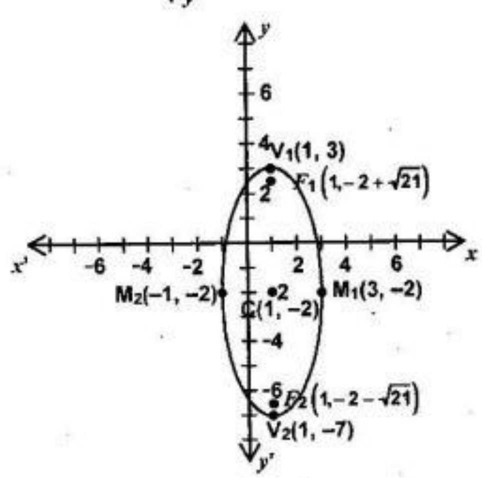
f)



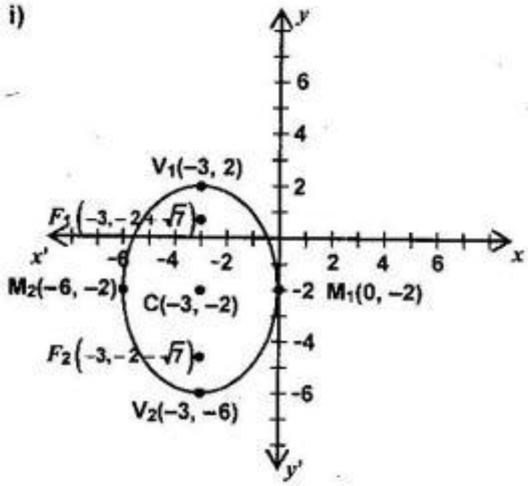
g)



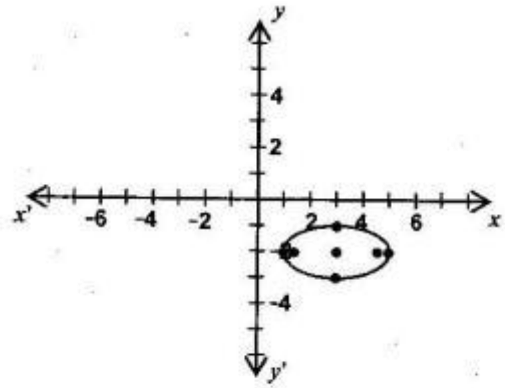
h)



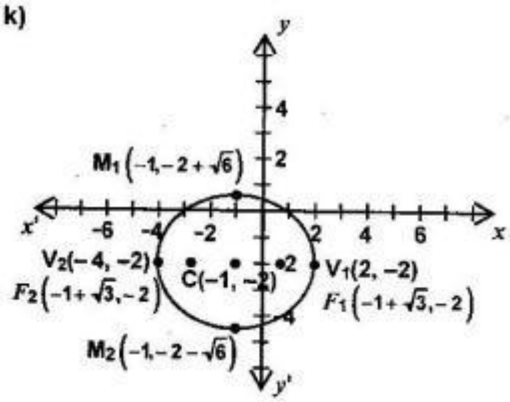
i)



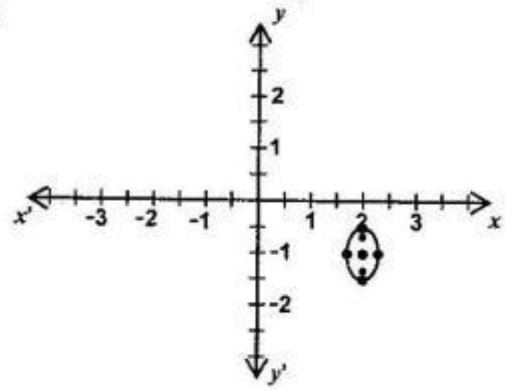
j)



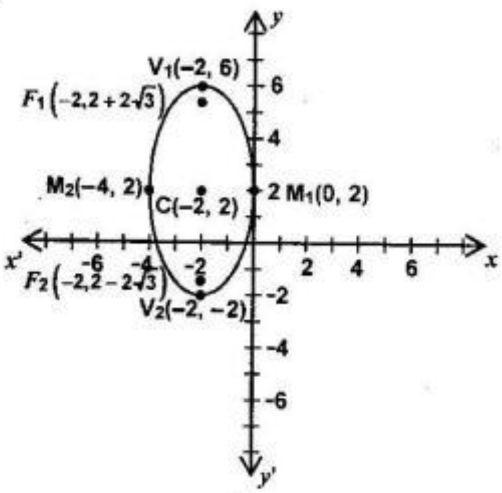
k)



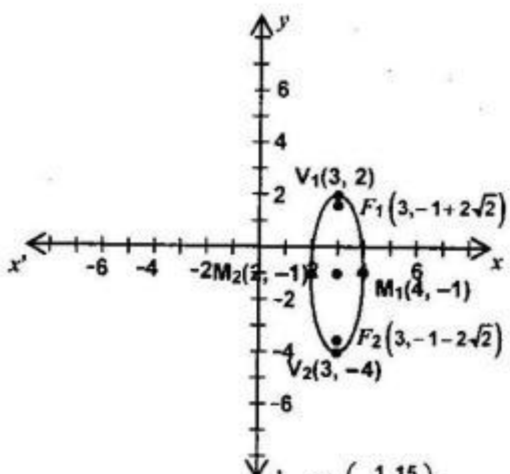
l)



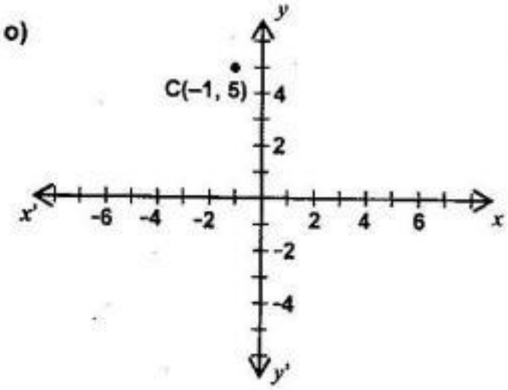
m)



n)

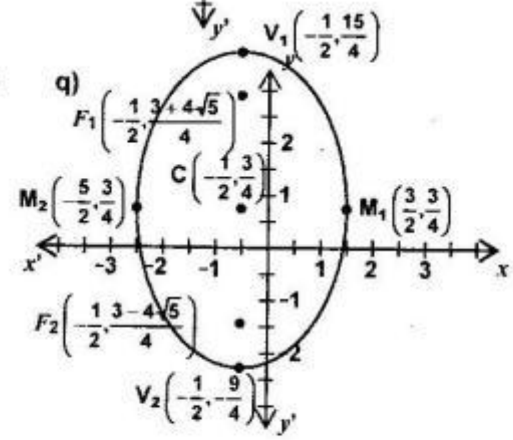


o)

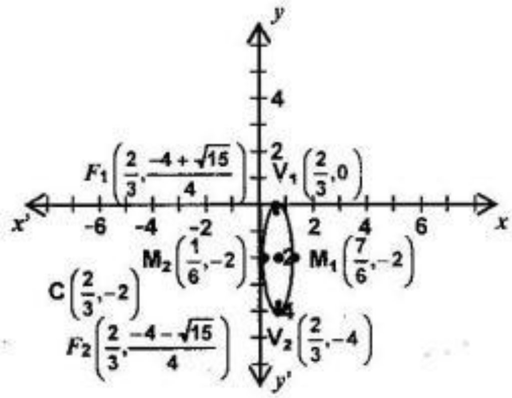


p) Elipse degenerada

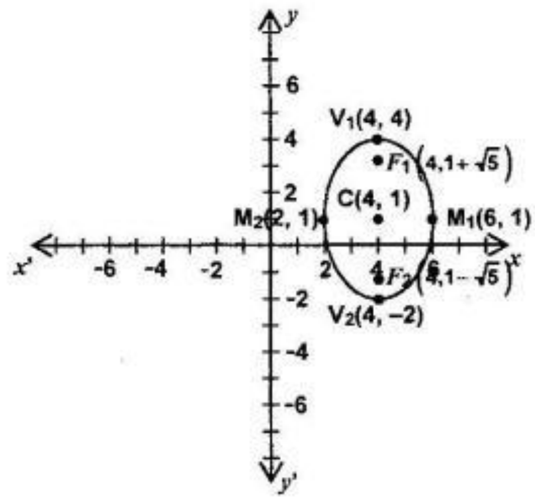
q)



r)



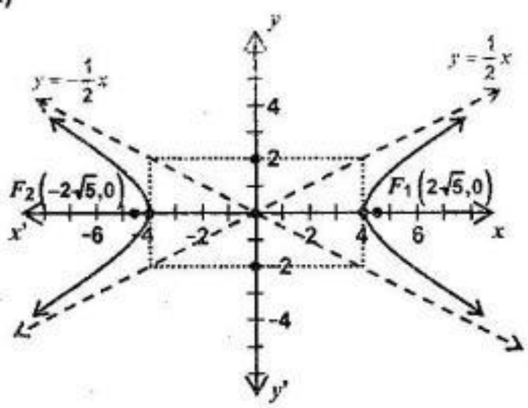
s)



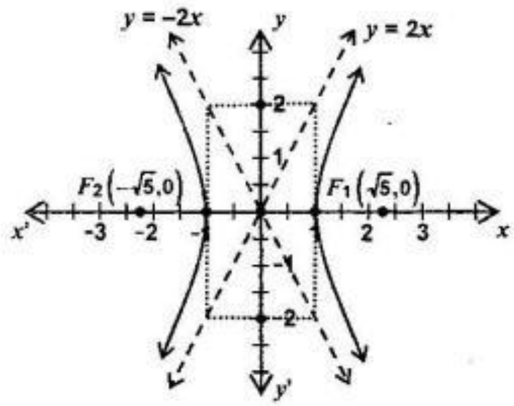
Ejercicios 6.4

1)

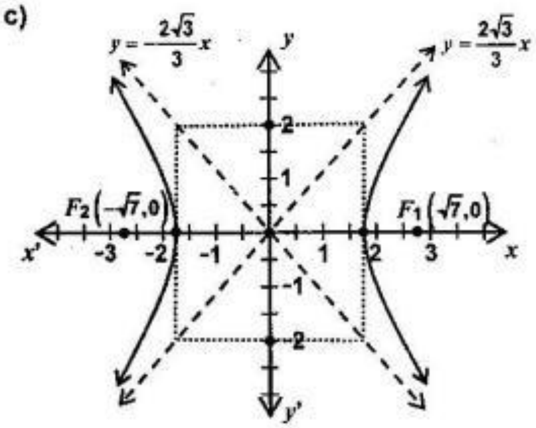
a)



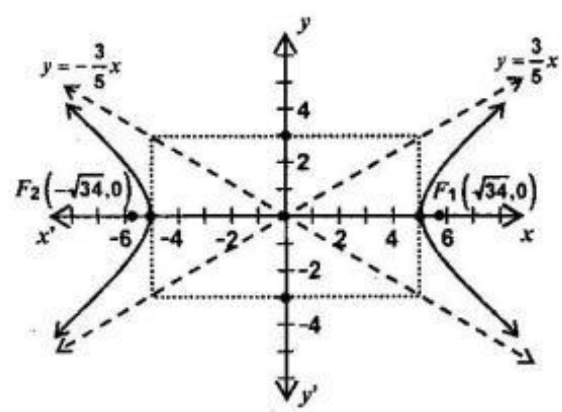
b)



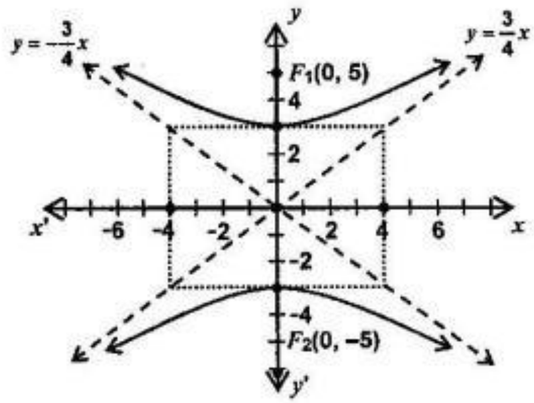
c)



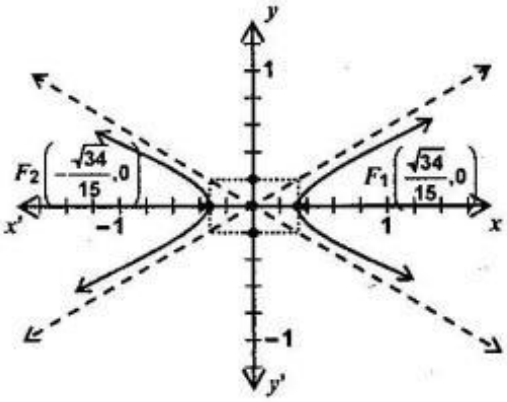
d)



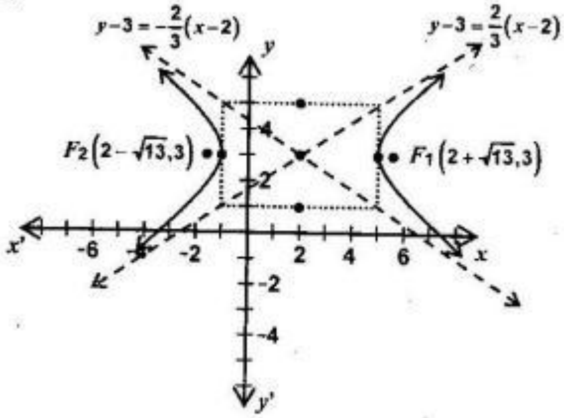
e)



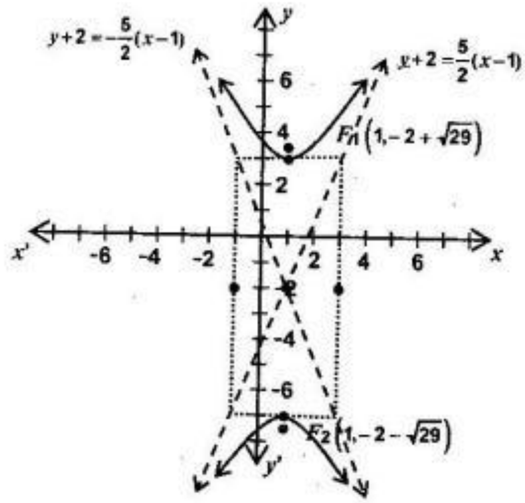
f)



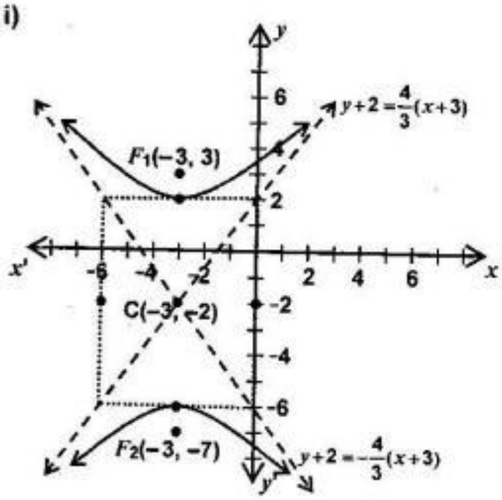
g)


$y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$
$y-3=\frac{2}{3}(x-2)$
$F_2\left(2-\sqrt{13},3\right)$
$F_1\left(2+\sqrt{13},3\right)$

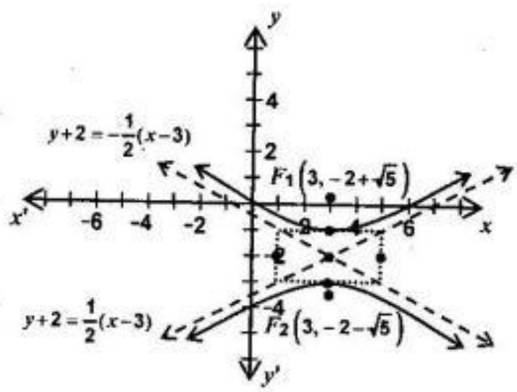
h)


$y+2=-\frac{5}{2}(x-1)$
$y+2=\frac{5}{2}(x-1)$
$F_1\left(1,-2+\sqrt{29}\right)$
$F_2\left(1,-2-\sqrt{29}\right)$

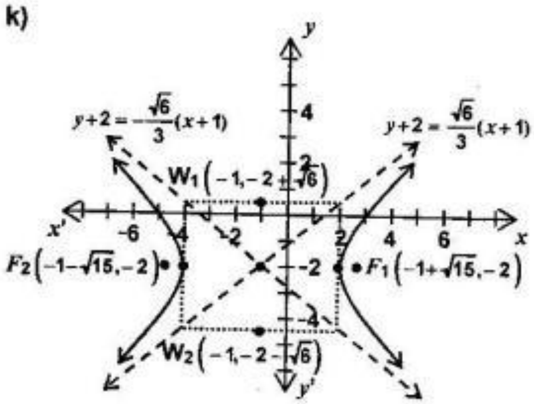
i)


$y+2=\frac{4}{3}(x+3)$
$F_1(-3, 3)$
C(−3, −2)
$F_2(-3, -7)$
$y+2=-\frac{4}{3}(x+3)$

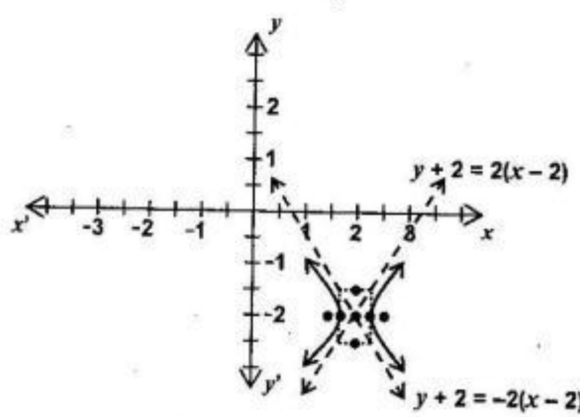
j)


$y+2=-\frac{1}{2}(x-3)$
$F_1\left(3,-2+\sqrt{5}\right)$
$y+2=\frac{1}{2}(x-3)$
$F_2\left(3,-2-\sqrt{5}\right)$

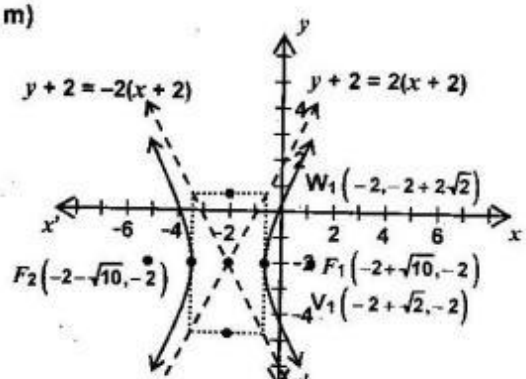
k)


$y+2=-\frac{\sqrt{6}}{3}(x+1)$
$y+2=\frac{\sqrt{6}}{3}(x+1)$
$W_1\left(-1,-2+\sqrt{6}\right)$
$F_2\left(-1-\sqrt{15},-2\right)$
$F_1\left(-1+\sqrt{15},-2\right)$
$W_2\left(-1,-2-\sqrt{6}\right)$

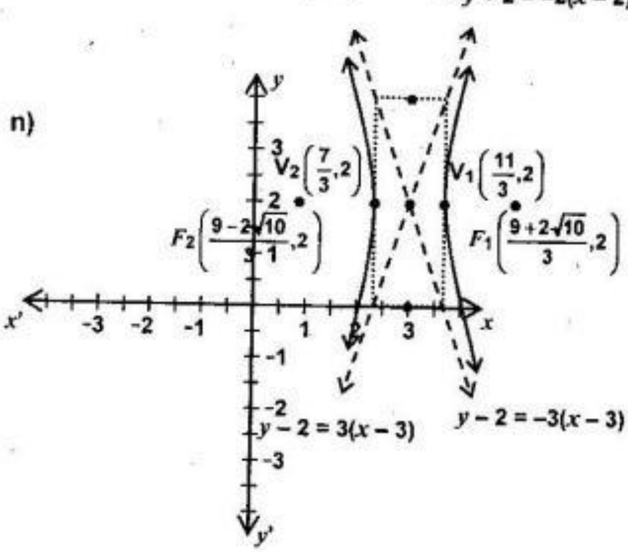
l)


$y+2=2(x-2)$
$y+2=-2(x-2)$

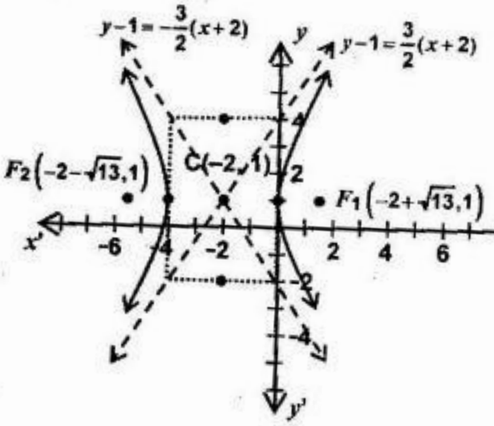
m)


$y+2=-2(x+2)$
$y+2=2(x+2)$
$W_1\left(-2,-2+2\sqrt{2}\right)$
$F_2\left(-2-\sqrt{10},-2\right)$
$F_1\left(-2+\sqrt{10},-2\right)$
$V_1\left(-2+\sqrt{2},-2\right)$

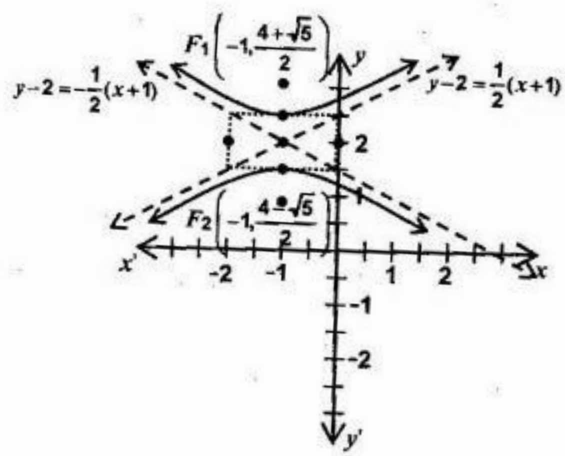
n)


$V_2\left(\frac{7}{3},2\right)$
$V_1\left(\frac{11}{3},2\right)$
$F_2\left(\frac{9-2\sqrt{10}}{3},2\right)$
$F_1\left(\frac{9+2\sqrt{10}}{3},2\right)$
$y-2=3(x-3)$
$y-2=-3(x-3)$

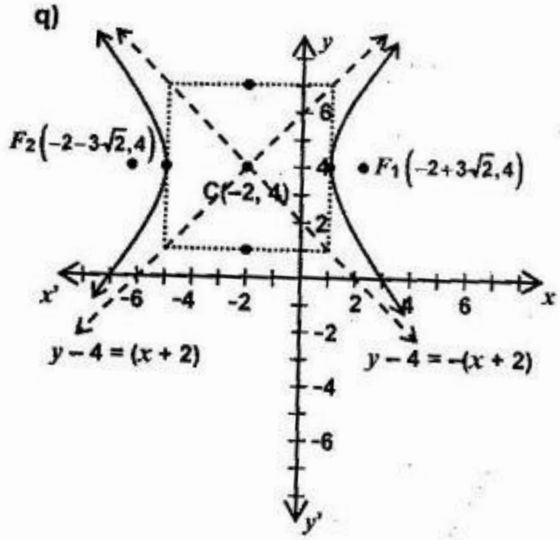
o)


$y-1=-\frac{3}{2}(x+2)$
$y-1=\frac{3}{2}(x+2)$
$F_2\left(-2-\sqrt{13},1\right)$
$C(-2,1)$
$F_1\left(-2+\sqrt{13},1\right)$
x'
x
y
y'

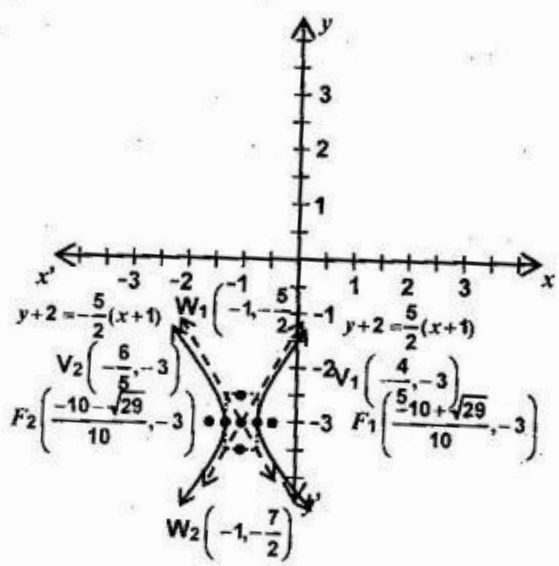
p)


$F_1\left(-1,\frac{4+\sqrt{5}}{2}\right)$
$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$
$y-2=\frac{1}{2}(x+1)$
$F_2\left(-1,\frac{4-\sqrt{5}}{2}\right)$
x'
x
y
y'

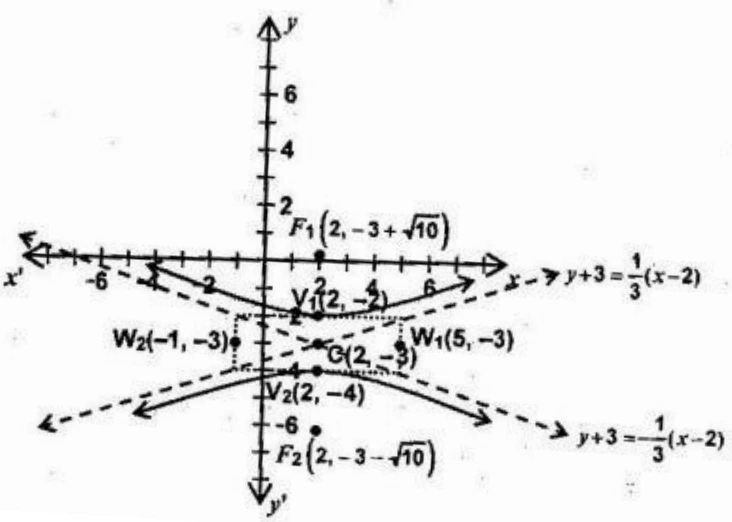
q)


$F_2\left(-2-3\sqrt{2},4\right)$
$F_1\left(-2+3\sqrt{2},4\right)$
$C(-2,4)$
$y-4=(x+2)$
$y-4=-(x+2)$
x'
x
y
y'

r)


$y+2=-\frac{5}{2}(x+1)$
$W_1\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$
$y+2=\frac{5}{2}(x+1)$
$V_2\left(-\frac{6}{5},-3\right)$
$V_1\left(-\frac{4}{5},-3\right)$
$F_2\left(\frac{-10-\sqrt{29}}{10},-3\right)$
$F_1\left(\frac{-10+\sqrt{29}}{10},-3\right)$
$W_2\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$
x'
x
y
y'

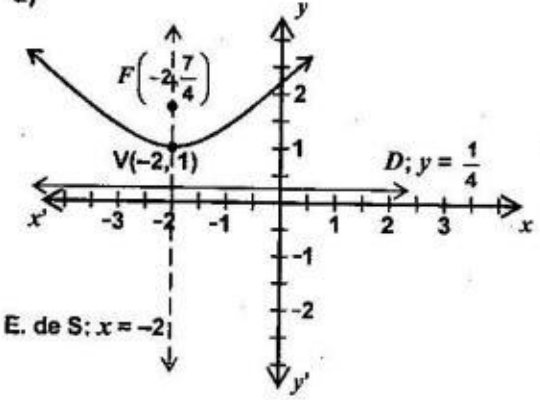
s)


$F_1\left(2,-3+\sqrt{10}\right)$
$y+3=\frac{1}{3}(x-2)$
$V_1(2,-2)$
$W_2(-1,-3)$
$W_1(5,-3)$
$C(2,-3)$
$V_2(2,-4)$
$y+3=-\frac{1}{3}(x-2)$
$F_2\left(2,-3-\sqrt{10}\right)$
x'
x
y
y'

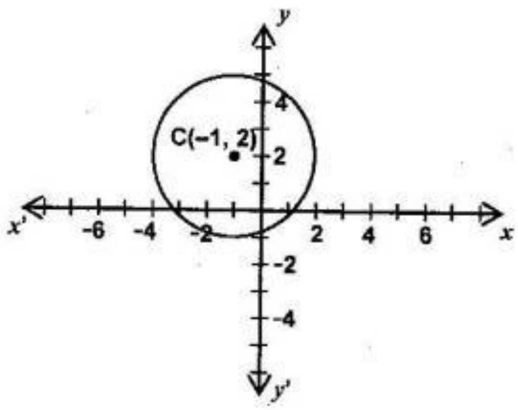
RESPUESTA DE LAS GRAFICAS DE LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO VI

1)

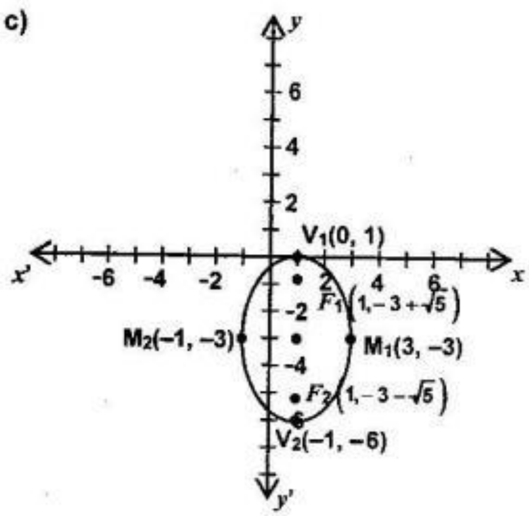
a)



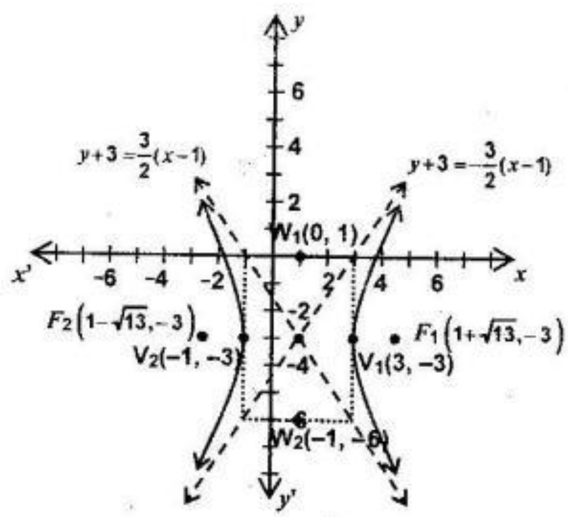
b)



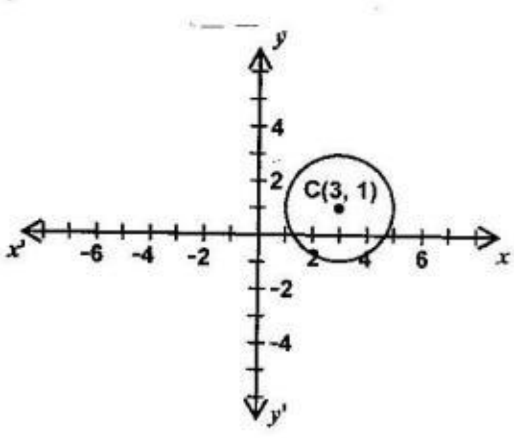
c)



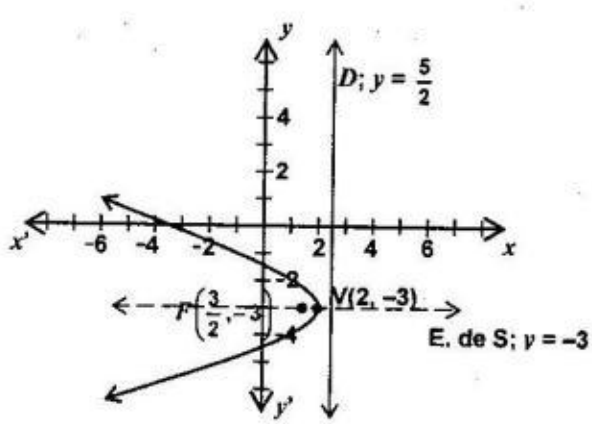
d)



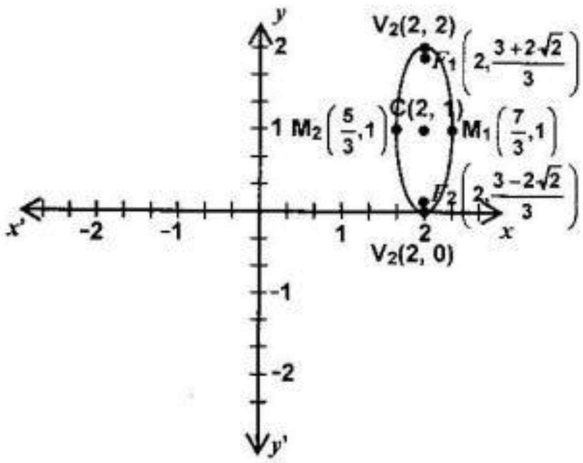
e)



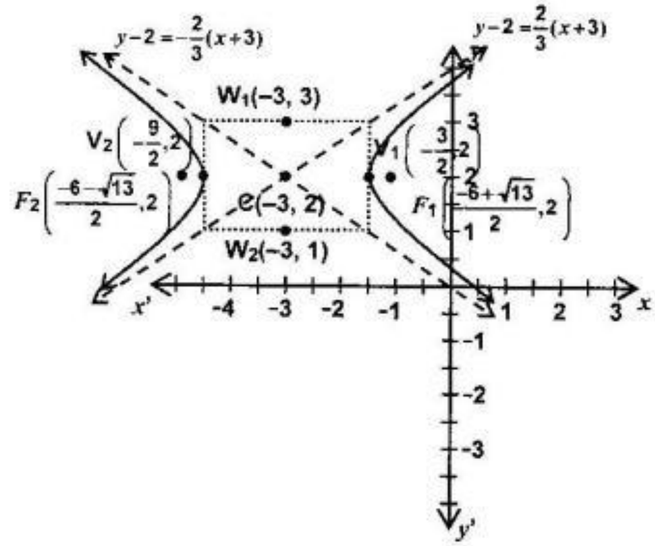
f)



g)

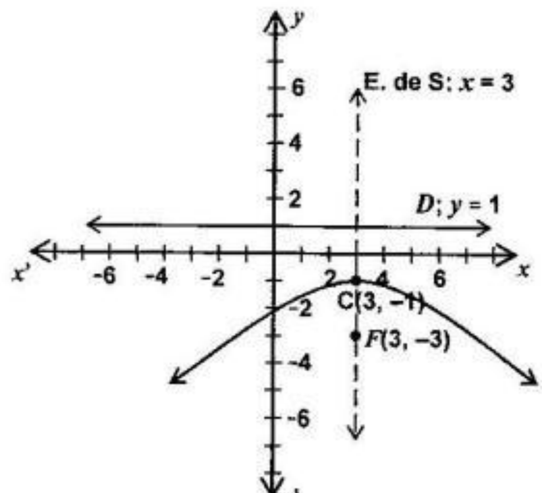


h)



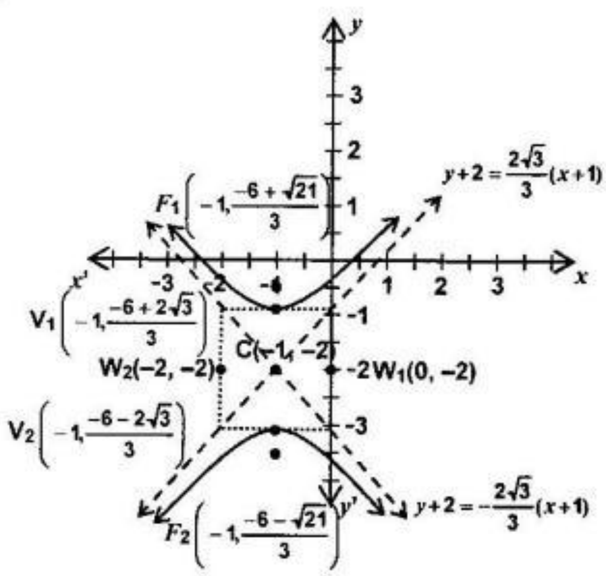
i) circunferencia degenerada

j)



k) elipse degenerada

l)



BIBLIOGRAFIA

[1]. LEITHOLD LOUIS **Matemáticas previas al cálculo**.
México; Tercera Edición; HARLA.

[2]. LEITHOLD LOUIS **El Cálculo**.
México; Séptima Edición; OXFORD. 1998.

[3]. JAMES STEWARD • LOTHAR REDLIN • SALEEM WATSON. **Precálculo**
México; Tercera Edición; Internacional THOMSON EDITORES. 2001.

[4]. MICHAEL SULLIVAN **Precálculo**.
México; Cuarta Edición; Prentice-Hall Hispanoamericana S. A. 1977.

[5]. RAYMOND A. BARNET •, MICHAEL R. ZIEGLER • KARL BYLEEN;
Precálculo: Funciones y Gráficas.
México; Cuarta Edición; Editorial "McGRAW-HILL; 1999.

[6]. SWOKOWSKI, EARL • COLE, JEFFERY. **Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica;** México; Décima Edición; THOMSON LEARNING. 2002.

Impreso en los talleres de
Editorial Guaymuras,
Tegucigalpa, Honduras,
en el mes de marzo de 2011.
Su tiraje es de 2000 ejemplares.